arXiv:2602.01336v1 [math.AP] 1 Feb 2026

周期度量图上具有组合非线性的非线性薛定谔方程的基态

NICOLA SOAVE 和 LORENZO VILLATA

Abstract. 我们研究了在 1-周期和 2-周期度量图上，具有给定质量的基态对于带组合非线性的非线性薛定谔能量的存在性。这自然延续了此前的相关研究：一方面研究周期图上的齐次非线性薛定谔方程，另一方面研究具有有限个顶点和边的非紧度量图上的组合非线性非线性薛定谔方程。与后一种情形一样，不同非线性之间的相互作用会带来相较于齐次情形的新现象；但由于周期性的影响，这些现象呈现出截然不同的方式。尤其是在 2-周期图上，会出现所谓的维数交叉现象。

作为一项附带成果，我们将正方形网格与蜂窝网格上齐次非线性薛定谔方程的已有结果推广到一般的 2-周期图。此外，我们还改进了此前关于具有有限个顶点和边的非紧图上非齐次非线性薛定谔方程的研究结果。

1. Introduction

本文研究带有组合非线性项的 NLS 能量在

$$E_{p,q,\alpha}(u,\mathcal{G}) := \int_{\mathcal{G}} \left(\frac{1}{2}|u'|^2 - \frac{1}{p}|u|^p - \frac{\alpha}{q}|u|^q \right) dx, \tag{1.1}$$

质量约束下基态的存在性

$$u \in H^1_\mu(\mathcal{G}) := \left\{ u \in H^1(\mathcal{G}) : \int_{\mathcal{G}} |u|^2 \, dx = \mu \right\},$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}$， $2 < q < p \leq 6$），并且 $\mathcal{G}$ 是非紧的周期性 度量图。度量图是通过将有限条闭线段粘合在一起，并将其中一些端点彼此等同而得到的连通度量空间，这些线段就是图的边。这些端点则是图的顶点 。任意有界边 e 都可与一个闭有界区间 $[0, \ell_e]$ （其中 ℓ_e 是 e 的长度）相对应，而无界边则与闭半直线 $[0, +\infty$（的一份拷贝）相对应。本文聚焦于 1-周期和 2-周期性 度量图；相关定义见下文的定义2.1 ，但其基本思想是：图 $\mathcal{G}$ 若由一个固定紧致图（即周期单元）的无穷多个拷贝构成，并沿一个或两个不平行方向将它们粘合在一起，则称其为 1-周期或 2-周期图。典型例子包括梯子型图和方格网。

当前研究是对 [26], 的自然延续，其中考察了具有有限条边和顶点的非紧度量图上带有组合非线性的 NLS 能量。任何此类图都至少包含一条半直线，而在这里，根据周期性，我们假设 $\mathcal{G}$ 具有无限多条边和顶点，且不含半直线。这与 [26], 形成了显著差异，因为

2020 *Mathematics Subject Classification.* 35R02、35Q55（主要），81Q35、35A15（次要）。*Key words and phrases.* 非线性薛定谔方程；周期度量图；组合非线性；基态；L^2-临界；维数交叉。Nicola Soave 是 INDAM-GNAMPA 小组成员，并部分获得 PRIN 项目（编号：2022R537CS）资助。该项目名为“NO^3 ——节点优化、非线性椭圆方程、非局部几何问题，重点关注正则性”，CUP 编号 D53D23005930006，由欧盟下一代欧盟通过 PRIN 2022 计划资助（意大利大学与研究部 2022 年 2 月 2 日第 104 号法令）。

正如在齐次情形中已经观察到的那样，该情形在 [1–3,15] 中进行了研究；周期情形则见 [4–6]，非紧非周期情形见 [14,16,27,28]（相关结果还可参见）。

如上所述，函数 $u\colon \mathcal{G}\to\mathbb{R}$ 可与一组函数向量 $\{u_{\mathrm{e}}\}$对应，其中每个u_{e} 都定义在相应的区间 $[0,\ell_{\mathrm{e}}]$ 上（若 e 无界，则定义在 $[0,+\infty$上）。在每条边上赋予勒贝格测度后，可以自然地定义 $\mathcal{G}$上的 L^p 空间，记为 $L^p(\mathcal{G})$，其范数为

$$\|u\|^p_{L^p(\mathcal{G})}=\sum_{\mathrm{e}}\|u_{\mathrm{e}}\|^p_{L^p(\mathrm{e})}.$$

索伯列夫空间 $H^1(\mathcal{G})$定义为满足以下条件的函数 $u:\mathcal{G}\to\mathbb{R}$：对每个 e，均有 $u_{\mathrm{e}}\in H^1([0,\ell_{\mathrm{e}}])$，且 u 在 $\mathcal{G}$ 上连续（特别地，若一个顶点 v 属于多条边，则相应函数 u_{e} 在 v 处取相同的值）；$H^1(\mathcal{G})$中的范数自然定义为

$$\|u\|^2_{H^1(\mathcal{G})}=\sum_{\mathrm{e}}\|u_{\mathrm{e}}'\|^2_{L^2(\mathrm{e})}+\|u_{\mathrm{e}}\|^2_{L^2(\mathrm{e})}.$$

在这一框架下，质量为 μ 的基态是指问题的极小值解

$$\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu,\mathcal{G}):=\inf_{u\in H^1_\mu(\mathcal{G})}E_{p,q,\alpha}(u,\mathcal{G}). \tag{1.2}$$

值 $\mathcal{E}_{p,\,q,\,\alpha}(\mu,\ \mathcal{G})$ 称为基态能级。显然，在寻找基态时，只需考虑实值函数。

基态 态以及其他临界点$E_{p,\,q,\,\alpha}(\cdot,\ \mathcal{G})$在 $H^1_\mu(\mathcal{G})$约束下，对于某个 $\lambda\in\mathbb{R}$，满足驻态 LS方程 方程

$$-u''+\lambda u=|u|^{p-2}u+\alpha|u|^{q-2}u \tag{1.3}$$

在每条边上成立；此外，在每个顶点处都满足基尔霍夫条件，即要求所有出射导数之和为零（见 [4, 命题3.3]）。过去十年间，对度量图上的非线性薛定谔方程的研究引起了广泛关注。从数学角度来看，与经典的欧几里得情形相比，该问题呈现出许多有趣的新特征（例如见 [4–6]）。此外，从物理角度来看，图上的非线性演化也被证明具有重要意义（例如见 [7,10,31]）。关于周期图上的薛定谔方程，感兴趣的读者可参阅 [17,18]；关于线性方程，另见 [9, 第 4] 章。非线性问题已在 [25], 中得到研究，其中作者考察了一个具体的1-周期图实例；在 [24], 中，作者在一般周期图上通过内哈里流形采用固定频率方法（这种方法不能直接有效地处理固定质量问题）；在 [15], 中，一般1-周期图上的固定质量齐次问题得到研究；在 [3]和 [2], 中，固定质量齐次问题分别在二维方格网格和六边形网格上得到研究；此外，[1], 涉及空间立方网格上的该问题。

关于具有组合非线性的非线性薛定谔方程，相关文献浩如烟海，我们仅简要列举部分研究成果（有兴趣的读者可参阅其中的参考文献，以获得更全面的了解）：关于其在$\mathbb{R}^d$中的动力学性质的详细分析，参见 [32]；关于束缚态和基态的存在性与稳定性，参见 $\mathbb{R}^d$；关于有限条边和顶点的非紧度量图上的基态存在性，参见 [26]；关于具有局域非线性的同一问题，参见 [23]；关于标准非线性与逐点 δ 非线性相结合的双重非线性方程，参见 [8,11,12,22]。这些研究均表明，不同非线性项之间的相互作用，相较于齐次情形，呈现出更为丰富的图景。

现在我们更详细地讨论与本研究直接相关的结果。我们的研究起点一方面是关于周期图上相应齐次问题的结果；另一方面是对具有有限条边和有限个顶点的非紧图上组合非线性 NLS 能量的研究。

齐次问题通过在（ $\alpha = 0$ 中取1.1）得到。注意， q 的选取无关紧要，我们采用以下记号

$$E_p(u,\mathcal{G}) := E_{p,q,0}(u,\mathcal{G}) \quad \text{and} \quad \mathcal{E}_p(\mu,\mathcal{G}) = \mathcal{E}_{p,q,0}(\mu,\mathcal{G}). \tag{1.4}$$

众所周知，所谓的 L^2-临界指数 $p = 6$ 发挥着重要作用：它将次临界情形 $p < 6$与超临界情形 $p > 6$区分开来。在次临界情形中，对于任意 $\mu > 0$，泛函 E_p 在 $H^1_\mu(\mathcal{G})$ 中有下界；而在超临界情形中，对于任意 μ， E_p 在 $H^1_\mu(\mathcal{G})$ 中的下确界为 $-\infty$ 。这一现象与 Gagliardo-Nirenberg不等式密切相关，是具有L^2-约束的一维问题的典型特征。在高维 $d \geq 2$中， L^2-临界指数为 $2 + 4/d$。对于 $p = 6$，我们则有： E_p 仅当质量 μ 小于临界阈值 $\tilde{\mu}_\mathcal{G}$时，才在 $H^1_\mu(\mathcal{G})$ 上有下界；该阈值通过适当的拓扑性质取决于 $\mathcal{G}$ ：例如，对于具有有限条边的非紧图，在 [6] 中证明了

$$\tilde{\mu}_\mathcal{G} := \begin{cases} \mu_{\mathbb{R}+} = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi & \text{if } \mathcal{G} \text{ contains a terminal point,} \\ \mu_{\mathbb{R}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi & \text{if } \mathcal{G} \text{ does not contain any terminal point;} \end{cases} \tag{1.5}$$

我们回顾一下，终端点是度为 1 的顶点（即与单条边相连的顶点），而终端边是含有终端点的边。 $\mu_{\mathbb{R}+}$ 和 $\mu_{\mathbb{R}}$ 分别是半直线和实直线的临界阈值。此外，下确界 $\mathcal{E}_6(\mu, \mathcal{G})$ 不一定能达到，即使 $\mathcal{E}_6(\mu, \mathcal{G}) > -\infty$ （见 [6] ）。

回到周期情形，文献 [15], 研究了 1-周期齐次情形，而文献 [3] 和 [2] 分别研究了方格网格和蜂窝网格中的 2-周期情形。在文献 [15], 中，研究表明，对于 1-周期图，其情形与具有有限条边的图在某种程度上相似：质量为 μ 的基态在次临界情形 $p < 6$下总是存在；而在临界情形下，泛函 E_6 可能没有极小化子，即使它有下界，这也是由于紧性缺失所致；值得注意的是，对于某些类别的图（例如具有终端点的图），下确界 $\mathcal{E}_6(\mu, \mathcal{G})$ 永远无法达到，而与 μ的取值无关（见下文定理3.2）。

对于正方形或蜂窝网格 [2,3] 上的问题，情况要复杂得多。由于 2-周期性，单条边的局部一维性质与图的整体二维性质相互作用：其思路是，度量图由一个紧核沿两个非平行方向复制而成，因此 Gagliardo-Nirenberg 不等式既可以按一维版本证明，也可以按二维版本证明，从而产生混合行为。这种现象称为“维数交叉”，并已在 [2,3] 中所考察的特定图上得到严格确立。因此，在这类情形下，对于每个 μ 都存在基态的次临界区域仅为 $p \in (2, 4)$（注意，4 是二维临界指数）；对于 $p \in [4, 6)$，尽管 $\mathcal{E}_p(\cdot, \mathcal{G}) > -\infty$ 对每个 $\mu > 0$ 都成立（这是由一维 Gagliardo-Nirenberg 不等式得出的），但只有当质量足够大时，下确界才能取到（这是由二维 Gagliardo-Nirenberg 不等式得出的）。至于 L^2-临界情形 $p = 6$，则会出现与 1-周期情形中已观察到的类似现象。

关于具有组合非线性的非线性薛定谔方程能量的基态存在性，即对于 $\mathcal{E}_{6,\, q,\, \alpha}(\mu, \mathcal{G})$，其中 $\alpha \in \mathbb{R}$， $q \in (2, 6)$，以及 $\mathcal{G}$ 具有有限条边和顶点的非紧图，该问题在 [26]中得到了研究。其思路是理解次临界扰动项 $\alpha\|u\|^q_{L^q(\mathcal{G})}/q$ 的加入如何影响相关临界泛函$E_6(\cdot\,, \mathcal{G})$的基态存在性，这与 Brezis-Nirenberg 问题的精神相一致；在这一视角下，我们注意到，如果 $\mathcal{G}$是具有有限条边和顶点的非紧图，那么与 $\mathcal{E}_{p,\, q,\, \alpha}(\mu, \mathcal{G})$相关的问题对于 $2 < q < p < 6$将是纯次临界的，因此与齐次次临界情形非常相似；基于这一原因，在 [26] 中，分析仅限于 $p = 6$的情形，而本研究中维数交叉使得 p 的其他取值也值得关注。由 [26] 可知，根据扰动是聚焦的（$\alpha > 0$）还是散焦的（$\alpha < 0$），会出现两种显著不同的情形。在聚焦情形下，临界效应与次临界效应以如下方式结合：正如在临界情形中，

存在一个关于质量的临界阈值 $\tilde{\mu}_{\mathcal{G}}$，超过该阈值时，基态能级为 $-\infty$。对于低于 $\tilde{\mu}_{\mathcal{G}}$的质量，基态可能存在，也可能不存在；无论 $\alpha > 0$ 的确切取值如何，通常都可以调整次临界方法来回答这一问题（有关更多细节，请参见 [26] 中的定理 1.1、推论 1.2 和 1.3，以及命题 1.4 和 1.5）。相比之下，散焦情形 $\alpha < 0$ 对于基态的存在性不太有利，也更类似于纯临界情形。存在整类的图，其基态能级从未被取到；即使齐次问题存在基态，非齐次问题也仅在扰动系数绝对值足够小时保留这一性质 $|\alpha|$（详见 [26]中的定理 1.6 和 1.7）。

本文的主要目标是分析 1-周期图和 2-周期图上组合非线性的情形，特别关注维数交叉所发挥的作用。在此过程中，我们还将针对非常一般的一类 2-周期图，推广齐次 2-周期问题所得的结果（目前这些结果仅适用于方形网格和六边形网格）。我们指出，始终将聚焦于 $2 < q < p \leq 6$ 情形。就基态的存在性而言，$p > 6$ 的情形并不重要，因为容易验证基态能级始终为$-\infty$。

聚焦情形下的主要结果 $\alpha > 0$。在下文中，我们始终假设 $2 < q < p \leq 6$，恕不另行说明。第一个陈述描述了泛函$E_{p,\ q,\ \alpha}(\cdot,\ \mathcal{G})$ 在 $H^1_\mu(\mathcal{G})$ 上的下有界性。

命题 1.1。设 $\mathcal{G}$ 是一个1 周期或2周期图，且 $\alpha > 0$。若 $p < 6$ 且 $\mu > 0$，或 $p = 6$ 且 $\mu \in (0,\ \tilde{\mu}_{\mathcal{G}})$，则 $E_{p,\ q,\ \alpha}(\cdot, \mathcal{G})$ 在 $H^1_\mu(\mathcal{G})$中有下界且是强制的。反之，若 $p = 6$ 且 $\mu \geq \tilde{\mu}_{\mathcal{G}}$，则有 $\mathcal{E}_{p,\ q,\ \alpha}(\mu, \mathcal{G}) = -\infty$。

现在我们关注所有满足 $\mathcal{E}_{p,\ q,\ \alpha}(\mu,\ \mathcal{G}) > -\infty$ 的情形下基态的存在性。我们从 1 周期情形开始。与此前在 [26], 中观察到的情况类似，聚焦次临界扰动有利于基态的存在。特别是，与齐次能量 E_6不同，当 $\mu < \tilde{\mu}_{\mathcal{G}}$时，泛函 $E_{6,\ q,\ \alpha}$ 在 $H^1_\mu(\mathcal{G})$ 中始终不会失去紧性，这使我们得以证明以下结论：

定理 1.2. 设 $\mathcal{G}$ 是一个1-周期度量图，$\alpha > 0$，且满足 $p < 6$ 和 $\mu > 0$，或 $p = 6$ 和$\mu \in (0,\ \tilde{\mu}_{\mathcal{G}})$。那么

$$-\infty < \mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu, \mathcal{G}) < 0$$

并且存在一个质量为 μ 的基态。

注1.3. 我们注意到，与 [15] 中所考虑并在定理3.1、3.2中回顾的齐次情形不同，只要 $E_{p,\ q,\ \alpha}$ 在 $H^1_\mu(\mathcal{G})$ 上有下界，具有组合非线性的聚焦情形就表现为次临界行为。

对于 2-周期度量图 $\mathcal{G}$，泛函 $E_{p,\ q,\ \alpha}$ 也会发生维数交叉。因此，只有当 $q < 4$ 时才会出现纯次临界情形。

定理 1.4. 设 $\mathcal{G}$ 是一个2-周期度量图，$\alpha > 0$，$q \in (2,4)$，$p > q$，且满足 $p < 6$ 和 $\mu > 0$，或 $p = 6$ and $\mu \in (0, \tilde{\mu}_{\mathcal{G}})$。然后

$$-\infty < \mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu, \mathcal{G}) < 0$$

并且存在一个质量为 μ 的基态。

当 $q \in [4, 6)$，通过引理 $\mu_{p,\ q,\ \alpha,\ \mathcal{G}}$ 引入了另一个临界质量 4.6，并且以下定理成立。

定理 1.5. 设 $\mathcal{G}$ 是一个2-周期度量图，$\alpha > 0$ 且满足 $4 \leq q < p < 6$ 和 $\mu > 0$，或$4 \leq q < p = 6$ 和 $\mu \in (0,\ \tilde{\mu}_{\mathcal{G}})$。那么存在一个阈值 $\mu_{p,\ q,\ \alpha,\ \mathcal{G}} > 0$，其中 $\mu_{6,\ q,\ \alpha,\ \mathcal{G}} < \tilde{\mu}_{\mathcal{G}}$，使得出现以下几种情形：

(1) 若 $\mu < \mu_{p,\ q,\ \alpha,\ \mathcal{G}}$，则质量为 μ 的基态能级无法达到；*(2)* 若 $\mu > \mu_{p,\ q,\ \alpha,\ \mathcal{G}}$，则存在质量为 μ的基态；*(3)* 若 $\mu = \mu_{p,\ q,\ \alpha,\ \mathcal{G}}$，则对于 $q > 4$，存在质量为 $\mu_{p,\ q,\ \alpha,\ \mathcal{G}}$的基态。

$$-\infty < \mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu, \mathcal{G}) < 0$$

$$\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu_{p,q,\alpha,\mathcal{G}}, \mathcal{G}) = 0$$

对情形 $q = 4$, $\mu = \mu_{p,\ 4,\ \alpha,\ \mathcal{G}}$ 的分析仍是一个未解决问题。

我们强调，质量的存在区间取决于 α。相较于 [26], 中的结果，这是一项新颖特征；在该文中，对于 $\alpha > 0$，存在性或不存在性总是出现在与 α 本身大小无关的质量区间上。从这一角度来看，自然有必要研究当 α 变化时$\mu_{p,\ q,\ \alpha,\ \mathcal{G}}$ 的行为。

定理 1.6。 在定理 *1.5*的假设下，设 $\mu_{p,\ q,\ \alpha,\ \mathcal{G}} > 0$ 如上所述，并设 $\mu_{r,\ \mathcal{G}}$ 为指数 $r \in [4, 6]$对应的临界质量，其定义见下文的 (2.8) 和 (3.12)。若 $q \in (4, 6)$，则有

$$\mu_{p,q,\alpha,\mathcal{G}} < \min\left\{\mu_{p,\mathcal{G}},\ \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{2}{q-2}} \mu_{q,\mathcal{G}}\right\},$$

而对于 $q = 4$

$$\mu_{p,4,\alpha,\mathcal{G}} < \mu_{p,\mathcal{G}} \quad and \quad \mu_{p,4,\alpha,\mathcal{G}} \leq \frac{\mu_{4,\mathcal{G}}}{\alpha}.$$

此外，我们有 $\mu_{p,\ q,\ \alpha,\ \mathcal{G}} \geq \mu_{p,\ q,\ \bar{\alpha},\ \mathcal{G}}$，其中后者定义为唯一解 to

$$1 - \left(\frac{t}{\mu_{p,\mathcal{G}}}\right)^{\frac{p-2}{2}} - \alpha\left(\frac{t}{\mu_{q,\mathcal{G}}}\right)^{\frac{q-2}{2}} = 0.$$

特别地，$\mu_{p,\ q,\ \alpha,\ \mathcal{G}} \to 0^+$ 当 $\alpha \to +\infty$ 时，以及 $\mu_{p,\ q,\ \alpha,\ \mathcal{G}} \to \mu_{p}^{-}{}_{,\ \mathcal{G}}$ 当 $\alpha \to 0^+$ 时。

从启发式角度来看，这表明扰动参数 α 越大，对应的存在区间也越大。另一方面，若 $\alpha \to 0^+$，则情况趋于齐次问题。

注 1.7. 在证明定理 1.5 和1.4时，我们还将使用齐次情形下已知的结果 $\alpha = 0$ 在 $\mathcal{G}$上的结果。目前，这类结果仅在 $\mathcal{G}$ 为正方形 [3] 或蜂窝结构 [2] 网格时得到证明。因此，作为进一步的结果，我们将把 [2, 3] 中的主要定理推广到一般的 2- 周期图（见定义 2.1 以及下文的定理 3.5 和 3.7 ）。这项研究本身也具有独立意义。

散焦情形下的主要结果 $\alpha < 0$。 下面的陈述类似于 [26, 定理 1.6 和 1.7(i)], ，阐明了泛函 $E_{p,\ q,\ \alpha}$ 的下有界性以及紧性丧失。同样，我们始终假设 $2 < q < p \leq 6$。

命题 1.8。 设 $\mathcal{G}$ 是一个1 或2-周期度量图，且 $\alpha < 0$。以下结论成立：

(1) 若 $p < 6$ 且 $\mu > 0$，则且 $E_{p,\ q,\ \alpha}(\cdot,$ $\mathcal{G})$ 在 $H^1_\mu(\mathcal{G})$中是强制的。*(2)* 若 $p = 6$ $-\infty < \mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu, \mathcal{G}) \leq 0,$ 且 $\mu > \tilde{\mu}_{\mathcal{G}}$，则

$$\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu, \mathcal{G}) = -\infty.$$

(3) 若 $p=6$ 且 $\mu\in(0,\ \tilde{\mu}_{\mathcal{G}}]$，则

$$-\infty<\mathcal{E}_{6,q,\alpha}(\mu,\mathcal{G})\leq 0.$$

此外，如果 $\mu\in(0,\ \mu_{6,\ \mathcal{G}}]$，其中 $\mu_{6,\ \mathcal{G}}$ 定义于下文的 (2.8)，则 $\mathcal{E}_{6,\ q,\ \alpha}(\mu、\ \mathcal{G})=0$，且基态能级无法达到。

这意味着，基态的存在性仅可能出现在 $p\in(2,\ 6)$ 中，或者出现在 $p=6$ 满足$\mu\in(\mu_{6,\ \mathcal{G}},\ \tilde{\mu}_{\mathcal{G}}]$（类比于 [26]）的情形下；我们指出，该区间可能为空，在这种情况下，我们可以立即得出结论：对于 $p=6$，基态永远不存在。当 $\mathcal{G}$ 具有一个终端点时，情况正是如此，因为 $\tilde{\mu}_{\mathcal{G}}=\mu_{\mathbb{R}^+}=\mu_{6,\ \mathcal{G}}$（关于后一个等式，请参见 [6]）。此外，即使 $\mathcal{G}$ 没有终端点，在满足某个拓扑条件时，$(\mu_{6,\ \mathcal{G}},\ \tilde{\mu}_{\mathcal{G}}]$ 也可能为空。例如，如果下文的假设 (H) 成立（即该图具有环覆盖），那么 $\tilde{\mu}_{\mathcal{G}}=\mu_{\mathbb{R}}=\mu_{6,\ \mathcal{G}}$，再次参见 [6]。

在 [26, 定理 1.7 (ii)], 中，研究有趣的情形 $p=6$ with $\mu\in(\mu_{6,\mathcal{G}},\mu_{\mathbb{R}}]$时，证明了临界值 $\alpha=\alpha(\mathcal{G},q,\mu)<0$ 的存在，使得：

(i) 若 $\bar{\alpha}<\alpha$，则 $E_{6,q,\alpha}(\cdot,\mathcal{G})$ 在 $H^1_\mu(\mathcal{G})$ 中失去紧性，且未达到基态能级；(ii) 若 $\alpha<\alpha<0$，则存在一个能量为负的基态。

在当前设定下也会出现类似的情形。我们将 $\alpha=\alpha(\mathcal{G},p,q,\bar{\mu})$ 定义为

$$\bar{\alpha}:=\text{满足 }\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu,\mathcal{G})\text{ 的 }\{\alpha<0\text{ 下确界；}<0\}=\text{满足 }\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu,\mathcal{G})\text{ 的 }\{\alpha<0\text{ 上确界}=0\},\tag{1.6}$$

其中 $\bar{\alpha}$:$\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu,\mathcal{G})$ 对每个 $\alpha<0$ 都成立；而 α:$\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\bar{\mu},\mathcal{G})$ 对每个 $\alpha<0$ 都成立。

定理 1.9。设 $\mathcal{G}$ 是一个 1 或 2-周期度量图，并且或者 $p<6$ 满足 $\mu>0$，或者 $p=6$ 满足$\mu\in(\mu_{6,\ \mathcal{G}},\ \mu_{\mathbb{R}}]$。再设 $\bar{\alpha}$ 由 (1.6) 定义。则：

(1) $\bar{\alpha}=0$ 当且仅当 $\mathcal{E}_p(\mu,\mathcal{G})=0$；*(2)* 若 $\alpha<0$，则：(i) 对于 $\alpha<\alpha$，则 $E_{p,q,\alpha}(\cdot,\mathcal{G})$ 在 $H^1_\mu(\mathcal{G})$ 上没有基态；(ii) 对于 $\alpha<\alpha<0$，则存在一个基态，其对应于 $E_{p,q,\alpha}(\cdot,\mathcal{G})$，并位于 $H^1_\mu(\mathcal{G})$ 上。*(3)* 由此得到 $\alpha>-\infty$，此外，在 H^1_μ 中存在 $E_{p,q,\alpha}(\cdot,\mathcal{G})$ 的一个基态。

我们强调，在 [26], 中，关于 $E_{p,\ q,\ \alpha}$ 在 H^1_μ 中基态的存在性，以及当 $\mu=\mu_{\mathbb{R}}$ 时 $\alpha>-\infty$的事实，曾被视为未解决问题，而在这里我们也能够处理这些情形。事实上，我们的方法还可以推广到具有有限条边的非紧致图，从而对 [26]中的这类未解决问题给出明确答案：

定理 1.10. 若 $\mathcal{G}$ 是具有有限条边的非紧致度量图，$p=6$，且 $\mu\in(\mu_{6,\mathcal{G}},\mu_{\mathbb{R}}]$，则$\alpha>-\infty$，并且对于$E_{6,q,\alpha}$，存在一个基态。

回到周期情形，下面给出几点说明：

注 1.11. 固定一个图和一个质量后，只要相应的齐次问题能够处理，前面的结论便针对散焦情形给出了具体结果。特别地，结合命题 1.8 和定理 1.9 以及第 3 节的结果（这些结果涉及齐次情形），便可较为全面地了解 1-周期图和 2-周期图上的散焦区域。为简洁起见，我们在此考虑两个具体例子。

1) 设 $\mathcal{G}$ 是一个带有终端点的 1-周期图。于是，根据 [15], ，对于每个 $p\in(2,6)$和 $\mu>0$，在 $\mathcal{G}$上存在 $\mathcal{E}_p(\mu,\mathcal{G})$的一个基态。因此，根据定理 1.10-(2)，存在$\alpha<0$，使得对于每个 $q\in(2,p)$和 $\alpha\in[\alpha,\bar{0})$，$\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu,\mathcal{G})$也满足同样的结论；而对于 $\alpha<\alpha$，则不存在基态。此外，若 $p=6$，则区间 $(\mu_{6,\mathcal{G}},\tilde{\mu}_{\mathcal{G}}]$ 为空（两个值均等于$\mu_{\mathbb{R}^+}$），并且对于任何 $\mu>0$ 和 $\alpha<0$，都不存在基态。

2）令 $\mathcal{G}$ 为方格网；齐次问题已在 [3]中研究。若 $p\in(2,4)$，则对每个 $\mu>0$，$\mathcal{E}_p(\mu,\mathcal{G})<0$ 在 $\mathcal{G}$上都存在一个基态。因此，根据定理 1.10，存在 $\alpha<0$，使得对每个 $q\in(2,p)$ 和 $\alpha\in[\bar{\alpha},0)$，$\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu,\mathcal{G})$也满足同样的结论；而当 $\alpha<\alpha$ 时，不存在基态。若 $p\in[4,6)$，则仅当 $\mu>\mu_{p,\mathcal{G}}$（定义于

（式（3.12））时，$\mu \le \mu_{p,\mathcal{G}}$满足 $\mathcal{E}_p(\mu,\mathcal{G}) = 0$。因此，根据定理 1.10，当 $\mu > \mu_{p,\mathcal{G}}$且 $q \in (2,p)$ 时，我们可以像之前一样定义 $\alpha < 0$，并且当 $\alpha \in [\alpha, 0)$ 时基态存在，而当 $\alpha < \alpha$时基态不存在。相反，当 $\mu \le \mu_{p,\mathcal{G}}$时，有 $\alpha = 0$，因此对任意 $\alpha < 0$，$\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu,\mathcal{G})$ 都不存在基态。最后，已知对于 $p = 6$，$\mathcal{E}_6(\mu,\mathcal{G}) = 0$ 适用于 $\mu \le \mu_{\mathbb{R}}$。因此，对于任意这样的 μ，仍有 $\alpha = 0$，且散焦问题始终不存在基态。

注 1.12。定理 1.9 在某种意义上具有扰动性质。特别是，$\mathcal{G}$ 为 1 或 2-周期这一事实，仅在齐次问题的分析中才会用到。实际上，为了与本文其余部分保持一致，我们陈述了适用于 1-周期图和 2-周期图的定理 1.9。然而，对于一般的 d-周期图，只要 $d \ge 1$，该结果同样成立，且证明相同。

显然，正如已经指出的，分析齐次问题是必要的。对于满足 $d \ge 3$ 的 d-周期图，目前只有三维立方网格这一情形已得到研究；参见 [1]。

论文结构与记号。在第2节中，我们汇总了一些将在本文其余部分频繁用到的预备结果。在第3节中，我们陈述并证明齐次问题的已有结果与新结果。第4 节和第5 节分别用于证明聚焦情形和散焦情形下的主要结果。

以下讨论均在固定的度量图 $\mathcal{G}$ 上进行，我们常常在 $L^p(\mathcal{G})$、$H^1(\mathcal{G})$、$E_{p,q,\alpha}(\mu,\mathcal{G})$、$\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu,\mathcal{G})$ 等记号中省略符号 $\mathcal{G}$，简写为 L^p、H^1、$E_{p,q,\alpha}(\mu)$、$\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu)$ 等；此外，有时我们也用 $\|\cdot\|_p$、$\|\cdot\|_{H^1}$ 代替$\|\cdot\|_{L^p(\mathcal{G})}$、$\|\cdot\|_{H^1(\mathcal{G})}$。

2. 预备知识

We s先回顾周期图 的形式化定义，见 [9, 第 4 节。1], 另请参见 [15, 21].

定义 2.1. 设度量图 $\mathcal{G}$ 的顶点集为 $\mathcal{V}$、边集为 $\mathcal{E}$。如果存在 $\mathbb{Z}^d$ 在 $\mathcal{G}$ 上的群作用，使得该图是 d-周期或 $\mathbb{Z}^d$-周期的，

$$
\begin{aligned}
+ : \mathbb{Z}^d \times \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G} \\
(g,x) &\longmapsto g + x
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

满足以下条件：

- $\forall g \in \mathbb{Z}^d$，函数 $x \mapsto g + x$ 是图自同构，即将顶点映射为顶点、边映射为边，并保持长度不变；
- 作用是自由的，即 $\forall g \in \mathbb{Z}^d, x \in \mathcal{G}$，若 $g + x = x$ 则 $g = 0$;
- 作用是离散的，也就是说，$\forall x \in \mathcal{G}$，存在 x 的一个邻域 U，使得 $g + x \notin U$ 对所有$g \neq 0$成立；
- 作用是余紧的，即存在一个紧致度量图 $K \subseteq \mathcal{G}$，使得 $\mathcal{G} = \bigcup_{g\in\mathbb{Z}^d} (g + K)$。我们将称这个子集 K 为基本域。

注 2.2. 在 [9], 中，并不要求基本域本身是一个度量图，只要求它是 $\mathcal{G}$的一个紧致子集。紧致图是指具有有限条边和有限个顶点，且每条边长度有限的图。显然，在附加假设任意两个顶点之间的距离都有一个正下界（参见 [9]中的“有限球条件”——假设 1.3.5）的情况下，要求基本域为一个子图并不构成限制。

本文重点研究 1-周期和 2-周期度量图。正如 [9,第 4 节1], 中所指出的，我们总可以认为，任何此类图 $\mathcal{G}$ 都嵌入在 $\mathbb{R}^3$实数集中，其作用是沿着属于格 $\mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{Z}^2$的同构像的向量进行整数平移。采用这一观点通常很方便。

下面我们将证明一个基础结果，该结果将在多个步骤中使用。

引理 2.3。 若 $\mathcal{G}$ 是一个 d-周期度量图，我们总可以选择一个基本域 K 以及定义 $+$ 中的一个作用 2.1 ，使得

$$K \cap (g+K) = \emptyset \text{ for all } g \in \mathbb{Z}^d \text{ with } \|g\|_\infty \geq 2, \tag{2.2}$$

其中 $\|\cdot\|_\infty$ 是通常的 上确界 范数。

证明。 令 K 为定义 2.1中的基本域；首先，我们希望说明，如果有必要将 K 替换为 $\mathcal{G}$的一个更大的子图，我们可以假设

$$K \cap (g+K) \neq \emptyset \quad \forall g: \ \|g\|_\infty = 1. \tag{2.3}$$

如果情况并非如此，我们固定 $x_0 \in \mathcal{V}(K)$，并对任意满足 $\|g\|_\infty = 1$ 的 g，考虑一条路径 $\gamma_{x_0,\, g}$，它连接 x_0 与 $g + x_0$。接着我们取

$$K' := K \cup \bigcup_{\|g\|_\infty = 1} \gamma_{x_0, g}.$$

由于 $g + x_0 \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$，这是 $\mathcal{G}$ 的一个子图；根据构造， $K' \cap (g + K') \neq \emptyset \quad \forall g: \quad \|g\|_\infty = 1$。现在我们重新记 $K' = K$，并令

$$s_K := \min \{ n \in \mathbb{N} | \ \text{if } \|h\|_\infty \geq n \implies (h+K) \cap K = \emptyset \};$$

这个值表示 $h \in \mathbb{Z}^d$ 的 ∞-范数需要多大，才能使 $(h + K)$ 不与 K 相交。我们指出， s_K 是有限的。否则，存在一个序列 $\{g_n\} \subseteq \mathbb{Z}^d$，满足 $\|g_n\|_\infty \to +\infty$，使得 $K \cap (g_n + K) \neq \emptyset$。这反过来将意味着存在一个序列 $\{x_n\} \subset K$，使得对每个 n 都有 $-g_n + x_n \in K$。由于 K 是紧的，抽取子序列后，$\{x_n\}$ 和 $\{-g_n + x_n\}$ 都收敛。但是，由于 $\|g_n\|_\infty \to \infty$，而 $\{x_n\}$ 有界，这是不可能的。

现在，由（2.3）可知 $s_K \geq 2$。若 $s_K = 2$，则证明完成。否则，我们的思路是定义一个更大的基本域，如下所示：令

$$\tilde{K} = \bigcup \{ g + K \text{ such that } \|g\|_\infty < s_K, \text{ with } g_i \geq 0 \ \forall i \in \{1 \dots n\} \}$$

并考虑定义在 $\mathcal{G}$ 上的新群作用 $\mathbb{Z}^d$：

$$\begin{aligned} +' : \mathbb{Z}^d \times \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ (g, x) &\longmapsto g +' x := s_K g + x. \end{aligned}$$

这定义了同一个 d-周期图 $\mathcal{G}$，并且我们声称：

(i) K 是一个基本域（相对于新的作用 $+'$）；

(ii) 当用 K 和 $+'$ 替代 K 和 $+$时，条件（2.2）成立。

事实上，首先

$$\begin{aligned} &x \in \mathcal{G} \implies \exists h \in \mathbb{Z}^d, y \in K \text{ such that} \\ &x = h + y = s_K g + t + y \text{ for some } g, t \in \mathbb{Z}^d \text{ with } \|t\|_\infty < s_K \text{ and } t_i \geq 0 \text{ for every } i, \end{aligned}$$

对向量 h 的分量进行欧几里得除法，得到 g 和 t。这意味着 $\tilde{K}$ 是一个基本域，因为 $t + y \in K$。

此外，我们可以验证 $s_{\tilde{K}} = 2$。假设

$$\emptyset \neq (h +' \tilde{K}) \cap \tilde{K} = (s_K h + \tilde{K}) \cap \tilde{K}.$$

那么 $\exists h_1, \ h_2 \in \mathbb{Z}^d$的分量均为正，且满足 $\|h_1\|_\infty, \ \|h_2\|_\infty < s_K$并且

$$(h_1 + s_K h + K) \cap (h_2 + K) \neq \emptyset \iff (h_1 - h_2 + s_K h + K) \cap K \neq \emptyset,$$

由此我们推得

$$s_K > \|h_1 - h_2 + s_K h\|_\infty \geq s_K \|h\|_\infty - \|h_1 - h_2\|_\infty \geq s_K \|h\|_\infty - s_K \tag{2.4}$$

（最后一个在等号成立，因为 $\|h_1\|_\infty, \ \|h_2\|_\infty < s_K$ 且它们的分量均为正）。最后，（2.4) 蕴含 $\|h\|_\infty < 2$，也就是说 $s_{\tilde{K}} = 2$，如所述。 □

注 2.4. 我们强调，证明给出了一种构造性方法，可在结论并非显而易见时，求得一个基本域 K 和一个满足引理陈述的作用 $+$。

例如，考虑如下二周期图：沿坐标轴 x 和y 进行平移，将图1左侧所示的基本域 K 复制平移。鉴于可以将2-周期图视为嵌入于 $\mathbb{R}^3$中的图，在此情形下， K 由单位正方形以及一条连接 $(0,\ 1/2,\ 0)$ 与 $(2,\ 1/2,\ 0)$ 的曲边组成。我们可以假设，除端点外，这条边完全位于半空间$\{z>0\}$内，并且不与其平移副本相交。

如果我们取 K作为基本域，并令作用由通常的、沿 $(1,\ 0,\ 0)\simeq(1,\ 0)$ 和 $(0,\ 1,\ 0)\simeq(0,\ 1)$ 的平移（以及它们的倍数）给出，则条件 (2.2) 将不成立，因为 $(2,\ 1/2,\ 0)\in K\cap((2,\ 0)+K)$ 。

˜另一方面，显然在这种情况下 $s_K=3$。因此，我们按照证明中的方式定义 K 。这样，我们得到限制在 $[0,3]\times[0,3]\times\{0\}$ 上的单位方格网，以及九条连接 $(0,1/2,0)$ 与 $(2,1/2,0)$、$(1,1/2,0)$ 与 $(3,1/2,0)$ 等点的曲边。对于作用，我们不再使用由 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 的倍数所给出的平移，而是考虑新的作用 $+'$，它由˜按 $(3,0)$ 和 $(0,3)$（及其倍数）进行的平移给出。根据构造， K和 $+'$可分别用作生成 $\mathcal{G}$ 的基本域和作用，并且对它们，引理 2.3 的结论成立。

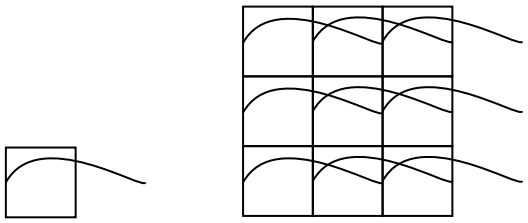


FIGURE 1. 左侧为基本域 K，右侧为新的基本域 $\tilde{K}$。

2.1. **Gagliardo-Nirenberg不等式与临界质量**。在研究非线性薛定谔型能量的极小化（更一般地说，寻找临界点）时，一个关键要素是 Gagliardo-Nirenberg不等式。在欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$ 中，它的形式为

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p\le K_{p,d}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{p-\alpha}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{\alpha}\quad\text{where}\quad\alpha=\frac{d(p-2)}{2},\tag{2.5}$$

对每个 $u\in H^1(\mathbb{R}^d)$，当 $p\in[2,2d/(d-2))$ 时，若 $d\ge3$ 且 $p\in[2,+\infty)$，则 $d=1,\ 2$（参见 [13, 定理 1.3.7]）。

对于一般的非紧度量图，Gagliardo-Nirenberg不等式对 $d=1$ 成立（例如参见 [5,命题 2.1]）：存在一个最优常数 $C_{q,\ \mathcal{G}}>0$ ，它取决于 q 和 $\mathcal{G}$ ，使得

$$\|u\|_{L^q(\mathcal{G})}^q\le C_{q,\mathcal{G}}\|u\|_{L^2(\mathcal{G})}^{\frac{q+2}{2}}\|u'\|_{L^2(\mathcal{G})}^{\frac{q-2}{2}}\qquad\forall u\in H^1(\mathcal{G}).\tag{2.6}$$

具体而言，$C_{q,\ \mathcal{G}}$ 的特征式为

$$C_{q,\mathcal{G}}=\sup_{u\in H^1(\mathcal{G})\setminus\{0\}}\frac{\|u\|_{L^q(\mathcal{G})}^q}{\|u\|_{L^2(\mathcal{G})}^{\frac{q+2}{2}}\|u'\|_{L^2(\mathcal{G})}^{\frac{q-2}{2}}}.$$

该不等式对 $q=\infty$ 同样成立：可得到

$$\|u\|_{L^\infty(\mathcal{G})}\le C_{\infty,\mathcal{G}}\|u\|_{L^2(\mathcal{G})}^{\frac12}\|u'\|_{L^2(\mathcal{G})}^{\frac12}\qquad\forall u\in H^1(\mathcal{G}).\tag{2.7}$$

由 L^2-临界指数 $q = 6$ 所得到的最优常数发挥着重要作用：定义与 $\mathcal{G}$ 相关的临界质量 $\mu_{\mathcal{G}} = \mu_{6,\mathcal{G}}$ 为

$$\mu_{\mathcal{G}} = \mu_{6,\mathcal{G}} := \sqrt{\frac{3}{C_{6,\mathcal{G}}}}. \tag{2.8}$$

这个值区分了临界情形下存在与不存在的情况；特别参见 [6]。处理临界问题时，回顾以下修正的 *Gagliardo-Nirenberg* 不等式也很有用：

引理 2.5 ([6]中的引理 4.4**)。假设是非紧的且没有终端点，并令(**$\mathcal{G}$**)**，其中 $\mu \in (0, \mu_{\mathbb{R}}]$。那么存在 $\theta_u \in [0, \mu]$ 使得

$$\|u\|^6_{L^6(\mathcal{G})} \leq 3\left(\frac{\mu - \theta_u}{\mu_{\mathbb{R}}}\right)^2 \|u'\|^2_{L^2(\mathcal{G})} + C_{\mathcal{G}}\theta_u^{\frac{1}{2}},$$

其中 $C_{\mathcal{G}} > 0$ 仅依赖于 $\mathcal{G}$。

前述不等式是在边数有限的非紧度量图上证明的，但证明中的论证在周期情形下也适用。特别是，[6] 中的引理 4.4 的证明依赖于一条从给定点 $x_0 \in \mathcal{G}$出发、长度无限的路径 Γ 的存在。这条路径通过将 x_0 与 $\mathcal{G}$的一条半直线的顶点相连而构造得到。在我们的情形中， $\mathcal{G}$ 是 d-周期的，且不包含任何半直线；不过，正如 [15], 中已经指出的，只需稍作修改即可调整这一论证。

3. The homogeneous problem on periodic graphs

本节有两个目的。一方面，我们回顾关于 1-周期图的已知结果；另一方面，我们将文献 [2, 3], 中针对正方形网格与蜂窝网格得到的结果扩展并推广到一般的 2-周期图。回顾一下，对于齐次问题，我们使用记号 E_p 和 $\mathcal{E}_p$，它们在（1.4）中引入。

3.1. 1-周期情形。

文献 [15], 研究了 1-周期图上的临界与次临界情形，并得到了以下主要结果。

定理3.1 （文献 [15]中的定理 1.1）。 设 $\mathcal{G}$ 为一个1-周期度量图，且 $2 < p < 6$。那么，对于每个$\mu > 0$，都有 $\mathcal{E}_p(\mu, \mathcal{G}) < 0$，并且存在一个基态。

文献 [15], 也研究了 $p = 6$的临界情形，其中关于 $\mathcal{G}$ 的以下拓扑假设起着关键作用：

(H)：从 $\mathcal{G}$ 中移除任意一条边 e，只会产生非紧分支。

正如在 [15], 中所观察到的，这尤其保证了对每个点 $x \in \mathcal{G}$，都存在两条从 x 出发、几乎处处不相交且长度无限的简单曲线。

定理 3.2 （ [15]中的定理 1.2 和定理 1.3）。若 $\mathcal{G}$ 是一个1-周期度量图，则存在一个临界质量 $\mu_{\mathcal{G}}$，定义于（2.8），使得：

（i）当假设（H）成立时，$\mu_{6,\mathcal{G}} = \mu_{\mathbb{R}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ 且

$$\mathcal{E}_6(\mu, \mathcal{G}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \mu \leq \mu_{\mathbb{R}} \\ -\infty & \text{if } \mu > \mu_{\mathbb{R}}, \end{cases}$$

因此 $\mathcal{E}_6(\mu, \mathcal{G}) = \mathcal{E}_6(\mu, \mathbb{R})$ 对每个 $\mu > 0$。此外，基态能级从未达到 d.

(ii) 如果 $\mathcal{G}$ 包含一条终端边，则 $\mu_{6,\mathcal{G}} = \mu_{\mathbb{R}^+} = \frac{\sqrt{3}\pi}{4}$ ，且

$$\mathcal{E}_6(\mu,\mathcal{G}) = \begin{cases} 0 & if\ \mu \le \mu_{\mathbb{R}^+} \\ -\infty & if\ \mu > \mu_{\mathbb{R}^+}, \end{cases}$$

因此，对每个 $\mu > 0$，都有 $\mathcal{E}_6(\mu,\mathcal{G}) = \mathcal{E}_6(\mu,\mathbb{R}^+)$。此外，基态能级永远无法达到。$(iii)$ 如果 $\mathcal{G}$ 不满足 *(H)* 且没有终端边，那么

$$\mu_{\mathbb{R}^+} \le \mu_{\mathcal{G}} \le \mu_{\mathbb{R}}. \tag{3.1}$$

此外，若 $\mu_{\mathcal{G}} < \mu_{\mathbb{R}}$，则

$$\mathcal{E}_6(\mu,\mathcal{G}) = \begin{cases} 0 & if\ \mu \le \mu_{\mathcal{G}} \\ < 0 & if\ \mu_{\mathcal{G}} < \mu \le \mu_{\mathbb{R}} \\ -\infty & if\ \mu > \mu_{\mathbb{R}}, \end{cases} \tag{3.2}$$

并且，当且仅当 $\mu \in [\mu_{\mathcal{G}}, \mu_{\mathbb{R}}]$ 时，基态存在。

在这一情形下，等式 $\mu_{\mathcal{G}} = \mu_{\mathbb{R}}$ 是否成立，以及此时是否存在基态，仍是一个未解决问题（而 $\mu_{\mathcal{G}} < \mu_{\mathbb{R}}$ 成立的情形已有研究 [15]）。

3.2. **2-周期情形**。研究 2-周期度量图 $\mathcal{G}$时，单条边的局部一维性质与图的整体二维性质相互作用；这种相互作用由 2-周期性引起，形成了所谓的维数交叉。方格网和蜂窝网格中的这一现象分别在 [3] 和 [2], 中得到了证明。特别是， [2] 中指出，为处理方格网情形而发展的策略 [3] 具有相当的灵活性，并且推广到更一般的情形时，基本上只需调整两个要素：二维 Sobolev 不等式的证明（参见 [3, 定理 2。2]），以及合适能量竞争函数的构造；后者可用于证明基态能级严格为负（参见 [3, 定理 1 的证明。1]）。下文将证明，这些要素对一般的 2-周期图均成立；这类图在第 2 节开头作了介绍，并回顾 [3]中的主要步骤。如前所述，起点如下：

定理 3.3 （二维 Sobolev 不等式）。 设 $\mathcal{G}$ 是一个2-周期度量图。那么，存在一个依赖于 $\mathcal{G}$ 的常数 $C > 0$ ，使得

$$\|u\|_{L^2(\mathcal{G})} \le C\|u'\|_{L^1(\mathcal{G})} \qquad \forall u \in W^{1,1}(\mathcal{G}).$$

证明。令 K 为 的基本域，关联的作用 $+$由引理 2.3给出。我们注意到 t

$$H_j := \bigcup_{z\in\mathbb{Z}}((z,j)+K) \qquad \text{and} \quad V_i := \bigcup_{z\in\mathbb{Z}}((i,z)+K);$$

这些可以视为水平条带和垂直条带。

对于固定的 $x_0 \in K$，我们定义两条由弧长参数化的利普希茨路径 h 和 v，它们具有以下性质：

(i) h 和 v 分别将 x_0 与 $(1,\ 0) + x_0$ 和 $(0,\ 1) + x_0$ 连接起来；
(ii) h 和 v 的像都覆盖 K；(iii) h 和 v 的长度均有限，分别记为 ℓ_h 和 ℓ_v；(iv) $h([0,\ell_h]) \subset H_0$ 和 $v([0,\ell_v]) \subset V_0$。

我们指出， h 和/或 v 不一定是单射：允许出现自交，也允许沿某些边多次经过。此外，我们考虑将 h 和 v的水平平移与竖直平移拼接而成的曲线：

$$\begin{aligned} h_j : \mathbb{R} &\longrightarrow H_j \\ t &\longmapsto h_j(t) := (m,j) + h(t - m\ell_h) \quad \text{if } t \in [m\ell_h, (m+1)\ell_h] \text{ for some } m \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

and

$$v_i : \mathbb{R} \longrightarrow V_i$$
$$t \longmapsto v_i(t) := (i,n) + h(t - n\ell_v) \quad \text{if } t \in [n\ell_v, (n+1)\ell_v] \text{ for some } n \in \mathbb{Z}.$$

我们注意到， h_j 和 v_i 均定义良好，且分别覆盖 H_j 和 V_i。

现在，设 $u \in W^{1,1}(\mathcal{G})$。 u 和 u' 在 H_j 和 V_i 上的积分不同于 $u \circ h_j$和 $u \circ v_i$ 在 $\mathbb{R}$上的积分，因为某些边可能被 h_j 和 v_i多次穿过。然而，对于任意 $p \in [1, +\infty)$和 $j, i \in \mathbb{Z}$，以下估计成立：

- 因为 h_j （分别为 v_i）穿过 H_j （分别为 V_i）中的某条边的次数至多为 N 次，其中 $N \in \mathbb{N}$为某个值，
$$\|u \circ h_j\|_{L^p(\mathbb{R})} \le N \|u\|_{L^p(H_j)} \qquad (\text{resp. } \|u \circ v_i\|_{L^p(\mathbb{R})} \le N \|u\|_{L^p(V_i)});$$
- 由于曲线 h_j 和 v_i 均以弧长参数化，导数的积分也同样如此：

$$\|(u \circ h_j)'\|_{L^p(\mathbb{R})} \le N \|u'\|_{L^p(H_j)} \text{ and } \|(u \circ v_i)'\|_{L^p(\mathbb{R})} \le N \|u'\|_{L^p(V_i)}. \tag{3.3}$$

特别地， $u \circ h_j, u \circ v_i \in W^{1,1}(\mathbb{R})$。此外，由于 $\mathcal{G} \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} H_j$，我们可以断言

$$\|u\|^2_{L^2(\mathcal{G})} \le \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{H_j} |u|^2 \, dx, \tag{3.4}$$

同理，由于$H_j \subset \bigcup_i (i,j) + K$，

$$\|u\|^2_{L^2(H_j)} \le \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{(i,j)+K} |u|^2 \, dx. \tag{3.5}$$

此外，由于 $H_a \cap H_b = \emptyset$ if $|a - b| \ge 2$ （竖直条带也具有类似性质），我们还有

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{H_j} |u'| \, dx \le 2 \|u'\|_{L^1(\mathcal{G})} \quad \text{and} \quad \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{V_i} |u'| \, dx \le 2 \|u'\|_{L^1(\mathcal{G})}. \tag{3.6}$$

现在令 j 固定，并任取一点 $x \in H_j$。由于 h 覆盖了 K，存在 $t \in \mathbb{R}$ 使得 $h_j(t) = x$，根据微积分基本定理

$$u(x) - u(h_j(r)) = \int_r^t (u \circ h_j)'(s) \, ds, \tag{3.7}$$

对每个 $r < t$。由于 $u \in C_0(\mathcal{G})$（也就是说， u 连续且在无穷远处趋于 0），令 $r \to -\infty$ 在（3.7）中取极限，得到

$$|u(x)| \le \int_{-\infty}^t |(u \circ h_j)'(s)| \, ds \le \int_{\mathbb{R}} |(u \circ h_j)'(s)| \, ds \le N \int_{H_j} |u'| \, d\mu = N \|u'\|_{L^1(H_j)}, \tag{3.8}$$

这里用到了（3.3）。现在，存在 $i \in \mathbb{Z}$ 使得 $x \in (i,j) + K$，因此 x 也位于路径v_i上。用导出（3.8）的相同论证，我们得出

$$|u(x)| \le N \|u'\|_{L^1(V_i)}. \tag{3.9}$$

将（3.8）和（3.9）逐项相乘，可得对所有 $x \in (i,j) + K$，

$$|u(x)|^2 \le N^2 \|u'\|_{L^1(H_j)} \|u'\|_{L^1(V_i)},$$

由此可得

$$\int_{(i,j)+K} |u|^2 \, dx \le N^2 \ell(K) \|u'\|_{L^1(H_j)} \|u'\|_{L^1(V_i)},$$

其中 $\ell(K)$ 表示 K 的总长度。此时我们对 i 求和：由 (3.5) 和 (3.6)，可推得

$$\int_{H_j} |u|^2\,dx \le N^2\ell(K)\|u'\|_{L^1(H_j)}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}\|u'\|_{L^1(V_i)}\right) \le 2N^2\ell(K)\|u'\|_{L^1(H_j)}\|u'\|_{L^1(\mathcal{G})};$$

进一步对 j求和，并回顾式（3.4）和（3.6），最终得到

$$\|u\|^2_{L^2(\mathcal{G})} \le \sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{H_j}|u|^2\,dx \le 2N^2\ell(K)^2\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|u'\|_{L^1(H_j)}\right)\|u'\|_{L^1(\mathcal{G})} \le 4N^2\ell(K)^2\|u'\|^2_{L^1(\mathcal{G})}, \tag{3.10}$$

这就是所需的结果。 □

基于这一结果，我们能够在完全一般的情形下研究基态的存在性。作为定理3.3的第一个推论，完全仿照 [3, 定理 2.3 和推论 2.4] 的论证，我们可推出以下跨维 Gagliardo-Nirenberg不等式：对每个 $p\in[4,6)$，都存在一个最优常数 $K_{p,\mathcal{G}}>0$ 使得

$$\|u\|^p_{L^p(\mathcal{G})} \le K_{p,\mathcal{G}}\|u\|^{p-2}_{L^2(\mathcal{G})}\|u'\|^2_{L^2(\mathcal{G})} \qquad \forall u\in H^1(\mathcal{G}). \tag{3.11}$$

进而，这使我们能够按照 [3, 定义 4.1] 定义一族连续的临界质量：

$$\mu_p = \mu_{p,\mathcal{G}} := \left(\frac{p}{2K_{p,\mathcal{G}}}\right)^{\frac{2}{p-2}} \qquad \text{for every } p\in[4,6). \tag{3.12}$$

现在，借助一维 Gagliardo-Nirenberg不等式，即式（2.6），对于每个 $\mathcal{E}_p(\mu,\mathcal{G})>-\infty$，当 $p\in(2,6)$ 且 $\mu>0$时，基态能级 $p=6$具有下有界性。对于 E_p，该性质仅在质量低于某个临界阈值时成立。在这两种情况下，H^1_μ 在 E_p 中的下有界性为该范围内基态的存在提供了可能。为证明其存在性，因此有必要分析极小化序列的行为。由于问题设置具有周期性，平移不变性排除了因逃逸至无穷远而导致的紧性丧失。因此，收敛的唯一剩余障碍是消失（序列及其能量的消失），这发生在色散沿图传播时。由此可知，若存在一个能量为负的函数，则任意极小化序列都必须收敛，因而能够达到基态。以下命题将这一启发式思路严格化：

引理 3.4。若 $\mathcal{G}$ 是一个2-周期图，且 $2<p<6$ 和 $\mathcal{E}_p(\mu,\mathcal{G})<0$ 对某个 $\mu>0$ 成立，则存在质量为 μ 的基态 E_p。

对于 1-周期图，这个命题在 [15, 命题 3.1] 中得到证明；对于方格网，则在 [3, 命题 3.3] 中得到证明。该证明可以逐步轻松推广到一般的 2-周期度量图。

现在我们可以陈述并证明关于齐次情形的结果，这些结果推广了 [2,3]。与那些情形一样，我们必须区分 $p\in(2,4)$，$p\in[4,6)$ 和 $p=6$。

定理 3.5。若 $\mathcal{G}$ 是一个2-周期度量图，且 $p\in(2,4)$，则 $-\infty<\mathcal{E}_p(\mu,\mathcal{G})<0$，并且对每个 $\mu>0$ 都存在基态。

证明。根据前面的讨论，只要找到一个函数 $u\in H^1_\mu(\mathcal{G})$，使得$E_p(u)<0$即可。对于一般图，这一步不能直接由 [2,3]推出。可以按照定理 1.4的证明来构造这样的函数，相关内容将在下一节给出；事实上，该定理中的构造可视为一般情形，而只需在其中取 $\alpha=0$ 即可得到这里的证明。因此，具体细节请参见该证明。 □

备注 **注 3.6**。我们还可以得到 $\mathcal{E}_p(\mu,\mathcal{G})\le 0$ 对每个 $\mu>0$ 以及 $p\ge 4$ (参见下文推论 4.3)。

对于 $p\in[4,6]$，会出现维数交叉：

定理 3.7。设 $\mathcal{G}$ 为一个2-周期度量图。那么，对于 $p\in[4,6)$：

(i) 若 $\mu > \mu_{p,\mathcal{G}}$，则存在基态，且 $-\infty < \mathcal{E}_p(\mu) < 0$；$(ii)$ 若 $\mu < \mu_{p,\mathcal{G}}$，则不存在基态，且 $\mathcal{E}_p(\mu) = 0$；(iii) 若 $\mu = \mu_{p,\mathcal{G}}$，则 $\mathcal{E}_p(\mu_{p,\mathcal{G}}) = 0$，且当 $p \in (4,6)$ 时存在基态。

确定 $p = 4$ 和 $\mu = \mu_4$, $\mathcal{G}$ 的基态存在性问题尚未解决 .

证明。 该情形的证明与 [3], 中的证明完全类似，我们只强调关键点：跨维 Gagliardo-Nirenberg 不等式（3.11）给出了估计

$$E_p(u) \geq \frac{1}{2}\|u'\|^2_{L^2(\mathcal{G})}\left(1 - \left(\frac{\mu}{\mu_{p,\mathcal{G}}}\right)^{\frac{p-2}{2}}\right) \qquad \forall u \in H^1_\mu(\mathcal{G}).$$

由此结合注 3.6 可知，对于 $\mu \leq \mu_{p,\mathcal{G}}$， $\mathcal{E}_p(\mu) = 0$ ，并且当 $\mu < \mu_{p,\mathcal{G}}$ 时，基态不可能存在。也就是说，存在一个质量区间，在该区间内基态能级有下界，但无法取到。另一方面，对于 $\mu > \mu_{p,\mathcal{G}}$，考虑 Gagliardo-Nirenberg 常数 K_p在 (3.11) 中最优值的一个归一化极大化序列 $\{v_n\}$ ，可得当 n充分大时，$E_p(v_n) < 0$ 。因此，命题 3.4 给出了该质量范围内的存在性。证明的其余部分请参见 [3] 。 □

最后，我们考虑 $p = 6$。在此框架下，证明定理3.2 时所采用的技巧在2-周期图上仍然成立，并得到一个类似的结果。我们参阅 [3] 以了解细节。

定理 3.8. 设 $\mathcal{G}$ 为一个2-周期度量图。则：

(i) 若*(H)*成立，则对所有 $\mu > 0$，有$\mu_{6,\mathcal{G}} = \mu_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{E}_6(\mu,\mathcal{G}) = \mathcal{E}_6(\mu,\mathbb{R})$，且基态能级永远达不到。*(ii)* 若 $\mathcal{G}$ 包含一条终端边，则对所有 $\mu > 0$，有 $\mu_{6,\mathcal{G}} = \mu_{\mathbb{R}^+}$, $\mathcal{E}_6(\mu,\mathcal{G}) = \mathcal{E}_6(\mu,\mathbb{R}^+)$，且基态能级永远达不到。*(iii)* 若 $\mathcal{G}$ 不满足*(H)*且没有终端边，则*(3.1)*和*(3.2)*成立。此外，当$\mu_{6,\mathcal{G}} < \mu_{\mathbb{R}}$时，基态存在当且仅当 $\mu \in [\mu_{\mathcal{G}}, \mu_{\mathbb{R}}]$。

对于 2-周期图，目前也尚不清楚等式 $\mu_{6,\ \mathcal{G}} = \mu_{\mathbb{R}}$ 是否成立，以及在情形 (iii) 下是否存在基态。

4. The focusing case

本节考虑带有组合非线性的 NLS 能量（1.1），其中 $\alpha > 0$。我们对 [3, 15] （周期图上的齐次情形）和[26] （有限条边的非紧图上的非齐次情形）中提出的策略进行调整并加以恰当结合。正如引言中所述，在临界情形 $p = 6$ 下，式（1.5）中定义的临界质量 $\tilde{\mu}_{\mathcal{G}}$ 对于 $E_{p,\ q,\ \alpha}$ 的下有界性起着关键作用。

命题 *1.1* 的证明。 若 $2 < q < p < 6$，我们可以使用 Gagliardo-Nirenberg不等式（2.6），由此可得

$$E_{p,q,\alpha}(u) \geq \frac{1}{2}\|u'\|_2^2 - \frac{C}{p}\|u\|_2^{\frac{p}{2}+1}\|u'\|_2^{\frac{p}{2}-1} - \frac{\alpha}{q}C\|u\|_2^{\frac{q}{2}+1}\|u'\|_2^{\frac{q}{2}-1} \qquad \forall u \in H^1_\mu. \tag{4.1}$$

这就得到了 $E_{p,\ q,\ \alpha}$ 在 H^1_μ 中的下有界性和强制性。

关于情形 $p = 6$ 下的（无）有界性，我们区分 $\mathcal{G}$ 是否有终端点两种情况。在前一种情况下，对每个 $\mathcal{E}_{p,\ q,\ \alpha}(\mu) = -\infty$ ， $\mu \geq \mu_{\mathbb{R}_+} = \tilde{\mu}_{\mathcal{G}}$ 这一事实可不加修改地按 [26,引理 31], 证明。由不等式（$\mu < \mu_{\mathbb{R}_+}$ 可直接得到 2.6）的下有界性和强制性。若 $\mathcal{G}$ 没有终端点，且 $\mu < \mu_{\mathbb{R}} = \tilde{\mu}_{\mathcal{G}}$,

那么引理 2.5 中的修正的 Gagliardo-Nirenberg 不等式给出

$$E_{6,q,\alpha}(u) \geq \frac{1}{2}\|u'\|_2^2\left(1-\left(\frac{\mu-\theta_u}{\mu_{\mathbb{R}}}\right)^2\right)-\frac{C}{6}\theta_u^{\frac{1}{2}}-\frac{\alpha C}{q}\|u\|_2^{\frac{q}{2}+1}\|u'\|_2^{\frac{q}{2}-1}$$
$$\geq \frac{1}{2}\|u'\|_2^2\left(1-\left(\frac{\mu}{\mu_{\mathbb{R}}}\right)^2\right)-\frac{C}{6}\mu^{\frac{1}{2}}-\frac{\alpha C}{q}\|u\|_2^{\frac{q}{2}+1}\|u'\|_2^{\frac{q}{2}-1},$$

对于某个 $C>0$，这证明了 $E_{6,q,\alpha}$ 在 H_μ^1 上的强制性和下有界性。

接下来考虑 $\mu \geq \mu_{\mathbb{R}} = \tilde{\mu}_{\mathcal{G}}$ 的情形。若 $\mu > \mu_{\mathbb{R}}$，只需注意到 $E_{p,q,\alpha}(u) \leq E_{p,q,0}(u) = E_p(u)$，因为 $\alpha > 0$。因此，对 u 取下确界，可得

$$\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu) \leq \mathcal{E}_p(\mu) = -\infty \quad \forall \mu > \mu_{\mathbb{R}}.$$

若 $\mu = \mu_{\mathbb{R}}$，令 ϕ 为问题在 $\mathbb{R}$ 上的偶孤立子，并令 $\phi_\lambda(x) := \sqrt{\lambda}\phi(\lambda x)$。令 $\bar{\ell}$ 为一条边 $\mathrm{e} \in \mathcal{G}$ 的长度。定义

$$u_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{\mu_{\mathbb{R}}^{1/2}}{\|\phi_\lambda - \phi_\lambda(\ell)\|_{L^2(0,\ell)}}(\phi_\lambda(x)-\phi_\lambda(\ell)) & \text{if } x \in \mathrm{e} \\ 0 & \text{if } x \in \mathcal{G}\setminus \mathrm{e}. \end{cases}$$

用与 [26, Lemma 3.1], 中相同的计算可得，当 $\lambda \to +\infty$ 时，$E_\alpha(u_\lambda, \mathcal{G}) \to -\infty$。 □

以下结果是基态存在性的关键要素，它们是当前情形下 [3, Lemma 3.2] 和 [3, Proposition 3.3] 的自然对应结论（另见 [15, Proposition 3.1]）。证明与 [3, 15], 中的论证相同，故从略。

引理*4.1*（二分性）。设 $\mathcal{G}$ 为*1*或*2*周期度量图，并设 $p<6$ 和$\mu>0$，或 $p=6$ 和 $\mu \in (0, \tilde{\mu}_{\mathcal{G}})$。另设 $\{u_n\}$ 为$E_{p,q,\alpha}$ 在 $H_\mu^1(\mathcal{G})$中的极小化序列。那么对于某个 $u \in H^1(\mathcal{G})$，$u_n \rightharpoonup u$，并且 u 是$E_{p,q,\alpha}$ 在 H_μ^1中的基态，或者 $u \equiv 0$ 和$\|u_n\|_{L^\infty(\mathcal{G})} \to 0$。

命题 4.2。设 $\mathcal{G}$ 为1 或2-周期度量图，并设 $p<6$ 和 $\mu>0$，或$p=6$ 和 $\mu \in (0, \tilde{\mu}_{\mathcal{G}})$。若$\mathcal{E}_{p,\,q,\,\alpha}(\mu) < 0$，则存在一个质量为 μ的基态。

4.1. **关于 1-周期图**。为证明 1-周期图上基态的存在性，我们证明存在一个函数 $u \in H_\mu^1(\mathcal{G})$ 满足 $E_{p,\,q,\,\alpha}(u) < 0$，然后应用命题 4.2。构造竞争函数依赖于基本域的特殊选取 K，该基本域由引理2.3 给出（事实上，对于 1-周期图，我们可以考虑在 $\{u_n\}$ 定理 [15,1 中构造的1]函数序列；但这里我们给出另一种序列，其构造可轻松推广到更广泛的情形）。

定理 *1.2* 的证明。我们要寻找一个属于 H_μ^1 且能量为负的函数。令 K 为引理 $\mathcal{G}$ 中得到的 2.3 的基本域。对于所有 $n \in \mathbb{N}$，定义

$$B_n := \bigcup_{|z|\leq n}(K+z).$$

令 $l(B_n)$ 表示 B_n 的长度，即其各边长度之和。注意，对于 $n \to +\infty$，$l(B_n) \asymp n$，也就是说，存在 $C_2 \geq C_1 > 0$，使得当 n 足够大时，

$$C_1 \leq \frac{l(B_n)}{n} \leq C_2. \tag{4.2}$$

事实上，$l(B_n) \leq (2n+1)l(K)$，最后一项是 B_n中 K的所有副本的长度之和；并且，由于平移副本（$g+K$）在 $|g| \geq 2$时互不相交，因此至少有 n 个可以容纳在$l(B_n) \geq nl(K)$中

在 B_n 中彼此不重叠。
利用 $\mathcal{G}$ 上的距离函数，即最短路径距离，我们对所有 $n \in \mathbb{N}$ 定义：

$$d_n : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto d(x, \overline{B_n^c}),$$

x 到 B_n 的补集的拓扑闭包的距离。注意，由于 d_n 是由距离函数给出的，因此它在 $\mathcal{G}$ 上连续且利普希茨，利普希茨常数为 1。对于所有满足 $m-n$ 足够大的 n， $m \in \mathbb{N}$，我们断言

$$d(B_n, \overline{B_m^c}) \geq (m-n)C, \tag{4.3}$$

对某个常数 $C > 0$ 成立。事实上，任意一条从 B_n 到 B_m^c 的曲线 γ 都始于 $h_1 + K$，终于 $h_2 + K$，且有 $|h_1| \leq n$ 和 $|h_2| \geq m+1$。不失一般性，令 h_1， $h_2 \geq 0$。由于 $(g+K)$ 当且仅当 $|g| \leq 1$ 时， $\cap K \neq \emptyset$，故 γ 必须与所有满足 $n \leq t \leq m+1$ 的 $t+K$ 相交。因此，假设 $m-n$ 为偶数，可得：

$$l(\gamma) \geq d(n+K, n+2+K) + d(n+2+K, n+4+K) + \dots$$
$$+ d(m-2+K, m+K) = \frac{m-n}{2} d(K, 2+K) \geq C(m-n),$$

当 $m-n$ 充分大时。注意，这里用到了边 e 的长度在作用 $+$下的不变性。当 $m-n$ 为奇数，或 h_1、h_2 不同时为正时，也可得到类似的不等式。此时，我们定义

$$u_n(x) := \frac{d_{2n}(x)}{\max\limits_{x \in B_{2n}} (d_{2n}(x))} \varepsilon_n \tag{4.4}$$

对于 $n \in \mathbb{N}$，其中常数 ε_n 的选取满足 $\|u_n\|_2^2 = \mu$。下面给出相应的不等式：

(1) $\forall x \in \mathcal{G}, |u_n(x)| \leq \varepsilon_n$，因为 $\frac{d_{2n}(x)}{\max_{x \in B_{2n}}(d_{2n}(x))} \leq 1$；(2) $|u_n'(x)| \leq \frac{\varepsilon_n}{\max_{x \in B_{2n}}(d_{2n}(x))}$ 几乎处处成立，因为 $|d_{2n}'(x)| \leq 1$，如前所述；(3) $\max_{x \in B_{2n}}(d_{2n}(x)) \leq (2n+1)l(K)$，因为任意一条从 $x \in (g+K) \subseteq B_{2n}$ 出发的曲线 γ，都可以经过 $h+K$ 到达 B_{2n}^c，对所有 $|g| \leq |h| \leq |2n|$ 均成立。这些指标少于 $2n+1$ 个 h，因此 $l(\gamma) \leq (2n+1)l(K)$；(4) $\max_{x \in B_{2n}}(d_{2n}(x)) \geq d(B_0, B_{2n}^c) \geq 2Cn$，由 (4.3) 得出；(5) 对所有 $x \in B_n$， $|u_n(x)| \geq \delta \varepsilon_n$，其中某个 $\delta > 0$ 与 n无关，因为

$$|u_n(x)| \geq \frac{d(B_n, \overline{B_{2n}^c})}{\max\limits_{x \in B_{2n}} (d_{2n}(x))} \varepsilon_n \geq \frac{Cn}{(2n+1)l(K)} \varepsilon_n \geq \delta \varepsilon_n$$

对于某些 $\delta > 0$ 以及 n 充分大时。不等式（4.3）和第 3 点已用到。由此，我们估计：

- $\forall\ 2 \leq p \leq \infty, \|u_n\|_p^p \asymp \varepsilon_n^p n$, since
$$\|u_n\|_p^p \leq \varepsilon_n^p l(B_{2n}) \leq C \varepsilon_n^p n,$$
利用了（4.2）和第 1点，并且
$$\|u_n\|_p^p \geq \delta^p \varepsilon_n^p l(B_n) \geq C \varepsilon_n^p n,$$
对于（4.2）和第 5点。
- $\varepsilon_n \asymp \frac{1}{\sqrt{n}}$，因为 ε_n 的选取满足 $\mu = \|u_n\|_2^2 \asymp \varepsilon_n^2 n$。

- $\|u_n'\|_2^2 \le \frac{C}{n^2}$ 对于某个常数 $C>0$，因为

$$\|u_n'\|_2^2 \le \frac{\varepsilon_n^2}{\left(\max\limits_{x\in B_{2n}}(d_{2n}(x))\right)^2} l(B_{2n}) \le \frac{C}{n^2},$$

利用（4.2）及点2 和4。

因此，对于某些常数 C_1，C_2，$C_3>0$，

$$E_{p,q,\alpha}(u_n) \le \frac{C_1}{n^2} - \frac{C_2}{n^{\frac{p}{2}-1}} - \frac{\alpha C_3}{n^{\frac{q}{2}-1}}, \tag{4.5}$$

并且当 $q<p\le 6$时，不等式（4.5）右端在 n 足够大时为负。因此，引理4.2得证。□

4.2. **关于 2-周期图**。对于 2-周期图，我们仍使用命题4.2，但要区分维数交叉所产生的不同指数范围。

情形 $q\in(2,\ 4)$。这是实际的次临界情形，也就是说，q 低于一维和二维的临界指数。利用这一性质，我们能够证明 $\mathcal{E}_{p,\ q,\ \alpha}(\mu)$ 为负，且该结论独立于 μ、α 以及 p 与 q 之间的关系。

定理*1.4*的证明。我们使用定理 $\{u_n\}$ 中定义序列的二维周期改造 1.2。同样，我们选择一个满足引理 K 2.3 要求的基本域 并令

$$H_j := \bigcup_{z\in\mathbb{Z}}((z,j)+K),\quad V_i := \bigcup_{z\in\mathbb{Z}}((i,z)+K),\quad B_n := \bigcup_{|z|\le n}(K+z).$$

我们有

$$l(B_n) \asymp n^2, \tag{4.6}$$

因为 $l(B_n)\le(2n+1)^2 l(K)$，它是 B_n 中 K 所有副本长度之和；并且 $l(B_n)\ge n^2 l(K)$，因为在 B_n 中至少有 n^2 个互不相交的 K 副本，假设当 $\|g\|_\infty\ge 2$ 时 $(g+K)\cap K=\emptyset$。此外，对于所有 n，$m\in\mathbb{N}$，只要 $m-n$ 足够大，

$$d(B_n, \overline{B_m^c}) \ge (m-n)C, \tag{4.7}$$

对某个 $C>0$ 成立。事实上，任意一条从 B_n 到 B_m^c 的曲线 γ 都始于 $g+K$，终于 $h+K$，且 $\|g\|_\infty\le n$ 和 $\|h\|_\infty\ge m+1$。令 $g=(g_1,\ g_2)$ 和 $h=(h_1,\ h_2)$；不失一般性，我们可以假设$h_2\ge m+1$。因此，γ 始于 H_{g_2}，终于 H_{h_2}；又由于仅当 $\|t\|_\infty\le 1$ 时 $(t+K)\cap K\ne\emptyset$，曲线 γ 必须穿过所有满足 $g_2\le i\le h_2$ 的 H_i。因此，假设 g_2 和 h_2 均为偶数或均为奇数，

$$\begin{aligned} l(\gamma) &\ge d(H_{g_2}, H_{g_2+2}) + d(H_{g_2+2}, H_{g_2+4}) + \dots \\ &\quad + d(H_{h_2-2}, H_{h_2}) = \frac{h_2-g_2}{2} d(H_0, H_2) \ge C(m-n), \end{aligned}$$

当 $m-n$ 足够大时。即使不假设 g_2 和 h_2 都是偶数或奇数，也有类似的估计。

现在定义序列 $\{u_n\}$，与式（4.4）完全相同，即

$$u_n(x) := \frac{d_{2n}(x)}{\max\limits_{x\in B_{2n}}(d_{2n}(x))}\varepsilon_n,$$

其中 $d_n(x) := d\left(x,\ B_n^c\right)$ 且 $\varepsilon_n>0$ 满足 $\|u_n\|_2^2=\mu$。沿用定理 1.2中第 1、2、3、4 和 5 点的相同论证，可得到 ε_n 和 $E_{p,\ q,\ \alpha}(u_n)$ 的类似估计。由于式（4.6）和（4.7），这些近似的指数与 1-周期情形下所得的指数不同：

- $\|u_n\|_p^p \asymp \varepsilon_n^p n^2$，因为对于某个 $\delta>0$，$|u_n|\le\varepsilon_n$ 属于 B_{2n}，$|u_n|\ge\delta\varepsilon_n$ 属于 B_n；
- $\varepsilon_n \asymp \frac{1}{n}$，因为 $\mu=\|u\|_2^2 \asymp \varepsilon_n^2 n^2$;

- $\|u_n'\|_2^2 \leq \frac{\varepsilon_n^2}{\left(\max\limits_{x\in B_{2n}}(d_{2n}(x))\right)^2} l(B_{2n}) \leq \frac{\varepsilon_n^2}{\left(d(B_0,\overline{B_{2n}^c})\right)^2} l(B_{2n}) \leq \frac{C}{n^2}$, for some $C>0$, by (4.6) and (4.7).

因此，存在一些常数 $C_1, C_2, C_3 > 0$，使得：

$$E_{p,q,\alpha}(u_n) \leq \frac{C_1}{n^2} - \frac{C_2}{n^{p-2}} - \frac{\alpha C_3}{n^{q-2}}. \tag{4.8}$$

由于 $q<4$，当 n 足够大时，该量为负。由引理 4.2 可得结论。 □

注意，同样的论证适用于任意选择的 q， p， μ， α；特别是，如定理 3.5 的证明中已经提到的，它适用于 $p \in (2, 6)$ 和 $\alpha = 0$。此外，估计式（4.8）给出如下结果：

推论 4.3。 若 $\mathcal{G}$ 是一个2-周期度量图，则 $\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu) \leq 0$ 对每个 $\mu > 0$、 $\alpha \in \mathbb{R}$和$4 \leq q < p \leq 6$均成立。

情形 $4 \leq q < p \leq 6$。 在这一范围内，会出现所谓的维数交叉，只有当质量超过某个临界值时，才能证明基态的存在性。我们回顾一下临界质量 $\mu_{p,\mathcal{G}}$ 在（2.8）和（3.12）中的定义；在本节中，我们将其简记为 μ_p。我们将定义在 $H^1_\mu(\mathcal{G})$ 上的能量泛函 $E_{p,q,\alpha}$ 写作

$$E_{p,q,\alpha}(u) = \frac{1}{2}\|u'\|_2^2 \left(1 - \frac{2}{p} Q_p(u) \mu^{\frac{p-2}{2}} - \frac{2\alpha}{q} Q_q(u) \mu^{\frac{q-2}{2}}\right),$$

其中

$$Q_r(u) := \frac{\|u\|_r^r}{\|u'\|_2^2 \|u\|_2^{r-2}}. \tag{4.9}$$

于是我们定义

$$F_{p,q,\alpha}(u,\mu) := 1 - \frac{2}{p} Q_p(u) \mu^{\frac{p-2}{2}} - \frac{2\alpha}{q} Q_q(u) \mu^{\frac{q-2}{2}}, \tag{4.10}$$

并令

$$\mathcal{F}_{p,q,\alpha}(\mu) := \inf_{u \in H^1_\mu(\mathcal{G})} F_{p,q,\alpha}(u,\mu) = \inf_{u \in H^1(\mathcal{G})\setminus\{0\}} F_{p,q,\alpha}(u,\mu),$$

其中，最后一个等式源于 $F_{p,q,\alpha}$ 在 λu 中对 u 变换的不变性，其中 $\lambda \in \mathbb{R}$。我们证明存在唯一的临界质量 $\mu_{p,q,\alpha} = \mu_{p,q,\alpha,\mathcal{G}} \in (0, +\infty)$，使得：

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{p,q,\alpha}(\mu) > 0 & \text{if } \mu < \mu_{p,q,\alpha} \\ \mathcal{F}_{p,q,\alpha}(\mu) = 0 & \text{if } \mu = \mu_{p,q,\alpha} \\ \mathcal{F}_{p,q,\alpha}(\mu) < 0 & \text{if } \mu > \mu_{p,q,\alpha}. \end{cases} \tag{4.11}$$

我们将用到以下引理，它与 [26, 引理 3.2] 类似。证明基本上可以逐步照搬，因此省略。

引理 4.4. 对于 $p<6$，函数 $\mathcal{F}_{p,q,\alpha}: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$，在 $\mu = 0$ 中延拓为 1 后，是连续的。对于 $p = 6$ 也同样如此，其中 $\mathcal{F}_{6,q,\alpha}: [0, \tilde{\mu}_{\mathcal{G}}) \to \mathbb{R}$。

利用介值定理，可以根据这一连续性结果证明函数 $\mu \mapsto \mathcal{F}_{p,q,\alpha}(\mu)$ 存在一个零点。注意到

$$F_{p,q,\alpha}(u,\mu) = 1 - \frac{2}{p} Q_p(u) \mu^{\frac{p-2}{2}} - \frac{2\alpha}{q} Q_q(u) \mu^{\frac{q-2}{2}} < 1 \qquad \forall u \in H^1_\mu(\mathcal{G}),$$

由此可得

$$\mathcal{F}_{p,q,\alpha}(\mu) < 1 \qquad \text{for every } \mu. \tag{4.12}$$

现在我们证明一个与函数 $\mathcal{F}_{p,q,\alpha}$ 的单调性相关的结果。

引理 4.5. 若 $p<6$、 $\mu>0$ 和 $\theta>1$，则

$$\mathcal{F}_{p,q,\alpha}(\theta\mu)-1<\theta\left(\mathcal{F}_{p,q,\alpha}(\mu)-1\right). \tag{4.13}$$

若 $p=6$ 且 $\theta\mu<\tilde{\mu}_{\mathcal{G}}$，则同样成立。

Proof. 设 $\{u_n\}\subseteq H^1_\mu$ 为$\mathcal{F}_{p,\ q,\ \alpha}(\mu)$的极小化序列。则 $\theta^{\frac{1}{2}}u_n\in H^1_{\theta\mu}(\mathcal{G})$满足 t

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{p,q,\alpha}(\theta\mu)\le F_{p,q,\alpha}(\theta^{\frac{1}{2}}u_n,\theta\mu)&=1-\frac{2}{p}Q_p(u_n)\mu^{\frac{p-2}{2}}\theta^{\frac{p-2}{2}}-\frac{2\alpha}{q}Q_q(u_n)\mu^{\frac{q-2}{2}}\theta^{\frac{q-2}{2}}\\&<1-\frac{2}{p}Q_p(u_n)\mu^{\frac{p-2}{2}}\theta-\frac{2\alpha}{q}Q_q(u_n)\mu^{\frac{q-2}{2}}\theta=1+\theta\left(F_{p,q,\alpha}(u_n,\mu)-1\right),\end{aligned}$$

其中t 由于 $p,\ q\in[4,6]$，第二个不等式成立。通过取 $n\to\infty$的极限，结论得证。 □

我们现在可以证明唯一临界质量的存在性。

引理 4.6. 存在唯一的临界质量 $\mu_{p,\ q,\ \alpha}\in(0,\ \mu_p)$ 满足 (4.11)。

证明. 引理 4.4 和 4.5 表明函数$\mathcal{F}_{p,\ q,\ \alpha}$ 在 μ中连续且严格递减：事实上，若 $\mu_1<\mu_2$ (并且在 $\mu_2<\tilde{\mu}_{\mathcal{G}}$ 的情况下还满足 $p=6$)，将 4.13) 式应用于 $\theta=\mu_2/\mu_1>1$，可得

$$\mathcal{F}_{p,q,\alpha}(\mu_2)-1<\frac{\mu_2}{\mu_1}\left(\mathcal{F}_{p,q,\alpha}(\mu_1)-1\right)<\mathcal{F}_{p,q,\alpha}(\mu_1)-1,$$

由（4.12）可知。因此，只要证明$\mathcal{F}_{p,\ q,\ \alpha}(\mu_p)<0$，结论便由介值定理得出。为证明这一点，我们首先注意到，根据定义，$\mathcal{F}_{p,\ q,\ \alpha}(\mu_p)<0$ 当且仅当$\mathcal{E}_{p,\ q,\ \alpha}(\mu_p)<0$，因此我们可以等价地证明这个不等式。

现在，令 $p\in(4,\ 6)$. 在此情形下，根据定理 3.7 存在 $u_p\in H^1_{\mu_p}(\mathcal{G})$，使得 $E_p(u_p)=0$。由于 a 因此 ，对于任意 $\alpha>0$ 和 $q\in(4,6)$，我们有 $\mathcal{E}_{p,\ q,\ \alpha}(\mu_p)\le E_{p,\ q,\ \alpha}(u_p)<0$，如所需。

同样的论证也适用于 $p=6$ 若 $\mathcal{G}$ 不满足假设（H），没有终端点，且 $\mu_{\mathcal{G}}<\mu_{\mathbb{R}}$。事实上，在这种情况下，根据定理3.8-（$iii$），存在一个 $\mathcal{E}_{6,\ q,\ \alpha}(\mu_6)=0$的基态。

接下来讨论以下情形：对于 $p=6$，若满足假设（H），或 $\mathcal{G}$ 有一个终端点，或者 $\mathcal{G}$ 不满足假设（H），没有终端点，且 $\mu_{\mathcal{G}}=\mu_{\mathbb{R}}$。在上述任一情形下，我们有 $\mu_6=\mu_{\mathcal{G}}$ 与 $\tilde{\mu}_{\mathcal{G}}$相同。因此，$\mathcal{E}_{p,\ q,\ \alpha}(\mu_p)<0$ 可直接由命题1.1推出。□

上述结果使我们可以继续进行：

定理 *1.5* 的证明。 证明采用与齐次情形相同的策略。

设 $\mu<\mu_{p,\ q,\ \alpha}$。由（4.11）可知，$\mathcal{F}_{p,\ q,\ \alpha}(\mu)>0$，因此

$$E_{p,q,\alpha}(u)=\frac{1}{2}\|u'\|_2^2F_{p,q,\alpha}(u,\mu)>0\qquad\forall u\in H^1_\mu(\mathcal{G}).$$

但根据推论 4.3 ，我们还可知 $\mathcal{E}_{p,\ q,\ \alpha}(\mu)\le 0$。因此，$\mathcal{E}_{p,\ q,\ \alpha}(\mu)=0$，从而无法达到基态能级。

现在令 $\mu>\mu_{p,\ q,\ \alpha}$。由命题 1.1 和引理 4.6，可知 $\mathcal{E}_{p,\ q,\ \alpha}(\mu)\in(-\infty,\ 0)$。因此，结论由命题 4.2得出。

最后还需讨论微妙的情形 $\mu=\mu_{p,\ q,\ \alpha}$。由（4.11），可知

$$E_{p,q,\alpha}(u)=\frac{1}{2}\|u'\|_2^2F_{p,q,\alpha}(u,\mu_{p,q,\alpha})\ge 0\qquad\forall u\in H^1_{\mu_{p,q,\alpha}}(\mathcal{G}).$$

结合推论4.3，可得 $\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu_{p,q,\alpha})=0$。为在 $q>4$ 情形下得到一个基态，我们考虑 $F_{p,q,\alpha}(\cdot,\mu_{p,q,\alpha})$ 的极小化序列 $\{u_n\}\subseteq H^1_{\mu_{p,q,\alpha}}(\mathcal{G})$。这也是一个有界的极小化

序列，满足$E_{p,q,\alpha}$ 受约束于$H^1_{\mu_{p,q,\alpha}}(\mathcal{G})$。为证明这一结论，我们分别讨论 $p<6$和 $p=6$两种情形。在前一种情形下，Gagliardo-Nirenberg不等式（2.6）给出

$$\begin{aligned}F_{p,q,\alpha}(u_n,\mu_{p,q,\alpha}) &= 1-\frac{2}{p}\frac{\|u_n\|_p^p}{\|u_n'\|_2^2}-\frac{2\alpha}{q}\frac{\|u_n\|_q^q}{\|u_n'\|_2^2} \geq 1-\frac{2}{p}C\frac{\|u_n\|_2^{\frac{p}{2}+1}}{\|u_n'\|_2^{3-\frac{p}{2}}}-\frac{2\alpha}{q}C\frac{\|u_n\|_2^{\frac{q}{2}+1}}{\|u_n'\|_2^{3-\frac{q}{2}}}\\ &= 1-\frac{2}{p}C\frac{{\mu_{p,q,\alpha}}^{\frac{p+2}{4}}}{\|u_n'\|_2^{3-\frac{p}{2}}}-\frac{2\alpha}{q}C\frac{{\mu_{p,q,\alpha}}^{\frac{q+2}{4}}}{\|u_n'\|_2^{3-\frac{q}{2}}},\end{aligned}$$

对某个 $C>0$。若 $\{\|u_n'\|_2\}$ 无界，则

$$0=\mathcal{F}_{p,q,\alpha}(\mu_{p,q,\alpha})=\lim_n F_{p,q,\alpha}(u_n,\mu_{p,q,\alpha})=1,$$

矛盾。因此， $\{u_n\}$ 在$H^1_{\mu_{p,\ q,\ \alpha}}$中有界，且

$$E_{p,q,\alpha}(u_n)=\frac{1}{2}\|u_n'\|_2^2F_{p,q,\alpha}(u_n)\to 0,$$

这就证明了该断言。反之，若 $p=6$，则应用Gagliardo-Nirenberg不等式（2.6）并得到

$$F_{6,q,\alpha}(u_n,\mu_{p,q,\alpha})=1-\frac{1}{3}\frac{\|u_n\|_6^6}{\|u_n'\|_2^2}-\frac{2\alpha}{q}\frac{\|u_n\|_q^q}{\|u_n'\|_2^2}\geq 1-\frac{1}{3}K_{\mathcal{G}}{\mu_{6,q,\alpha}}^2-\frac{2\alpha}{q}C\frac{{\mu_{6,q,\alpha}}^{\frac{q+2}{4}}}{\|u_n'\|_2^{3-\frac{q}{2}}}.$$

如前，若 $\{\|u_n'\|_2\}$ 无界，则

$$\mathcal{F}_{6,q,\alpha}(\mu_{6,q,\alpha})\geq 1-\frac{1}{3}K_{\mathcal{G}}\mu_{6,q,\alpha}^2>1-\frac{1}{3}K_{\mathcal{G}}{\mu_{\mathcal{G}}}^2, \tag{4.14}$$

最后一个不等式由如下事实得到：$\mu_{6,\ q,\ \alpha}<\mu_6=\mu_{\mathcal{G}}$，如引理4.6所示。由 $\mu_{\mathcal{G}}$的定义，（4.14）的最后一项消失，从而与（4.11）矛盾。因此， $\{u_n\}$在 $H^1_{\mu_p}$中有界

$^{,q,\alpha}(\mathcal{G})$，并且我们像之前一样推得该断言成立。

此时，令 $\{u_n\}$ 为前述有界极小化序列。取一个子序列 $u_n\rightharpoonup u$，使得对某个 $u\in H^1(\mathcal{G})$，并且要么 $u\equiv 0$，要么 $u\in H^1_{\mu_{p,\ q,\ \alpha}}(\mathcal{G})$ 是一个基态，这由引理 4.1 得出。此外，在前一种情形下，我们有 $\|u_n\|_{L^\infty(\mathcal{G})}\to 0$。为完成证明，我们假设 $u\equiv 0$，并寻求矛盾。若 $q>4$，则

$$\begin{aligned}0=\lim_n F_{p,q,\alpha}(u_n,\mu_{p,q,\alpha}) &= \lim_n\left(1-\frac{2}{p}\frac{\|u_n\|_p^p}{\|u_n'\|_2^2}-\frac{2\alpha}{q}\frac{\|u_n\|_q^q}{\|u_n'\|_2^2}\right)\\ &\geq \lim_n\left(1-\|u_n\|_\infty^{p-4}\frac{2}{p}\frac{\|u_n\|_4^4}{\|u_n'\|_2^2\|u_n\|_2^2}\mu_{p,q,\alpha}-\|u_n\|_\infty^{q-4}\frac{2\alpha}{q}\frac{\|u_n\|_4^4}{\|u_n'\|_2^2\|u_n\|_2^2}\mu_{p,q,\alpha}\right)\\ &\geq \lim_n\left(1-\|u_n\|_\infty^{p-4}\frac{2}{p}K_{4,\mathcal{G}}\mu_{p,q,\alpha}-\|u_n\|_\infty^{q-4}\frac{2\alpha}{q}K_{4,\mathcal{G}}\mu_{p,q,\alpha}\right)=1,\end{aligned}$$

这是不可能的。 □

最后：

定理 *1.6* 的证明。估计 $\mu_{p,\ q,\ \alpha}<\mu_p$ 由引理 4.6 得出。对于另一个上界估计，我们从情形 $q\in(4,\ 6)$ 开始。我们断言

$$\mathcal{F}_{p,q,\alpha}\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{2}{q-2}}\mu_q\right)<0.$$

这意味着 $\mu_{p,\ q,\ \alpha} < \mu_q/(\alpha^{2/(q-2)})$，回顾式 (4.11)。根据定理 3.7，存在 $u_q \in H^1_{\mu_q}(\mathcal{G})$ 使得 $E_q(u_q) = 0$。根据定义 (3.12)，这意味着 $Q_q(u_q) = K_{q,\ \mathcal{G}}$，此外

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{p,q,\alpha}\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{2}{q-2}}\mu_q\right) &\le F_{p,q,\alpha}\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{q-2}}u_q, \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{2}{q-2}}\mu_q\right)\\ &= 1 - \frac{2}{p}Q_p(u_q)\mu_q{}^{\frac{p-2}{2}}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{p-2}{q-2}} - \frac{2\alpha}{q}Q_q(u_q)\mu_q{}^{\frac{q-2}{2}}\frac{1}{\alpha}\\ &< 1 - \frac{2}{q}K_{q,\mathcal{G}}\mu_q{}^{\frac{q-2}{2}} = 0,\end{aligned}$$

如所需。当 $q = 4$时，质量为 μ_4 的基态不一定存在。然而，由于 $K_{4\text{的最优性},\ \mathcal{G}}$ 在（3.11）中，

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists u_\varepsilon \in H^1_{\mu_4}(\mathcal{G}) \text{ such that } Q_4(u_\varepsilon) > K_{4,\mathcal{G}} - \varepsilon.$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{p,4,\alpha}\left(\frac{\mu_4}{\alpha}\right) &\le F_{p,4,\alpha}\left(\frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\alpha}}, \frac{\mu_4}{\alpha}\right)\\ &= 1 - \frac{2}{p}Q_p(u_\varepsilon)\left(\frac{\mu_4}{\alpha}\right)^{\frac{p-2}{2}} - \frac{1}{2}Q_4(u_\varepsilon)\mu_4\\ &< 1 - \frac{1}{2}K_{4,\mathcal{G}}\mu_4 + \frac{\varepsilon}{2}\mu_4 = \frac{\varepsilon}{2}\mu_4,\end{aligned}$$

这里再次用到了（3.12）。由于 $\varepsilon > 0$ 是任意选取的，我们推得

$$\mathcal{F}_{p,4,\alpha}\left(\frac{\mu_4}{\alpha}\right) \le 0, \quad \text{whence} \quad \mu_{p,4,\alpha} \le \frac{\mu_4}{\alpha},$$

由此完成上估计的证明。

通过观察可得 $\mu_{p,\ q,\ \alpha}$ 的下界：对于 $u \in H^1_\mu(\mathcal{G})$,

$$\begin{aligned}F_{p,q,\alpha}(u,\mu) &= 1 - \frac{2}{p}Q_p(u)\mu^{\frac{p-2}{2}} - \frac{2\alpha}{q}Q_q(u)\mu^{\frac{q-2}{2}} \ge 1 - \frac{2}{p}K_{p,\mathcal{G}}\mu^{\frac{p-2}{2}} - \frac{2\alpha}{q}K_{q,\mathcal{G}}\mu^{\frac{q-2}{2}}\\ &\ge 1 - \left(\frac{\mu}{\mu_{p,\mathcal{G}}}\right)^{\frac{p-2}{2}} - \alpha\left(\frac{\mu}{\mu_{q,\mathcal{G}}}\right)^{\frac{q-2}{2}} := f(\mu).\end{aligned}$$

函数 $f(\mu)$ 在 $\mu \in [0,+\infty)$ 上严格递减，$f(0) = 1$，且当 $\mu \to +\infty$ 时 $f(\mu) \to -\infty$。因此，存在唯一值 $\mu_{p,q,\alpha}$，使得 $f(\mu_{p,q,\alpha}) = 0$，并且对任意 $u \in H^1_{\overline{\mu}}(\mathcal{G})$

$$F_{p,q,\alpha}(u, \overline{\mu}_{p,q,\alpha}) \ge f(\overline{\mu}_{p,q,\alpha}) = 0.$$

由此，根据（4.11），最终可得 $\mu_{p,q,\alpha} \ge \mu_{p,q,\overline{\alpha}}$。

论文的其余部分可直接得出。 □

5. The defocusing case

我们现在分析带有 $\alpha < 0$ 的散焦非线性薛定谔能量（1.1）。首先，命题 1.8 给出了 $E_{p,q,\alpha}$ 在 H^1_μ 中有界性的条件。

命题的证明 *1.8.* 第 1 点和第 3 点中的下有界性与强制性可如命题 1.1 中那样证明。为证明对所有 $\mu > 0$ 有 $\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu) \le 0$，我们考虑定理 1.2 或 1.4 的证明中构造的序列 $\{u_n\}$，并注意到当 $n \to +\infty$ 时 $E_{p,q,\alpha}(u_n) \to 0$（但由于 $\alpha < 0$，我们不能断定基态能级为负）。

关于 $\mu > \tilde{\mu}_{\mathcal{G}}$ 时的下无界性，如果 $\mathcal{G}$ 具有一条终端边，我们可以进行如下精确论证 ly 如 [26, 中所述 定理 1.7 的证明 (*i*)]；此外，同样的技巧也表明 $\mathcal{E}_{6,\ q,\ \alpha}(\mu,\ \mathcal{G}) = -\infty$ if

$\mathcal{G}$ 没有终端边，且 $\mu > \tilde{\mu}_{\mathcal{G}} = \mu_{\mathbb{R}}$ （只需从一个紧支撑函数$u \in H^1_\mu(\mathbb{R})$开始，该函数的能量为负 $E_6(u) < 0$）。

最后，令 $p = 6$ 和 $\mu \in (0, \tilde{\mu}_{\mathcal{G}}]$。根据（2.6），我们有

$$E_{6,q,\alpha}(u) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{\mu}{\mu_{6,\mathcal{G}}}\right)^2\right)\|u'\|_2^2 - \alpha\frac{C_{q,\mathcal{G}}}{q}\mu^{\frac{q+2}{4}}\|u'\|_{L^2(\mathcal{G})}^{\frac{q-2}{2}} > \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{\mu}{\mu_{6,\mathcal{G}}}\right)^2\right)\|u'\|_2^2$$

对所有 $u \in H^1_\mu(\mathcal{G})$ 都成立。这意味着 $\mathcal{E}_{6,\,q,\,\alpha}(\mu) = 0$，并且下确界无法取到。 □

请注意，与聚焦情形不同，当 $p = 6$ 和 $\mu = \tilde{\mu}_{\mathcal{G}}$时，$E_{p,\,q,\,\alpha}$ 在 H^1_μ 上有下界。命题 1.8 表明，当 $p = 6$ 且 $\mu_{6,\,\mathcal{G}} = \tilde{\mu}_{\mathcal{G}}$时，对任意 $\mu > 0$，基态都不存在。回想一下，保证 $\mu_{6,\,\mathcal{G}} = \tilde{\mu}_{\mathcal{G}}$ 的充分条件是：$\mathcal{G}$ 含有一条终端边，或者满足条件（H）。

现在我们研究以下情形的存在性结果：$p < 6$ 和 $\mu > 0$，或者 $p = 6$ 和$\mu_{6,\,\mathcal{G}} < \mu \leq \tilde{\mu}_{\mathcal{G}}$。要使该不等式成立，必须有 $\tilde{\mu}_{\mathcal{G}} = \mu_{\mathbb{R}}$。首先，我们证明 $E_{6,\,q,\,\alpha}$ 在 H^1_μ中的强制性所需的一个充分条件。

命题5.1. 设 $\mathcal{G}$ 是一个1 或2-周期度量图，$2 < q < p = 6$，且 $\mu_{6,\,\mathcal{G}} < \mu \leq \tilde{\mu}_{\mathcal{G}} = \mu_{6,\,\mathbb{R}} =\mu_{\mathbb{R}}$。若 $\mathcal{E}_{6,\,q,\,\alpha}(\mu) < 0$，则 $E_{6,\,q,\,\alpha}$ 在 $H^1_\mu(\mathcal{G})$ 中是强制的。

证明。条件 $\mu_{6,\,\mathcal{G}} < \tilde{\mu}_{\mathcal{G}} = \mu_{6,\,\mathbb{R}}$ 意味着 $\mathcal{G}$ 中没有终端边。于是，我们可以将引理 2.5 中的修正的 Gagliardo-Nirenberg 不等式应用于极小化序列 $\{u_n\}$:

$$\begin{aligned} E_{6,q,\alpha}(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n'\|_2^2 - \frac{1}{p}\|u_n\|_6^6 - \frac{\alpha}{q}\|u_n\|_q^q \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_n'\|_2^2\left(1 - \left(\frac{\mu - \theta_n}{\mu_{\mathbb{R}}}\right)^2\right) - C\theta_n^{\frac{1}{2}} - \frac{\alpha}{q}\|u_n\|_q^q \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_n'\|_2^2\left(1 - \left(\frac{\mu_{\mathbb{R}} - \theta_n}{\mu_{\mathbb{R}}}\right)^2\right) - C\theta_n^{\frac{1}{2}} - \frac{\alpha}{q}\|u_n\|_q^q \end{aligned}$$

对某个 $\theta_n \in [0, \mu]$ 成立。由于 $E_{6,\,q,\,\alpha}(u_n) \to \mathcal{E}_{6,\,q,\,\alpha}(\mu) < 0$，存在 $C > 0$ 使得 $\theta_n \geq C$，当 n 充分大时成立。因此，

$$E_{6,q,\alpha}(u_n) \geq \frac{1}{2}\|u_n'\|_2^2\left(1 - \left(\frac{\mu_{\mathbb{R}} - C}{\mu_{\mathbb{R}}}\right)^2\right) - C\mu^{\frac{1}{2}} - \frac{\alpha}{q}C\|u_n\|_2^{\frac{q}{2}+1}\|u_n'\|_2^{\frac{q}{2}-1},$$

在最后一项中使用了 Gagliardo-Nirenberg 不等式（2.6）。由于 $\mathcal{E}_{6,\,q,\,\alpha}(\mu) < 0$，这证明了 $\|u_n'\|_2^2$ 的有界性。 □

接下来，我们证明引理4.1 与命题4.2的对应结果。

引理 *5.2.* 设 $\mathcal{G}$ 为一个*1*或*2*周期度量图，$2 < q < p$，且要么 $p < 6$ 与 $\mu > 0$，要么 $p = 6$与$\mu_{6,\,\mathcal{G}} < \mu \leq \tilde{\mu}_{\mathcal{G}} = \mu_{6,\,\mathbb{R}}$。进一步假设$\mathcal{E}_{p,\,q,\,\alpha}(\mu) < 0$，并设 $\{u_n\} \subseteq H^1_\mu$ 为$E_{p,\,q,\,\alpha}$的极小化序列。则在取子序列的意义下，$u_n \rightharpoonup u$ 属于 H^1，并且要么 $u \in H^1_\mu$ 是$E_{p,\,q,\,\alpha}$的基态，要么 $u \equiv 0$ 且 $\|u\|_{L^\infty}(\mathcal{G}) \to 0$。

该引理的证明借鉴了在 [3, 5, 26]中所证明的类似陈述的若干要素。然而（与引理4.1不同），它并非直接的改编，还需要进一步的论证。因此，为完整起见，我们给出该证明的概要。

证明。如 [26, 引理 3.5] 中针对 $\alpha > 0$ 的证明，以及 [5, 定理 3.2] 或 [3, 引理 3.2] 中针对 $\alpha = 0$ 的证明所示，可通过对能量 $E_{p,\,q,\,\alpha}$ 应用 Brezis-Lieb 引理，并结合 H^1_μ 中关于 $\mathcal{E}_{p,\,q,\,\alpha}$ 的次可加性不等式来证明该引理：对于每个 μ_1，$\mu_2 > 0$，若满足 $\mu_1 + \mu_2 = \mu$，则可得

$$\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu) < \mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu_1) + \mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu_2) \tag{5.1}$$

有了这些要素，引理 5.2 的证明便完成了。关于 Brezis-Lieb 引理，它在周期图上成立，不存在任何问题。因此，尚需证明在当前假设下，次可加性不等式（5.1）在$\mathcal{E}_{p,\ q,\ \alpha}$上成立。从这个角度看，对我们而言，假设 $\mathcal{E}_{p,\ q,\ \alpha}(\mu)\ <0$ 至关重要。

首先，我们断言，对所有 $\nu\in(0,\mu)$以及使得 $\theta\nu\leq\mu$成立的 $\theta\geq1$

$$\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\theta\nu)\leq\theta^{\frac{p}{2}}\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\nu). \tag{5.2}$$

事实上，设 $\{u_n\}\subseteq H^1_\nu$是$E_{p,q,\alpha}$的极小化序列。则 $\{\theta^{\frac{1}{2}}u_n\}\subseteq H^1_{\theta\nu}$，并且

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\theta\nu)\leq E_{p,q,\alpha}(\theta^{\frac{1}{2}}u_n)&=\frac{1}{2}\theta^2\|u_n'\|_2^2-\frac{1}{p}\theta^{\frac{p}{2}}\|u_n\|_p^p+\frac{|\alpha|}{q}\theta^{\frac{q}{2}}\|u_n\|_q^q\\&\leq\theta^{\frac{p}{2}}E_{p,q,\alpha}(u_n)=\theta^{\frac{p}{2}}\left(\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\nu)+o(1)\right)\end{aligned}$$

由此可得（5.2）。通过选取 $\theta=\mu/\mu_1=\ (\mu_1+\mu_2)\ /\mu_1$ 和 $\nu=\mu_1$ 代入（5.2），我们得到 n

$$\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu)\leq\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{p}{2}}\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu_1)\quad\Longleftrightarrow\quad\left(\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\right)^{\frac{p}{2}}\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu)\leq\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu_1).$$

将 μ_1 替换为 μ_2，我们还有

$$\left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)^{\frac{p}{2}}\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu_1+\mu_2)\leq\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu_2).$$

将上述不等式两边相加，我们得到

$$\left(\left(\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\right)^{\frac{p}{2}}+\left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)^{\frac{p}{2}}\right)\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu)\leq\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu_1)+\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu_2).$$

因此，也利用 $\mathcal{E}_{p,\ q,\ \alpha}(\mu)\ <0$ 以及 $\mu_1,\ \mu_2>0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu)&=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu)+\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu)\\&<\left(\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\right)^{\frac{p}{2}}\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu)+\left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)^{\frac{p}{2}}\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu)\\&\leq\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu_1)+\mathcal{E}_{p,q,\alpha}(\mu_2),\end{aligned}$$

which 即为所需的不等式。正如前面所讨论的，此时可以按照 [5,26] 的方法进行。 □

与 [3,5,26], 中一样，可以推导出:

命题 5.3。设 $\mathcal{G}$ 是一个1 或2周期度量图，$2<q<p$，且满足 $p<6$ 和 $\mu>0$，或 $p=6$ 和 $\mu_{6,\ \mathcal{G}}<\mu\leq\tilde{\mu}_{\mathcal{G}}=\mu_{6,\ \mathbb{R}}$。若 $\mathcal{E}_{p,\ q,\ \alpha}(\mu)\ <0$，则存在一个质量为 μ 的基态。

下文中，我们将重点讨论定理 1.9。显然，函数 $\alpha\mapsto\mathcal{E}_{p,\ q,\ \alpha}(\mu)$ 关于 $\alpha\in(-\infty,\ 0]$ 是非递增的（因为 $\alpha\mapsto E_{p,\ q,\ \alpha}(u)$ 对每个固定的 $u\in H^1_\mu(\mathcal{G})$ 都具有相同的性质）。因此，式（ α 中引入的特殊值 1.6 有良好定义（正如前面所指出的，也可以在具有有限条边的非紧度量图上给出其定义，见 [26, 引理 4。1]），下面给出一个有用的等价刻画。

引理5.4. 设 $\mathcal{G}$ 为周期图，或边数有限的非紧图；令$\mu>0$ 和 $2<q<p\leq6$。此外，假设 $\mathcal{E}_p(\mu)\ <0$。则:

$$\overline{\alpha}=\inf_{u\in H^1_\mu}Q_{p,q}(u),\quad being\quad Q_{p,q}(u):=\frac{\frac{1}{2}\|u'\|_2^2-\frac{1}{p}\|u\|_p^p}{\frac{1}{q}\|u\|_q^q}. \tag{5.3}$$

证明。 我们用 $\tilde{\alpha}$ 表示 (5.3) 中的右端项。由于 $\mathcal{E}_p(\mu) < 0$，我们有 $\tilde{\alpha} < 0$。首先，我们证明 $\tilde{\alpha} \leq \alpha_\circ$。若 $\tilde{\alpha} = -\infty$，则无需证明；若 $\tilde{\alpha} > -\infty$，则

$$\tilde{\alpha} \leq Q_{p,q}(u) \quad \Longrightarrow \quad E_{p,q,\tilde{\alpha}}(u) = \frac{1}{2}\|u'\|_2^2 - \frac{1}{p}\|u\|_p^p - \frac{\tilde{\alpha}}{q}\|u\|_q^q \geq 0 \qquad \forall u \in H^1_\mu,$$

由此 $\mathcal{E}_{p,\,q,\,\tilde{\alpha}}(\mu) = 0$。因此，根据定义（1.6），我们得出 $\tilde{\alpha} \leq \alpha_\circ$。
现在，我们来证明相反的不等式。设 $\beta > \tilde{\alpha}$（若 $\tilde{\alpha} = -\infty$，则任取 $\beta < 0$）。根据 $\tilde{\alpha}$ 的定义，我们可以断言

$$\exists u_\beta \in H^1_\mu \text{ such that } \qquad \beta > \frac{\frac{1}{2}\|u_\beta'\|_2^2 - \frac{1}{p}\|u_\beta\|_p^p}{\frac{1}{q}\|u_\beta\|_q^q},$$

即 $E_{p,\,q,\,\beta}(u_\beta) < 0$。这表明 $\mathcal{E}_{p,\,q,\,\beta}(\mu) < 0$，因此 $\beta \geq \alpha_\circ$。由于 β 是 $\tilde{\alpha}$ 以上的一个任意值，我们得出 $\alpha \leq \tilde{\alpha}_\circ$。□

定理 1.9 的证明。 (1) 显然，若 $\mathcal{E}_p$，则 $\alpha = 0$ $(\mu) = 0$。另一方面，若 $\mathcal{E}_p(\mu) < 0$，则有 $\alpha < 0$。事实上，$\mathcal{E}_p(\mu) \prec 0$ 意味着存在 $u \in H^1_\mu$ 使得 $E_p(u) < 0$，并且由关于 α 的连续性可知，只要 $|\alpha|$ 足够小，对于 $E_{p,\,q,\,\alpha}(u)$，同样的结论也成立。
(2) 基态的存在性对于 $\alpha \in (\alpha_\circ, 0)$ 直接由定义 1.6 以及命题5.3 得出。关于 $\alpha < \alpha_\circ$ 的不存在性的证明见 [26, 定理 1.7 (ii) (b)]，针对 $p = 6$，并且在周期图上无需修改即成立，当 $p < 6$ 时亦然。

(3) 本点讨论当 $\alpha < 0$时的情形；因此，由第1点，$\mathcal{E}_p(\mu) < 0$，从而引理 5.4 中的另一刻画可用。首先，由$E_{p,\,q,\,\alpha}(u)$（当 u固定时）关于 α的连续性，容易得到$\mathcal{E}_{p,\,q,\,\alpha}(\mu) = 0$；否则，我们将与定义（1.6）中把$\alpha$ 作为下确界相矛盾。接下来，我们证明 $\alpha > -\infty$，并且任一极小化序列 $\{u_n\}$ 对于$Q_{p,\,q}$ 在 H^1中有界。若 $p < 6$，则

$$\begin{aligned} Q_{p,q}(u_n) = \frac{\frac{1}{2}\|u_n'\|_2^2 - \frac{1}{p}\|u_n\|_p^p}{\frac{1}{q}\|u_n\|_q^q} &\geq C\frac{\|u_n'\|_2^2}{\|u_n'\|_2^{\frac{q}{2}-1}\|u_n\|_2^{\frac{q}{2}+1}} - \frac{q}{p}\frac{\|u_n\|_q^q\|u_n\|_\infty^{p-q}}{\|u_n\|_q^q} \\ &\geq C\|u_n'\|_2^{3-\frac{q}{2}} - C\|u_n'\|_2^{\frac{p}{2}-\frac{q}{2}}\|u_n\|_2^{\frac{p}{2}-\frac{q}{2}} \end{aligned}$$

对于某个 $C > 0$，其中我们使用了 Gagliardo-Nirenberg 不等式（2.6）和（2.7）。由于 $3 - \frac{q}{2} > \frac{p}{2} - \frac{q}{2}$，这证明了 $\alpha > -\infty$ 并且 $\|u_n'\|_2^2$ 有界。
关于 $p = 6$ 的情形，我们可以着重考察 $\mu \in (\mu_{\mathcal{G}},\ \mu_{\mathbb{R}}]$。首先，我们注意到

$$Q_{6,q}(u_n) = \frac{\frac{1}{2}\|u_n'\|_2^2}{\frac{1}{q}\|u_n\|_q^q} - \frac{\frac{1}{6}\|u_n\|_6^6}{\frac{1}{q}\|u_n\|_q^q} \geq -\frac{q}{6}\frac{\|u_n\|_6^6}{\|u_n\|_q^q} \geq -\frac{q}{6}\frac{\|u_n\|_q^q\|u_n\|_\infty^{6-q}}{\|u_n\|_q^q} = -\frac{q}{6}\|u_n\|_\infty^{6-q}. \tag{5.4}$$

由于 $Q_{6,\,q}(u_n) \to \overline{\alpha} < 0$,

$$\exists C > 0 \text{ such that } \|u_n\|_\infty > C \text{ for sufficiently large } n. \tag{5.5}$$

此外，由于α 为负，$Q_{6,\,q}(u_n)$ 的分子最终也为负，而 Gagliardo-Nirenberg 不等式（2.7）意味着

$$\exists C > 0 \text{ such that } \frac{1}{6}\|u_n\|_6^6 > \frac{1}{2}\|u_n'\|_2^2 \geq C\|u_n\|_\infty^4 \text{ for sufficiently large } n.$$

由此估计可得

$$\|u_n\|_q^q \geq \frac{\|u_n\|_6^6}{\|u_n\|_\infty^{6-q}} \geq C\frac{\|u_n\|_\infty^4}{\|u_n\|_\infty^{6-q}} = C\|u_n\|_\infty^{q-2} \geq C, \tag{5.6}$$

最终 因为 $n \to +\infty$，这里用到了（5.5）以及 $q - 2 > 0$ 这一事实。由引理 5.4，我们推得 th at

$$\overline{\alpha} = \lim_n \frac{E_6(u_n)}{\frac{1}{q}\|u_n\|_q^q} \geq \frac{\mathcal{E}_6(\mu)}{C} > -\infty,$$

对于某个 $C>0$，由定理 3.2-（iii）和 3.8-（iii）。接下来需要证明，在 H_μ^1 中，$Q_{p,\ q}$ 的极小化序列有界。根据引理 2.5 中的修正的 Gagliardo-Nirenberg 不等式以及（5.6）

$$\overline{\alpha} \leftarrow Q_{6,q}(u_n)=\frac{\frac{1}{2}\|u_n'\|_2^2-\frac{1}{6}\|u_n'\|_6^6}{\frac{1}{q}\|u_n\|_q^q}\geq\frac{\frac{1}{2}\|u_n'\|_2^2\left(1-\left(\frac{\mu-\theta_n}{\mu_{\mathbb{R}}}\right)^2\right)-C\theta_n^{\frac{1}{2}}}{C}\geq -C\theta_n^{\frac{1}{2}},$$

对于某些 $C>0$ 和 $\theta_n\in[0,\mu]$。由于 $\overline{\alpha}<0$，我们推得 $\theta_n\geq C$。因此，$Q_{6,\ q}(u_n)$ 可估计如下：

$$Q_{6,q}(u_n)\geq\frac{\frac{1}{2}\|u_n'\|_2^2\left(1-\left(\frac{\mu-\theta_n}{\mu_{\mathbb{R}}}\right)^2\right)-C\theta_n^{\frac{1}{2}}}{C}\geq C\|u_n'\|_2^2\left(1-\left(\frac{\mu-C}{\mu_{\mathbb{R}}}\right)^2\right)-C\mu^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\|u_n'\|_2^2$ 的系数严格为正。因此，$\|u_n'\|_2^2$ 必有界，正如所需。

此时，对于 $p<6$ 和 $p=6$，我们分别取一个有界的极小化序列 $\{u_n\}\subseteq H_\mu^1$，对应于 $Q_{p,q}$。事实 $Q_{p,q}(u_n)\to\alpha$ 意味着 $E_{p,q,\alpha}(u_n)\to 0=\overline{\mathcal{E}}_{p,q,\alpha}(\mu)$。因此，$\{u_n\}\subseteq H_\mu^1$ 是 $E_{p,q,\alpha}$的有界极小化序列。取一个子序列，不妨设 $u_n\rightharpoonup u$ 在 H^1中弱收敛。由引理 5.2，我们推得，要么 u 是质量为 μ 的 $E_{p,q,\alpha}$的基态，要么 $u\equiv 0$ 且 $\|u\|_{L^\infty(\mathcal{G})}\to 0$。我们证明情形 $u\equiv 0$ 不可能发生。若 $u_n\rightharpoonup 0$，则

$$\overline{\alpha}=\lim_n\frac{\frac{1}{2}\|u_n'\|_2^2-\frac{1}{p}\|u_n\|_p^p}{\frac{1}{q}\|u_n\|_q^q}\geq\liminf_n\frac{q}{2}\frac{\|u_n'\|_2^2}{\|u_n\|_q^q}-\frac{q}{p}\frac{\|u_n\|_q^q}{\|u_n\|_q^q}\|u_n\|_\infty^{p-q}=\liminf_n\frac{q}{2}\frac{\|u_n'\|_2^2}{\|u_n\|_q^q}\geq 0$$

这与$\alpha<0$矛盾。因此，u 是质量为 μ 、满足$E_{p,\ q,\ \alpha}$的基态。 □

点 3 的证明也可推广到具有有限条边的度量图 $\mathcal{G}$ 。

定理*1.10*的证明。设 K 是 $\mathcal{G}$的紧核，即由有限测度的边的并集构成，并设 $\{e_i\}$ 是 $\mathcal{G}$的半直线，满足 $i\in\{1,2,\ldots,k\}$，$k\in\mathbb{N}$。记 0_i 每条半直线的起点为 e_i，并且对于 $P\in e_i$，赋予坐标 $x_P\in[0,+\infty)$，使得 $x_P=0$ 当且仅当 $P=0_i$。

证明$Q_{6,\ q}$ 在 H_μ^1 中存在基态意味着$\alpha>-\infty$，并且$\mathcal{E}_{6,\ q,\ \alpha}(\mu)=0$存在极小化元。设 $\{u_n\}\subseteq H_\mu^1$ 是$Q_{6,\ q}$ 的极小化序列。与前面的证明一样，$\{u_n\}$在 H^1 和 $\|u_n\|_q^q\geq C>0$中有界；反设 $u_n\rightharpoonup 0$，由此 $u_n\to 0$ 在$L^\infty(K)$中。于是，对于每个 $p\geq 2$，$u_n\to 0$ 在 $L^p(K)$中，并且对于每个 i，当 n 足够大时，$u_n(0_i)\leq 1$。此时，我们在 $H^1(\mathbb{R})$中定义 k 个函数，它们由限制$u_{n|e_i}$得到。

$$\text{For each } i\in\{1\ldots k\},\quad u_n^i(x):=\begin{cases}0 & \text{if } x<-1,\\ u_n(0_i)(x+1) & \text{if } -1\leq x<0,\\ u_{n|e_i}(x) & \text{if } x\geq 0,\end{cases}$$

因此：

- 对于每个 i，$u_n^i\in H^1(\mathbb{R})$，因为连续性条件成立；
- $\sum_i\|u_n^i\|_p^p=\|u_n\|_p^p+o$对所有 $p\geq 2$，因为$\|u_n\|_{L^p(K)}^p\to 0$ 且 $\|u_n^i\|_{L^p([-1,0])}^p\to 0$
- $\sum_i\|(u_n^i)'\|_2^2\leq\|u_n'\|_2^2+o(1)$，因为

$$\sum_i\|(u_n^i)'\|_2^2=\sum_i\|(u_n^i)'\|_{L^2([0,+\infty))}^2+o(1)=\sum_i\|u_n'\|_{L^2(e_i)}^2+o(1)\leq\|u_n'\|_2^2+o(1)$$

（其中第一次等式中用到了 $\|(u_n^i)'\|_{[-1,0]}^2\to 0$。）

- $\|u_n^i\|_2^2\leq\mu_{\mathbb{R}}+o(1)$ 对每个 i 都成立，因为

$$\|u_n^i\|_2^2\leq\sum_i\|u_n^i\|_2^2=\|u_n\|_2^2+o(1)\leq\mu_{\mathbb{R}}+o(1). \tag{5.7}$$

有了这个变换后的序列，我们得出

$$
\begin{aligned}
Q_{6,q}(u_n) &\geq \frac{\frac{1}{2}\sum_i \|(u_n^i)'\|_2^2 - \frac{1}{6}\sum_i \|u_n^i\|_6^6 + o(1)}{\frac{1}{q}\|u_n\|_q^q} \\
&= \frac{\sum_i \frac{1}{2}\|(u_n^i)'\|_2^2 \left(1 - \frac{\|u_n^i\|_6^6}{\|(u_n^i)'\|_2^2 \|u_n^i\|_2^4}\|u_n^i\|_2^4\right) + o(1)}{\frac{1}{q}\|u_n\|_q^q} \qquad (5.8) \\
&\geq \frac{\sum_i \frac{1}{2}\|(u_n^i)'\|_2^2 \left(1 - \left(\frac{\|u_n^i\|_2^2}{\mu_{\mathbb{R}}}\right)^2\right) + o(1)}{\frac{1}{q}\|u_n\|_q^q} \geq \frac{o(1)}{\|u_n\|_q^q} = o(1),
\end{aligned}
$$

这与以下事实矛盾：$Q_{6,\,q}(u_n) \to \alpha < 0$。在倒数第三步中，我们使用定义（2.8）以及 $\mathcal{G} = \mathbb{R}$；最后一步中，我们使用（5.7）以及以下事实：$\|u_n\|_q \geq C$。□

数据可用性：本文所述研究未使用任何数据。

References

[1] Riccardo Adami 和 Simone Dovetta。一维版本的三维系统：空间网格上非线性薛定谔方程的基态。 *Rend. Mat. Appl. (7)*，39(2):181–194，2018。[2] Riccardo Adami、Simone Dovetta 和 Alice Ruighi。量子图与维数交叉：蜂窝结构。*Commun. Appl. Ind. Math.*，10(1):109–122，2019。[3] Riccardo Adami、Simone Dovetta、Enrico Serra 和 Paolo Tilli。双周期度量图上非线性薛定谔方程的维数交叉与连续统临界指数。 *Anal. PDE*，12(6):1597–1612，2019。[4] Riccardo Adami、Enrico Serra 和 Paolo Tilli。图上的非线性薛定谔方程基态。 *Calc. Var. Partial Differential Equations*，54 1 743 761，2015 ( ): – 。[5] Riccardo Adami、Enrico Serra 和 Paolo Tilli。度量图上非线性薛定谔方程基态的阈值现象与存在性结果。 *J. Funct. Anal.*，271(1):201–223，2016。[6] Riccardo Adami、Enrico Serra 和 Paolo Tilli。度量图上 L^2临界非线性薛定谔方程的负能量基态。 *Comm. Math. Phys.*，352(1):387–406，2017。[7] Felix Ali Mehmeti。 *Nonlinear waves in networks*， *Mathematical Research*第80卷。Akademie-Verlag，柏林，1994。[8] Daniele Barbera、Filippo Boni、Simone Dovetta 和 Lorenzo Tentarelli。具有非线性点相互作用的一维散焦非线性薛定谔方程的归一化解。预印本，arXiv:2503.21700 [math.AP] (2025)，2025。[9] Gregory Berkolaiko 和 Peter Kuchment。 *Introduction to quantum graphs* 186 *Mathematical Surveys and* ，卷 *Monographs* 2013 数不详。美国数学会，普罗维登斯，RI。[10] Jerry L. Bona 和 Radu C. Cascaval。树上的非线性色散波。 *Can. Appl. Math. Q.*，16(1):1–18，2008。[11] Filippo Boni 和 Simone Dovetta。一维双非线性薛定谔方程的给定质量基态。 *J. Math. Anal. Appl.*，496(1):论文编号124797，16页，2021。[12] Filippo Boni 和 Simone Dovetta。度量图上的双非线性薛定谔基态。 *Nonlinearity*，35 7 3283( ): –3323，2022。[13] Thierry Cazenave。 *Semilinear Schrödinger equations*， *Courant Lecture Notes in Mathematics*第10卷。纽约大学、库朗数学科学研究所，纽约；美国数学会，普罗维登斯，RI，2003。[14] Simone Dovetta。紧致度量图上次临界与临界非线性薛定谔方程的无穷多个定态解的存在性。 *J. Differential Equations*，264(7):4806–4821，2018。[15] Simone Dovetta。周期度量图上定态非线性薛定谔方程的质量约束基态。 *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 26 5 30, 30, 2019 ，( ): 论文编号。[16] Simone Dovetta 和 Lorenzo Tentarelli。 L^2临界非线性薛定谔方程在具有局域非线性的非紧度量图上的情形：拓扑与度量特征。 *Calc. Var. Partial Differential Equations*，58(3):论文编号108，26页，2019。[17] Pavel Exner。图超晶格上的接触相互作用。 *J. Phys. A*，29(1):87–102，1996。[18] Pavel Exner 和 Ond˘vrej Turek。周期方格量子图的谱的高能渐近。 *J. Phys. A*，43(47):474024，25页，2010。[19] Louis Jeanjean、Jacek Jendrej、Thanh Trung Le 和 Nicola Visciglia。Sobolev临界薛定谔方程基态的轨道稳定性。 *J. Math. Pures Appl. (9)*，164:158–179，2022。[20] Louis Jeanjean 和 Thanh Trung Le。Sobolev临界薛定谔方程的多个归一化解。,(-): – 。

[21] Peter Kuchment。量子图 I：一些基本结构。第14卷，页码S107–S128。2004。量子图专题专栏。[22] Xiaoguang Li。周期度量图上双非线性薛定谔方程的归一化基态。,( ): – 。[23] Xiaoguang Li、Guoqing Zhang 和 Lele Liu。非紧度量图上具有组合局部非线性的非线性薛定谔方程基态。 *J. Math. Anal. Appl.*，530(1):26，2024。编号127672。[24] Alexander Pankov。周期度量图上的非线性薛定谔方程。 *Discrete Contin. Dyn. Syst.*，38(2):697–714，2018。[25] Dmitry Pelinovsky 和 Guido Schneider。周期图上驻定局域波的分岔。

Ann. Henri , ( ): *Poincaré* 18 4 1185 1211, 2017 – 。[26] Dario Pierotti 和 Nicola Soave。非紧度量图上具有组合非线性的非线性薛定谔方程基态。 *SIAM J. Math. Anal.*，54(1):768–790，2022。[27] Dario Pierotti、Nicola Soave 和 Gianmaria Verzini。度量图上不存在临界非线性薛定谔能量基态时的局部极小值。 *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*，151(2):705–733，2021。[28] Enrico Serra 和 Lorenzo Tentarelli。具有局域非线性的度量图上的非线性薛定谔方程束缚态。*J. Differential Equations*，260(7):5627–5644，2016。[29] Nicola Soave。具有组合非线性的非线性薛定谔方程的归一化基态。 *J. Differential Equations*，269 9 6941 6987，2020 ( ): – 。[30] Nicola Soave。具有组合非线性的非线性薛定谔方程的归一化基态：Sobolev临界情形。*J. Funct. Anal.*，279(6):108610，43页，2020。[31] Z. Sobirov、D. Matrasulov、K. Sabirov、S. Sawada 和 K. Nakamura。简单网络上的可积非线性薛定谔方程：顶点处的连接公式。 *Phys. Rev. E (3)*，81(6):066602，10页，2010。[32] Terence Tao、Monica Visan 和 Xiaoyi Zhang。具有组合幂型非线性的非线性薛定谔方程。 *Comm. Partial Differential Equations*，32(7-9):1281–1343，2007。[33] Juncheng Wei 和 Yuanze Wu。具有临界Sobolev指数和混合非线性的薛定谔方程的归一化解。 *J. Funct. Anal.*，283(6):论文编号109574，46页，2022。

Nicola Soave and Lorenzo Villata
Dipartimento di Matematica “Giuseppe Peano”
Università degli Studi di TorinoVia Carlo Alberto 10, 10123, Torino, Italy*Email address*: nicola.soave@unito.it; lorenzo.villata@unito.it