多胞体LPV系统的多二次可稳定性与可检测性 ⋆

T. J. Meijer [a], V. S. Dolk [a], W. P. M. H. Heemels [a]

[a] *Department of Mechanical Engineering、 Eindhoven University of Technology、 Eindhoven、 The Netherlands*

arXiv:2602.01337v1 [math.OC] 1 Feb 2026

摘要

在这篇技术通讯中，我们利用所谓的多二次李雅普诺夫函数，将离散时间线性时不变系统中广为人知的基于李雅普诺夫的稳定性（$S - ASA^\top + BB^\top \succ 0$）和可检测性（$P - A^\top PA + C^\top C \succ 0$）检验推广到多胞线性参数变化系统。

Key words: 线性参数变化系统、切换线性系统、鲁棒控制、多胞系统 s.

1 引言

可控性、可观测性、可稳定性和可检测性是现代控制理论的基石。尤其对于以下形式的离散时间（DT）线性时不变（LTI）系统，

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad y_k = Cx_k, \tag{1}$$

有许多经典的刻画方法可用于验证这些性质 [10]。特别地，系统（1）是可检测的（即存在一个能够渐近恢复状态的观测器），当且仅当存在一个对称正定矩阵 P，使得 [10]

$$P - A^\top PA + C^\top C \succ 0. \tag{2}$$

值得注意的是，(2) 中并不包含与某个观测器增益直接相关的项，而该观测器增益可使所得误差系统渐近稳定（但我们可以基于 (2) 的一个解 P 构造这样的增益）。类似地，系统 (1) 可稳定（即存在一个能使系统渐近稳定的状态反馈控制器）当且仅当存在一个满足 [10] 的对称正定矩阵 S

$$S - ASA^\top + BB^\top \succ 0, \tag{3}$$

与可检测性情形类似，该条件中并不包含与稳定控制器增益直接相关的项（但可以基于 (3) 的一个解 S 构造这样的增益）。

在本技术通讯中，我们关注将这些著名的基于李雅普诺夫的可检测性检验 (2) 和可稳定性检验 (3) 推广到如下形式的离散时间多胞线性参数变化（LPV）系统:

$$x_{k+1} = A(p_k)x_k + Bu_k, \quad y_k = Cx_k, \tag{4}$$

其中，$x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$、$u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ 和 $y_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ 分别表示时刻 $k \in \mathbb{N}$的状态、控制输入和测量输出。这里，未知参数 p_k 属于已知集合 $\mathbb{P}$，即对于所有 $k \in \mathbb{N}$，均有 $p_k \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}^{n_p}$。容许参数序列集合记为 $\mathcal{P}$，它由所有满足对于所有 $k \in \mathbb{N}$ 均有 $p_k \in \mathbb{P}$ 的参数序列 $\boldsymbol{p} = \{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 构成。矩阵值函数 A: $\mathbb{P} \to \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$以及矩阵 $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ 和 $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ 均为已知。我们要求 B 和 C 为常数，这是该领域的常见假设，参见例如 [3, 9]。我们聚焦于多胞系统 (4)，其特定的数学结构有助于开发基于线性矩阵不等式的工具，参见例如 [3, 4, 8, 9, 16, 17, 19]。

假设1. 参数集 $\mathbb{P}$ 包含于一个多胞体中，即存在顶点 $v_i \in \mathbb{R}^{n_p}$ 以及连续函数 ξ_i: $\mathbb{P} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $i \in \mathcal{N} := \mathbb{N}_{[1,N]}$，使得映射 ξ: $\{\mu = \begin{matrix}\mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_N\end{matrix}^\top \in \mathbb{R}^N_{\geqslant 0} \mid \sum_{i\in\mathcal{N}} \mu_i = 1\}$ $(\xi_1, \xi_2, , \xi_N)^\top$ 满足 $\xi(\mathbb{P}) \subseteq \mathbb{X}$: (, ,) , 且

$$\sum_{i\in\mathcal{N}} \xi_i(\pi)v_i = \pi, \ \textit{for any } \pi \in \mathbb{P}.$$

⋆ 本研究获得了欧洲研究委员会（ERC）根据 ERC 高级资助协议 PROACTHIS（编号：101055384）提供的资助。通讯作者：T. J. Meijer*Email addresses:* t.j.meijer@tue.nl（T. J. Meijer）、v.s.dolk@tue.nl（V. S. Dolk）、m.heemels@tue.nl（W. P. M. H. Heemels）。

定义 1. 若存在矩阵 $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, i \in \mathcal{N}$，使得系统 (4) 满足以下条件，则称其为多胞系统：

$$A(\pi) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \xi_i(\pi) A_i, \text{ for any } \pi \in \mathbb{P}. \tag{5}$$

此外，若函数

$$\xi_i \ i \in \mathcal{N} \qquad \{e_i\}_{i \in \mathcal{N}} \subset , , \text{满足 ( ),}$$

$\xi \ \mathbb{P} \qquad e_i = \ 0_{i-1}^\top \ 1 \ 0_{n-i}^\top \ ^\top \in \mathbb{R}^n \ \ i \in \mathbb{N}_{[1,n]}$
其中 (, ,) , , 是第 i 个 n 维基本基向量，则称系统 (4) 为严格多胞。

通过利用系统本身以及一类特定李雅普诺夫函数的多胞结构，研究者已提出许多综合线性矩阵不等式。这类李雅普诺夫函数称为多二次李雅普诺夫函数（多二次李雅普诺夫函数），例如参见 [3, 4, 8, 9, 16, 17, 19], ，我们将在下文定义 2 中对其进行正式描述。这些综合线性矩阵不等式隐含地假设了可稳定性 [3, 16, 19] 和可检测性 [4, 8, 9, 17]等性质。若能提出新的检验，以独立方式研究线性参数变化系统的可稳定性和可检测性（即条件中不直接包含观测器/控制器增益参数，如线性时不变（LTI）情形中的 (2) 和 (3)），这些结果也将受益。据我们所知，文献中尚无将 (2) 和 (3) 中基于李雅普诺夫的检验推广到线性参数变化系统的研究。在这篇技术通讯中，我们填补了这一空白，将著名的条件 (2) 和 (3) 加以推广，得到基于多二次李雅普诺夫函数、适用于多胞线性参数变化系统的新条件，可用于独立地刻画可稳定性和可检测性。

记号。实数集、非负实数集和自然数集分别记为 $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$,$\mathbb{R}_{\geqslant 0} = [0, \infty)$ 和 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$。对于 n, $m \in \mathbb{N}$，我们记 $\mathbb{N}_{[n,m]} = \{n, n+1, n+2, \ldots, m\}$。$n \times n$ 对称矩阵的集合记为 $\mathbb{S}^n$。$M \succ 0$ 和 $M \succcurlyeq 0$ 分别表示 $M \in \mathbb{S}^n$ 为正定和半正定。这类矩阵的集合分别为 $\mathbb{S}^n_{\succ 0}$ 和 $\mathbb{S}^n_{\succcurlyeq 0}$。符号 I 表示适当维数的单位矩阵，而 $\star$ 用于补全对称矩阵，例如 $\begin{bmatrix} A & \star \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B^\top \\ B & C \end{bmatrix}$。对于 $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$，$A^\top$ 表示其转置，$\mathrm{He}(A) = A + A^\top$，而 $A_\perp$ 是列向量构成 $\ker A$ 的一组基的矩阵。此外，$\mathrm{diag}\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}_{[1,n]}}$ 表示一个块对角矩阵，其对角块为 A_i, $i \in \mathbb{N}_{[1,n]}$。记号 $x \leftarrow y$ 表示将 x “替换”为 y。

2 参数序列依赖系统

在本节中，我们引入一类更广泛的所谓参数序列依赖（PSD）系统，它推广了(4)，由下式给出

$$x_{k+1} = \mathcal{A}(k, \boldsymbol{p}) x_k + B u_k, \quad y_k = C x_k, \tag{6}$$

其中，矩阵值函数 $\mathcal{A}\colon \mathbb{N} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$不仅取决于 p_k，还取决于整个参数序列 $\boldsymbol{p}$ 以及当前时间 k。注意，式（6）包含（多胞）线性参数变化系统（4）这一特殊情形。乍看之下，对 $\boldsymbol{p}$ 的依赖似乎有些奇怪，但它在后文的分析中自然出现。

2.1 稳定性概念

接下来，我们针对此前引入的参数序列依赖系统(6)这一类系统，介绍一种基于多胞形二次李雅普诺夫函数的重要稳定性概念。设 $x_k(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}, x_0)$为(6)在时刻 $k \in \mathbb{N}$ 的解，对应于初始状态 $x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$、参数序列 $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$ 和输入序列 $\boldsymbol{u} = \{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$，且对所有 $j \in \mathbb{N}$有$u_j \in \mathbb{R}^{n_u}$。我们考虑全局一致渐近稳定性（GUAS）[12], 这一概念，其中考虑了关于 $\boldsymbol{p}$（以及 x_0）的一致性，见 [15,定义 3]。这并不失一般性，因为对于此处所考虑的线性参数变化系统，一般GUAS定义中所采用的关于初始时刻 k_0的一致性，等价于关于$\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$的一致性，原因在于 $\boldsymbol{p}$的任意时移版本也属于 $\mathcal{P}$。我们还指出，对于此处所考虑的线性参数变化系统，一致渐近稳定性（UAS）与GUAS是等价的，例如见 [1]。对于多胞体系统(4)，多胞形二次李雅普诺夫函数已被广泛使用，例如见 [3, 4, 9, 19],，用以验证GUAS，因为它们(a)可以利用基于线性矩阵不等式的技术来构造，并且(b)比传统的公共二次李雅普诺夫函数保守性更低。这些多胞形二次李雅普诺夫函数促使我们在下文为参数序列依赖系统(6)定义多胞形二次稳定性（多胞-QS）。

定义2. 若参数序列依赖系统(6)容许一个多二次李雅普诺夫函数，即一个形如 $V\colon \mathbb{P} \times \mathbb{R}^{n_x} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 的函数，则称该系统为多二次稳定。

$$V(\pi, x) = x^\top P(\pi) x \text{ with } P(\pi) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \xi_i(\pi) \bar{P}_i, \tag{7}$$

其中 $\bar{P}_i \in \mathbb{S}^{n_x}$ 与 ξ_i、$i \in \mathcal{N}$为(5)中的函数，且对某些 a_1、a_2、$a_3 \in \mathbb{R}_{>0}$，以及对所有 $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$、$k \in \mathbb{N}$和满足 $x_{k+1} = \mathcal{A}(k, \boldsymbol{p}) x_k$ 的 x_{k+1}、$x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$，

$$a_1 \|x_k\|^2 \leqslant V(p_k, x_k) \leqslant a_2 \|x_k\|^2, \tag{8}$$

$$V(p_{k+1}, x_{k+1}) \leqslant V(p_k, x_k) - a_3 \|x_k\|^2. \tag{9}$$

多胞-QS 意味着全局一致渐近稳定 [12], 然而，反之通常并不成立，正如 [15, 第 4 节1] 通过一个反例所示，即存在一个具有形式 (4)（因而也具有形式 (6)）的系统，该系统是全局一致渐近稳定的，但不是多胞-QS。因此，采用多胞-QS 会引入一定程度的保守性。在多胞系统的背景下使用多胞形二次李雅普诺夫函数，与在切换线性系统 (SLSs) 中使用依赖于模式的李雅普诺夫函数密切相关 [14]，因此，后续结果也适用于切换线性系统 [2, 13, 20]。文献中已提出若干必要且充分的基于线性矩阵不等式的条件，例如 [3, 9, 18], 用于判断多胞系统 (4) 是否满足多胞-QS。

2.2 可检测性概念

我们关注系统 (4) 的观测器是否存在，使得相应的估计误差系统（见下文 (11)）满足多胞-QS，进而达到全局一致渐近稳定。我们考虑的观测器结构如下：

$$\hat{x}_{k+1} = A(p_k)\hat{x}_k + L(k,\boldsymbol{p})(C\hat{x}_k - y_k) + Bu_k, \quad (10)$$

其中，$\hat{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ 表示时刻 $k \in \mathbb{N}$的状态估计，而 L: $\mathbb{N}\times\mathcal{P}\to\mathbb{R}^{n_x\times n_y}$ 是待设计的观测器增益。误差 $e_k := \hat{x}_k - x_k$, $k\in\mathbb{N}$由下式描述

$$e_{k+1} = (A(p_k) + L(k,\boldsymbol{p})C)e_k, \quad (11)$$

该系统关于 e仍是线性的。这类观测器显然包括观测器（ _10 $L\ k\ \boldsymbol{p} = L\ p_k\ \boldsymbol{p}\in$），其中（,）(), $\mathcal{P}$, $k\in\mathbb{N}$, 对于某个 L: $\mathbb{P}\to\mathbb{R}^{n_x\times n_y}$，例如在 [4, 9, 18], 中所讨论的情形可作为特例；但它也允许 L 依赖于 p_k的过去值或未来值。此外，与例如 [9,18],不同，我们不要求 L 是多胞的或时不变的。因此，（10）相当一般，并使我们能够利用 $\boldsymbol{p}$的过去或未来信息（如果可用）来设计使（11）具有多胞-QS性质的观测器。

定义 3. 若存在某个函数 L: $\mathbb{N}\times\mathcal{P}\to\mathbb{R}^{n_x\times n_y}$，使误差系统 (11) 为多胞-QS，则称多胞系统 (4) 为 poly-Q 可检测。

我们有意不预先限制 (10) 中观测器增益的形式，而是希望 poly-Q 可检测性要求（即针对 (11) 的 (8) 和 (9)）能揭示 (10) 可能具有的更简单结构。事实上，我们将证明，若存在一个一般的 L，使得 (11) 为多胞-QS，那么也可以使用一个仅依赖于 p_k 的更简单的 L。从这一一般设定出发，也能加强可能的必要可检测性条件。

2.3 可稳定性概念

接下来，我们关注如下形式的稳定化状态反馈律是否存在：

$$u_k = K(k,\boldsymbol{p})x_k \text{ for some } K\colon \mathbb{N}\times\mathcal{P}\to\mathbb{R}^{n_u\times n_x}, \quad (12)$$

用于 (4)。与例如 [3, 19], 中考虑的反馈律相比，这些反馈律更为一般，其中 $K(k,\boldsymbol{p}) = K(_\quad p_k\quad \boldsymbol{p}\in)$，$\mathcal{P}$、$k\in\mathbb{N}$，对于某个多胞函数 K: $\mathbb{P}\to\mathbb{R}^{n_u\times n_x}$，因为 K 不一定是多胞函数，且可能依赖于整个参数序列 $\boldsymbol{p}$。与上文的可检测性情形类似的评论同样适用。

定义 4. 称多胞系统 (4) 为多胞-Q可稳定化的，如果闭环系统

$$x_{k+1} = (A(p_k) + BK(k,\boldsymbol{p}))x_k \quad (13)$$

对某个函数 K 是多胞-QS： $\mathbb{N}\times\mathcal{P}\to\mathbb{R}^{n_u\times n_x}$。

3 主要结果

3.1 多胞二次可检测性检验

接下来，我们提出新颖的基于线性矩阵不等式的条件，用以推广基于李雅普诺夫的线性时不变可检测性检验(2)。

定理1. 严格多胞系统(4)是多胞-Q¯可检测的，当且仅当存在矩阵 $P_i\in\mathbb{S}^{n_x}_{\succ 0}$, $i\in\mathcal{N}$ ，使得

$$\bar{P}_i - A_i^\top \bar{P}_j A_i + C^\top C \succ 0,\ \textit{for all}\ i,j\in\mathcal{N}. \quad (14)$$

此外，在此情况下，对于 $k\in\mathbb{N}$ 和 $\boldsymbol{p}\in\mathcal{P}$，(10)给出

$$L(k,\boldsymbol{p}) = -\sum_{i\in\mathcal{N}}\xi_i(p_k)A_i(\bar{P}_i + C^\top C)^{-1}C^\top \quad (15)$$

误差系统(11)关于多二次李雅普诺夫函数(7)为多胞-QS。如果系统(4)是多胞系统但不是严格多胞系统，则条件(14)是充分的。

¯证明。充分性：假设存在 $P_i\in\mathbb{S}_{\succ 0}$和 $\bar{S}_i := \bar{P}_i^{-1}$, $i\in\mathcal{N}$，使得（14）成立。两次应用舒尔补，可得

$$\bar{S}_j - A_i(\bar{P}_i + C^\top C)^{-1}A_i^\top \succ 0,\ \text{for all}\ i,j\in\mathcal{N}. \quad (16)$$

设 $\widehat{\mathcal{P}}_i := (\bar{P}_i + C^\top C)^{-1}$ 和 $L_i := -A_i\widehat{\mathcal{P}}_i C^\top$, $i\in\mathcal{N}$，使得对于所有$i\in\mathcal{N}$， $A_i + L_iC = A_i(I - \widehat{\mathcal{P}}_i C^\top C) = A_i\widehat{\mathcal{P}}_i\bar{P}_i$。记

$$Q_{ij} := \bar{S}_j - (A_i + L_iC)\bar{S}_i(A_i + L_iC)^\top, \quad i,j\in\mathcal{N},$$

现在证明 $Q_{ij}\succ 0$, $i,j\in\mathcal{N}$。有$-\bar{P}_i \succcurlyeq -(\bar{P}_i + C^\top C)$, $i\in\mathcal{N}$，由于

$$Q_{ij} = \bar{S}_j - A_i(\bar{P}_i + C^\top C)^{-1}\bar{P}_i(\bar{P}_i + C^\top C)^{-1}A_i^\top,$$

对于所有 $i,j\in\mathcal{N}$，由（16）可知， $Q_{ij}\succcurlyeq \bar{S}_j - A_i(\bar{P}_i + C^\top C)^{-1}A_i^\top \succ 0$对于所有 $i,j\in\mathcal{N}$成立。先应用舒尔补，再进行对角矩阵为 diag$\{P_j, I\}$, $Q_{ij}\succ 0$ 的合同变换-¯换，等价于

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_j & \star \\ (A_i+L_iC)^\top\bar{P}_j & \bar{P}_i \end{bmatrix} \succ 0,\ \text{for all}\ i,j\in\mathcal{N}.$$

将两边乘以 $\xi_i(\pi)\xi_j(\pi_+)$，并对所有 $i,j\in\mathcal{N}$ 求和，然后应用舒尔补可得

$$P(\pi) - (A(\pi) + L(\pi)C)^\top P(\pi_+)(A(\pi) + L(\pi)C) \succ 0$$

对于所有 $\pi_+,\pi\in\mathbb{P}$，其中 P 如式 (7) 所示。因此，带有式 (15) 中 L 的式 (11) 是多胞-QS，而 V (7) 是一个多二次李雅普诺夫函数。

严格多胞系统的必要性：假设系统 (4) 是 poly-Q 可检测的。由式 (9) 可得

$$P(p_k) \succ (A(p_k)+L(k,\boldsymbol{p})C)^\top P(p_{k+1})(A(p_k)+L(k,\boldsymbol{p})C)$$

对于所有 $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$ 和 $k \in \mathbb{N}$。利用舒尔补，我们得到，对于所有 $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$ 和 $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{bmatrix} P(p_k) & A^\top(p_k) \\ \star & S(p_{k+1}) \end{bmatrix} + \mathrm{He}\left(\begin{bmatrix} C_0^\top \end{bmatrix} L^\top(k,\boldsymbol{p}) \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}\right) \succ 0, \quad (17)$$

其中 $S(\pi) = P^{-1}(\pi) \succ 0$、$\pi \in \mathbb{P}$、$k \in \mathbb{N}$ 和 $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$。对于所有 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$，逐点应用引理1，可知存在满足（17）的 L，当且仅当

$$P(\pi) \succ 0 \text{ and } \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}_\perp^\top \begin{bmatrix} P(\pi) & A^\top(\pi) \\ \star & S(\pi_+) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}_\perp \succ 0, \quad (18)$$

对于所有 π_+、$\pi \in \mathbb{P}$。利用 P、S 和 A 的连续性，我们可以应用引理2，得出（18）中的第二个条件成立，当且仅当存在满足以下条件的 $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} P(\pi) & A^\top(\pi) \\ \star & S(\pi_+) \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} C_0^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \succ 0 \text{ for all } \pi_+, \pi \in \mathbb{P},$$

利用舒尔补，这等价于对于所有、，$P(\pi)$ $A^\top \pi P \pi_+ A \pi + \mu C^\top C \succ 0$ $\pi_+ \pi \in \mathbb{P}$ ( ) ( ) ( )。由于（4）的严格多胞性，可¯得出，对于所有 i、$j \in \mathcal{N}$，$P_i \succ 0$ 和 $\bar{P}_i - A_i^\top \bar{P}_j A_i + \mu C^\top C \succ 0$。由于 $C^\top C \succcurlyeq$¯ ¯0，取 $\bar{\mu} >$ $\max\{0, \mu\}$ 且 $P_i \leftarrow (1/\bar{\mu})P_i$ 时，（14）成立。 □

上述条件为严格多胞系统 (4) 的 poly-Q可检测性提供了一个非保守检验，其形式直接对应于线性时不变系统检验 (2)。因此，对于任意严格多胞系统 (4)，如果定理1中的条件不可行，那么系统 (4) 就不是 poly-Q 可检测的。得到 (14) 的正定解后，我们可以构造 (15) 中的观测器增益，使 (11) 具有多胞-QS 性质；重要的是，其实现只需要在时间 $k \in \mathbb{N}$ 使用 p_k。

注1. 令人惊讶的是，尽管定义3中所考虑的可检测性概念允许 L 任意依赖于整个参数序列 $\boldsymbol{p}$，(15)中的 L 却是多胞的，并且仅依赖于参数 p_k的当前值。因此，严格多胞系统(4)是poly-Q 可检测的（对 $L(k,\boldsymbol{p})$没有任何先验限制），当且仅当它允许一个多胞的 $L(k,\boldsymbol{p}) = L(p_k)$。换言之，如果系统(4)使用复杂观测器结构是poly-Q 可检测的，那么它使用更简单的观测器结构也是poly-Q 可检测的，因此，增加的复杂性并无帮助（并且知道 $l \neq k$对应的 p_l 的其他值也没有帮助）。此外，任一结构的观测器的存在性等价于定理1中线性矩阵不等式的可行性，如图 1所总结。

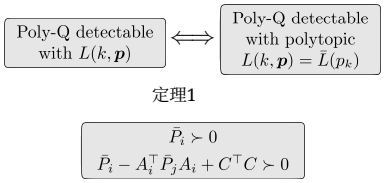


图 1. poly-Q 可检测性条件概览。

我们通过证明定理1确实推广了(2)来结束本节。我们通过在(14)中用$P \in \mathbb{S}^{n_x}_{\succ 0}$ 和 $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$替换$P_i \leftarrow P$和 $A_i \leftarrow A$来恢复(2)。在(15)中进行同样的替换可得

$$L = -A(P + C^\top C)^{-1}C^\top = -ASC^\top(I + CSC^\top)^{-1},$$

其中，我们使用伍德伯里恒等式得到了后一个表达式，其中 $P = S^{-1}$。如果 P满足 (2)，这恰好就是在 LTI 情形下由 (2) 得到的观测器增益，参见例如 [5]。因此，定理1确实将线性时不变（LTI）情形下著名的基于李雅普诺夫的可稳定性结果推广到了多胞 LPV 系统 (4)。

3.2 多胞-Q可稳定性判据

受定理1中（2）式推广的启发，我们旨在推广（3）式中的可稳定性判据。首先，我们给出非保守的参数依赖条件。

定理2。多胞系统（4）是多胞-Q可稳定的，当且仅当存在 $\bar{S}_i \in \mathbb{S}^{n_x}_{\succ 0}$ 和 $\bar{P}_i = \bar{S}_i^{-1}$、$i \in \mathcal{N}$，使得 $S(\pi) = P^{-1}(\pi)$，其中 P见（7）式，满足

$$S(\pi_+) - A(\pi)S(\pi)A^\top(\pi) + BB^\top \succ 0, \quad (19)$$

对所有 π_+、$\pi \in \mathbb{P}$均成立。此外，在这种情况下，

$$K(k,\boldsymbol{p}) = -B^\top(S(p_{k+1}) + BB^\top)^{-1}A(p_k), \quad (20)$$

对于 $k \in \mathbb{N}$和 $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$，使闭环系统（13）具有带多二次李雅普诺夫函数（7）的多胞-QS性质。

¯证明。充分性：假设存在 $S_i \in \mathbb{S}^{n_x}_{\succ 0}$ 和$\bar{P}_i = \bar{S}_i^{-1}$、$i \in \mathcal{N}$，使得 S (π) $= P^{-1}(\pi)$，其中 P 见（ 7 19 $\pi_+ \pi \in \mathbb{P}$ $\mathcal{S} \pi = S \pi +$）式，满足（） $BB^\top$ $^{-1}$ $\pi \in \mathbb{P}$ 式，对所有、均成立。令（）：（（））， 。使用两次舒尔补可得

$$P(\pi) - A^\top(\pi)\widehat{\mathcal{S}}(\pi_+)A(\pi) \succ 0, \quad (21)$$

对所有 $\pi_+, \pi \in \mathbb{P}$ 均成立。由 $\bar{S}_i \succ 0, i \in \mathcal{N}$ 可知，$S(\pi)$ $\succ 0$ 对所有 $\pi \in \mathbb{P}$ 均成立。设 K 如式 (20) 所示，使得

$$A_{\mathrm{cl}}(k,\boldsymbol{p}) \coloneqq A(p_k) + BK(k,\boldsymbol{p}) = (I - BB^\top\widehat{\mathcal{S}}(p_{k+1}))A(p_k) = S(p_{k+1})\widehat{\mathcal{S}}(p_{k+1})A(p_k),$$

对所有 $k \in \mathbb{N}, \boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$。对于 $k \in \mathbb{N}, \boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$，记为

$$Q(k,\boldsymbol{p}) \coloneqq P(p_k) - A_{\mathrm{cl}}^\top(k,\boldsymbol{p})P(p_{k+1})A_{\mathrm{cl}}(k,\boldsymbol{p}).$$

接下来，我们证明对所有 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$， $Q(k,\boldsymbol{p}) \succ 0$。对所有 $\pi \in \mathbb{P}$，有 $S(\pi) \preccurlyeq -\widehat{\mathcal{S}}^{-1}(\pi)$，利用

$$Q(k,\boldsymbol{p}) = P(p_k) - A^\top(p_k)\widehat{\mathcal{S}}(p_{k+1})S(p_{k+1})\widehat{\mathcal{S}}(p_{k+1})A(p_k),$$

对于 $k \in \mathbb{N}$、 $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$，这意味着，对于所有 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$，

$$Q(k,\boldsymbol{p}) \succcurlyeq P(p_k) - A^\top(p_k)\widehat{\mathcal{S}}(p_{k+1})A(p_k) \succ 0,$$

由式 (21) 可知。由于 $Q(k,\boldsymbol{p}) \succ 0$ 和 P 在 $\mathbb{P}$ 上一致有界，因此 (7) 中的 V 是 (13) 的多二次李雅普诺夫函数，从而，取 (20) 中的 K 时，(13) 是多胞-QS。

必要性：假设系统 (4) 是多胞-Q 稳定的。则， $\bar{P}_i \succ 0$、 $\bar{S}_i = \bar{P}_i^{-1}$、 $i \in \mathcal{N}$ 和 $S($ P^{-1} π $\succ 0$ $\pi \in \mathbb{P}$ π $=$ 9) ( )，。根据舒尔补，( ) 对所有 $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$、 $k \in \mathbb{N}$ 成立，

$$\begin{bmatrix} P(p_k) & \star \\ A(p_k) & S(p_{k+1}) \end{bmatrix} + \mathrm{He}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} K(k,\boldsymbol{p}) \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}\right) \succ 0. \quad (22)$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$ 逐点应用引理1，存在满足 (22) 的 K 当且仅当

$$S(\pi) \succ 0 \text{ and } \begin{bmatrix} 0 & B^\top \end{bmatrix}_\perp^\top \begin{bmatrix} P(\pi) & \star \\ A(\pi) & S(\pi_+) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B^\top \end{bmatrix}_\perp \succ 0,$$

对所有 π_+、 $\pi \in \mathbb{P}$ 均成立。对所有 π_+、 $\pi \in \mathbb{P}$ 逐点应用引理2，并遵循定理1证明末尾的相同步骤，即可完成证明。 □

尽管从定义4中的一般可稳定性概念出发，式（20）中的控制器增益却仅取决于 p_k 和 p_{k+1}，并具有特定结构。正如观测器设计问题的注1中所述，这意味着，如果系统（4）可由复杂控制器实现多胞-Q可稳定化，那么采用式（20）中更简单的控制器结构也能实现多胞-Q可稳定化（因此，获知 $l \notin \{k, k+1\}$ 时 p_l 的其他取值并无帮助）。实现式（20）只需要在时刻 $k \in \mathbb{N}$ 获得 p_k 和 p_{k+1}。如果无法预先获知 p_{k+1}，则可使用估计值 $\hat{}p_{k+1}$，而定理2自然可推出相对于 $p_{k+1} - \hat{}p_{k+1}$ 的输入到状态稳定性。

为了将定理2与线性时不变结果 (3) 联系起来，我们在 (20) 中代入$A(\pi) \leftarrow A$ 和 $S(\pi) \leftarrow S$，其中 $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ 和 $S \in \mathbb{S}_{\succ 0}^{n_x}$，即可得到（利用伍德伯里恒等式 [7]）

$$K = -B^\top(S + BB^\top)^{-1}\bar{A} = -(I + B^\top PB)^{-1}B^\top P\bar{A},$$

其中 $S = P^{-1}$ 满足 (3)，这正是在 LTI 框架中由 (3) 得到的稳定化控制器增益，参见例如 [5]。类似地，定理2中的条件在作出相同替换后可化简为 (3)，因此将 (3) 推广到了多胞形线性参数变化系统框架。为系统地求解定理2中的条件，我们通常将其转换为关于顶点的条件。以下推论可通过在各顶点处计算 (19) 得出，因此省略其证明。

推论1. 严格多胞系统 (4) 是多胞-Q可稳定化的必要条件是存在 $\bar{S}_i \in \mathbb{S}_{\succ 0}^{n_x}$、 $i \in \mathcal{N}$，使得

$$\bar{S}_j - A_i\bar{S}_iA_i^\top + BB^\top \succ 0, \ \textit{for all } i,j \in \mathcal{N}. \quad (23)$$

由此可知，对于任意严格多胞系统 (4)，若推论1中的条件不可行，则系统 (4) 不是多胞-Q可稳定化的。据我们所知，遗憾的是，目前尚无证明表明 (23) 是充分条件。难点在于，极难从 (23) 推导出一个对$\bar{P}_i = \bar{S}_i^{-1}$ 呈线性且不包含依赖于相同索引 i 或 j的矩阵之间任何乘积的条件，而这对于证明 (23) 的充分性至关重要。然而，通过在定理2中引入额外的松弛变量，我们得到以下充分条件。

定理3. 若存在矩阵 $S_i \in \mathbb{S}^{n_x}$ 和 $X_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$，$\bar{P}_i = \bar{S}_i^{-1}$ $i \in \mathcal{N}$, , 使得多胞系统 (4) 是多二次可稳定的¯，则

$$\begin{bmatrix} X_i + X_i^\top - A_i\bar{S}_iA_i^\top + BB^\top & \star \\ X_i & \bar{S}_j \end{bmatrix} \succ 0, \ \textit{for all } i,j \in \mathcal{N}. \quad (24)$$

此外，在这种情况下，(20) 中的 K 与 (7) 中的 P 以及$S(\pi)$ $= P^{-1}(\pi)$使闭环系统 (13) 成为具有多二次李雅普诺夫函数 (7) 的多二次稳定系统。

¯证明。假设存在 $P_i \in \mathbb{S}^{n_x}$ $X_i \in$和 , ,, 使得 ( ) 在 : $\mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ $i \in \mathcal{N}$ 24 $\bar{S}_i = \bar{P}_i^{-1}$,$i \in \mathcal{N}$ $\bar{S}_i \succ 0$ $i \in \mathcal{N}$ 条件下成立。由此可得 , ,, 并通过使用 diag$\{I, P_j\}$ 的合同变换¯和舒尔补，由 (24) 可得

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_i & \star & \star \\ A_i & \mathrm{He}(X_i) + BB^\top & \star \\ 0 & \bar{P}_jX_i & \bar{P}_j \end{bmatrix} \succ 0, \text{ for all } i,j \in \mathcal{N}. \quad (25)$$

将 (25) 乘以 $\xi_i(\pi)\xi_j(\pi_+)$，并对所有 i、 $j \in \mathcal{N}$ 求和，我们得到，对所有 π_+、 $\pi \in \mathbb{P}$，

$$\begin{bmatrix} P(\pi) & \star & \star \\ A(\pi) & \mathrm{He}(X(\pi)) + BB^\top & \star \\ 0 & P(\pi_+)X(\pi) & P(\pi_+) \end{bmatrix} \succ 0, \quad (26)$$

¯其中 $P(\pi) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \xi_i(\pi)P_i$，如 (7) 所示，且 $X(\pi) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \xi_i(\pi)X_i$, $\pi \in \mathbb{P}$。由于 $\bar{P}_i \succ 0$, $i \in \mathcal{N}$，我们有$P(\pi) \succ 0$, $\pi \in \mathbb{P}$。由 (26) 得到 $X(\pi) + X^\top(\pi)$ $X^\top$ π P X π $- A$ π S π $A^\top$ π $+ BB^\top \succ 0$ ¯ ( ) (π_+) ( ) ( ) ( ) ( )，对所有 π_+、 $\pi \in \mathbb{P}$ 均成立。通过逐点应用引理 3，我们得出 S 对所有 π_+、 $\pi \in \mathbb{P}$ 均满足 (19)。因此，根据定理2，K 如 (20) 所示，其中 $S(\pi) = P^{-1}(\pi)$， $\pi \in \mathbb{P}$，且P 如 (7) 所示，使 (13) 具有多胞-QS 性质，其多二次李雅普诺夫函数为 (7)。 □

定理3给出了基于线性矩阵不等式的条件，以保证给定的多胞系统 (4) 是多胞-Q可稳定化的。请注意，与 poly-Q可检测性中的 (15) 相比， K 在 (20) 中并非多胞形式，且取决于 p_k 和 p_{k+1}。这强调了

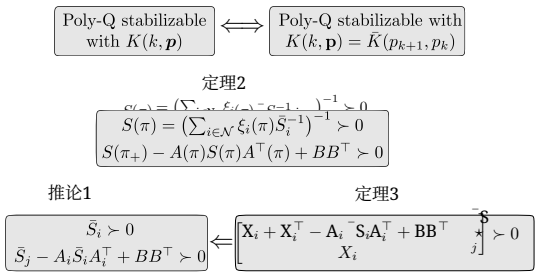


图 2. poly-Q可镇定性条件概览。

所得到的多胞性以及 (15) 中 L 对 p_k 的依赖关系（如注1所示）并非理所当然，也并非显而易见。图 2 总结了这篇技术通讯中提出的所有关于 poly-Q可稳定化的结果，并展示了各个条件之间的关系。

注2. 与线性时不变情形一样，对于 poly-Q 可镇定性和 poly-Q可检测性，我们也无法得到可稳定性与可检测性之间的对偶性。这体现在：(a) (15) 中的 L 仅取决于 p_k，而 (20) 中的 K 还取决于 p_{k+1}；(b) 图 1 中的所有条件彼此等价，而推论1与 poly-Q可镇定性并不等价（见图 2）。有趣的是，考虑公共二次李雅普诺夫函数时，对偶性得以恢复，即对于所有 i，$P_i=P_j\ \ j\in\mathcal{N}$。此时，(15) 中的 L 和 (20) 中的 K 都仅取决于 p_k，并且利用附录中的引理1可知，图 2 中的所有条件彼此等价。事实上，在这种情况下，(23) 就是令 $A_i\leftarrow A_i^\top$ 和 $C\leftarrow B^\top$ 后的 (14)。

4 结论

在本技术通讯中，我们将线性时不变系统著名的可检测性与可稳定性检验推广到一类离散时间多胞LPV系统。

参考文献

[1] F. Amato. *Robust control of linear systems subject to uncertain time-varying parameters*。控制与信息科学讲义。施普林格，2006。[2] N. Athanasopoulos 和 M. Lazar。由图定义的切换线性系统的稳定性分析。载于 *53rd IEEEConf. Decis. Control*，第 5451–5456 页，2014。[3] J. Daafouz 和 J. Bernussou。具有时变参数不确定性的离散时间系统的参数依赖李雅普诺夫函数。*Syst. Control Lett.*，43:355– 359，2001。[4] M. S. de Oliveira、K. S. Mayer 和 R. L. Pereira。多胞体LPV系统的离散时间 $\mathcal{H}_2$ 与 $\mathcal{H}_\infty$ 多二次滤波器设计。 *Int. J. Syst. Sci.*，53(10):2219–2234，2022。[5] G.-R. Duan 和 H.-H. Yu。*LMIs in control systems: Analysis, design and applications*。CRC出版社，2015。[6] P. M. Gahinet 和 P. Apkarian。基于线性矩阵不等式的 H_∞ 控制方法。 *Int. J. Robust Nonlinear Control*，4(4):421–448，1994。

[7] G. H. Golub 和 C. F. Van Loan。 *Matrix computations*。约翰·霍普金斯大学出版社，第 3 版，1996。[8] M. Halimi、G. Millerioux 和 J. Daafouz。LPV离散时间系统的多胞体观测器。载于 *Robust control and linearparameter-varying approaches*。施普林格，2013。[9] W. P. M. H. Heemels、J. Daafouz 和 G. Millerioux。具有不确定参数的离散时间LPV系统的基于观测器的控制。*IEEE Trans. Autom. Control*，55(9):2130–2135，2010。[10] J. P. Hespanha。 *Linear systems theory*。普林斯顿大学出版社，2018。[11]J. Y. Ishihara、H. T. M. Kussaba 和 R. A. Borges。参数依赖系统中连续或常值Finsler变量的存在性。*IEEE Trans. Autom. Control*，62(8):4187–4193，2017。[12]H. K. Khalil。 *Nonlinear Systems*。普伦蒂斯·霍尔，第 2 版，1996。[13] D. Liberzon。 *Switching in Systems and Control*。Birkh¨auser，2003。[14] P. Mason、M. Sigalotti 和 J. Daafouz。离散时间线性多胞体系统和切换系统的状态二次李雅普诺夫函数类别比较。*Syst. ControlLett.*，61(11):1062–1068，2012。[15] T. J. Meijer、V. Dolk 和 W. P. M. H. Heemels。用于分析LPV系统稳定性、可稳定性和可检测性的不存在性证书。 *Automatica*，170:111841，2024。[16]A. Pandey 和 M. C. de Oliveira。线性参数变化系统的二次和多二次离散时间可稳定性。*IFAC-PapersOnLine*，50(1):8624–8629，2017。[17]A. P. Pandey 和 M. C. de Oliveira。线性参数变化系统的一种新的离散时间可稳定性条件。 *Automatica*，79:214–217，2017。[18]A. P. Pandey 和 M. C. de Oliveira。关于离散时间LPV滤波器基于LMI的设计条件的必要性。*IEEE Trans. Autom. Control*，63(9):3187–3188，2018。[19] R. L. Pereira、M. S. de Oliveira 和 K. H. Kienitz。多胞体LPV系统的离散时间 $\mathcal{H}_2$ 状态反馈控制。*Optim. Control Appl. Methods*，42(4):1016–1029，2021。[20] M. Philippe、R. Essick、G. E. Dullerud 和 R. M. Jungers。具有受约束切换序列的离散时间切换系统的稳定性。 *Automatica*，72:242–250，2016。[21]K. Zhou 和 P. P. Khargonekar。具有范数有界时变不确定性的线性系统的鲁棒镇定。*Syst. Control Lett.*，10(1):17–20，1988。

附录

A 现有技术引理

引理1（[6]）。设 $\Psi\in\mathbb{S}^n$、$\Gamma\in\mathbb{R}^{m\times n}$与$\Omega\in\mathbb{R}^{p\times n}$。存在 $\Lambda\in\mathbb{R}^{m\times p}$使得 $\Psi+\Gamma^\top\Lambda\Omega+\Omega^\top\Lambda^\top\Gamma\succ 0$，当且仅当 $\Gamma_\perp^\top\Psi\Gamma_\perp\succ 0$ 与$\Omega_\perp^\top\Psi\Omega_\perp\succ 0$。

引理2（[11]）。设 $\Psi\colon\ \mathbb{P}\to\mathbb{S}^n$，且 $\Gamma\colon\ \mathbb{P}\to\mathbb{R}^{m\times n}$ 连续，其中 $\mathbb{P}\subset\mathbb{R}^p$ 为紧致集。对于所有 $\pi\in\mathbb{P}$，有 $\Gamma_\perp^\top(\pi)\Psi(\pi)\Gamma_\perp(\pi)\succ 0$，当且仅当对于所有 $\pi\in\mathbb{P}$，存在某个 $\mu\in\mathbb{R}$ 使得 $\Psi(\pi)+\mu\Gamma^\top(\pi)\Gamma(\pi)\succ 0$。

引理3（[21]）。设 X、$Y\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $S\in\mathbb{S}^m_{\succ 0}$。有 $X^\top S^{-1}X+Y^\top SY\succcurlyeq X^\top Y+Y^\top X$。