arXiv:2602.01330v1 [quant-ph] 1 Feb 2026

面向量子-经典双核的可扩展张量网络模拟

Mei Ian Sam * 与 Tai-Yu Li †
*国立清华大学物理系，新竹，台湾
†国家应用研究院国家高速网络与计算中心，新竹，台湾

摘要——**本文提出了一种高效且可扩展的张量网络框架，用于量子核电路模拟，从而缓解量子比特数量和数据规模增加所带来的实际成本。该框架能够对多达784个量子比特的线性混合量子-经典双核进行系统性的大规模评估。以Fashion-MNIST为例，在特征维度从2到784的范围内，比较经典核、量子核与量子-经典双核在测试数据集上的分类性能，其中编码特征与量子比特之间采用一一映射。结果表明，量子-经典双核始终优于两种单核基线，在维度增加时保持稳定，并缓解了量子核中观察到的大规模性能退化。对所学混合权重的分析表明，在128个特征以下量子贡献占主导，而超过128后经典贡献变得愈发重要，这表明经典核在较低维度保留量子增益的同时，为对抗集中效应和硬件噪声提供了稳定锚点。**

索引词—**量子机器学习、量子核方法、张量网络模拟、支持向量机、多核学习**

I. 引言

近年来，深度学习与量子硬件的协同演进推动量子机器学习（QML）走到了跨学科研究的前沿，并催生出一系列近期学习范式，旨在保持在含噪中等规模量子设备（NISQ）[1], [2]上的实用性。代表性方向包括变分量子算法 [3]，、量子神经网络式架构[4]–[8]，、量子LSTM 等序列模型 [9]–[11]，、增强表达能力的数据重上传 [12]，，以及量子生成模型，例如量子生成对抗网络（qGAN） [13]和化学分子生成 [14]。在这些方法中，一个反复出现的主题是利用量子特征映射对数据进行编码，将其映射到高维希尔伯特空间，并在NISQ约束 [2]下于该空间中执行学习或相似性评估。

在这一领域中，量子核方法通常被视为一种相对稳健的近期发展路径，因为它们能够直接对接成熟的经典核学习器 [15]。量子特征映射会制备依赖于输入的量子态，态重叠提供核矩阵元素，而由此得到的核矩阵则由支持向量机等经典算法处理，从而形成量子支持向量机（QSVM）工作流程 [15], [16]。

近期研究已展示了基于量子核的建模在多种应用领域中的应用，从半导体工艺预测 [17]、自主材料科学工作流程 [18] ，到囚禁离子平台上的 QSVM 式分类与回归演示 [19]。进一步的拓展还包括肿瘤转移分类 [20]，、用于临床分期的高维神经影像处理流程 [21]，，以及网络安全场景下的无人机群入侵检测 [22]。

尽管发展迅速，量子支持向量机和量子核在NISQ区域仍面临根本性瓶颈。核值是通过含噪电路以有限的测量次数估算的，噪声增加或有效电路深度加大都会放大不确定性，削弱核可分性。更根本地说，多量子比特量子核可能出现指数级集中效应：随着量子比特数量增加，不同输入之间的相似度会趋近于近乎恒定的值，从而降低可学习性，并增加区分有意义差异所需的测量预算 [23], [24]。

引入可训练嵌入或变分核构造后，优化过程还可能受到贫瘠高原的影响，即梯度会随系统规模增大而迅速消失，导致训练难以奏效 [25]。这些挑战促使人们采用稳定化策略，将表达能力强的量子分量与可靠的经典结构结合起来。具体而言，量子-经典双核通过线性混合量子核与经典核，并将经典分量用作抵御集中效应的稳定锚点。这一思路也与多核学习相契合：多核学习通过学习由数据驱动的基础核组合，提升鲁棒性和泛化能力 [26], [27]。

实现可扩展且可复现结论的一大核心障碍是，大规模量子比特研究同时受到硬件噪声和经典模拟能力限制。状态矢量模拟需要指数级的内存和计算开销，使得在超过中等规模后，大规模核矩阵构造和受控诊断变得难以实现。张量网络（TN）模拟通过将电路表示为可收缩的张量图，并利用收缩路径优化和切片处理结构化电路族，提供了一种可扩展的替代方案 [28]–[30]。结合GPU加速和多GPU并行后，这些方法的效能将大幅提升 [31]。基于这一基础，本研究采用基于TN的多GPU并行模拟流程，通过张量收缩直接计算量子核矩阵元素，从而实现近乎无噪声且

† 通讯作者：2503001@niar.org.tw

可复现的评估，规模可达数百个量子比特乃至更高 [32]–[34]。

II. 方法

A. 数据预处理

所有结果部分的实验均使用 Fashion-MNIST [35] 数据集，其中每个 28×28 灰度图像都被展平为一个 784 维特征向量。数据集被随机划分为 80% 用于训练，20% 用于测试。首先使用零均值单位方差归一化对原始输入特征进行标准化，以消除不同维度间的尺度差异。

随后应用主成分分析（PCA） [36]对特征空间进行去相关处理，并将信息方差集中到低维表示中。为系统地研究输入维度对核性能的影响，保留前导 n 主成分以匹配不同的量子比特数，其中 n 范围为 2 至 784。

最后，将经主成分分析变换的特征使用最小-最大归一化重新缩放，使所有值映射到区间$[0, 1]$, ，以确保其在数值上兼容经典核计算和量子特征编码。

B. 用于分类的支持向量机

考虑训练集 $\{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^m$ ，其中 $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ 且 $y_i \in \{-1, +1\}$。支持向量机通过求解关于拉格朗日乘子 $\alpha_i \geq 0$[37] 的以下对偶优化问题进行训练:

$$\min_{\boldsymbol{\alpha}} \ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \alpha_j y_i y_j K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i, \tag{1}$$

满足以下约束

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i = 0, \qquad 0 \leq \alpha_i \leq C, \tag{2}$$

其中， $K(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)$ 表示核函数， C 是正则化参数，用于控制间隔最大化与分类误差之间的权衡。

在本研究中，我们采用径向基函数（RBF）核作为经典核，其定义如下:

$$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp\left(-\gamma \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2\right) \tag{3}$$

其中，超参数 γ 决定了对特征距离的灵敏度。

该对偶形式仅依赖于成对的核函数计算，因此无需显式构造高维表示，即可通过隐式特征映射实现非线性分类。

求解对偶优化问题并获得最优拉格朗日乘子 $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ 后，使用决策函数对新样本 $\mathbf{x}$进行分类

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = \text{sign}(f(\mathbf{x})) \tag{4}$$

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) + b \tag{5}$$

其中， $\hat{y}(\mathbf{x}) \in \{-1, +1\}$ 表示预测类别标签， b 是偏置项。

只有拉格朗日乘子不为零的训练样本$\alpha_i > 0$（称为支持向量）才会对决策函数产生贡献。 $f(\mathbf{x})$ 的值为正时对应类别 $+1$，值为负时则对应类别 -1。

由于原始支持向量机是针对二分类问题构建的，因此通过采用一对一（OAO）[38] 策略实现多分类预测。对于一个包含 K个类别的问题，训练了 $K(K-1)/2$ 个二分类支持向量机分类器。在推理阶段，每个分类器都会对两个类别中的一个投票，最终类别标签由所有成对分类器的多数投票结果决定。

C. 基于张量网络方法的量子支持向量机

图 1(A) 展示了量子支持向量机所采用的量子核评估流程。数据依赖的特征映射 $U(\mathbf{x})$ 将经典输入 $\mathbf{x}$ 嵌入一个由 n 个量子比特构成的量子态中

$$|\psi(\mathbf{x})\rangle = U(\mathbf{x}) \, |0\rangle^{\otimes n}, \tag{6}$$

量子核定义为重叠模平方

$$K_q(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = |\langle \psi(\mathbf{x}_i) \rangle \, \psi(\mathbf{x}_j)|^2 . \tag{7}$$

实际上，每个核矩阵元素都通过一个计算—反计算电路来估计: 该电路先应用 $U(\mathbf{x}_i)$，再应用 $U^\dagger(\mathbf{x}_j)$，从而构成复合酉算子

$$W(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = U^\dagger(\mathbf{x}_j) \, U(\mathbf{x}_i). \tag{8}$$

全零态返回振幅为

$$a(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \langle 0|^{\otimes n} \, W(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \, |0\rangle^{\otimes n}, \tag{9}$$

由此得到核值

$$K_q(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = |a(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)|^2. \tag{10}$$

所得核矩阵可直接用于标准支持向量机对偶形式，只需将经典核 $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ 替换为 $K_q(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ [15]。

图 1(B) 展示了本研究采用的特征映射结构。与全局纠缠设计不同，这里采用块乘积态（BPS）风格的电路，其中单量子比特数据编码层（例如哈达玛门和依赖于数据的旋转）与局部受限的块结构纠缠层交替排列。该设计基于这样一种观察：对于类图像数据，块结构（局部纠缠）电路仍具有良好的表达能力，同时更适合进行张量网络模拟。

为突破态矢量模拟能力上限来扩展核求值，我们将式（8）中的重叠电路转换为精确的张量网络：将每个量子门映射为一个张量，并收缩所得张量图，以求得式（9）中的 $a(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$。由于

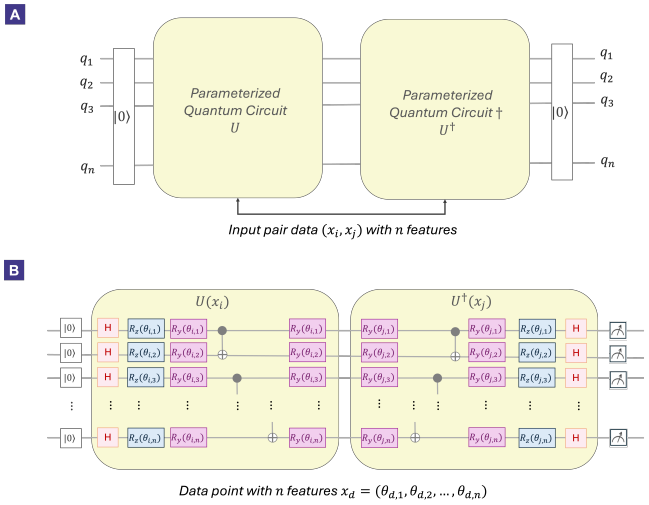

图 1. **量子支持向量机框架及其电路实现。** (A) 经典数据向量通过参数化电路 $U(x_i)$ 映射到量子态，其重叠通过 $U(x_i)U^\dagger(x_j)$ 获得。(B) 本工作所用特定参数化量子电路下量子支持向量机的张量网络可表示结构。每个数据均表示为量子电路的角度信息。

构建包含 m 个样本的核矩阵需要 $O(m^2)$ 次成对求值，因此我们按块计算矩阵项，并将其分配到多个 GPU 上并行进行张量网络收缩，从而降低峰值内存，并提升大规模量子支持向量机核矩阵构建的吞吐量 [33]。

D. 大规模量子-经典对偶支持向量机

遵循自适应量子-经典双核学习框架 [27], ，我们在统一的支持向量机优化方案中整合量子核矩阵与经典核矩阵，以利用两种特征空间的互补优势。整体工作流程如图 2 所示。

在数据预处理以及对经典核与量子核支持向量机模型进行独立训练之后，通过五折交叉验证得到最优量子核矩阵 K_q 与经典核矩阵 K_c，及其各自调优的超参数 C_q^*, C_c^*, γ^*。由于两种核均为正定且维度相同，它们可以线性组合以构建混合核：

$$K_{q-c} = \alpha^* K_q + (1-\alpha^*) K_c \tag{11}$$

其中，加权系数 $\alpha \in [0,1]$ 控制量子核与经典核各自的相对贡献。请注意， α 通过 5 折交叉验证进行优化，以最大化分类性能。随后，将得到的混合核用于标准支持向量机对偶形式，以训练最终分类器（从而使其优化后的 C_{q-c}^*）。这种双核方法有效平衡了量子特征映射的表达能力与经典核学习的稳健性，从而提升泛化性能。

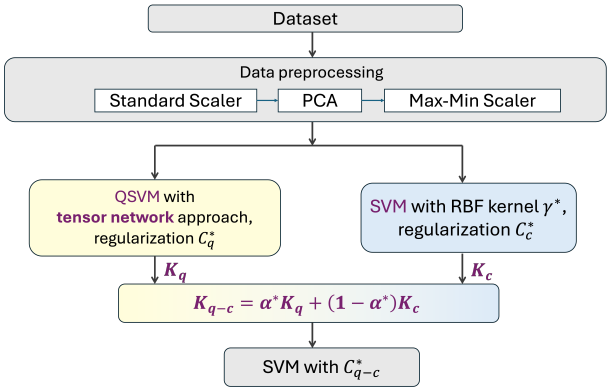

图2. **量子-经典双核支持向量机的框架。**数据首先通过标准缩放、主成分分析和最小-最大缩放进行预处理，随后使用基于张量网络方法的量子支持向量机与经典径向基函数支持向量机并行构建核。然后，量子 K_q 核与经典 K_c 核被线性组合，形成用于最终支持向量机分类的混合核 K_{q-c}。请注意，所有超参数（带 $*$的符号）均通过交叉验证选定。

然而，构建完整的核矩阵需要对大小为 m 的数据集进行 $O(m^2)$ 次成对求值。为控制内存占用并最大化GPU利用率，核矩阵按块计算。每个块（$i{:}i+B$, $j{:}j+B$）分配给一个 GPU工作进程，由其针对相应的数据对收缩张量网络（量子分支）或计算径向基函数值（经典分支），然后将生成的块写入主机内存。这种分块策略支持多GPU并行，并使得在整体求值变得不切实际的规模下仍可构建核矩阵。 [33]。

III. 结果

A. 二分类性能

我们首先在Fashion-MNIST数据集上，针对45个成对类别组合，评估经典核、量子核以及量子-经典双核的二分类性能。在本实验中，输入特征/量子比特的数量从低维情形增加到完整的784维表示，以评估模型在大规模设置下的性能。

图3(A)展示了全部45项任务的平均训练准确率随特征数量的变化。对于所有模型，训练性能均随维度增加而提升，反映出相应核特征空间的表达能力增强。

另一方面，图 3(B) 所示的平均测试准确率揭示了在较大特征维度下明显的过拟合区间。经典核的泛化性能相对稳定，而量子核的准确率则随着量子比特数量的增加而明显下降（从 $n = 128$ 开始），体现出模型较强的灵敏度。值得注意的是，量子-经典双核模型在整个特征维度/量子比特数量范围内均保持较高的测试准确率，并且平均而言始终优于两个单独的核模型。

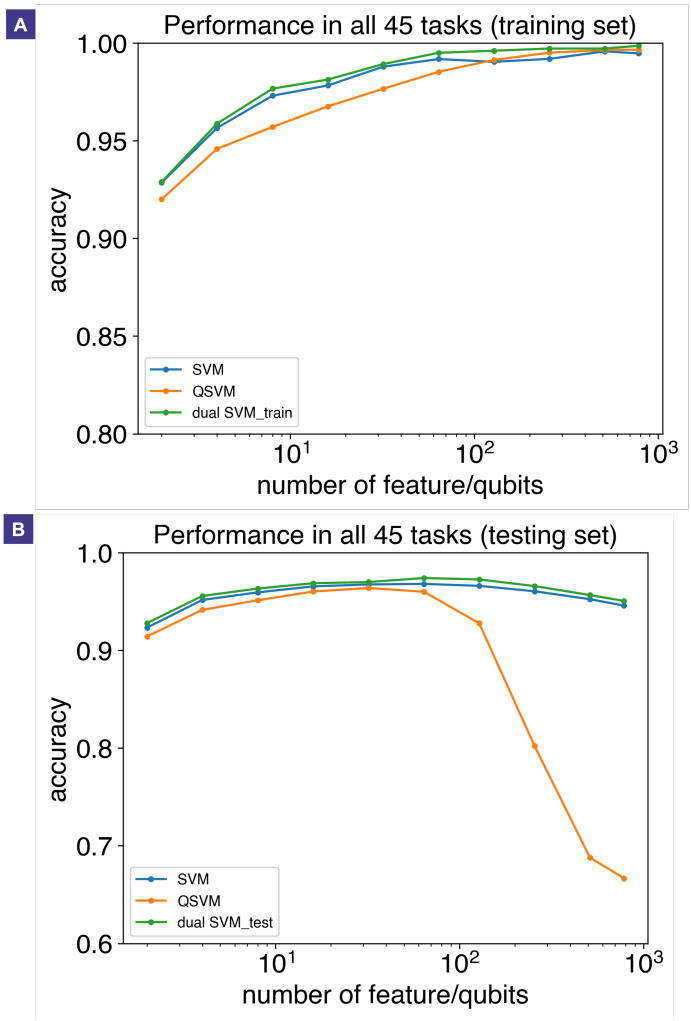

图3. **在 Fashion-MNIST 数据集的 45 项二分类任务中，经典核、量子核和量子-经典双核的准确率随特征数/量子比特数的变化。**（A）训练集性能表明，所有模型的准确率均随特征维度升高而提高。（B）测试集性能起初随模型复杂度增加而改善，但在较大的 n 处因过拟合而下降，量子核模型尤为严重。在所有量子比特区间内，量子-经典双核始终取得更高的平均准确率，体现了其作为混合优化方法的稳健性。

这些结果表明，仅提高特征维度并不能保证泛化性能得到改善，尤其是对于表达能力较强的量子核而言。通过在统一的双重优化框架中结合经典核与量子核，量子-经典双核能够有效平衡表达能力与稳健性，从而在二分类任务中实现更优且更稳定的性能。

B. 多分类性能

我们进一步评估经典核、量子核和量子-经典双核在 Fashion-MNIST 数据集上的多分类性能。我们重点关注具有 $n = 64$ 个特征/量子比特的模型，其中

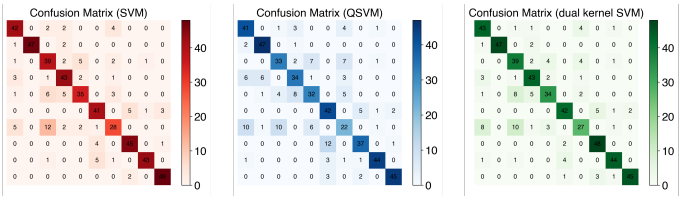

图4. **Fashion-MNIST 10 类分类在 $n = 64$ 处的混淆矩阵，比较支持向量机、量子支持向量机和双核支持向量机。**经典支持向量机与双核支持向量机的分类性能相当，且二者均优于纯量子核模型。

表I 在 $n = 64$处多分类预测的分类性能指标。

模型	准确率	F1 分数	灵敏度	召回率
SVM	0.822	0.821	**0.980**	0.822
QSVM	0.754	0.751	0.973	0.754
双核支持向量机	**0.824**	**0.822**	**0.980**	**0.824**

如图 3(A) 中的训练表现所示，不同核模型中的所有二分类器都已得到充分训练。

图4展示了三个模型对应的混淆矩阵。经典核和量子-经典双核呈现出明显的对角线优势，而量子核的非对角线元素数量更多，表明类别间存在显著混淆。

定量性能指标汇总于表I。经典核和量子-经典双核的总体准确率相当（分别为0.822和0.824），且均显著优于准确率为0.754的量子核。F1 分数也呈现类似趋势：量子-经典双核略优于经典基线，同时保持较高的灵敏度。值得注意的是，经典核和量子-经典双核模型均保持了较强的召回性能，而量子核在所有评估指标上均明显下降。

总体而言，这些结果表明，在特征维度适中的情况下，量子-经典双核方法既保留了经典核学习稳健的泛化能力，又缓解了高表达能力量子核在多分类中的性能不稳定问题。

C. 加权系数的影响 α

本节研究核加权系数 α 对特征维度固定为 $n = 64$ 的双核支持向量机在 Fashion-MNIST 数据集二分类任务中的性能影响。针对每项任务，独立调节 α 以评估测试准确率，报告的结果为所有任务的平均准确率。

如图 5 所示，平均测试准确率随着 α 偏离纯经典区间而先提高，随后在 α 的中间取值处保持较高水平。这一结果表明，适量的量子核能够提升分类性能（相比之下，单独使用经典核时性能较低）。然而，

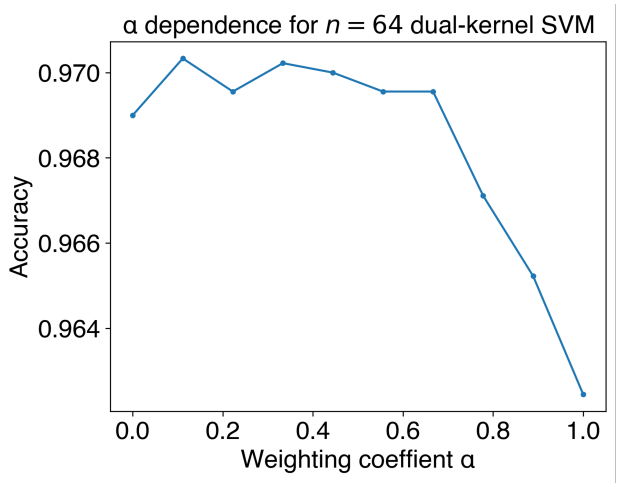

图5. **双核支持向量机的平均测试准确率随加权系数 α 在 $n = 64$ 45个二分类任务上的变化**。准确率曲线显示，在中间的 α 取值处性能最佳，而在趋近于纯量子核的区域，性能则有所下降。

当 α 接近 1、量子核占主导地位时（$\alpha \geq 0.778$），准确率明显下降，这反映出量子核的泛化性能有所降低。

这些观察结果表明，经典核与量子核的均衡整合能够带来最佳性能。相比之下，量子核占主导地位会产生过于复杂的特征表示，从而降低模型的泛化能力。这与在特征维度较高时观察到的过拟合现象一致。

IV. 结论与讨论

本研究结合精确的张量网络收缩与多GPU并行技术，提出了一种可扩展且可复现的大规模量子–经典双核学习框架，使量子核矩阵构建和支持向量机训练能够扩展至784个量子比特。在统一的支持向量机对偶目标函数下，所提出的双核将数据依赖量子核与经典径向基函数核线性结合，为在大规模量子比特场景中平衡表达能力与稳定性提供了一种实用机制。

核心结论是，仅提高量子比特维度并不能保证量子核支持向量机获得更好的泛化能力。尽管所有模型的训练准确率都会随着维度增加而提高，但纯量子核量子支持向量机在规模增大时会变得愈发脆弱，而双核模型在整个范围内始终保持稳健。与其说这种改进源于复杂度的增加，不如说是经典分量发挥了稳定锚点的作用，在量子核出现规模引发的性能下降时维持可学习性。加权分析也支持这一观点：最佳性能出现在中间混合比例，而量子分量占主导时，性能则会下降。

总体而言，这些结果将量子–经典双核集成定位为一种低开销的稳定化策略，用于近期量子核学习，尤其是在大量子比特效应和噪声敏感性限制可靠性的情况下。未来工作应探索固定线性混合之外的自适应与正则化感知核组合，并将性能评估与核诊断相结合。将实验扩展到更具挑战性的数据集和显式噪声模型，将进一步阐明量子分量何时能提供超越强经典基线的独特优势。

致谢

本研究获得台湾国家科学及技术委员会（NSTC）的经费支持。作者谨此感谢台湾国家应用研究院国家高速网络与计算中心提供计算与存储资源。本研究得以顺利完成，有赖于国家应用研究院（NIAR）国家高速网络与计算中心提供的学术资源与先进研究基础设施。我们由衷感谢他们给予的宝贵支持。

参考文献

[1] J. Biamonte、P. Wittek、N. Pancotti、P. Rebentrost、N. Wiebe和S. Lloyd，“量子机器学习”，*Nature*，第549卷，第7671期，第195–202页，2017年。[2] J. Preskill，“NISQ时代及以后的量子计算”，《*Quantum*》，第2卷，第79页，2018年。[3] M. Cerezo、A. Arrasmith、R. Babbush、S. C. Benjamin、S. Endo、K. Fujii、J. R. McClean、K. Mitarai、X. Yuan、L. Cincio和P. J. Coles，“变分量子算法”，《自然综述：物理》，第3卷，第625–644页，2021年。[4] N. Killoran、J. Izaac、N. Quesada、V. Bergholm、M. Amy和C. Weedbrook，“连续变量量子神经网络”，《物理评论研究》，第1卷，第3期，第033063页，2019年。[5] A. Ning、T.-Y. Li和N.-Y. Chen，“量子逐点卷积：一种灵活且可扩展的神经网络增强方法”，载于*2025*年量子通信、网络与计算国际会议，第371–378页，IEEE，2025年。[6] A. Ning、T. Y. Li和N. Y. Chen，“量子图注意力网络：一种用于图学习的新型量子多头注意力机制”，*arXiv*预印本 *arXiv:2508.17630*，2025年。[7] Y.-C. Hsu、K.-C. Chen、T.-Y. Li和N.-Y. Chen，“用于通道注意力的量子自适应激励网络与变分量子电路”，*arXiv*预印本 *arXiv:2507.11217*，2025年。[8] C.-W. Wang、M. I. Sam、T.-L. Kuo、N.-Y. Chen和T.-Y. Li，“Mpm-qir：通过变分量子电路实现量子图像表示与压缩的测量概率匹配”，*arXiv*预印本 *arXiv:2601.03855*，2026年。[9] S. Y.-C. Chen、S. Yoo和Y.-L. L. Fang，“量子长短期记忆网络”，*arXiv*预印本 *arXiv:2009.01783*，2020年。[10] Y.-C. Hsu、Li, Tai-Yu、Chen和Kuan-Cheng，“基于量子核的长短期记忆网络”，载于*2025*年*IEEE*国际声学、语音与信号处理会议研讨会，第1–5页，IEEE，2025年。[11] Y.-C. Hsu、N.-Y. Chen、T.-Y. Li、P.-H. H. Lee和K.-C. Chen，“用于气候时间序列预测的基于量子核的长短期记忆网络”，载于*2025*年量子通信、网络与计算国际会议，第421–426页，IEEE，2025年。[12] A. P´erez-Salinas、A. Cervera-Lierta、E. Gil-Fuster和J. I. Latorre，“用于通用量子分类器的数据重上传”，《*Quantum*》，第4卷，第226页，2020年。[13] C. Zoufal、A. Lucchi和S. Woerner，“用于学习与加载随机分布的量子生成对抗网络”，《*npj*量子信息》，第5卷，第1期，第103页，2019年。

[14] L.-Y. Chen、T.-Y. Li、Y.-P. Li、N.-Y. Chen和F. You，“在NISQ时代利用受化学启发的动态量子电路探索化学空间”，Journal of Chemical Theory and Computation，第21卷，第13期，第6653–6665页，2025年。[15] M. Schuld和N. Killoran，“特征希尔伯特空间中的量子机器学习”，Physical Review Letters，第122卷，040504，2019年4，第 期，第 页。[16] V. Havlı́ček、A. D. C´orcoles、K. Temme、A. W. Harrow、A. Kandala、J. M. Chow和J. M. Gambetta，“基于量子增强特征空间的监督学习”，Nature，第567卷，第209–212页，2019年。[17] Z. Wang、F. Wang、L. Li、Z. Wang、T. van der Laan、R. C. C. Leon、J.-K. Huang和M. Usman，“面向半导体制造的量子机器学习：氮化镓高电子迁移率晶体管接触工艺建模”，arXiv预印本 arXiv:2409.10803，2024年。[18] F. Adams、D. Zhu、D. W. Steuerman、A. G. Kusne和I. Takeuchi，“面向自主材料科学的量子核机器学习”，arXiv预印本 arXiv:2601.11775，2026年。[19] T. Suzuki、T. Hasebe和T. Miyazaki，“囚禁离子量子计算机上用于分类与回归的量子支持向量机”，Quantum Machine Intelligence，2024年。[20] T. Y. Li、V. R. Mekala、K. L. Ng和C. F. Su，“使用基于量子核的算法对肿瘤转移数据进行分类”，载于IEEE 第22届国际生物信息学与生物工程会议论文集，第351–354页，IEEE，2022年。[21] K.-C. Chen、Y.-T. Li、T.-Y. Li、C.-Y. Liu、P.-H. Li和C.-Y. Chen，“Compressedmediq：面向高维神经影像数据的混合量子机器学习流程”，arXiv预印本 arXiv:2409 08584，2024年。[22] K.-C. Chen、S. Y.-C. Chen、T.-Y. Li、C.-Y. Liu和K. K. Leung，“面向无人机集群入侵检测的量子机器学习”，arXiv预印本 arXiv:2509.01812，2025年。[23] S. Thanasilp、S. Wang、M. Cerezo和Z. Holmes，“量子核方法中的指数集中”，Nature Communications，第15卷，第1期，2024年。[24] S. Thanasilp、S. Wang、M. Cerezo和Z. Holmes，“量子核方法中的指数集中”，arXiv预印本 arXiv:2208 11060，2022年。[25] J. R. McClean、S. Boixo、V. N. Smelyanskiy、R. Babbush和H. Neven，“量子神经网络训练景观中的贫瘠高原”，Nature Communications，第9卷，第1期，第4812页，2018年。[26] S. S. Vedaie、M. Noori、J. S. Oberoi、B. C. Sanders和E. Zahedinejad，“量子多核学习”，arXiv预印本 arXiv:2011 09694，2020年。[27] D. Phassadawongse和S. J. Turner，“使用自适应量子-经典双核的支持向量分类与回归”，载于2025年IEEE量子计算与工程国际会议（QCE），2025年。[28] I. L. Markov和Y. Shi，“通过收缩张量网络模拟量子计算”，SIAM Journal on Computing，第38卷，第3期，第963–981页，2008年。[29] F. Pan和P. Zhang，“使用大批量张量网络方法模拟量子电路”，Physical Review Letters，第128卷，第3期，第030501页，2022年。[30] M. I. Sam、T.-L. Kuo和T.-Y. Li，“面向可扩展Grover算法的迭代矩阵乘积态模拟”，arXiv预印本，2026年。[31] H. Bayraktar、A. Charara、D. Clark、S. Cohen、T. Costa、Y.-L. L. Fang、Y. Gao、J. Guan、J. Gunnels、A. Haidar、A. Hehn、M. Hohnerbach、M. Jones、T. Lubowe、D. Lyakh、S. Morino、P. Springer、S. Stanwyck、I. Terentyev、S. Varadhan、J. Wong和T. Yamaguchi，“cuQuantum SDK：用于加速量子科学的高性能库”，载于2023年IEEE量子计算与工程国际会议（QCE），第1050–1061页，2023年。[32] K.-C. Chen、T.-Y. Li、Y.-Y. Wang、S. See、C.-C. Wang、R. Wille、N.-Y. Chen、A.-C. Yang和C.-Y. Lin，“cuTN-QSVM：基于cuQuantum SDK、由cuTensorNet加速的量子支持向量机”，arXiv预印本，2024年。[33] K.-C. Chen、T.-Y. Li、Y.-Y. Wang、S. See、C.-C. Wang、R. Wille、N.-Y. Chen、A.-C. Yang和C.-Y. Lin，“验证大规模量子机器学习：使用张量网络对量子支持向量机进行高效模拟”，Machine Learning: Science and Technology，第6卷，第1期，第015047页，2025年。[34] A. Astuti、C.-C. Shih、W.-K. Ng、C. See和C.-H. Li，“通过神经量子嵌入与张量网络提升量子支持向量分类器的性能与速度”，载于2025年第二届国际医学、健康与护理人工智能会议 *(AIxMHC)*，第 50–53 页，IEEE，2025年。[35] H. Xiao、K. Rasul 和 R. Vollgraf，“Fashion-MNIST：用于机器学习算法基准测试的新型图像数据集”，*arXiv* 预印本 *arXiv:1708.07747*，2017年。[36] H. Abdi 和 L. J. Williams，“主成分分析”，《*Wiley*跨学科评论：计算统计学》，第 2 卷，第 4 期，第 433–459 页，2010年。[37] L. Bottou、C.-J. Lin 等人，“支持向量机求解器”，《大规模核机器》，第 3 卷，第 1 期，第 301–320 页，2007年。[38] R. Debnath、N. Takahide 和 H. Takahashi，“一种基于决策的一对一多类支持向量机方法”，《模式分析与应用》，第 7 卷，第 2 期，第 164–175 页，2004年。