arXiv:2602.01321v1 [math.OC] 1 Feb 2026

诺伊曼边界反馈控制下带记忆项的黏性 Burgers 方程的全局稳定化与有限元分析

Shishu Pal Singh*和 Sudeep Kundu†

2026年2月3日

摘要

本文通过应用诺伊曼边界反馈控制律，给出了带记忆项的黏性 Burgers 方程的全局稳定化结果。我们利用控制李雅普诺夫泛函构造了合适的反馈控制输入，并证明了在L^2，H^1，和 H^2范数下的稳定化。通过 Faedo-Galerkin 方法证明了解的存在唯一性。此外，我们证明了当扩散系数ν 未知时的全局稳定化。随后，我们对空间变量采用 C^0协调有限元方法，同时保持时间变量连续。此外，利用 Ritz-Volterra投影，我们证明了半离散格式的全局稳定化，并获得了状态变量在 L^∞、 L^2和 H^1范数下的最优误差估计。此外，还建立了反馈控制律的误差估计。最后，我们给出了一些数值模拟，以验证理论结果。

关键词： 带记忆项的黏性 Burgers 方程、稳定化、李雅普诺夫泛函、边界反馈控制、有限元方法、误差分析。

MSC 分类（2020）： 93D15, 93B52, 35B37, 65M60, 65M15。

1 引言。

本文研究带记忆项的黏性 Burgers 方程的诺伊曼边界反馈控制输入

$$y_t(x,t) + y(x,t)y_x(x,t) - \nu y_{xx}(x,t) - \rho \int_0^t e^{-\delta(t-s)} y_{xx}(x,s)ds = 0 \quad (x,t) \in (0,1)\times(0,\infty), \tag{1.1}$$

$$y_x(0,t) = u_0(t) \quad t \in (0,\infty), \tag{1.2}$$

$$y_x(1,t) = u_1(t) \quad t \in (0,\infty), \tag{1.3}$$

$$y(x,0) = y_0(x) \quad x \in (0,1). \tag{1.4}$$

其中， ν、 ρ，和 δ 均为正常数； $u_0(t)$ 和 $u_1(t)$ 是边界反馈控制输入，$y_0(x)$ 是给定的初始数据。通过涉及扩散项 $y_{xx}(.,.)$ 和记忆核 $e^{-\delta t}$ 的线性时间卷积，将记忆项的影响纳入其中。

*拉吉夫·甘地石油技术研究所数学科学系。电子邮箱：shishups@rgipt.ac.in

†拉吉夫·甘地石油技术研究所数学科学系。电子邮箱：sudeep.kundu@rgipt.ac.in

对于 $\rho = 0$，模型 (1.1)-(1.4) 称为具有诺伊曼边界的黏性 Burgers 方程，它描述了多种物理现象，例如气体动力学、湍流、边界层问题和交通流问题 [3] 等。当 ρ 非零时，状态变量取决于系统的过去历史。此外，该记忆效应方程可用于模拟黏弹性行为[4], 、研究热传导 [13], 、双向非线性浅水波 [33], 、核反应堆动力学以及种群动力学 [35] 等。带记忆的抛物型方程是控制理论中的一个重要问题，吸引了众多研究者的关注。

在控制理论中，与黏性 Burgers 型方程稳定化相关的研究在过去几十年中一直在进行。局部稳定化结果见于 [5, 6, 14]和 [15]。在 [20],中，作者研究了黏性 Burgers 方程对 L^2范数意义下任意初始数据的存在唯一性。Krstic [16] 利用控制李雅普诺夫泛函建立了具有诺伊曼和狄利克雷边界控制的黏性 Burgers 方程的全局稳定化。此后，作者讨论了 H^1范数 [8] 中的稳定化以及经典解的适定性。在 [21, 30, 31], 中，利用分布式反馈控制输入和边界反馈控制输入，证明了黏性 Burgers 方程在自适应（其中 ν 未知）和非自适应（当 ν 已知时）两种情形下的稳定化结果。

最近的论文 [4] 给出了带记忆项的黏性 Burgers 方程在分布式反馈控制输入下的局部稳定化。带记忆的热方程在狄利克雷边界反馈控制下的稳定化在 [22, 25]中得到建立。在分布式反馈控制情形下，Sistla 等人 [32] 讨论了带记忆的热方程的所谓 ω稳定化。此外，一类带记忆的线性抛物型方程的稳定化在 [19] 中利用基于投影的反馈输入算子进行了分析，而与抛物型积分-微分方程（PID）相关的结果已在 [28]中给出。在 [9], 中，作者证明了带记忆的广义 Burgers-Huxley 方程可通过狄利克雷边界控制输入实现稳定化。

采用 C^0-协调有限元方法，在$L^\infty(L^\infty)$ $L^\infty(L^2)$，以及 $L^\infty(H^1)$-范数下，建立了黏性 Burgers 方程半离散格式的状态变量误差分析，其中时间变量保持连续。还证明了反馈控制律的超收敛结果。此外，无控制的 PID 方程相关结果也已得到充分研究。例如， [26], 采用空间方向上的有限元方法和时间方向上的后向欧拉方法，证明了具有弱奇异核时的误差分析。 [24] 采用 Galerkin 有限元方法，分析了一般 PID 方程半离散格式的最优误差估计。 H^1采用 H^1-Galerkin 混合有限元方法，讨论了具有正核的演化方程数值解的误差。此外， [27] 和 [12],分别采用有限差分方法和三次样条配置法求解了 PID 方程。

本文主要有两个目标。首先，建立带记忆项的黏性 Burgers 方程在诺伊曼边界反馈控制律作用下的全局稳定化结果。其次，采用有限元方法推导状态变量和反馈控制律的误差估计。本文找到了能够使带记忆项的黏性 Burgers 方程实现全局渐近稳定性的边界反馈控制律。此外，对该方程采用 C^0 协调有限元方法并保持时间变量连续，讨论了状态变量和控制输入的误差分析。

本文的主要贡献如下:

- 首先，我们利用控制李雅普诺夫泛函推导边界反馈控制输入。借助 Faedo-Galerkin 方法，我们证明反馈控制问题 (1.8)-(1.13) 的存在唯一性。通过应用边界反馈控制输入，我们讨论状态变量在 $L^2, H^1,$ 和 H^2-范数下的全局稳定化及其指数界。

此外，我们还建立了状态变量的一些正则性估计。

• 当扩散系数 ν 未知时，我们采用 Lyapunov 方法分析自适应反馈控制输入，并确定两个端点处的辨识参数。

• 对空间变量采用 C^0-协调有限元方法，同时保持时间变量连续，并证明半离散格式的全局稳定性。我们利用 Ritz-Volterra投影，对状态变量和控制输入建立相应的误差分析。此外，还在 L^∞，L^2，和 H^1-范数下分析了状态变量的误差。

• 最后，我们给出一些数值算例，以展示记忆项及其他参数的影响。

本文使用以下记号：
空间 $L^p((0,T);X)$ 由所有强可测函数 $f:[0,T]\to X$ 构成，并配备范数

$$\|f\|_{L^p((0,T);X)} := \begin{cases} \left(\int_0^T \|f\|_X^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}(\|f(t)\|_X) < \infty, & p = \infty, \end{cases}$$

其中，X 表示带有范数 $||.||_X$ 的巴拿赫空间。记 $(.,.)$ 为 L^2 内积，其对应范数记为 $\|\cdot\|$。为方便起见，我们将 $L^p((0,T);X)$ 写作 $L^p(X)$。此外，将 $H^m(0,1)$ 记为标准索伯列夫空间，其范数为 $\|\cdot\|_m$。

• **格¨朗沃尔不等式[17]：** 设 $A(t)$ 是定义在$[0,\infty)$上的非负绝对连续函数，且对几乎处处的 t 满足微分不等式

$$\frac{d}{dt}A(t) + B(t) \le C(t) + K(t)A(t),$$

其中 B，C，以及 K均为定义在 $[0,\infty)$上的非负局部可积函数。于是

$$0 \le A(t) + \int_0^t B(s)ds \le \Big(A(0) + \int_0^t C(s)ds\Big)\exp\big(\int_0^t K(s)ds\big), \forall t > 0.$$

• **庞加莱-维尔廷格不等式[17]：** 对于 $f \in H^1(0,1)$，有

$$\|f\|^2 \le 2\|f_x\|^2 + f^2(i), \quad i = 0, 1,$$

and

$$\|f\|_\infty \le \sqrt{2}\,|||f|||,$$

其中 $|||f||| := \sqrt{\|f_x\|^2 + f^2(0) + f^2(1)}$，这等价于 H^1-范数。

• **杨氏不等式：** 对于所有 a，$b > 0$ 和 $\epsilon > 0$，我们有

$$ab \le \frac{\epsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\epsilon}b^2.$$

该稳　闭环系统 (1.1)-(1.4) 的稳态问题是求出 y^∞，使得　　t

$$-\left(\nu+\frac{\rho}{\delta}\right)y_{xx}^\infty+y^\infty y_x^\infty=0, \tag{1.5}$$

$$y_x^\infty(0)=y_x^\infty(1)=0. \tag{1.6}$$

稳态问题 (1.5)- (1.6) 等价于具有诺伊曼边界的黏性 Burgers 方程的稳态。因此，问题 (1.5)- (1.6) 的稳态解为任意常数（例如 w_d）。更多详情请参见 [1, 2, 6]。

不失一般性，我们假设 $w_d\geq 0$。我们的目标是

$$\lim_{t\to\infty}y(x,t)=w_d\quad\forall\ x\in[0,1].$$

因此，只需围绕 $w=0$ 进行稳定化，其中我们考虑 $w=y-w_d$，使得 $w=0$，当 $t\to\infty$ 时。引入一个新变量，将系统 (1.1)-(1.4) 写成便于求取反馈控制律的耦合形式

$$z(x,t):=\int_0^t e^{-\delta(t-s)}w_x(x,s)ds. \tag{1.7}$$

由 (1.1)-(1.4) 和 (1.5)-(1.6)，对 (1.7) 关于时间求导后，可将系统写成如下形式

$$w_t(x,t)-\nu w_{xx}(x,t)+w(x,t)w_x(x,t)+w_dw_x(x,t)=\rho z_x(x,t)\quad(x,t)\in(0,1)\times(0,\infty), \tag{1.8}$$

$$z_t(x,\ t)+\delta z(x,\ t)=w_x(x,\ t)\quad(x,\ t)\in(0,\ 1)\times(0,\ \infty), \tag{1.9}$$

$$w_x(0,t)=v_0(t)\quad t\in(0,\infty), \tag{1.10}$$

$$w_x(1,t)=v_1(t)\quad t\in(0,\infty), \tag{1.11}$$

$$w(x,0)=y_0(x)-w_d=:w_0(x)\text{（比如说）},x\in(0,\ 1), \tag{1.12}$$

$$z(x,0)=0,\quad x\in[0,1]. \tag{1.13}$$

为了求出反馈控制律，我们考虑如下控制李雅普诺夫泛函

$$V:=\frac{1}{2}\int_0^1\big(w^2(x,t)+\rho z^2(x,t)\big)dx.$$

关于时间求导，我们得到

$$\frac{dV}{dt}=\int_0^1 w(x,t)w_t(x,t)dx+\rho\int_0^1 z(x,t)z_t(x,t)dx.$$

因此，由(1.8)和(1.9)可得

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}=&\int_0^1 w(x,t)\Big(\rho z_x(x,t)+\nu w_{xx}(x,t)-w(x,t)w_x(x,t)-w_dw_x(x,t)\Big)dx\\&+\rho\int_0^1 z(x,t)(w_x(x,t)-\delta z(x,t))dx.\end{aligned}$$

利用分部积分可得

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}=&\rho w(1,t)z(1,t)-\rho w(0,t)z(0,t)-\rho\int_0^1 w_x(x,t)z(x,t)dx+\nu w(1,t)w_x(1,t)-\nu w(0,t)w_x(0,t)\\&-\nu\int_0^1 w_x^2(x,t)dx-\frac{1}{3}\Big(w^3(1,t)-w^3(0,t)\Big)\\&-\frac{w_d}{2}\Big(w^2(1,t)-w^2(0,t)\Big)+\rho\int_0^1 z(x,t)w_x(x,t)dx-\rho\delta\int_0^1 z^2(x,t)dx.\end{aligned} \tag{1.14}$$

应用柯西-施瓦茨不等式和杨氏不等式可得

$$\frac{1}{3}w^3(0,t) \le \frac{c_0}{2}w^2(0,t) + \frac{1}{18c_0}w^4(0,t),$$
$$-\frac{1}{3}w^3(1,t) \le \frac{c_1}{2}w^2(1,t) + \frac{1}{18c_1}w^4(1,t).$$

将这些不等式代入（1.14），得到

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} \le\ & w(1,t)\bigg(\nu w_x(1,t) + (c_1+w_d)w(1,t) + \frac{2}{9c_1}w^3(1,t) + \rho z(1,t)\bigg) - \frac{3w_d}{2}w^2(1,t) - \frac{c_1}{2}w^2(1,t)\\ & - \frac{1}{6c_1}w^4(1,t) - w(0,t)\bigg(\nu w_x(0,t) - (c_0+w_d)w(0,t) - \frac{2}{9c_0}w^3(0,t) + \rho z(0,t)\bigg) - \frac{1}{6c_0}w^4(0,t)\\ & - \frac{w_d}{2}w^2(0,t) - \frac{c_0}{2}w^2(0,t) - \nu\left\|w_x\right\|^2 - \rho\delta\left\|z\right\|^2.\end{aligned}$$

我们选取如下形式的反馈控制律

$$v_0(t) = \frac{1}{\nu}\bigg((c_0+w_d)w(0,t) + \frac{2}{9c_0}w^3(0,t) - \rho z(0,t)\bigg), \tag{1.15}$$

$$v_1(t) = -\frac{1}{\nu}\bigg((c_1+w_d)w(1,t) + \frac{2}{9c_1}w^3(1,t) + \rho z(1,t)\bigg), \tag{1.16}$$

因此，我们得到

$$\frac{dV}{dt} \le -\nu\left\|w_x\right\|^2 - \rho\delta\left\|z\right\|^2 - \frac{w_d}{2}w^2(0,t) - \frac{c_0}{2}w^2(0,t) - \frac{3w_d}{2}w^2(1,t) - \frac{c_1}{2}w^2(1,t).$$

因此，我们可以写成

$$\frac{dV}{dt} \le -\min\Big(\nu,\delta,\frac{(w_d+c_0)}{2},\frac{(3w_d+c_1)}{2}\Big)\Big(\left\|w\right\|^2 + \rho\left\|z\right\|^2\Big) = -2\min\Big(\nu,\delta,\frac{(w_d+c_0)}{2},\frac{(3w_d+c_1)}{2}\Big)V,$$

其中 $\nu, w_d, c_0, \delta,$ 和 c_1 均为正常数。

系统（1.8）-（1.13）的弱形式是求取 $w \in H^1(0,1)$，使得 t

$$\begin{aligned}&(w_t,\phi) + \nu(w_x,\phi_x) + w_d(w_x,\phi) + (ww_x,\phi) + \bigg((c_0+w_d)w(0,t) + \frac{2}{9c_0}w^3(0,t) - \rho z(0,t)\bigg)\phi(0)\\ &+ \bigg((c_1+w_d)w(1,t) + \frac{2}{9c_1}w^3(1,t) + \rho z(1,t)\bigg)\phi(1) = \rho(z_x,\phi), \quad \forall\ \phi \in H^1,\end{aligned} \tag{1.17}$$

and

$$z_t + \delta z = w_x, \tag{1.18}$$

其中 $w(x,0) = w_0(x)$ 且 $z(x,0) = 0.$

我们将系统 (1.17)-(1.18) 写成等价形式

$$\begin{aligned}(w_t,\phi) + \nu(w_x,\phi_x) + w_d(w_x,\phi) + (ww_x,\phi) + \bigg((c_0+w_d)w(0,t) + \frac{2}{9c_0}w^3(0,t)\bigg)\phi(0)\\ + \bigg((c_1+w_d)w(1,t) + \frac{2}{9c_1}w^3(1,t)\bigg)\phi(1) + \rho(z,\phi_x) = 0, \quad \forall\ \phi \in H^1,\end{aligned} \tag{1.19}$$

其中 z 由式 (1.7) 给出。

在全文中，我们假定 C 是一个一般正常数。

我们考虑如下假设，该假设在状态变量稳定化的证明中是必需的。

(A1.) 在 $t=0$、 $w_{0x}(0)=v_0(0)$ $w_{0x}(1)=v_1(0)$ $w_{0xt}(0)=v_{0t}(0)$以及$w_{0xt}(1)=v_{1t}(0)$处的相容条件，其中 $w_0 \in H^3(0,1)$。

此外，我们假设如下正则性结果，其在第3节中予以证明。**(A2.)** 设 $w_0 \in H^3(0,1)$。

则存在唯一弱解 w，使得

$$\|w\|_2^2+\|w_t\|_1^2+\|z\|^2+\int_0^t\Big(\|\|w(s)\|\|^2+\|w_t(s)\|_2^2+\|z(s)\|^2\Big)ds\le C\|w_0\|_3^2.$$

本文其余部分组织如下。第2节包含问题(1.8)-(1.13)的稳定化以及若干正则性结果。此外，该节给出状态变量在 H^2范数下的稳定化。进而，我们讨论扩散系数未知时的自适应反馈控制。第3节证明问题(1.8)-(1.13)的存在唯一性。在第4节中，我们讨论一种 C^0协调有限元方法，并证明半离散格式的全局稳定化。此外，建立了半离散格式关于状态变量和控制输入的误差分析。第5节 devoted 于若干数值算例。最后，第6节给出结束语。

2 稳定化。

本节将使用反馈控制律（1.15）和（1.16），在 $L^2, H^1,$ 和 H^2-范数下，研究闭环系统（1.8）-（1.13）的稳定化。此外，我们还将建立一些正则性结果，这些结果对于状态变量和控制输入的误差分析证明是必要的。

引理2.1。 设假设$(A1)$ 和$(A2)$ 成立。则存在 $0\le\alpha\le\frac{1}{2}\min\{\nu,\delta,c_0+w_d,c_1+w_d\}$ 使得–

$$\begin{aligned}\left\|e^{\alpha t}w\right\|^2+\rho\left\|e^{\alpha t}z\right\|^2+\beta\int_0^t e^{2\alpha s}\left(\|w_x(s)\|^2+\rho\|z(s)\|^2+w^2(0,s)+w^2(1,s)\right)ds\\+\frac{1}{3c_0}\int_0^t e^{2\alpha s}w^4(0,s)ds+\frac{1}{3c_1}\int_0^t e^{2\alpha s}w^4(1,s)ds\le\|w_0\|^2,\end{aligned}$$

其中 $0<\beta=\min\{(\nu-2\alpha),(\delta-2\alpha),(c_0+w_d-2\alpha),(c_1+w_d-2\alpha)\}$.

证明。 在 (1.17) 中令 $\phi=w$，并对 (1.18) 与 z 取 L^2-内积，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2+\nu\|w_x\|^2+\frac{w_d}{2}\left(w^2(1,t)-w^2(0,t)\right)+\frac{1}{3}\left(w^3(1,t)-w^3(0,t)\right)\\&\quad+(c_0+w_d)w^2(0,t)+\frac{2}{9c_0}w^4(0,t)-\rho z(0,t)w(0,t)+\rho z(1,t)w(1,t)\\&\quad+(c_1+w_d)w^2(1,t)+\frac{2}{9c_1}w^4(1,t)=\rho(z_x,w),\end{aligned}\tag{2.1}$$

and

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z\|^2+\delta\|z\|^2=(w_x,z).\tag{2.2}$$

对 (2.2) 的右端进行分部积分，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z\|^2+\delta\|z\|^2=(z(1,t)w(1)-z(0,t)w(0))-(z_x,w). \tag{2.3}$$

将 (z_x,w) 的值代入 (2.1)，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|w\|^2+\rho\|z\|^2\right)&+\nu\|w_x\|^2+\rho\delta\|z\|^2+\frac{w_d}{2}\left(w^2(1,t)-w^2(0,t)\right)\\&+(c_0+w_d)w^2(0,t)+\frac{2}{9c_0}w^4(0,t)+(c_1+w_d)w^2(1,t)+\frac{2}{9c_1}w^4(1,t)\\&=-\frac{1}{3}\left(w^3(1,t)-w^3(0,t)\right).\end{aligned} \tag{2.4}$$

对 (2.4) 的右端应用柯西-施瓦茨不等式和杨氏不等式，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}w^3(0,t)&\le\frac{c_0}{2}w^2(0,t)+\frac{1}{18c_0}w^4(0,t),\\\frac{1}{3}w^3(1,t)&\le\frac{c_1}{2}w^2(1,t)+\frac{1}{18c_1}w^4(1,t).\end{aligned}$$

将这些值代入 (2.4)，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|w\|^2+\rho\|z\|^2\right)&+\nu\|w_x\|^2+\rho\delta\|z\|^2+\frac{1}{2}\left((c_0+w_d)w^2(0,t)+\frac{1}{3c_0}w^4(0,t)\right)\\&+\frac{1}{2}\left((c_1+3w_d)w^2(1,t)+\frac{1}{3c_1}w^4(1,t)\right)\le 0.\end{aligned}$$

将上述方程乘以 $2e^{2\alpha t}$，可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\left\|e^{\alpha t}w\right\|^2+\rho\left\|e^{\alpha t}z\right\|^2\right)&-2\alpha e^{2\alpha t}\left(\|w\|^2+\rho\|z\|^2\right)+2e^{2\alpha t}\nu\|w_x\|^2\\&+2\rho\delta e^{2\alpha t}\|z\|^2+e^{2\alpha t}\left((c_0+w_d)w^2(0,t)+\frac{1}{3c_0}w^4(0,t)\right)\\&+e^{2\alpha t}\left((c_1+3w_d)w^2(1,t)+\frac{1}{3c_1}w^4(1,t)\right)\le 0.\end{aligned} \tag{2.5}$$

在 (2.5) 中应用庞加莱-魏尔斯特拉斯不等式，得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\left\|e^{\alpha t}w\right\|^2+\rho\left\|e^{\alpha t}z\right\|^2\right)&+2(\nu-\alpha)e^{2\alpha t}\|w_x\|^2+2\rho(\delta-\alpha)e^{2\alpha t}\|z\|^2\\&+e^{2\alpha t}\left((c_0+w_d-2\alpha)w^2(0,t)+\frac{1}{3c_0}w^4(0,t)\right)\\&+e^{2\alpha t}\left((c_1+3w_d-2\alpha)w^2(1,t)+\frac{1}{3c_1}w^4(1,t)\right)\le 0.\end{aligned}$$

对时间 t 从 0 到 t 积分，得到

$$\begin{aligned}\left\|e^{\alpha t}w\right\|^2+\rho\left\|e^{\alpha t}z\right\|^2+\beta\int_0^t e^{2\alpha s}\left(\|w_x(s)\|^2+\rho\|z(s)\|^2+w^2(0,s)+w^2(1,s)\right)ds\\+\frac{1}{3c_0}\int_0^t e^{2\alpha s}w^4(0,s)ds+\frac{1}{3c_1}\int_0^t e^{2\alpha s}w^4(1,s)ds\le\|w_0\|^2,\end{aligned}$$

其中 $0<\beta=\min\{(\nu-2\alpha),\ (\delta-2\alpha),\ (c_0+w_d-2\alpha),\ (c_1+w_d-2\alpha)\}$，以及 $0<\bar{\alpha}\le\frac{1}{2}\min\{\nu,\delta,c_0+w_d,c_1+w_d\}$. □

下一个引理讨论状态变量在 H^1-范数下的稳定化 e.

引理2.2. 在假设$(A1)$ 和$(A2)$下，有

$$\frac{\nu}{2}\|w_x\|^2 + E(t) + e^{-2\alpha t}\int_0^t e^{2\alpha s}\|w_t(s)\|^2 ds \le Ce^{-2\alpha t}\|w_0\|_1^2 e^{C\|w_0\|^2},$$

其中

$$E(t) = \sum_{i=0}^{1}\Big((c_i + w_d)w^2(i,t) + \frac{1}{9c_i}w^4(i,t)\Big).$$

证明. 在（1.17）中取 $\phi = w_t$ ，得到

$$\begin{aligned}\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|w_x\|^2 + \|w_t\|^2 + \sum_{i=0}^{1}\Big((c_i + w_d)w(i,t)w_t(i,t) + \frac{2}{9c_i}w^3(i,t)w_t(i,t)\Big)\\ - \rho z(0,t)w_t(0,t) + \rho z(1,t)w_t(1,t) = -w_d(w_x, w_t) - (ww_x, w_t) + \rho(z_x, w_t).\end{aligned}$$

对右端最后一项进行分部积分，得到

$$\begin{aligned}\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|w_x\|^2 + \|w_t\|^2 + \sum_{i=0}^{1}\Big((c_i + w_d)w(i,t)w_t(i,t) + \frac{2}{9c_i}w^3(i,t)w_t(i,t)\Big)\\ = -w_d(w_x, w_t) - (ww_x, w_t) - \rho(z, w_{xt}).\end{aligned} \tag{2.6}$$

由于

$$-(z, w_{xt}) = -\delta(z, w_x) - \frac{d}{dt}(z, w_x) + \|w_x\|^2,$$

由（2.6），可得

$$\begin{aligned}\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|w_x\|^2 + \|w_t\|^2 + \sum_{i=0}^{1}\Big((c_i + w_d)w(i,t)w_t(i,t) + \frac{2}{9c_i}w^3(i,t)w_t(i,t)\Big)\\ = -w_d(w_x, w_t) - (ww_x, w_t) - \rho\delta(z, w_x) - \rho\frac{d}{dt}(z, w_x) + \rho\|w_x\|^2.\end{aligned}$$

利用柯西-施瓦茨不等式和杨氏不等式，我们推得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\nu\|w_x\|^2 + E(t)\Big) + \frac{1}{2}\|w_t\|^2 \le C\|w_x\|^2 + C\|z\|^2 + C\|w\|_\infty^2\|w_x\|^2 - \rho\frac{d}{dt}(z, w_x),$$

其中 $E(t) = \sum_{i=0}^{1}\Big((c_i + w_d)w^2(i,\ t) + \frac{1}{9c_i}w^4(i,\ t)\Big)$。

将上述不等式乘以 $2e^{2\alpha t}$ ，得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(\nu\|e^{\alpha t}w_x\|^2 + e^{2\alpha t}E(t)\Big) + e^{2\alpha t}\|w_t\|^2 \le Ce^{2\alpha t}\|w_x\|^2 + Ce^{2\alpha t}\|z\|^2 + Ce^{2\alpha t}\||w|\|^2\|w_x\|^2\\ - \rho\frac{d}{dt}\big(2e^{2\alpha t}(z, w_x)\big) + 2\alpha\rho e^{2\alpha t}(z, w_x)\\ + 2\alpha e^{2\alpha t}\Big(\nu\|w_x\|^2 + E(t)\Big).\end{aligned}$$

对时间在 $[0,t]$ 上积分，并利用引理2.1，得到

$$\nu\left\|e^{\alpha t}w_x\right\|^2+e^{2\alpha t}E(t)+\int_0^t e^{2\alpha s}\left\|w_t(s)\right\|^2ds\le C\left\|w_0\right\|_1^2+C\int_0^t e^{2\alpha s}\left\|\left|w(s)\right|\right\|^2\left\|w_x(s)\right\|^2ds \\ -\rho\big(2e^{2\alpha t}(z,w_x).$$

再次利用柯西-施瓦茨不等式和杨氏不等式，可得

$$\frac{\nu}{2}\left\|e^{\alpha t}w_x\right\|^2+e^{2\alpha t}E(t)+\int_0^t e^{2\alpha s}\left\|w_t(s)\right\|^2ds\le C\int_0^t e^{2\alpha s}\left\|\left|w(s)\right|\right\|^2\Big(\left\|w_x(s)\right\|^2+E(s)\Big)ds \\ +Ce^{2\alpha t}\left\|z\right\|^2+C\left\|w_0\right\|_1^2.$$

利用格朗沃尔不等式和引理2.1，可得

$$\frac{\nu}{2}\left\|e^{\alpha t}w_x\right\|^2+e^{2\alpha t}E(t)+\int_0^t e^{2\alpha s}\left\|w_t(s)\right\|^2ds\le C\left\|w_0\right\|_1^2e^{C\left\|w_0\right\|^2}.$$

两边乘以 $e^{-2\alpha t}$后，证明即告完成。 □

Lemma 2.3. 假设$(A1)$ 和$(A2)$成立，则有 s

$$\left\|w_x\right\|^2+\rho\left\|z_x\right\|^2+\frac{1}{\nu}E(t)+e^{-2\alpha t}\int_0^t e^{2\alpha s}\big(\nu\left\|w_{xx}(s)\right\|^2+\rho\delta\left\|z_x(s)\right\|^2\big)ds\le Ce^{-2\alpha t}\left\|w_0\right\|_1^2e^{C\left\|w_0\right\|_1^2}.$$

证明。 对(1.8)和 $-w_{xx}$取 L^2-内积，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|w_x\right\|^2+\nu\left\|w_{xx}\right\|^2-w_t(1,t)w_x(1,t)+w_t(0,t)w_x(0,t) \\ =(ww_x,w_{xx})+w_d(w_x,w_{xx})-\rho(z_x,w_{xx}). \tag{2.7}$$

对(1.9)关于 x 求导，并与 z_x 取 L^2-内积，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|z_x\right\|^2+\delta\left\|z_x\right\|=(z_x,w_{xx}). \tag{2.8}$$

此外，由式 (1.9) 可得

$$z(1,t)w_t(1,t)-z(0,t)w_t(0,t)=(z_x,w_t)+\delta(z,w_x)+\frac{d}{dt}(z,w_x)-\left\|w_x\right\|^2. \tag{2.9}$$

因此，由式 (2.7)、(2.8) 和 (2.9) 可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\left\|w_x\right\|^2+\rho\left\|z_x\right\|^2+\frac{1}{\nu}E(t)\Big)+\nu\left\|w_{xx}\right\|^2+\rho\delta\left\|z_x\right\|^2 \\ =\frac{\rho}{\nu}\left\|w_x\right\|^2-\frac{\rho}{\nu}\frac{d}{dt}(z,w_x)-\frac{\rho}{\nu}(z_x,w_t)-\frac{\rho\delta}{\nu}(z,w_x)+(ww_x,w_{xx})+w_d(w_x,w_{xx}).$$

注意,

$$(ww_x,w_{xx})\le C\left\|w_x\right\|^2\left\|w\right\|_1^2+\frac{\nu}{4}\left\|w_{xx}\right\|^2, \\ w_d(w_x,w_{xx})\le C\left\|w_x\right\|^2+\frac{\nu}{4}\left\|w_{xx}\right\|^2.$$

利用柯西-施瓦茨不等式和杨氏不等式，我们得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|w_x\|^2+\rho\|z_x\|^2+\frac{1}{\nu}E(t)\Big)+\frac{\nu}{2}\|w_{xx}\|^2+\frac{\rho\delta}{2}\|z_x\|^2 \\ \leq C\|w_x\|^2+C\|w_t\|^2+C\|z\|^2-\frac{\rho}{\nu}\frac{d}{dt}(z,w_x)+C\|w_x\|^2\|w\|_1^2.$$

将上式乘以 $2e^{2\alpha t}$ ，得到

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(\|e^{\alpha t}w_x\|^2+\rho\|e^{\alpha t}z_x\|^2+\frac{1}{\nu}e^{2\alpha t}E(t)\Big)+\nu e^{2\alpha t}\|w_{xx}\|^2+\rho\delta e^{2\alpha t}\|z_x\|^2\\ &\leq Ce^{2\alpha t}\|w_x\|^2+Ce^{2\alpha t}\|w_t\|^2+Ce^{2\alpha t}\|z\|^2-\frac{\rho}{\nu}\frac{d}{dt}\Big(e^{2\alpha t}(z,w_x)\Big)+\frac{2\alpha\rho}{\nu}e^{2\alpha t}(z,w_x)\\ &\quad+Ce^{2\alpha t}\|w\|_1^2\Big(\|w_x\|^2+\rho\|z_x\|^2+\frac{1}{\nu}E(t)\Big)\\ &\quad+2\alpha\Big(\|e^{2t}w_x\|^2+\rho\|e^{\alpha t}z_x\|^2+\frac{1}{\nu}e^{2\alpha t}E(t)\Big),\\ &\leq Ce^{2\alpha t}\|w_x\|^2+Ce^{2\alpha t}\|w_t\|^2+Ce^{2\alpha t}\|z\|^2-\frac{\rho}{\nu}\frac{d}{dt}\Big(e^{2\alpha t}(z,w_x)\Big)\\ &\quad+Ce^{2\alpha t}\|w\|_1^2\Big(\|w_x\|^2+\rho\|z_x\|^2+\frac{1}{\nu}E(t)\Big).\end{aligned}$$

积分关于时间在 $[0,t]$ 上积分，并利用引理 2.1-2.2，可得

$$\Big(\|e^{\alpha t}w_x\|^2+\rho\|e^{\alpha t}z_x\|^2+\frac{1}{\nu}e^{2\alpha t}E(t)\Big)+\int_0^t e^{2\alpha s}\big(\nu\|w_{xx}(s)\|^2+\rho\delta\|z_x(s)\|^2\big)ds \\ \leq C\|w_0\|_1^2-e^{2\alpha t}\frac{\rho}{\nu}(z,w_x)+C\int_0^t e^{2\alpha s}\|w(s)\|_1^2\Big(\|w_x(s)\|^2+\rho\|z_x(s)\|^2+\frac{1}{\nu}E(s)\Big)ds.$$

再次利用柯西-施瓦茨不等式、杨氏不等式和引理 2.1-2.2，并结合格朗沃尔不等式，可知

$$\|e^{\alpha t}w_x\|^2+\rho\|e^{\alpha t}z_x\|^2+\frac{1}{\nu}e^{2\alpha t}E(t)+\int_0^t e^{2\alpha s}\big(\nu\|w_{xx}(s)\|^2+\rho\delta\|z_x(s)\|^2\big)ds\leq C\|w_0\|_1^2e^{C\|w_0\|_1^2}.$$

乘以 $e^{-2\alpha t}$后，证明完成。 □

注 2.1. 由(1.9)可得

$$\|z_t\|^2\leq 2\delta\|z\|^2+2\|w_x\|^2.$$

利用引理 *2.1* 和引理 *2.2*，我们有

$$e^{2\alpha t}\|z_t\|^2\leq C\|w_0\|_1^2e^{C\|w_0\|_1^2}.$$

引理 2.4。 在假设 $(A1)$ 和 $(A2)$下，有如下结论

$$\|w_t\|^2+\rho\|z_t\|^2+e^{-2\alpha t}\int_0^t e^{2\alpha s}\Big(\nu\|w_{xt}(s)\|^2+2\rho\delta\|z_t(s)\|^2+E_1(s)\Big)ds \\ \leq C(\|w_0\|_1)\|w_0\|_2^2e^{-2\alpha t},$$

其中 $E_1(t)=\sum\limits_{i=0}^{1}\Big((c_i+w_d)w_t^2(i,t)+\underline{\overline{3c_i}}^4w_t^2(i,t)w^2(i,t)\Big)$。

证明。 对 (1.17) 关于时间 t 求导，并令 $\phi = w_t$，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_t\|^2 + \nu\|w_{xt}\|^2 + \frac{w_d}{2}\big(w_t^2(1,t) - w_t^2(0,t)\big) + \sum_{i=0}^{1}\Big((c_i + w_d)w_t^2(i,t) + \frac{2}{3c_i}w_t^2(i,t)w^2(i,t)\Big)$$
$$+ \rho z_t(1,t)w_t(1,t) - \rho z_t(0,t)w_t(0,t) = -(w_t w_x + w w_{xt}, w_t) + \rho(z_{xt}, w_t). \tag{2.10}$$

此外，对 (1.18) 关于时间求导，并与 z_t 作 L^2-内积，可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z_t\|^2 + \delta\|z_t\|^2 = w_t(1,t)z_t(1,t) - w_t(0,t)z_t(0,t) - (z_{xt}, w_t). \tag{2.11}$$

将 (2.11) 乘以 ρ 并利用 (2.10)，我们得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|w_t\|^2 + \rho\|z_t\|^2\Big) + \nu\|w_{xt}\|^2 + \rho\delta\|z_t\|^2 + \Big((c_0 + \frac{w_d}{2})w_t^2(0,t) + \frac{2}{3c_0}w_t^2(0,t)w^2(0,t)\Big)$$
$$+ \Big((c_1 + \frac{3w_d}{2})w_t^2(1,t) + \frac{2}{3c_1}w_t^2(1,t)w^2(1,t)\Big) = -(w_t w_x + w w_{xt}, w_t). \tag{2.12}$$

右端项估计为

$$\begin{aligned}
-(w_t w_x + w w_{xt}, w_t) &\le \|w_t\|_\infty \|w_x\| \|w_t\| + \|w\|_\infty \|w_{xt}\| \|w_t\|, \\
&\le (|w_t(0,t)| + \|w_{xt}\|)\|w_x\|\|w_t\| + C\|w\|_1\|w_{xt}\|\|w_t\|, \\
&\le \frac{c_0}{2}w_t^2(0,t) + \frac{\nu}{2}\|w_{xt}\|^2 + C\|w\|_1^2\|w_t\|^2.
\end{aligned}$$

由 (2.12) 可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|w_t\|^2 + \rho\|z_t\|^2\Big) + \frac{\nu}{2}\|w_{xt}\|^2 + \rho\delta\|z_t\|^2 + \frac{1}{2}\Big((c_0 + w_d)w_t^2(0,t) + \frac{4}{3c_0}w_t^2(0,t)w^2(0,t)\Big)$$
$$+ \frac{1}{2}\Big((c_1 + w_d)w_t^2(1,t) + \frac{4}{3c_1}w_t^2(1,t)w^2(1,t)\Big) \le C\|w\|_1^2\|w_t\|^2.$$

将上述不等式乘以 $2e^{2\alpha t}$，并对时间从 0 到 t 积分，然后结合引理 2.1-2.2 与注 2.1，我们得到

$$e^{2\alpha t}\|w_t\|^2 + \rho e^{2\alpha t}\|z_t\|^2 + \int_0^t e^{2\alpha s}\Big(\nu\|w_{xt}(s)\|^2 + 2\rho\delta\|z_t(s)\|^2 + E_1(s)\Big)ds$$
$$\le \|w_t(0)\|^2 + \rho\|z_t(0)\| + C\|w_0\|_1^2, \tag{2.13}$$

其中 $E_1(t) = \sum_{i=0}^{1}\Big((c_i + w_d)w_t^2(i,t) + \frac{4}{3c_i}w_t^2(i,t)w^2(i,t)\Big)$。

由 (1.8) 可知，

$$\|w_t\|^2 \le C(\|w_{xx}\|^2 + \|w_x\|^2 + \|z_x\|^2 + \|w\|_1^2\|w_x\|^2).$$

将 $t = 0$ 代入上述不等式，得到

$$\|w_t(0)\|^2 \le C(\|w_0\|_2^2 + \|w_0\|_1^4).$$

利用 (1.9)，可得

$$\|z_t(0)\|^2 \le 2\|w_0\|_1^2.$$

因此，将 $\|w_t(0)\|^2$ 的值代入并将所得不等式乘以 $e^{-2\alpha t}$ 后，证明即告完成。

□

引理 2.5。　在假设 $(A1)$ 和 $(A2)$下，存在一个正常数 C，使得

$$\|w_{xx}\|^2 \le C(\|w_0\|_1)e^{-2\alpha t}\|w_0\|_2^2 e^{C\|w_0\|^2}.$$

证明。 由 (1.8) 可得

$$\nu w_{xx}(x,t) = w_t(x,t) + w(x,t)w_x(x,t) + w_d w_x(x,t) - \rho z_x(x,t).$$

利用三角不等式可得

$$\nu\|w_{xx}\|^2 \le C(\|w_t\|^2 + \|w_x\|^2 + \|w\|_1^1\|w_x\|^2 + \|z_x\|^2).$$

利用引理 2.1、2.3 和 2.4，可得

$$\nu\|w_{xx}\|^2 \le Ce^{-2\alpha t}\big(\|w_0\|_2^2 + \|w_0\|_1^2\big)e^{C\|w_0\|^2}.$$

□

引理 2.6。 设假设 $(A1)$- $(A2)$ 成立。则存在正常数 C，使得

$$\|w_{xt}\|^2 + \rho\|z_{xt}\|^2 + \frac{2}{\nu}E_2(t) + 2\nu e^{-2\alpha t}\int_0^t e^{2\alpha s}\|w_{xxt}(s)\|^2 ds + 4\rho\delta e^{-2\alpha t}\int_0^t e^{2\alpha s}\|z_{xt}(s)\|^2 ds \le e^{-2\alpha t}C(\|w_0\|_1)\|w_0\|_3^2,$$

其中 $E_2(t) = \sum_{i=0}^{1}\Big((c_i + w_d)w_t^2(i,t) + \frac{2}{3c_i}w_t^2(i,t)w^2(i,t)\Big)$。

证明。 对 (1.8) 关于时间求导，然后与 $-w_{xxt}$ 作 L^2-内积，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_{xt}\|^2 + \nu\|w_{xxt}\|^2 + \frac{1}{\nu}\sum_{i=0}^{1}\Big((c_i + w_d)w_t(i,t)w_{tt}(i,t) + \frac{2}{3c_i}w^2(i,t)w_t(i,t)w_{tt}(i,t)\Big)&\\ + \frac{\rho}{\nu}z_t(1,t)w_{tt}(1,t) - \frac{\rho}{\nu}z_t(0,t)w_{tt}(0,t)&\\ = -\rho(z_{xt},\ w_{xxt}) + (w_t w_x + w w_{xt},\ w_{xxt}) + w_d(w_{xt},\ w_{xxt}).&\end{aligned} \tag{2.14}$$

对 (1.9) 分别关于 t 和 x 求导后，可写为

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z_{xt}\|^2 + \delta\|z_{xt}\|^2 = (z_{xt}, w_{xxt}), \tag{2.15}$$

and

$$\begin{aligned}z_t(1)w_{tt}(1,t) - z_t(0)w_{tt}(0,t) = \frac{d}{dt}(z_{tt}, z_t) - \|z_{tt}\|^2 + \delta(z_{tt}, z_t) + \frac{d}{dt}(w_t, z_{xt})&\\ - \delta^2(z_x, w_t) + \delta(w_t, w_{xx}) - (w_t, w_{xxt}).&\end{aligned} \tag{2.16}$$

将 (2.15) 乘以 ρ，由 (2.14) 和 (2.16) 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|w_{xt}\|^2 + \rho\|z_{xt}\|^2 + \frac{1}{\nu}E_2(t)\Big) + \nu\|w_{xxt}\|^2 + \rho\delta\|z_{xt}\|^2&\\ = \sum_{i=0}^{1}\frac{1}{3c_i\nu}\Big(w(i,t)w_t^3(i,t)\Big) + (w_t w_x + w w_{xt}, w_{xxt})&\\ + w_d(w_{xt}, w_{xxt}) - \frac{\rho}{\nu}\frac{d}{dt}(z_{tt}, z_t) + \frac{\rho}{\nu}\|z_{tt}\|^2 - \frac{\rho\delta}{\nu}(z_{tt}, z_t)&\\ - \frac{\rho}{\nu}\frac{d}{dt}(w_t, z_{xt}) + \frac{\rho\delta^2}{\nu}(z_x, w_t) - \frac{\rho\delta}{\nu}(w_t, w_{xx}) + \frac{\rho}{\nu}(w_t, w_{xxt}).&\end{aligned}$$

对上述方程应用杨氏不等式，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|w_{xt}\|^2+\rho\|z_{xt}\|^2+\frac{1}{\nu}E_2(t)\Big)+\frac{\nu}{2}\|w_{xxt}\|^2+\rho\delta\|z_{xt}\|^2\\ \le\sum_{i=0}^{1}\frac{1}{3c_i\nu}\Big(w^2(i,t)w_t^2(i,t)+w_t^4(i,t)\Big)+C\|w_{xt}\|^2\||w\||^2\\ +Cw_t^2(0,t)\|w_{xt}\|^2+C\|w_{xt}\|^2-\frac{\rho}{\nu}\frac{d}{dt}(z_{tt},z_t)-\frac{\rho}{\nu}\frac{d}{dt}(w_t,z_{xt})\\ +C\|z_{tt}\|^2+C\Big(\|z_t\|^2+\|w_t\|^2+\|w_{xx}\|^2+\|z_x\|^2\Big).\end{aligned}$$

将上述不等式乘以 $2e^{2\alpha t}$ ，并在 $[0,t]$上对时间积分，可得

$$\begin{aligned}&e^{2\alpha t}\Big(\|w_{xt}\|^2+\rho\|z_{xt}\|^2+\frac{1}{\nu}E_2(t)\Big)+\nu\int_0^t e^{2\alpha s}\|w_{xxt}(s)\|^2ds+2\rho\delta\int_0^t e^{2\alpha s}\|z_{xt}(s)\|^2ds\\ &\le 2\alpha\int_0^t e^{2\alpha s}\Big(\|w_{xt}(s)\|^2+\rho\|z_{xt}(s)\|^2+\frac{1}{\nu}E_2(s)\Big)ds+C\int_0^t e^{2\alpha s}\|w_{xt}(s)\|^2\||w(s)\||^2ds\\ &+\int_0^t e^{2\alpha s}\sum_{i=0}^{1}\frac{1}{3c_i\nu}\Big(w^2(i,s)w_t^2(i,s)+w_t^4(i,s)\Big)ds+C\int_0^t e^{2\alpha s}w_t^2(0,s)\|w_{xt}(s)\|^2ds\\ &+C\int_0^t e^{2\alpha s}\Big(\|w_{xt}(s)\|^2+\|z_{tt}(s)\|^2+\|z_t(s)\|^2+\|w_t(s)\|^2+\|w_{xx}(s)\|^2+\|z_x(s)\|^2\Big)ds\\ &-\frac{\rho e^{2\alpha t}}{\nu}(z_{tt},z_t)-\frac{\rho e^{2\alpha t}}{\nu}(w_t,z_{xt})+C\int_0^t e^{2\alpha s}\|z_{xt}(s)\|^2ds+\|w_{xt}(0)\|^2+\|z_{xt}(0)\|^2.\end{aligned}\tag{2.17}$$

注意

$$\|z_{tt}\|^2\le 2\delta^2\|z_t\|^2+2\|w_{xt}\|^2.$$

由（1.8）和（1.9），代入 $t=0$后可得

$$\|w_{xt}(0)\|^2+\|z_{xt}(0)\|^2\le C\Big(\|w_0\|_3^2+\|w_0\|_1^2\|w_0\|_2^2+\|w_0\|_1^2\Big).$$

利用柯西-施瓦茨不等式和杨氏不等式，由（2.17）可得

$$\begin{aligned}&e^{2\alpha t}\Big(\frac{1}{2}\|w_{xt}\|^2+\frac{\rho}{2}\|z_{xt}\|^2+\frac{1}{\nu}E_2(t)\Big)+\nu\int_0^t e^{2\alpha s}\|w_{xxt}(s)\|^2ds+2\rho\delta\int_0^t e^{2\alpha s}\|z_{xt}(s)\|^2ds\\ &\le C\int_0^t e^{2\alpha s}\Big(\|w_{xt}(s)\|^2+\rho\|z_{xt}(s)\|^2+\frac{1}{\nu}E_2(s)\Big)\Big(\||w(s)\||^2+w_t^2(0,s)+w_t^2(1,s)\Big)ds\\ &+C\int_0^t e^{2\alpha s}w_t^2(0,s)\|w_{xt}(s)\|^2ds+C\int_0^t e^{2\alpha s}\Big(\|w_{xt}(s)\|^2+\|z_t(s)\|^2+\|w_t(s)\|^2\Big)ds\\ &+C\int_0^t e^{2\alpha s}\Big(\|w_{xx}(s)\|^2+\|z_x(s)\|^2+\|z_{xt}(s)\|^2\Big)ds+C\Big(\|z_t\|^2+\|w_t\|^2\Big)\\ &+C\Big(\|w_0\|_3^2+\|w_0\|_1^2\|w_0\|_2^2\Big).\end{aligned}$$

乘以 $2e^{-2\alpha t}$后，借助格朗沃尔不等式和引理2.2–2.4，即完成证明。

□

下述定理的证明由引理2.1-2.6推得。

定理 2　　.1. 设假设$(A1)$- $(A2)$成立。则以下hol　　ds

$$\|w\|_2^2+\|w_t\|_1^2+\|z\|^2+E(t)+E_2(t)+e^{-2\alpha t}\int_0^t e^{2\alpha s}\Big(\|\|w(s)\|\|^2+\|w_t(s)\|_2^2+\|w(s)\|_2^2\Big)ds$$
$$+e^{-2\alpha t}\int_0^t e^{2\alpha s}\Big(\|z(s)\|^2+E_1(s)+w^4(1,s)+w^4(0,s)\Big)ds\le Ce^{-2\alpha t}\|w_0\|_3^2.$$

2.1 自适应控制器。

本节讨论扩散系数 ν 未知时，如何使用李雅普诺夫方法进行自适应反馈控制。在上一节中，针对已知的 ν实现了全局稳定化。黏性 Burgers 方程 ($\rho=0$) 的自适应反馈控制证明见 [21]。

我们考虑李雅普诺夫泛函

$$V=\|w\|^2+\rho\|z\|^2+\frac{\nu}{\gamma}(\eta_0-\frac{1}{2\nu})^2+\frac{\nu}{\gamma}(\eta_1-\frac{1}{2\nu})^2, \tag{2.18}$$

其中， γ 是正常数。此外， η_0 和 η_1 用作 $\frac{1}{2\nu}$的估计值。　　—

对 (2.18) 关于时间求导，得到

$$\dot V=2\int_0^1\big(ww_t+\rho zz_t\big)dx+\frac{2\nu}{\gamma}(\eta_0-\frac{1}{2\nu})\dot\eta_0+\frac{2\nu}{\gamma}(\eta_1-\frac{1}{2\nu})\dot\eta_1. \tag{2.19}$$

利用分部积分，由 (1.8)-(1.9) 可得

$$\dot V=2\nu w(1,t)w_x(1,t)-2\nu w(0,t)w_x(0,t)-2\nu\|w_x\|^2-2\rho\delta\|z\|^2-\frac{w_d}{2}\Big(w^2(1,t)-w^2(0,t)\Big)$$
$$-\frac{1}{3}\Big(w^3(1,t)-w^3(0,t)\Big)+2\rho z(1,t)w(1,t)-2\rho z(0,t)w(0,t)+\frac{2\nu}{\gamma}(\eta_0-\frac{1}{2\nu})\dot\eta_0+\frac{2\nu}{\gamma}(\eta_1-\frac{1}{2\nu})\dot\eta_1.$$

利用柯西-施瓦茨不等式和杨氏不等式，我们注意到

$$\begin{aligned}\dot V\le&-2\nu\|w_x\|^2-2\rho\delta\|z\|^2-2\nu w(0,t)w_x(0,t)+w(0,t)\Big((c_0+w_d)w(0,t)+\frac{2}{9c_0}w^3(0,t)\Big)\\&+2\nu w(1,t)w_x(1,t)+w(1,t)\Big((c_1+w_d)w(1,t)+\frac{2}{9c_1}w^3(1,t)\Big)+2\rho z(1,t)w(1,t)\\&-2\rho z(0,t)w(0,t)+\frac{2\nu}{\gamma}(\eta_0-\frac{1}{2\nu})\dot\eta_0+\frac{2\nu}{\gamma}(\eta_1-\frac{1}{2\nu})\dot\eta_1-\frac{w_d}{2}w^2(0,t)-\frac{c_0}{2}w^2(0,t)\\&-\frac{3w_d}{2}w^2(1,t)-\frac{c_1}{2}w^2(1,t).\end{aligned}$$

因此，由此可得

$$\begin{aligned}\dot V\le&-2\nu\|w_x\|^2-2\rho\delta\|z\|^2-2\nu w(0,t)w_x(0,t)+2\nu w(1,t)w_x(1,t)\\&+2\nu(\frac{1}{2\nu}-\eta_0+\eta_0)\Big((c_0+w_d)w^2(0,t)+\frac{2}{9c_0}w^4(0,t)-2\rho z(0,t)w(0,t)\Big)\\&+2\nu(\frac{1}{2\nu}-\eta_1+\eta_1)\Big((c_1+w_d)w^2(1,t)+\frac{2}{9c_1}w^4(1,t)+2\rho z(1,t)w(1,t)\Big)\\&+\frac{2\nu}{\gamma}(\eta_0-\frac{1}{2\nu})\dot\eta_0+\frac{2\nu}{\gamma}(\eta_1-\frac{1}{2\nu})\dot\eta_1-\frac{w_d}{2}w^2(0,t)-\frac{c_0}{2}w^2(0,t)\\&-\frac{3w_d}{2}w^2(1,t)-\frac{c_1}{2}w^2(1,t).\end{aligned}$$

改写为上述不等式

$$
\begin{aligned}
\dot{V} \leq & -2\nu \|w_x\|^2 - 2\rho\delta \|z\|^2 - \frac{w_d}{2}w^2(0,t) - \frac{c_0}{2}w^2(0,t) - \frac{3w_d}{2}w^2(1,t) - \frac{c_1}{2}w^2(1,t) \\
& - 2\nu w(0,t)\Big(V_0(t) - \eta_0\big((c_0+w_d)w(0,t) + \frac{2}{9c_0}w^3(0,t) - 2\rho z(0,t)\big)\Big) \\
& + 2\nu w(1,t)\Big(V_1(t) + \eta_1\big((c_1+w_d)w(1,t) + \frac{2}{9c_1}w^3(1,t) + 2\rho z(1,t)\big)\Big) \\
& + 2\nu(\frac{1}{2\nu} - \eta_0)\Big((c_0+w_d)w^2(0,t) + \frac{2}{9c_0}w^4(0,t) - 2\rho z(0,t)w(0,t) - \frac{\dot{\eta_0}}{\gamma}\Big) \\
& + 2\nu(\frac{1}{2\nu} - \eta_1)\Big((c_1+w_d)w^2(1,t) + \frac{2}{9c_1}w^4(1,t) + 2\rho z(1,t)w(1,t) - \frac{\dot{\eta_1}}{\gamma}\Big). \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

现在，我们选取自适应反馈控制

$$
\begin{aligned}
V_0(t) &= \eta_0\big((c_0+w_d)w(0,t) + \frac{2}{9c_0}w^3(0,t) - 2\rho z(0,t)\big), \\
V_1(t) &= -\eta_1\big((c_1+w_d)w(1,t) + \frac{2}{9c_1}w^3(1,t) + 2\rho z(1,t)\big), \\
\dot{\eta_0} &= \gamma\Big((c_0+w_d)w^2(0,t) + \frac{2}{9c_0}w^4(0,t) - 2\rho z(0,t)w(0,t)\Big), \\
\dot{\eta_1} &= \gamma\Big((c_1+w_d)w^2(1,t) + \frac{2}{9c_1}w^4(1,t) + 2\rho z(1,t)w(1,t)\Big),
\end{aligned}
$$

其中 $\eta_0(0) = \eta_0^0$ 且 $\eta_1(0) = \eta_1^0$. 因此，在此控制下，我们由 (2.20) 得到

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -2\nu \|w_x\|^2 - 2\rho\delta \|z\|^2 - \frac{w_d}{2}w^2(0,t) - \frac{c_0}{2}w^2(0,t) - \frac{3w_d}{2}w^2(1,t) - \frac{c_1}{2}w^2(1,t), \\
&\leq -\min\{2\nu, 2\delta, \frac{(c_0+w_d)}{2}, \frac{(c_1+3w_d)}{2}\}V.
\end{aligned}
$$

其中 ν δ，且 ρ 为正常数。因此，我们得到 L^2 范数下的稳定性 .

3 存在唯一性。

本节按照 [18] 给出问题 (1.8)-(1.13) 弱解的存在唯一性。我们采用带边界条件的 Faedo-Galerkin逼近

$$
w_x(0,t) - k_0 w(0,t) + \frac{\rho}{\nu}z(0,t) = \frac{2}{9c_0\nu}w^3(0,t), \qquad (3.1)
$$

and

$$
w_x(1,t) + k_1 w(1,t) - \frac{\rho}{\nu}z(1,t) = -\frac{2}{9c_1\nu}w^3(1,t), \qquad (3.2)
$$

其中 $k_i = \frac{(c_i \pm w_d)}{\nu}$, $i = 0, 1$. 设 $A := -\frac{d^2}{dx^2}$ 是 $L^2(0, 1)$ 上定义域为稠密定义域 $D(A)$ 的线性算子，其中

$$
D(A) = \{v \in H^2(0,1) : v_x(0) - k_0 v(0) + \frac{\rho}{\nu}z(0) = 0, \text{ and } v_x(1) + k_1 v(1) - \frac{\rho}{\nu}z(1) = 0\}.
$$

此外， $k_0+k_1>0$ 和 A 是自伴正定算子，且具有紧逆算子，因为 $H^1(0,1)\hookrightarrow L^2(0,1)$ 是紧的。因此，根据谱定理，存在 A 的一列特征值 $0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_k<\ldots$，且 $\lim_{k\to\infty}\lambda_k=\infty$。进一步，$(\phi_k)_{k=1}^{\infty}$ 构成 $L^2(0,1)$ 的标准正交基，该基由 A 的特征函数组成。

令 $(\phi_k)_{k=1}^{\infty}$ 为 $H^1(0,1)$ 的一组正交基。设 m 为正整数，并假设 V_m 是由 $\{\phi_1,\ldots,\phi_m\}$ 张成的空间。现在，对于正整数 m，我们寻求一个函数 $w^m:[0,T]\to H^1(0,1)$，使得

$$w^m(t)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^m(t)\phi_i(x).$$

系数 $\alpha_i^m(t)$、$0\le t\le T$ 的选取满足 $\alpha_i^m(0)=(w_0,\phi_i)$ $i=1,2,\ldots,m$，且 w^m 满足

$$\begin{aligned}&(w_t^m,\phi_i)+\nu(w_x^m,\phi_{ix})+w_d(w_x^m,\phi_i)+(w^mw_x^m,\phi_i)+\left((c_0+w_d)w^m(0,t)+\frac{2}{9c_0}(w^m)^3(0,t)\right)\phi_i(0)\\&-\rho z^m(0)\phi_i(0)+\left((c_1+w_d)w^m(1,t)+\frac{2}{9c_1}(w^m)^3(1,t)+\rho z^m(1)\right)\phi_i(1)=\rho(z_x^m,\phi_i),\end{aligned}\tag{3.3}$$

其中 $z^m(x,t)=\int_0^t e^{-\delta(t-s)}w_x^m(x,s)ds$，并且

$$z_t^m+\delta z^m=w_x^m.\tag{3.4}$$

将 (3.3) 乘以 $\alpha_i^m(t)$，并对 $i=1,2,\ldots,m$ 求和，由 (3.3) 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w^m\|^2+\nu\|w_x^m\|^2+w_d(w_x^m,w^m)+(w^mw_x^m,w^m)+\left((c_0+w_d)w^m(0,t)+\frac{2}{9c_0}(w^m)^3(0,t)\right)w^m(0,t)\\&-\rho z^m(0)w^m(0,t)+\left((c_1+w_d)w^m(1,t)+\frac{2}{9c_1}(w^m)^3(1,t)+\rho z^m(1)\right)w^m(1,t)=\rho(z_x^m,w^m).\end{aligned}$$

沿用引理2.1的证明方法，取 $\alpha=0$，可得

$$\begin{aligned}\|w^m\|^2+\rho\|z^m\|^2+\beta_0\int_0^t\left(\|w_x^m(s)\|^2+\|z^m(s)\|^2+(w^m)^2(0,s)+(w^m)^2(1,s)\right)ds\\+\frac{1}{3c_0}\int_0^t(w^m)^4(0,s)ds+\frac{1}{3c_1}\int_0^t e^{2\alpha s}(w^m)^4(1,s)ds\le C\|w_0\|^2,\end{aligned}$$

其中 $0<\beta_0=\min\{2\nu,2\rho\delta,(c_0+w_d),(c_1+w_d)\}$ 且 $\|w^m(0)\|\le C\|w_0\|$。因此，利用引理 2.2–2.6，我们得到序列 $(w_t^m),(w_{xx}^m),(w_{xt}^m),(z^m)$、$(E(w^m)),(E_1(w^m))$ 和 $(E_2(w^m))$，的一致界，其中 $E_i(w^m)=E_i(t)$ $i=0,1,2$。

由于先验界是一致有界的，且不依赖于 m。因此，利用巴拿赫–阿劳格鲁定理，存在 w^m 的一个子序列 w^{m_n}，使得

$$\begin{cases}w^{m_n}\to w & \text{weakly * in } L^\infty(0,T;H^2(0,1)),\\ w_t^{m_n}\to w_t & \text{weakly * in } L^\infty(0,T;H^1(0,1)),\\ z^{m_n}\to z & \text{weakly * in } L^\infty(0,T;L^2(0,1)),\\ w^{m_n}\to w & \text{weakly in } L^2(0,T;H^2(0,1)),\\ w_t^{m_n}\to w_t & \text{weakly in } L^2(0,T;H^2(0,1)),\end{cases}\tag{3.5}$$

作为 $n\to\infty$.

由于 $H^1(0,1) \subset L^2(0,1)$ 是紧嵌入 [11, 第 5], 章，因此由 Aubin-Lions紧性引理可知，下述结论强成立

$$y^{m_n} \to y, \text{ in } L^2(0,T,L^2(0,1)), \tag{3.6}$$

作为 $n \to \infty$. 我们选择一个形式如下的函数 $v \in C^1(0,T,H^1(0,1))$

$$v(t) = \sum_{i=1}^{N} d_i^m(t)\phi_i(x),$$

其中 $d_i^m(t)$ 是给定的光滑函数，且 N 是一个固定的正整数。我们选择 $m \geq N$。将 (3.3) 两边乘以 $d_i^m(t)$，对 $i = 1$ 到 N 求和，并对时间从 0 到 T积分，得到

$$\begin{aligned}\int_0^T \Big[&(w_t^m, v) + \nu(w_x^m, v) + w_d(w_x^m, v) + (w^m w_x^m, v) + \left((c_0 + w_d)w^m(0,t) + \frac{2}{9c_0}(w^m)^3(0,t)\right)v(0) \\ &- \rho z^m(0)v(0) + \left((c_1 + w_d)w^m(1,t) + \frac{2}{9c_1}(w^m)^3(1,t) + \rho z^m(1)\right)v(1)\Big]dt = \rho\int_0^T (z_x^m, v)dt.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Cho取 $m = m_n$ 并在 (3.7) 中令 $n \to \infty$，然后利用 (3.5) 和 (3.6)，我们得到 et

$$\begin{aligned}\int_0^T \Big[&(w_t, v) + \nu(w_x, v) + w_d(w_x, v) + (ww_x, v) + \left((c_0 + w_d)w(0,t) + \frac{2}{9c_0}w^3(0,t)\right)v(0) \\ &- \rho z(0)v(0) + \left((c_1 + w_d)w(1,t) + \frac{2}{9c_1}w^3(1,t) + \rho z(1)\right)v(1)\Big]dt = \rho\int_0^T (z_x, v)dt,\end{aligned} \tag{3.8}$$

若满足

$$(w^{m_n}w_x^{m_n}, v) \to (ww_x, v),$$

$$\sum_{i=0}^{1}(w^{m_n})^2(i,t)w_t^{m_n}(i,t) \to \sum_{i=0}^{1} w^2(i,t)w_t(i,t),$$

and

$$\sum_{i=0}^{1}(w^{m_n})^3(i,t)w^{m_n}(i,t) \to \sum_{i=0}^{1} w^3(i,t)w(i,t),$$

因为 $n \to \infty$, （更多细节请参见 [18] ）。

关于 $w(0) = w_0$ 的证明，参见 [18], ; 关于唯一性的证明，参见 [17]。

4 有限元逼近。

本节包含连续问题 (1.17) 的半离散格式以及半离散格式的指数界。此外，我们建立了状态变量和反馈控制律的误差估计。

对于任意正整数 N，设 $p = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1\}$ 是区间 $[0,1]$ 的划分。令 $I_j = (x_{j-1}, x_j)$ $1 \leq j \leq N$, 为划分 p 的子区间，网格长度为 $h_j = x_j - x_{j-1}$。假设网格参数 $h = \max_{1\leq j\leq N} h_j$。我们构造一个 H^1 的有限维子空间如下:

$$S_h = \{v_h \in C^0([0,1]),\ v_h|_{I_j} \in P_1(I_j), 1 \leq j \leq N\},$$

其中， P_1 在每个 $I_j, 1 \le j \le N$.上都是次数至多为一的多项式

现在，连续问题 (1.17) 的半离散有限元格式是求 $w_h \in S_h$，使得

$$(w_{ht}, \phi) + \nu(w_{hx}, \phi_x) + w_d(w_{hx}, \phi) + (w_h w_{hx}, \phi) + \left((c_0 + w_d)w_h(0,t) + \frac{2}{9c_0}w_h^3(0,t) - \rho z_h(0)\right)\phi(0)$$

$$+ \left((c_1 + w_d)w_h(1,t) + \frac{2}{9c_1}w_h^3(1,t) + \rho z_h(1)\right)\phi(1) = \rho(z_{hx}, \phi), \quad \forall\ \phi \in S_h, \tag{4.1}$$

并令 $z_h = \int_0^t e^{-\delta(t-s)} w_{hx}(s)ds$，我们可以写成

$$z_{ht} + \delta z_h = w_{hx}, \tag{4.2}$$

其中 $w_h(x,0) = w_{0h}(x)$，且 $z_h(x,0) = 0$,其中 w_{0h} 是 w_0 在 S_h中的一个近似。

由于空间 S_h 是有限维的，系统(4.1)表示一个非线性常微分方程组。因此，利用皮卡定理，对某个$t \in (0, t^*)$存在解 $w_h(t)$，其中 $0 \le t^* \le T$. 因此，为得到整体存在性 $\forall t > 0$，我们应用下面的引理，该引理表明半离散格式(4.1)的全局稳定化。

引理 4.1. 在假设$(A1)$- $(A2)$下，存在衰减$0 < \alpha \le \frac{1}{2}\min\{\nu, \delta, c_0+w_d, c_1+w_d\}$使得

$$\|w_h\|^2 + \rho\|z_h\|^2 + \beta e^{-2\alpha t}\int_0^t e^{2\alpha s}\left(\|w_{hx}(s)\|^2 + \rho\|z_h(s)\|^2 + w_h^2(0,s) + w_h^2(1,s)\right)ds$$
$$+ \frac{e^{-2\alpha t}}{3c_0}\int_0^t e^{2\alpha s}w_h^4(0,s)ds + \frac{e^{-2\alpha t}}{3c_1}\int_0^t e^{2\alpha s}w_h^4(1,s)ds \le e^{-2\alpha t}\|w_0\|^2,$$

其中 $0 < \beta = \min\{(\nu - 2\alpha), (\delta - 2\alpha), (c_0 + w_d - 2\alpha), (c_1 + w_d - 2\alpha)\}$.

证明。 证明过程与引理2.1类似。 □

4.1 误差估计。

本小节讨论状态变量和控制输入的误差估计。这里，我们采用如下形式的投影 [23]:

$$\nu\Big((w - \tilde{w}_h)_x, \phi_x\Big) + \rho\Big(\int_0^t e^{-\delta(t-s)}\big(w(s) - \tilde{w}_h(s)\big)_x ds, \phi_x\Big) + \lambda\Big(w - \tilde{w}_h, \phi\Big) = 0, \quad \forall\phi \in S_h, \tag{4.3}$$

其中 $\tilde{w}_h : [0,T] \to S_h$。这种投影称为 Ritz-Volterra投影。该投影的存在唯一性已在 [23] 中证明。令 $\eta = w - \tilde{w}_h$。下述引理的证明见 [10, 23]。

引理4.2。L 且 $w \in H^2(0,1)$和 $w_t \in L^2(0,T; H^2(0,1) \cap H^1(0,1))$。那么以下全 ds

$$\|\eta\|_j \le Ch^{2-j}\Big(\|w\|_2 + \int_0^t \|w(s)\|_2\Big),$$

and

$$\|\eta_t\|_j \le Ch^{2-j}\Big(\|w_t\|_2 + \int_0^t \|w_t(s)\|_2\Big),$$

其中 $j = 0,1$。

以下关于边界点 $x=0,1$, 处 η 和 η_t 的估计用于误差分析的证明。

引理 4.3. 对于 $x=0$，1，下列估计成立

$$\|\eta(x)\| \le Ch^2\Big(\|w\|_2 + \int_0^t \|w(s)\|_2\, ds\Big),$$

and

$$\|\eta_t(x)\| \le Ch^2\Big(\|w_t\|_2 + \int_0^t \|w_t(s)\|_2\, ds\Big),$$

其中 C 是依赖于 ν、λ 和 ρ 的正常数。

证明。 设 $\psi \in H^2(0,1)$ 为下列方程的解

$$-\nu\psi_{xx} + \lambda\psi = 0, \quad \psi_x(1) = 1,\ \psi_x(0) = 0, \tag{4.4}$$

且满足 $\|\psi\|_2 \le C$，其中 C 是依赖于 λ 的正常数。

在 (4.4) 中乘以 η，并关于 x 在 $[0,1]$ 上积分，可得

$$\nu\eta(1,t) = \nu(\eta_x, \psi_x) + \lambda(\eta, \psi).$$

利用 (4.3)，我们可以写出

$$\nu\eta(1,t) = \nu(\eta_x, \psi_x - \phi_x) + \lambda(\eta, \psi - \phi) - \rho\big(\int_0^t e^{-\delta(t-s)}\eta_x(s)ds, \phi_x\big). \tag{4.5}$$

由 (4.5) 右端的第三项，我们推得

$$\big(\int_0^t \eta_x(s)ds, \phi_x\big) = -\big(\int_0^t \eta_x(s)ds, \psi_x - \phi_x\big) + \big(\int_0^t \eta_x(s)ds, \psi_x\big).$$

利用分部积分，我们得到

$$\big(\int_0^t \eta_x(s)ds, \phi_x\big) = -\big(\int_0^t \eta_x(s)ds, \psi_x - \phi_x\big) + \int_0^t \eta(1,s)ds - \big(\int_0^t \eta(s)ds, \psi_{xx}\big).$$

因此，由 (4.5)，我们写出

$$\begin{aligned}\nu\eta(1,t) = \nu(\eta_x, \psi_x - \phi_x) + \lambda(\eta, \psi - \phi) + \rho\big(\int_0^t e^{-\delta(t-s)}\eta_x(s)ds, \psi_x - \phi_x\big)\\ - \rho\int_0^t e^{-\delta(t-s)}\eta(1,s)ds + \rho\big(\int_0^t e^{-\delta(t-s)}\eta(s)ds, \psi_{xx}\big).\end{aligned}$$

利用 H¨older 不等式，可得

$$\begin{aligned}|\eta(1,t)|^2 \le C\|\eta_x\|^2\|\psi_x - \phi_x\|^2 + C\|\eta\|^2\|\psi - \phi\|^2 + C\int_0^t \|\eta_x(s)\|^2 ds\,\|\psi_x - \phi_x\|^2\\ + \frac{\rho^2}{\delta}\int_0^t e^{-\delta(t-s)}|\eta(1,s)|^2 ds + C\int_0^t \|\eta(s)\|^2 ds\,\|\psi_{xx}\|^2,\end{aligned}$$

其中 $\big(\int_0^t e^{-\delta(t-s)}\eta(1,s)ds\big)^2 \le \big(\int_0^t e^{-\delta(t-s)}ds\big)\big(\int_0^t e^{-\delta(t-s)}|\eta(1,s)|^2 ds\big) \le \frac{1}{\delta}\int_0^t e^{-\delta(t-s)}|\eta(1,s)|^2 ds.$

利用 [34, 第 1] 章和引理4.2，我们得到

$$|\eta(1,t)|^2 \le Ch^4 \|w\|_2^2 + Ch^8 \|w\|_2^2 + Ch^4 \int_0^t \|w(s)\|_2^2 \, ds + \frac{\rho^2}{\delta} \int_0^t e^{-\delta(t-s)} |\eta(1,s)|^2 ds.$$

利用格朗沃尔不等式，我们得到

$$|\eta(1,t)|^2 \le Ch^4 \Big(\|w\|_2^2 + \int_0^t \|w(s)\|_2^2 \, ds \Big) e^{\frac{\rho^2}{\delta} \int_0^t e^{-\delta(t-s)} ds} \le Ch^4 \Big(\|w\|_2^2 + \int_0^t \|w(s)\|_2^2 \, ds \Big).$$

类似地，我们可以证明

$$|\eta_t(1,t)|^2 \le Ch^4 \Big(\|w_t\|_2^2 + \int_0^t \|w_t(s)\|_2^2 \, ds \Big).$$

$x = 0$.也有类似的结果
证明至此完成。 □

定义误差 $e := w - w_h =: \eta - \theta$，其中 $\eta = w - \tilde{w}_h$ 和 $\theta = w_h - \tilde{w}_h$.
取 $\tilde{w}_h(0) = w_{0h}$，使得 $\theta(0) = 0$. 根据引理 4.2-4.3， η 的估计已知。因此，只需估计 θ.

将（4.1）从（1.17）中减去，并使用沃尔泰拉投影（4.3），可得

$$\begin{aligned}
&(\theta_t, \phi) + \nu(\theta_x, \phi_x) + w_d(\theta_x, \phi) + (c_0 + w_d)\theta(0,t)\phi(0) - \rho\zeta(0,t)\phi(0) \\
&\qquad + (c_1 + w_d)\theta(1,t)\phi(1) + \rho\zeta(1,t)\phi(1) - \rho(\zeta_x, \phi) \\
&\qquad = (\eta_t, \phi) - \lambda(\eta, \phi) + w_d(\eta_x, \phi) + (c_0 + w_d)\eta(0,t)\phi(0) + (c_1 + w_d)\eta(1,t)\phi(1) \\
&\qquad\quad + (ww_x - w_h w_{hx}, \phi) + \frac{2}{9c_0}\Big(w^3(0,t) - w_h^3(0,t) \Big)\phi(0) + \frac{2}{9c_1}\Big(w^3(1,t) - w_h^3(1,t) \Big)\phi(1),
\end{aligned} \tag{4.6}$$

这里 $\zeta := \int_0^t e^{-\delta(t-s)} \theta_x(s) ds$ ，对时间求导后可得

$$\zeta_t + \delta\zeta = \theta_x. \tag{4.7}$$

三次项 $w^3(i,\ t) - w_h^3(i,\ t)$ 可写为

$$w^3(i,t) - w_h^3(i,t) = \eta^3(i,t) - \theta^3(i,t) + 3w(i,t)\eta(i,t)\Big(w(i,t) - \eta(i,t) \Big) - 3w_h(i,t)\theta(i,t)\Big(w_h(i,t) - \theta(i,t) \Big),$$

其中 $i = 0,\ 1$。

下面的引理给出了状态变量在L^2-范数下的误差估计的证明。

引理 4.4。 设假设 $(A1)$ 和$(A2)$成立。那么，存在一个与 h 无关的正常数C，使得对于 $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$ $\min\{\nu, \delta, c_0 + \frac{w_d}{2} - \frac{\nu}{2}, c_1 + w_d - \frac{\nu}{2}\}$ 且 $\nu \le 2\min\{c_0 + \frac{w_d}{2},\ 有 c_1 + w_d\}$ ，使得

$$\begin{aligned}
&\|\theta\|^2 + \rho \|\zeta\|^2 + \beta_1 e^{-2\alpha t} \int_0^t e^{2\alpha s} \Big(\|\theta_x(s)\|^2 + \rho \|\zeta(s)\|^2 + \theta^2(0,s) + \theta^2(1,s) \Big) ds \\
&\quad + e^{-2\alpha t} \int_0^t e^{2\alpha s} \Big(\frac{1}{9c_0}\theta^4(0,s) + \frac{1}{9c_1}\theta^4(1,s) \Big) ds \le C(\|w_0\|_2) h^4 e^{-2\alpha t} \|w_0\|_3^2,
\end{aligned}$$

其中 $0 < \beta_1 = \min\{(\nu - 2\alpha),\ (c_0 + \frac{w_d}{2} - \frac{\nu}{2} - 2\alpha),\ (c_1 + w_d - \frac{\nu}{2} - 2\alpha),\ (\delta - 2\alpha)\ \}$.

证明。 在 (4.6) 中取 $\phi = \theta$ ，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2 + \nu\|\theta_x\|^2 + (c_0 + \frac{w_d}{2})\theta^2(0,t) + (c_1 + \frac{3w_d}{2})\theta^2(1,t) + \frac{2}{9c_0}\theta^4(0,t) + \frac{2}{9c_1}\theta^4(1,t) \\
&\qquad - \rho\zeta(0,t)\theta(0,t) + \rho\zeta(1,t)\theta(1,t) - (\zeta_x,\theta) \\
&\qquad = (\eta_t - \lambda\eta,\theta) + w_d(\eta_x,\theta) + (c_0 + w_d)\eta(0,t)\theta(0,t) + (c_1 + w_d)\eta(1,t)\theta(1,t) \\
&\qquad\quad + (ww_x - w_h w_{hx},\theta) + \sum_{i=0}^{1}\Big(\frac{2}{9c_i}\eta^3(i,t) + \frac{2}{3c_i}\eta(i,t)w(i,t)\big(w(i,t) - \eta(i,t)\big)\Big)\theta(i,t) \\
&\qquad\quad + \sum_{i=0}^{1}\Big(-\frac{2}{3c_i}w_h^2(i,t)\theta^2(i,t) + \frac{2}{3c_i}w_h(i,t)\theta^3(i,t)\Big). \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

将 (4.7) 乘以 ζ ，并对 $[0,1]$，上的 x 积分，可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\zeta\|^2 + \delta\|\zeta\|^2 = \theta(1,t)\zeta(1,t) - \theta(0,t)\zeta(0,t) - (\zeta_x,\theta). \qquad (4.9)$$

同样，将 (4.9) 乘以 ρ 并与 (4.8) 相加，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\theta\|^2 + \rho\|\zeta\|^2\Big) + \nu\|\theta_x\|^2 + \rho\delta\|\zeta\|^2 + (c_0 + \frac{w_d}{2})\theta^2(0,t) + (c_1 + \frac{3w_d}{2})\theta^2(1,t) \\
&\qquad + \frac{2}{9c_0}\theta^4(0,t) + \frac{2}{9c_1}\theta^4(1,t) \\
&\qquad = (\eta_t - \lambda\eta,\theta) + w_d(\eta_x,\theta) + (c_0 + w_d)\eta(0,t)\theta(0,t) + (c_1 + w_d)\eta(1,t)\theta(1,t) \\
&\qquad\quad + (ww_x - w_h w_{hx},\theta) + \sum_{i=0}^{1}\Big(\frac{2}{9c_i}\eta^3(i,t) + \frac{2}{3c_i}\eta(i,t)w(i,t)\big(w(i,t) - \eta(i,t)\big)\Big)\theta(i,t) \\
&\qquad\quad + \sum_{i=0}^{1}\Big(-\frac{2}{3c_i}w_h^2(i,t)\theta^2(i,t) + \frac{2}{3c_i}w_h(i,t)\theta^3(i,t)\Big), \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{6} I_j. \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

(4.10) 右端的第一项可估计为

$$I_1 = (\eta_t - \lambda\eta,\theta) \le C\Big(\|\eta_t\|^2 + \|\eta\|^2\Big) + \frac{\nu}{8}\|\theta\|^2.$$

Usin经分部积分，(4.10) 右端的第二项 I_2 得 s

$$\begin{aligned}
I_2 = w_d(\eta_x,\theta) &= w_d\eta(1,t)\theta(1,t) - w_d\eta(0,t)\theta(0,t) - w_d(\eta,\theta_x) \\
&\le C\Big(\eta^2(0,t) + \eta^2(1,t) + \|\eta\|^2\Big) + \frac{w_d}{4}\theta^2(0,t) + w_d\theta^2(1,t) + \frac{\nu}{12}\|\theta_x\|^2.
\end{aligned}$$

应用杨氏不等式，第三项 I_3 得

$$I_3 = (c_0 + w_d)\eta(0,t)\theta(0,t) + (c_1 + w_d)\eta(1,t)\theta(1,t), \le C\Big(\eta^2(0,t) + \eta^2(1,t)\Big) + \frac{c_0}{8}\theta^2(0,t) + \frac{c_1}{8}\theta^2(1,t).$$

将 (4.10) 右端的第四项 I_4 改写为

$$I_4 = (ww_x - w_h w_{hx},\theta) = \big(w_x(\eta - \theta),\theta\big) + (w_h\eta_x,\theta) - (w_h\theta_x,\theta). \qquad (4.11)$$

(4.11) 右端的第一项子项 I_4 有界于

$$\begin{aligned}\big(w_x(\eta-\theta),\theta\big) &\le \|w_x\|_\infty \|\eta\| \|\theta\| + \|w_x\|_\infty \|\theta\| \|\theta\|, \\ &\le C\|\eta\|^2 + \frac{\nu}{8}\|\theta\|^2 + C\|w_x\|_\infty^2 \|\theta\|^2.\end{aligned}$$

将 $w_h = \tilde{w}_h + \theta$ 代入 (4.11) 右端 I_4 的第二个子项，得到

$$\begin{aligned}(w_h\eta_x,\theta) = \Big((\tilde{w}_h+\theta)\eta_x,\theta\Big) &= \tilde{w}_h(1,t)\eta(1,t)\theta(1,t) - \tilde{w}_h(0,t)\eta(0,t)\theta(0,t) - (\eta,\tilde{w}_{hx}\theta + \tilde{w}_h\theta_x), \\ &\le C\Big(\tilde{w}_h^2(1,t)\eta^2(1,t) + \tilde{w}_h^2(0,t)\eta^2(0,t)\Big) + \frac{c_0}{8}\theta^2(0,t) + \frac{c_1}{8}\theta^2(1,t) \\ &\quad + C\Big(\|\tilde{w}_{hx}\|_\infty^2 + \|\tilde{w}_h\|_\infty^2\Big)\|\theta\|^2 + \frac{\nu}{12}\|\theta_x^2\| + C\|\eta\|^2.\end{aligned}$$

(4.11) 右端 I_4 的最后一个子项可估计为

$$-(w_h\theta_x,\theta) \le \|w_h\|_\infty \|\theta_x\| \|\theta\| \le C\|w_h\|_\infty^2 \|\theta\|^2 + \frac{\nu}{12}\|\theta_x^2\|.$$

现在，由 (4.10) 右端的第五项 I_5 ，可得

$$\frac{2}{9c_i}\eta^3(i,t)\theta(i,t) \le C\eta^6(i,t) + \frac{c_i}{8}\theta^2(i,t).$$

利用杨氏不等式， I_5 的子项可得

$$\frac{2}{3c_i}w(i,t)\eta(i,t)\big(w(i,t)-\eta(i,t)\big)\theta(i,t) \le C\big(\eta^2(i,t)w^4(i,t) + \eta^4(i,t)w^2(i,t)\big) + \frac{c_i}{8}\theta^2(i,t),$$

其中 $i = 0,$ 1。

最后，(4.10) 右端的最后一项为

$$I_6 = \frac{2}{3c_i}w_h(i,t)\theta^3(i,t) \le \frac{6}{36c_i}\theta^4(i,t) + \frac{2}{3c_i}\theta^2(i,t)w_h^2(i,t), \quad i = 0,1.$$

将 $I_j, j = 1,2,\ldots,6$ 的界代入 (4.10)，可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\theta\|^2 + \rho\|\zeta\|^2\Big) + \frac{3\nu}{4}\|\theta_x\|^2 + \rho\delta\|\zeta\|^2 + (\frac{c_0}{2}+\frac{w_d}{4})\theta^2(0,t) + (\frac{c_1}{2}+\frac{w_d}{2})\theta^2(1,t) \\ &\qquad + \frac{1}{18c_0}\theta^4(0,t) + \frac{1}{18c_1}\theta^4(1,t) \\ &\qquad \le \frac{\nu}{4}\|\theta\|^2 + C\Big(\|w_x\|_\infty^2 + \|\tilde{w}_{hx}\|_\infty^2 + \|\tilde{w}_h\|_\infty^2 + \|w_h\|_\infty^2\Big)\|\theta\|^2 \\ &\qquad\quad + C\Big(\|\eta_t\|^2 + \|\eta\|^2 + \sum_{i=0}^{1}\Big(\eta^2(i,t) + \eta^2(i,t)w^4(i,t) + \eta^4(i,t)w^2(i,t) + \eta^6(i,t)\Big)\Big).\end{aligned}$$

利用 $\|\tilde{w}_h\|_\infty \le C\|w\|_1$ 和庞加莱–维尔廷格不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\theta\|^2 + \rho\|\zeta\|^2\Big) + \frac{\nu}{2}\|\theta_x\|^2 + \rho\delta\|\zeta\|^2 + (\frac{c_0}{2}+\frac{w_d}{4}-\frac{\nu}{4})\theta^2(0,t) + (\frac{c_1}{2}+\frac{w_d}{2}-\frac{\nu}{4})\theta^2(1,t) \\ &\qquad + \frac{1}{18c_0}\theta^4(0,t) + \frac{1}{18c_1}\theta^4(1,t) \\ &\qquad \le C\Big(\|w\|_2^2 + \|w\|_1^2 + 2\||w_h|\|^2\Big)\|\theta\|^2 \\ &\qquad\quad + C\Big(\|\eta_t\|^2 + \|\eta\|^2 + \sum_{i=0}^{1}\Big(\eta^2(i,t) + \eta^2(i,t)w^4(i,t) + \eta^4(i,t)w^2(i,t) + \eta^6(i,t)\Big)\Big). \qquad (4.12)\end{aligned}$$

将 (4.12) 乘以 $2e^{2\alpha t}$ 并利用庞加莱–维尔廷格不等式，可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(\left\|e^{\alpha t}\theta\right\|^2+\rho\left\|e^{\alpha t}\zeta\right\|^2\Big)&+(\nu-2\alpha)e^{2\alpha t}\left\|\theta_x\right\|^2+(\rho\delta-2\rho\alpha)e^{2\alpha t}\left\|\zeta\right\|^2+(c_0+\frac{w_d}{2}-\frac{\nu}{2}-2\alpha)e^{2\alpha t}\theta^2(0,t)\\&+(c_1+w_d-\frac{\nu}{2}-2\alpha)e^{2\alpha t}\theta^2(1,t)+\frac{e^{2\alpha t}}{9c_0}\theta^4(0,t)+\frac{e^{2\alpha t}}{9c_1}\theta^4(1,t)\\&\le Ce^{2\alpha t}\Big(\left\|w\right\|_2^2+\left\|w\right\|_1^2+2\left|\left|\left|w_h\right|\right|\right|^2\Big)\left\|\theta\right\|^2\\&\quad+Ce^{2\alpha t}\Bigg(\left\|\eta_t\right\|^2+\left\|\eta\right\|^2+\sum_{i=0}^{1}\Big(\eta^2(i,t)+\eta^2(i,t)w^4(i,t)+\eta^4(i,t)w^2(i,t)+\eta^6(i,t)\Big)\Bigg).\end{aligned}$$

对 $[0,t]$ 关于时间积分，我们得到

$$\begin{aligned}\left\|e^{\alpha t}\theta\right\|^2+\rho\left\|e^{\alpha t}\zeta\right\|^2+\beta_1\int_0^t e^{2\alpha s}\Big(\left\|\theta_x(s)\right\|^2+\rho\left\|\zeta(s)\right\|^2+\theta^2(0,s)+\theta^2(1,s)\Big)ds&\\+\int_0^t e^{2\alpha s}\Big(\frac{1}{9c_0}\theta^4(0,s)+\frac{1}{9c_1}\theta^4(1,s)\Big)ds&\\\le C\int_0^t e^{2\alpha s}\Big(\left\|w(s)\right\|_2^2+\left\|w(s)\right\|_1^2+2\left|\left|\left|w_h(s)\right|\right|\right|^2\Big)\left\|\theta(s)\right\|^2ds&\\+C\int_0^t e^{2\alpha s}\Bigg(\sum_{i=0}^{1}\Big(\eta^2(i,s)+\eta^2(i,s)w^4(i,s)+\eta^4(i,s)w^2(i,s)+\eta^6(i,s)\Big)&\\+\left\|\eta_t(s)\right\|^2+\left\|\eta(s)\right\|^2\Bigg)ds,&\end{aligned}$$

其中 $0<\beta_1=\min\{(\nu-2\alpha),\ (c_0+\frac{w_d}{2}-\frac{\nu}{2}=2\alpha),\ (c_1+w_d-\frac{\nu}{2}=2\alpha),\ (\delta-2\alpha)\}$。

利用格朗沃尔不等式、带有 $\alpha=0$ 的定理 2.1 以及引理 4.1($\alpha=0$) 和引理 4.2-4.3，将所得不等式乘以 $e^{-2\alpha t}$ 后，证明即告完成。 □

在下一个引理中，我们证明状态变量在 H^1-范数下的误差估计。

L引理 4.5. 假设$(A1)$和$(A2)$ 成立，则有 :

$$\nu\left\|\theta_x\right\|^2+\sum_{i=0}^{1}\Big((c_i+w_d)\theta^2(i,t)+\frac{2}{27c_i}\theta^4(i,t)\Big)+2\int_0^t e^{2\alpha s}\left\|\theta_t(s)\right\|^2ds\le h^4e^{-2\alpha t}C(\left\|w_0\right\|_3).$$

证明。 在 (4.6) 中取 $\phi=\theta_t$ ，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\nu\left\|\theta_x\right\|^2+\sum_{i=0}^{1}\Big((c_i+w_d)\theta^2(i,t)+\frac{1}{9c_i}\theta^4(i,t)\Big)\Big)+\left\|\theta_t\right\|^2&\\=-\rho(\zeta,\theta_{xt})+(\eta_t-\lambda\eta,\theta_t)+w_d(\eta_x-\theta_x,\theta_t)+(ww_x-w_hw_{hx},\theta_t)&\\+\sum_{i=0}^{1}\Big((c_i+w_d)\eta(i,t)\theta_t(i,t)+\frac{2}{9c_i}\eta^3(i,t)\theta_t(i,t)\Big)&\\+\sum_{i=0}^{1}\frac{2}{3c_i}\Big(w(i,t)\eta(i,t)\big(w(i,t)-\eta(i,t)\big)\theta_t(i,t)\Big)&\\-\sum_{i=0}^{1}\frac{2}{3c_i}\Big(w_h(i,t)\theta(i,t)\big(w_h(i,t)-\theta(i,t)\big)\theta_t(i,t)\Big).&\end{aligned}\tag{4.13}$$

此外，由 (4.7) 可写为

$$(\zeta,\theta_{xt})=\delta(\zeta,\theta_x)-\|\theta_x\|^2+\frac{d}{dt}(\zeta,\theta_x). \tag{4.14}$$

由（4.13）和（4.14），可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\nu\|\theta_x\|^2+\sum_{i=0}^{1}\Big((c_i+w_d)\theta^2(i,t)+\frac{1}{9c_i}\theta^4(i,t)\Big)\Big)\\
&\qquad=-\rho\frac{d}{dt}(\zeta,\theta_x)+\rho\|\theta_x\|^2-\rho\delta(\zeta,\theta_x)+(\eta_t-\lambda\eta,\theta_t)+w_d(\eta_x-\theta_x,\theta_t)\\
&\qquad\quad+(ww_x-w_hw_{hx},\theta_t)\\
&\qquad\quad+\sum_{i=0}^{1}\Big((c_i+w_d)\eta(i,t)\theta_t(i,t)+\frac{2}{9c_i}\eta^3(i,t)\theta_t(i,t)\Big)\\
&\qquad\quad+\sum_{i=0}^{1}\frac{2}{3c_i}\Big(w(i,t)\eta(i,t)\big(w(i,t)-\eta(i,t)\big)\theta(i,t)\Big)\\
&\qquad\quad-\sum_{i=0}^{1}\frac{2}{3c_i}\Big(w_h(i,t)\theta(i,t)\big(w_h(i,t)-\theta(i,t)\big)\theta_t(i,t)\Big).
\end{aligned}\tag{4.15}$$

（4.15）右端的第五项为

$$\begin{aligned}
w_d(\eta_x-\theta_x,\theta_t)&=w_d\frac{d}{dt}\Big(\eta(1,t)\theta(1,t)-\eta(0,t)\theta(0,t)\Big)-w_d\Big(\eta_t(1,t)\theta(1,t)-\eta_t(0,t)\theta(0,t)\Big)\\
&\quad-w_d\frac{d}{dt}(\eta,\theta_x)+w_d(\eta_t,\theta_x)-w_d(\theta_x,\theta_t),\\
&\le w_d\frac{d}{dt}\Big(\eta(1,t)\theta(1,t)-\eta(0,t)\theta(0,t)\Big)-w_d\frac{d}{dt}(\eta,\theta_x)+C\Big(\eta_t^2(1,t)+\eta_t^2(0,t)+\|\eta_t\|^2\Big)\\
&\quad+C\|\theta_x\|^2+\epsilon\|\theta_t\|^2+\theta^2(0,t)+\theta^2(1,t),
\end{aligned}$$

其中，$\epsilon>0$ 将在稍后选取。

（4.15）右端的第六项可写为

$$(ww_x-w_hw_{hx},\theta_t)=\Big(w_x\big(\eta-\theta\big),\theta_t\Big)+(w_h\eta_x,\theta_t)-(w_h\theta_x,\theta_t). \tag{4.16}$$

(4.16) 右端的第一项有界于

$$\Big(w_x\big(\eta-\theta\big),\theta_t\Big)\le C\|w_x\|_\infty^2\|\eta\|^2+C\|w_x\|_\infty^2\|\theta\|^2+\epsilon\|\theta_t\|^2.$$

令 $w_h=\theta+\tilde{w}_h$，则 (4.16) 右端的第二项为

$$\begin{aligned}(w_h\eta_x,\theta_t)&=(\theta\eta_x,\theta_t)+(\tilde{w}_h\eta_x,\theta_t),\\&=(\theta\eta_x,\theta_t)+\tilde{w}_h(1,t)\eta(1,t)\theta_t(1,t)-\tilde{w}_h(0,t)\eta(0,t)\theta_t(0,t)-(\tilde{w}_{hx}\eta,\theta_t)-(\tilde{w}_h\eta,\theta_{xt}),\\&=(\theta\eta_x,\theta_t)+\frac{d}{dt}\Big(\tilde{w}_h(1,t)\eta(1,t)\theta(1,t)\Big)-\big(\tilde{w}_h(1,t)\eta(1,t)\big)_t\theta(1,t)-\frac{d}{dt}\Big(\tilde{w}_h(0,t)\eta(0,t)\theta(0,t)\Big)\\&\quad+\big(\tilde{w}_h(0,t)\eta(0,t)\big)_t\theta(0,t)-(\tilde{w}_{hx}\eta,\theta_t)-\frac{d}{dt}(\tilde{w}_h\eta,\theta_x)+((\tilde{w}_h\eta)_t,\theta_x),\\&\le C\left\||\theta|\right\|^2\|\eta_x\|^2+\epsilon\|\theta_t\|^2+C\|\theta_x\|^2+C\Big(\|\tilde{w}_{hx}\|_\infty^2\|\eta\|^2+\|\tilde{w}_{ht}\|_\infty^2\|\eta_t\|^2\Big)\\&\quad+C\|\tilde{w}_{ht}\|_\infty^2\big(\eta_t^2(1,t)+\eta_t^2(0,t)\big)+\theta^2(1,t)+\theta^2(0,t)-\frac{d}{dt}(\tilde{w}_h\eta,\theta_x)\\&\quad+\frac{d}{dt}\Big(\tilde{w}_h(1,t)\eta(1,t)\theta(1,t)\Big)-\frac{d}{dt}\Big(\tilde{w}_h(0,t)\eta(0,t)\theta(0,t)\Big).\end{aligned}$$

(4.16) 式右端的第三项估计为

$$-(w_h\theta_x,\theta_t)\le C\left\||w_h|\right\|^2\|\theta_x\|^2+\epsilon\|\theta_t\|^2.$$

现在，由下式可得 (4.15) 式右端的第七项

$$\begin{aligned}(c_i+w_d)\eta(i,t)\theta_t(i,t)+\frac{2}{9c_i}\eta^3(i,t)\theta_t(i,t)\le{}&(c_i+w_d)\frac{d}{dt}\Big(\eta(i,t)\theta(i,t)\Big)+\frac{2}{9c_i}\frac{d}{dt}\Big(\eta^3(i,t)\theta(i,t)\Big)\\&+C\eta_t^2(i,t)+\theta^2(i,t)+C\eta_t^2(i,t)\eta^2(i,t)+C\eta^2(i,t)\theta^2(i,t),\end{aligned}$$

其中 $i=0,\ 1$。

(4.15) 式右端的第八项为

$$\begin{aligned}\frac{2}{3c_i}\Big(w(i,t)\eta(i,t)\big(w(i,t)-\eta(i,t)\big)\theta_t(i,t)\Big)\le{}&\frac{2}{3c_i}\frac{d}{dt}\Big(w^2(i,t)\eta(i,t)\theta(i,t)\Big)-\frac{2}{3c_i}\frac{d}{dt}\Big(w(i,t)\eta^2(i,t)\theta(i,t)\Big)\\&+C\Big(\eta^2(i,t)+\eta_t^2(i,t)+\theta^2(i,t)\Big),\end{aligned}$$

其中 $i=0,\ 1$。

令 $w_h=\theta+\tilde{w}_h$，则 (4.15) 式右端的最后一项为

$$\begin{aligned}\frac{2}{3c_i}\Big(w_h(i,t)\theta(i,t)\big(w_h(i,t)-\theta(i,t)\big)\theta_t(i,t)\Big)&=\frac{2}{3c_i}\tilde{w}_h^2(i,t)\theta(i,t)\theta_t(i,t)-\frac{2}{3c_i}\tilde{w}_h(i,t)\theta^2(i,t)\theta_t(i,t)\\&\le-\frac{1}{3c_i}\frac{d}{dt}\Big(\tilde{w}_h^2(i,t)\theta^2(i,t)\Big)-\frac{2}{9c_i}\frac{d}{dt}\Big(\tilde{w}_h(i,t)\theta^3(i,t)\Big)\\&\quad+C\Big(\|\tilde{w}_h\|_\infty^2+\|\tilde{w}_{ht}\|_\infty^2\Big)\theta^2(i,t)+C\theta^4(i,t),\end{aligned}$$

其中 $i=0,\ 1$。

将上述估计代入含有 $\epsilon=\frac{1}{10}$ 的式 (4.15)，由定理 2.1 可得

$\|\tilde{w}_h\|_\infty \le C\|w\|_1$ 和 $\|\tilde{w}_{hx}\|_\infty \le C\|w\|_2$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\nu\|\theta_x\|^2+\sum_{i=0}^{1}\Big((c_i+w_d)\theta^2(i,t)+\frac{1}{9c_i}\theta^4(i,t)\Big)\Big)+\frac{1}{2}\|\theta_t\|^2\\
&\qquad\le C\Big(\,|||\theta|||^2\|\eta_x\|^2+\|\eta\|^2+\|\eta_t\|^2+\|\theta_x\|^2+\sum_{i=0}^{1}\big(\eta^2(i,t)+\eta_t^2(i,t)+\eta_t^2(i,t)\eta^2(i,t)\big)\Big)\\
&\qquad\quad+C\sum_{i=0}^{1}\Big(\eta^2(i,t)\theta^2(i,t)+\theta^2(i,t)+\theta^4(i,t)\Big)+C|||w_h|||^2\|\theta_x\|^2+C\|\zeta\|^2\\
&\qquad\quad+w_d\frac{d}{dt}\Big(\eta(1,t)\theta(1,t)-\eta(0,t)\theta(0,t)\Big)-w_d\frac{d}{dt}(\eta,\theta_x)-\frac{d}{dt}(\tilde{w}_h\eta,\theta_x)\\
&\qquad\quad+\frac{d}{dt}\Big(\tilde{w}_h(1,t)\eta(1,t)\theta(1,t)\Big)-\frac{d}{dt}\Big(\tilde{w}_h(0,t)\eta(0,t)\theta(0,t)\Big)\\
&\qquad\quad+\sum_{i=0}^{1}\Big((c_i+w_d)\frac{d}{dt}\Big(\eta(i,t)\theta(i,t)\Big)+\frac{2}{9c_i}\frac{d}{dt}\Big(\eta^3(i,t)\theta(i,t)\Big)\Big)\\
&\qquad\quad+\sum_{i=0}^{1}\Big(\frac{2}{3c_i}\frac{d}{dt}\Big(w^2(i,t)\eta(i,t)\theta(i,t)\Big)-\frac{2}{3c_i}\frac{d}{dt}\Big(w(i,t)\eta^2(i,t)\theta(i,t)\Big)\Big)\\
&\qquad\quad-\sum_{i=0}^{1}\Big(\frac{1}{3c_i}\frac{d}{dt}\Big(\tilde{w}_h^2(i,t)\theta^2(i,t)\Big)+\frac{2}{9c_i}\frac{d}{dt}\Big(\tilde{w}_h(i,t)\theta^3(i,t)\Big)\Big)-\rho\frac{d}{dt}(\zeta,\theta_x).
\end{aligned}
$$

乘以 $e^{2\alpha t}$，并在 $[0,t]$ 上对时间进行积分，根据引理 2.1-2.2 可得

$$
\begin{aligned}
&\nu e^{2\alpha t}\|\theta_x\|^2+\sum_{i=0}^{1}e^{2\alpha t}\Big((c_i+w_d)\theta^2(i,t)+\frac{1}{9c_i}\theta^4(i,t)\Big)+\int_0^t e^{2\alpha s}\|\theta_t(s)\|^2\,ds\\
&\qquad\le C\int_0^t e^{2\alpha s}\Big(\,|||\theta(s)|||^2\|\eta_x(s)\|^2+\|\eta(s)\|^2+\|\eta_t(s)\|^2+\|\theta_x(s)\|^2\\
&\qquad\quad+\sum_{i=0}^{1}\big(\eta^2(i,s)+\eta_t^2(i,s)+\eta_t^2(i,s)\eta^2(i,s)\big)\Big)ds+2w_d\Big(\eta(1,t)\theta(1,t)-\eta(0,t)\theta(0,t)\Big)\\
&\qquad\quad+C(\alpha)\int_0^t e^{2\alpha s}\Big(\nu\|\theta_x(s)\|^2+\sum_{i=0}^{1}\Big(\theta^2(i,s)+\theta^4(i,s)+\eta^4(i,s)+\eta^6(i,s)\Big)\Big)ds\\
&\qquad\quad-2w_de^{2\alpha t}(\eta,\theta_x)-2e^{2\alpha t}(\tilde{w}_h\eta,\theta_x)+2e^{2\alpha t}\Big(\tilde{w}_h(1,t)\eta(1,t)\theta(1,t)\Big)-2e^{2\alpha t}\Big(\tilde{w}_h(0,t)\eta(0,t)\theta(0,t)\Big)\\
&\qquad\quad+2e^{2\alpha t}\sum_{i=0}^{1}\Big((c_i+w_d)\Big(\eta(i,t)\theta(i,t)\Big)+\frac{2}{9c_i}\Big(\eta^3(i,t)\theta(i,t)\Big)\Big)\\
&\qquad\quad+2e^{2\alpha t}\sum_{i=0}^{1}\Big(\frac{2}{3c_i}\Big(w^2(i,t)\eta(i,t)\theta(i,t)\Big)-\frac{2}{3c_i}\Big(w(i,t)\eta^2(i,t)\theta(i,t)\Big)\Big)\\
&\qquad\quad-2e^{2\alpha t}\sum_{i=0}^{1}\Big(\frac{1}{3c_i}\Big(\tilde{w}_h^2(i,t)\theta^2(i,t)\Big)+\frac{2}{9c_i}\Big(\tilde{w}_h(i,t)\theta^3(i,t)\Big)\Big)\\
&\qquad\quad+C\int_0^t e^{2\alpha s}\Big(\,|||w_h(s)|||^2\|\theta_x(s)\|^2+\|\zeta(s)\|^2\Big)ds-\rho e^{2\alpha t}(\zeta,\theta_x).
\end{aligned}
$$

再次利用柯西-施瓦茨不等式和杨氏不等式，根据引理 2.1-2.2 及 $\alpha = 0$ 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\nu}{2}e^{2\alpha t}\left\|\theta_x\right\|^2 + e^{2\alpha t}\sum_{i=0}^{1}\Big(\frac{1}{2}(c_i+w_d)\theta^2(i,t)+\frac{1}{27c_i}\theta^4(i,t)\Big)+\int_0^t e^{2\alpha s}\left\|\theta_t(s)\right\|^2 ds\\
&\qquad\le C\int_0^t e^{2\alpha s}\Big(\left|\left|\left|\theta(s)\right|\right|\right|^2\left\|\eta_x(s)\right\|^2+\left\|\eta(s)\right\|^2+\left\|\eta_t(s)\right\|^2+\left\|\theta_x(s)\right\|^2\\
&\qquad\quad+\sum_{i=0}^{1}\big(\eta^2(i,s)+\eta_t^2(i,s)+\eta_t^2(i,s)\eta^2(i,s)\big)\Big)ds+Ce^{2\alpha t}\left\|\eta\right\|^2+Ce^{2\alpha t}\left\|\zeta\right\|^2\\
&\qquad\quad+Ce^{2\alpha t}\sum_{i=0}^{1}\Big(\eta^2(i,t)+\eta^4(i,t)+\eta^6(i,t)\Big)+C\int_0^t e^{2\alpha s}\Big(\left|\left|\left|w_h(s)\right|\right|\right|^2\left\|\theta_x(s)\right\|^2+\left\|\zeta(s)\right\|^2\Big)ds.
\end{aligned}$$

结合定理 2.1 和引理 4.1，使用格朗沃尔不等式，并在所得不等式两边乘以 $e^{-2\alpha t}$，再利用引理 4.2-4.4，证明即告完成。 □

注 4.1。 由引理 *4.5*，利用庞加莱不等式可写为

$$\left\|\theta\right\|_\infty \le C(\left\|w_0\right\|_3)h^2e^{C\|w_0\|}.$$

下　　述定理给出了状态变量的最优收敛阶。

定理 4.1。 在假设 $(A1)$ 和$(A2)$下，存在一个常数 $C = C(\left\|w_0\right\|_3)$，其与 h 无关，使得

$$\left\|w(t)-w_h(t)\right\|_j \le Ch^{2-j}\exp(C\left\|w_0\right\|_2),$$

其中 $j = 0$、1 和

$$\left\|w(t)-w_h(t)\right\|_\infty \le Ch^2\exp(C\left\|w_0\right\|_2).$$

证明。 利用三角不等式，证明可由引理 4.2–4.5 得出。 □

表示 $e_i(t) := v_i(t) - v_{ih}(t)$，其中 $v_{ih}(t) := \frac{1}{\nu}\Big((c_i+w_d)w_h(i,\ t)+\frac{2}{9c_i}w_h^3(i,\ t)-\rho z_h(i,\ t)\Big)$，且$z_h(i,\ t) = \int_0^t e^{-\delta(t-s)}w_{hx}(i,\ s)ds,\ i = 0,\ 1$。

下面的定理给出了控制输入的误差估计。

定理 4.2。 假设 $(A1)$ 和 $(A2)$ 成立。则存在一个与 h 无关的常数 C，使得

$$|e_i(t)| \le C(\left\|w_0\right\|_3)h^2,$$

其中 $i = 0$,1。

证明。由于

$$e_i(t) = \frac{1}{\nu}\Big((c_i+w_d)\big(w(i,t)-w_h(i,t)\big)+\frac{2}{9c_i}\big(w^3(i,t)-w_h^3(i,t)\big)-\rho\int_0^t e^{-\delta(t-s)}e_i(s)ds\Big),$$

我们可以写成

$$e_i(t)+\frac{\rho}{\nu}\int_0^t e^{-\delta(t-s)}e_i(s)ds=\frac{1}{\nu}\bigg((c_i+w_d)\big(w(i,t)-w_h(i,t)\big)+\frac{2}{9c_i}\big(w^3(i,t)-w_h^3(i,t)\big)\bigg),$$
$$=\frac{1}{\nu}\bigg((c_i+w_d)\big(\eta(i,t)-\theta(i,t)\big)+\frac{2}{9c_i}\big(\eta^3(i,t)-\theta^3(i,t)+3\tilde{w}_h^2\eta(i,t)$$
$$+3\tilde{w}_h\eta^2(i,t)-3\tilde{w}_h\theta^2(i,t)-3\tilde{w}_h^2\theta(i,t)\big)\bigg).$$

利用柯西-施瓦茨不等式和杨氏不等式，由引理 2.1-2.2 可得

$$|e_i(t)|\le C\Big(|\eta(i,t)|+|\theta(i,t)|+|\eta(i,t)|^2+|\eta(i,t)|^4+|\theta(i,t)|^2+|\theta(i,t)|^4\Big)+\frac{\rho}{\nu}\int_0^t e^{-\delta(t-s)}|e_i(s)|ds.$$

利用格朗沃尔不等式以及引理 4.2-4.3 和 4.5，可得

$$|e_i(t)|\le C(\|w_0\|_3)h^2e^{\frac{\rho(1-e^{-\delta t})}{\nu\delta}}\le C(\|w_0\|_3)h^2.$$

证明完毕。 □

5 数值算例。

本节给出一些数值算例，以说明我们的理论结果。我们考察状态变量、控制输入的行为以及相应的收敛阶。

令 $t_n=nk,\quad n=0,1,.....,M$，其中 k为时间步长， M为正整数。令 W^n为问题 (1.17) 在 $t=t_n$. 处的全离散近似解。此外，记 $V_i^n,\ i=0,1$ 为反馈控制输入 $v_i,\ i=0,1$ 在 $t=t_n$.处的全离散近似。设 ϕ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的光滑函数。我们定义 $\phi(t_n)=\phi^n$ ，并定义差分算子 $\bar{\partial}_t\phi^n:=\frac{\phi^n-\phi^{n-1}}{k}$。

对(1.19)应用后向欧拉方法，我们按如下形式写出寻求序列$\{W^n\}_{n\ge1}$ 的全离散格式:

$$(\bar{\partial}_tW^n,\phi)+\nu(W_x^n,\phi_x)+w_d(W_x^n,\phi)+(W^nW_x^n,\phi)+\bigg((c_0+w_d)W^n(0)+\frac{2}{9c_0}(W^n)^3(0)\bigg)\phi(0)$$
$$+\bigg((c_1+w_d)W^n(1)+\frac{2}{9c_1}(W^n)^3(1)\bigg)\phi(1)+\rho(Z^n,\phi_x)=0,\tag{5.1}$$

其中 $Z^n:=\int_0^{t_n}e^{-\delta(t_n-s)}W_x^n(s)ds$ ，且 Z^n 由右矩形公式近似。我们应用牛顿法求解非线性系统(5.1)，其中以前一时间步 W^n 作为初始猜测来求当前时间步 W^{n+1}。由于该问题的精确解未知，我们将细化网格解（参考解）视为精确解，记为 w。

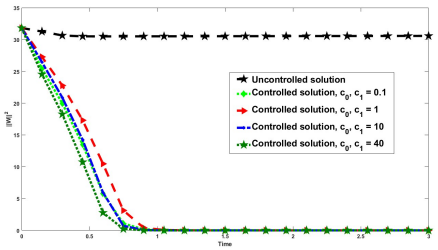
在下面的例子中，我们针对 c_0 和 c_1的不同取值分析状态变量与控制输入的行为。此外，通过改变 c_0、 c_1和 ρ的值，我们考察状态变量在 L^2 和 L^∞范数中以及控制输入在L^∞范数中的收敛阶。

例5.1. 我们考虑初始条件 $(t=0)\ w_0(x)=x(x-1)-w_d$ ，其中 $w_d=3$ ，且$x\in[0,1].$ 。我们设定系数 $\nu=0.1$、 $\rho=1$和 $\delta=1$。此外，选取空间步长$h=\frac{1}{100}$和时间步长 $k=\frac{1}{100}$。

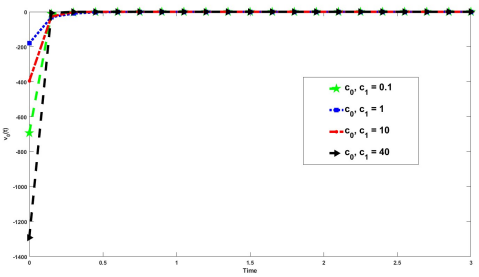
在时间区间 $[0,T]$ 内，其中 $T>0$，系统 (1.8)-(1.13) 在零诺伊曼边界条件（$v_0(t)$ $v_1(t)$ $=0$）下，在 L^2-范数下是不稳定的。这意味着，无控制综合中的近似解（图1(i)中标记为“无控制解”）不会收敛到其稳态解。然而，在采用反馈控制律 (1.15) 和 (1.16) 后，同一图中标记为“受控解”的状态变量相对于 L^2-范数，在 c_0 和 c_1的不同取值下趋于零，这验证了引理 2.1 的理论结果。因此，数值模拟证实，采用反馈律 (1.15) 和 (1.16) 时，闭环系统 (1.1)-(1.4) 的解会随时间趋于无穷而收敛到其稳态解。对于 c_0 和 c_1的多种取值，图1(ii)和(iii)分别展示了左边界（$x=0$）和右边界（$x=1$）的控制器值。我们观察到，随着时间增加，两个控制器的值都趋于零，这验证了引理 2.2 的结果。

接下来，我们考察多个不同 c_0、c_1 和 ρ取值下状态变量和控制输入的收敛阶。我们考虑 $h=\frac{1}{2048}$时的参考解。从表1中可以看出，状态变量的收敛阶为二，且当k 和 c_0、$c_1=0.1$取固定值时，对于不同的 h ，状态变量在 L^2 范数和 L^∞范数下的误差均会减小。此外，对于其他 c_0 和 c_1 取值，例如c_0、$c_1=10$，我们也得到了相同的收敛阶。因此，该收敛阶验证了定理 4.1 中关于状态变量的结果。此外，改变 ρ的取值时，状态变量在 L^2 范数和 L^∞范数下也具有相同的收敛阶。

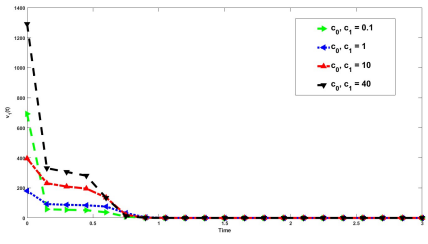
表2和表3列出了两种控制输入在空间方向上的误差和收敛阶。可以观察到，对于不同的 c_0 和 c_1 取值，收敛阶均为二。此外，误差在 L^∞-范数下递减。因此，表2和表3验证了定理 4.2 关于控制输入的理论结果。此外，我们注意到，对于不同的 ρ取值，左侧（$x=0$）边界和右侧（$x=1$）边界反馈控制器的收敛阶在L^∞-范数下均为二。



(i)



(ii)



(iii)

图1：例5.1：**（i）** L^2范数下不同 c_0 和 c_1取值对应的受控解和无控制解。**（ii）**左边界 $x=0$处，不同 c_0 和 c_1 取值对应的控制输入。**（iii）**右边界 $x=1$处，不同 c_0 和 c_1 取值对应的控制输入。

表1：在固定 $k = \frac{1}{1000}$值并改变 h 值的情况下，例5.1中状态变量的收敛阶（O.C.）。

h	$\|w - W\|_\infty$	O.C.	$\|w - W\|$	O.C.
$\frac{1}{8}$	$4.8695e-05$	$--$	$2.7887e-05$	$--$
$\frac{1}{16}$	$1.2323e-05$	1.98	$6.7868e-06$	2.03
$\frac{1}{32}$	$3.0955e-06$	1.99	$1.663e-06$	2.02
$\frac{1}{64}$	$7.7473e-07$	1.99	$4.1061e-07$	2.02
$\frac{1}{128}$	$1.9377e-07$	1.99	$1.0198e-07$	2.00
$\frac{1}{256}$	$4.8477e-08$	2.00	$2.5419e-08$	2.00

表2：在固定 $k = \frac{1}{1000}$ 值并改变 h 值的情况下，例5.1中控制输入的收敛阶， c_0， $c_1 = 0.1$

h	$\|v_0 - V_0\|_\infty$	O.C.	$\|v_1 - V_1\|_\infty$	O.C.
$\frac{1}{8}$	0.053	$--$	0.0180	$--$
$\frac{1}{16}$	0.0207	1.39	0.0099	0.86
$\frac{1}{32}$	0.0080	1.37	0.0047	1.07
$\frac{1}{64}$	0.0028	1.52	0.0016	1.58
$\frac{1}{128}$	$7.7891e-04$	1.85	$4.4462e-04$	1.85
$\frac{1}{256}$	$1.9991e-04$	1.96	$1.846e-04$	1.93
$\frac{1}{512}$	$4.9760e-05$	2.01	$3.1751e-05$	1.97

表3：例5.1中控制输入的收敛阶，考察 h 取不同值且 $k = \frac{1}{1000}$ 取固定值、 c_0， $c_1 = 10$的情形。

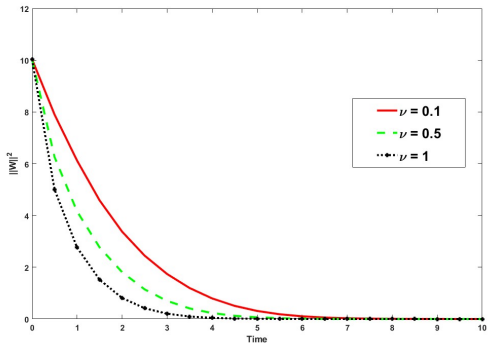
h	$\|v_0 - V_0\|_\infty$	O. C.	$\|v_1 - V_1\|_\infty$	O. C.
$\frac{1}{8}$	0.5905	$--$	0.2968	$--$
$\frac{1}{16}$	0.2897	1.03	0.1720	0.79
$\frac{1}{32}$	0.1275	1.18	0.0803	1.09
$\frac{1}{64}$	0.0436	1.55	0.0265	1.59
$\frac{1}{128}$	0.0120	1.86	0.0073	1.86
$\frac{1}{256}$	0.0031	1.96	0.0019	1.95
$\frac{1}{512}$	$7.6771e-04$	2.00	$5.0238e-04$	1.99

下一个例子展示记忆项对状态变量和控制输入的影响。此外，我们还展示扩散系数 ν 取不同值时状态变量和控制输入的变化情况。

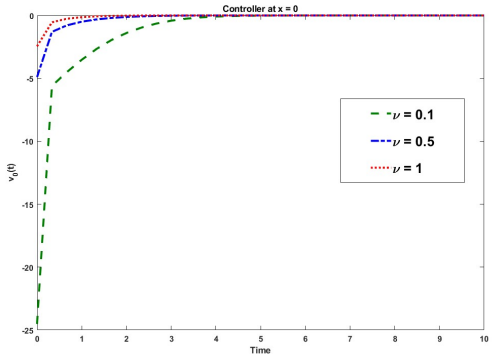
例5.2。 我们选取初始条件 $w_0(x) = 0.125\cos(\pi x) - w_d$，其中 $w_d = 1$。我们选择c_0, $c_1 = 0.1$, $\delta = 5$, 空间步长 $h = \frac{1}{100}$，以及时间步长 $k = \frac{1}{100}$。

图2展示了扩散系数的影响，同时其他参数保持不变。在图2（i）中，我们观察到，较大的 ν 会使状态变量随时间在 L^2-范数下更快衰减，因为此处衰减率为 $\alpha = \min\{\nu, \delta, (c_0 + w_d), (c_1 + w_d)\} = \nu$(的取值范围为0.1至

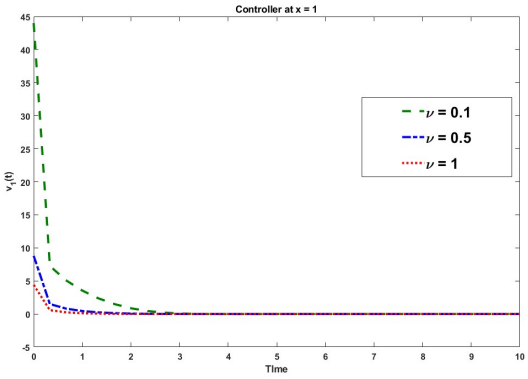
1）。此外，对于不同的 ν取值，图2（ii）和（iii）分别展示了左侧（$x=0$）边界和右侧（$x=1$）边界的控制器值。



(i)



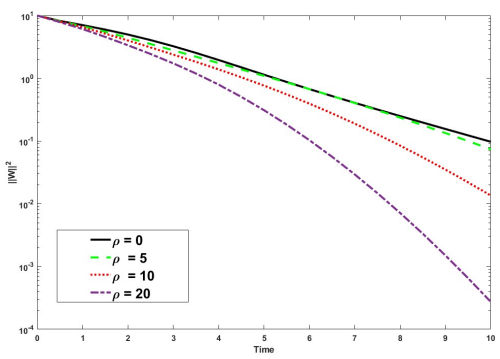
(ii)



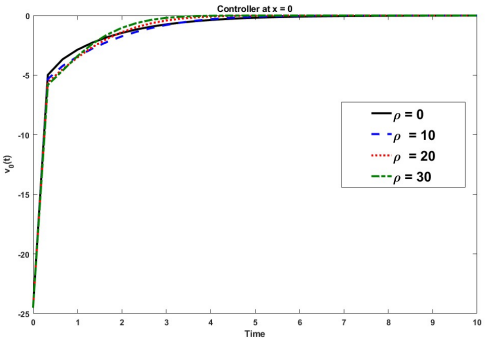
(iii)

图2：例5.2：**(i)** 不同 ν 取值、 $\rho=1$条件下的受控解的 L^2-范数。**(ii)** 左边界 $x=0$处，不同 ν 取值、 $\rho=1$ 条件下的控制输入。**(iii)** 右边界 $x=1$处，不同 ν 取值、 $\rho=1$ 条件下的控制输入。

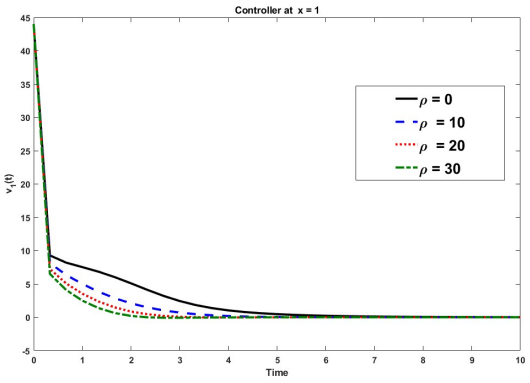
图3展示了在其他参数保持不变时，记忆项系数的影响。图3**(i)**中，我们注意到，对于 $\rho=0,$ **5**, **10**, **20**, , 在扩散系数 $\nu=0.1$ 固定的情况下，状态变量的 L^2-范数趋于零。特别地，我们看到，随着时间增加，黏性 Burgers 方程（$\rho=0$）的状态变量逐渐趋于零（更多详情见 [17] ）。然而，在存在记忆项时，我们观察到，随着 ρ 的增大，状态变量在 L^2-范数下更快地收敛至稳态解。图3**(ii)**和**(iii)**分别展示了在 $\nu=0.1$ 固定时，左边界（$x=0$）和右边界（$x=1$）在多个 $\rho=0,$ **10**, **20**,**30** 取值下的控制器值。随着 ρ 增大，控制器在瞬态阶段呈现出更快衰减至零的趋势。



(i)



(ii)



(iii)

图3：例5.2：**(i)** 半对数坐标下，不同 ρ 值时受控解的 L^2-范数（固定 $\nu = 0.1$）。**(ii)** 左边界 $x = 0$ 处，固定 $\nu = 0.1$ 时不同 ρ 值对应的控制输入。**(iii)** 右边界 $x = 1$ 处，固定 $\nu = 0.1$ 时不同 ρ 值对应的控制输入。

6 结论。

本研究的目标主要有两个方面。首先，我们利用控制李雅普诺夫泛函，分析了诺伊曼边界反馈控制下含记忆项的黏性 Burgers 方程的全局稳定化，并证明其在 L^2, H^1, 和 H^2-范数下稳定。其次，我们针对空间变量采用了 C^0-协调有限元方法，同时保持时间变量连续，并利用 Ritz-Volterra投影，对状态变量和反馈控制律建立了半离散格式的误差分析。我们证明了状态变量和控制输入的收敛阶为二。此外，我们还考察了记忆项对状态变量和反馈控制律的影响。本文的研究也为进一步探讨诺伊曼边界反馈控制律下其他类别的含记忆项非线性抛物型方程打开了大门。

致谢

Sudeep Kundu 衷心感谢印度政府科学与工程研究委员会（SERB）通过初创研究资助项目提供支持，项目编号：SRG/2022/000360。

声明

利益冲突。

作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] E. Allen、J. Burns、D. Gilliam、J. Hill 和 V. Shubov. 有限精度算术与灵敏度对偏微分方程数值解的影响，《数学与计算机建模》，35，1165-1195，2002年。[2] E. J. Allen、J. A. Burns 和 D. S. Gilliam. 具有 Neumann-Dirichlet边界条件的 Burgers方程所生成动力系统的数值近似，ESAIM. 数学建模与数值分析，47，1465–1492，2013年。[3] F. Abbasi 和 J. M. Velni. 参数变化条件下由 Burgers方程支配的系统的鲁棒非线性控制设计，IET控制理论与应用，12，582–592，2018年。[4] W. Akram 和 D. Mitra. 带记忆效应的黏性 Burgers方程的局部稳定化，演化方程与控制理论，11，939–973，2022年。[5] C. I. Byrnes、D. S. Gilliam 和 V. I. Shubov. 受控黏性 Burgers方程的全局动力学，《动力系统与控制系统杂志》，4，457–519，1998年。[6] J. A. Burns 和 S. Kang. 具有有界输入/输出的 Burgers方程控制问题，《非线性动力学》，2，235-262，1991年。[7] J. A. Burns 和 H. Marrekchi. 具有无界输入/输出算子的 Burgers方程的最优固定有限维补偿器，《计算与控制》第三卷（博兹曼，MT，1992），《系统控制理论进展》，15，83–104，Birkh¨auser Boston，波士顿，MA，1993年。[8] A. Balogh 和 M. Krstic. 具有非线性边界反馈的 Burgers方程： H^1 稳定性、适定性与仿真，《工程数学问题：理论、方法与应用》，6，189–200，2000年。[9] M. Bag、W. Akram 和 M. T. Mohan. 带记忆效应的广义 Burgers-Huxley方程的边界可稳定性，arXiv:2508.02654，2025年。[10] J. R. Cannon 和 Y. Lin. 先验 L^2 带记忆效应的非线性扩散方程有限元方法的误差估计，SIAM数值分析杂志，27，595-607，1990年。[11] L. C. Evans. 偏微分方程，数学研究生教材，澳大利亚数学会，普罗维登斯，RI，19，xviii+662，1998年。[12] G. Fairweather. 一类双曲型偏积分微分方程的样条配点法，SIAM数值分析杂志，31，444–460，1994年。

[13] M. E. Gurtin 和 A. C. Pipkin. 有限波速热传导的一般理论，《理性力学与分析档案》，31，113–126，1968年。[14] K. Ito 和 S. Kang. 流体动力学系统的耗散反馈控制综合，SIAM控制与优化杂志，32，831–854，1994年。[15] K. Ito 和 Y. Yan. 具有非线性通量反馈和全局吸引子的黏性标量守恒律，《数学分析与应用杂志》，227，271–299，1998年。[16] M. Krstic. 通过边界控制实现 Burgers 方程的全局稳定化，《系统与控制快报》，37，123–141，1999 年。[17] S. Kundu 和 A. K. Pani. 通过诺伊曼边界反馈控制律实现 Burgers方程全局稳定化的有限元逼近，《计算数学进展》，44，541–570，2018年。[18] S. Kundu 和 A. K. Pani. 通过非线性边界反馈控制律实现 BBM-Burgers型方程的全局稳定化：理论与有限元误差分析，《科学计算杂志》，81，845–880，2019年。[19] A. Khan、S. Mahajan 和 S. S. Rodrigues. 带记忆效应的线性抛物方程的动态输出反馈可稳定性，arXiv:2504.20235，2025年。[20] H. V. Ly、K. D. Mease 和 E. S. Titi. 黏性 Burgers方程的分布控制与边界控制，《数值泛函分析与优化：国际期刊》，18，143–188，1997年。[21] W. J. Liu 和 M. Krstic. 未知黏度下 Burgers方程的自适应控制，《国际自适应控制与信号处理杂志》，15，745–766，2001年。[22] L. Li、X. Zhou 和 H. Gao. 带记忆效应的热方程的稳定性与指数稳定化，《数学分析与应用杂志》，466，199–214，2018年。[23] Y. Lin. 非线性边界条件下非线性抛物型积分微分方程的 Galerkin方法，SIAM数值分析杂志，27，608-621，1990年。[24] Y. Lin. 具有可积核的线性抛物型积分微分方程的半离散有限元逼近，《积分方程与应用杂志》，10，51–83，1998年。[25] I. Munteanu. 通过边界反馈实现带衰减记忆的半线性热方程稳定化，《微分方程杂志》，259，454–472，2015年。[26] W. McLean 和 V. Thomee. 带正型记忆项的演化方程的数值解，澳大利亚数学会杂志B辑：应用数学，35，23–70，1993年。[27] B. Neta 和 J. O. Igwe. 求解非线性积分微分方程的有限差分与有限元方法比较，《数学分析与应用杂志》，112，607-618，1985年。[28] G. D. Prato 和 A. Lunardi. 积分微分抛物方程的可稳定性，《积分方程与应用杂志》，2，281–304，1990年。

[29] A. K. Pani 和 G. Fairweather。一种用于含正型记忆项演化方程的 H^1 -Galerkin 混合有限元方法，SIAM数值分析杂志，40，1475- 1490，2002年。[30] N. Smaoui。广义Burgers方程的非线性边界控制，《非线性动力学：工程系统中的非线性动力学与混沌国际期刊》，37，75–86，2004年。[31] N. Smaoui。黏性Burgers方程的边界与分布式控制，《计算与应用数学杂志》，182，91–104，2005年。[32] B. P. K. Sistla、W. Akram、D. Mitra 和 V. Natarajan。基于LQR的带记忆的热方程 $\omega-$ 稳定化，IMA数学控制与信息杂志，42，dnaf030，35，2025年。[33] B. K. Shivamoggi。浅水波的对称正则化长波方程，《流体物理学》，29，890–891，1986年。[34] V. Thomee。抛物型问题的Galerkin有限元方法，25，Springer科学与商业媒体，2007年。[35]H. Zhao、J. Zhang 和 J. Lu。一维抛物型积分微分方程的数值近似能控性，《数学与计算机在模拟中的应用》，204，575- 596，2023年。