具有区间容量的最小费用网络流：最坏情形

Miroslav Rada[a, b, *]，Milan Hladík[c]，Elif Radová Garajová[a, d]，Francesco Carrabs[e]，Raffaele Cerulli[e]，Ciriaco D'Ambrosio[e]

[a]布拉格经济与商业大学，信息学与统计学院，计量经济学系，*nám. W. Churchilla1938/4*，布拉格，*13067*，捷克共和国[b]布拉格经济与商业大学，金融与会计学院，财务会计与审计系，*nám. W.Churchilla1938/4*，布拉格，*130 67*，捷克共和国[c]查理大学，数学与物理学院，应用数学系，*Malostranské nám. 2/25*，*118 00*，布拉格，捷克共和国[d]捷克生命科学大学布拉格分校，经济与管理学院，系统工程系，*Kamýcká 129*，布拉格，*16500*，捷克共和国[e]萨莱诺大学，数学系，*ViaGiovanni Paolo II*，*132*，*Fisciano (SA)*，*84084*，意大利

arXiv:2602.01360v1 [math.OC] 1 Feb 2026

摘要

我们研究了在弧容量具有区间不确定性的最小费用网络流问题中，确定最坏最优值并刻画相应最坏情形的问题。在这一设定下，每个容量都可以取其指定下界和上界之间的任意值。我们证明，计算最坏最优值是一个强 NP 困难问题，即使将问题限制在串并联图上，该问题仍然是 NP 困难的。此外，我们提出了一种混合整数线性规划 formulation，用于计算精确的最坏最优值；同时针对串并联图这一特殊情形，设计了一种伪多项式时间算法。我们还考察了最极端最坏情形的结构性质，并证明容量未固定在其区间边界上的弧构成一个森林。该结果给出了此类弧数量的上界；我们通过构造一类达到该上界的实例，证明这一上界是紧的。最后，我们研究了具有区间容量的最小费用网络流问题中的多得少付悖论：在某些实例中，增加要求流会导致最坏情形最优成本下降。我们利用增广路径对这一现象给出了一般刻画，并针对完全图建立了更强的刻画。此外，我们讨论了能够避免该悖论的成本矩阵的性质，并证明，判定给定成本矩阵是否具有这一性质是一个强 co-NP 困难问题。

关键词：《网络》、不确定性建模、最小费用流、区间不确定性、多得少付悖论

*通讯作者。电子邮箱地址：miroslav.rada@vse.cz（Miroslav Rada）、hladik@kam.mff.cuni.cz（Milan Hladík）、elif.garajova@vse.cz（ElifRadová Garajová）、fcarrabs@unisa.it（Francesco Carrabs）、raffaele@unisa.it（Raffaele Cerulli）、cdambrosio@unisa.it（Ciriaco D'Ambrosio）

1. 引言

最小费用网络流。最小费用网络流问题是运筹学和组合优化中使用的基本模型之一。该模型的目标是在满足网络中各弧容量约束的前提下，找到将给定流量从源点运送到汇点的成本最低方案。自 Ford 和 Fulkerson （1962年）的开创性研究以来，最小费用网络流问题一直是理论和算法研究的重点。Ahuja 等人所著的经典著作全面概述了该问题的理论性质和高效求解方法，见 Ahuja等人（1993年）。多年来，该模型已广泛应用于物流（Krile，2004年）、医疗保健（Slump 和 Gerbrands，1982年）和调度（Su 等人，2013年）。

涉及不确定性。然而，在许多实际的优化问题中，模型的输入数据具有不确定性，可能无法完全准确地获知。为应对这一问题，人们开发了各种建模框架，以处理具有不确定参数的网络，旨在确定在一系列可能实现情形下均表现良好的解决方案。处理不确定网络流的主要方法包括随机规划（Estes 和 Ball，2020年）、鲁棒优化（Mao 和 Zhu，2009年）或模糊规划（Ghatee 和 Hashemi，2008年）。

可行情景中的最坏情况。本文通过分析最小费用网络流问题的最坏情况行为，为研究网络流不确定性的相关研究做出了贡献。在该问题中，弧容量受到区间不确定性的影响，可在规定的下界和上界范围内变化，同时保持网络中需求流的可行性。

动机 *1*：可行情景与不可行情景的不可比性。本文所研究的问题可用于建模和分析网络吞吐量中的对抗性不确定性。将最坏最优值的计算限制在可行情景内，适用于以下应用：不可行情景所对应的系统崩溃由运营成本优化以外的机制处理（例如能源网络中的停电、合同义务中的违约，或关键供应链的中断）。在此类情境下，成本优化只有在系统持续运行时才具有意义。

考虑一个货运网络，需要以最低成本将给定流量从源节点运送到汇点。每条弧都有一个相关的不确定容量，其已知处于给定区间内，反映了拥堵、天气相关中断或维护活动可能造成的容量退化。对于由容量实现确定的给定情景，运营方会求解一个标准的最小费用流问题。某些容量实现对应的情景不可行，意味着网络发生故障，无法满足运输需求；但在实践中，这类情况由应急程序处理（例如货运取消、需求配给或合同中的不可抗力条款），不纳入最小费用流模型。因此，我们考虑最坏有限最优值，它表示在容量退化未导致服务彻底失效、网络仍保持运行的情景中，最高的运输成本

。这一建模框架衡量了区间不确定性下的网络性能，并区分了运营压力下的成本上升与系统彻底崩溃。

动机 *2*：不可行性的估值。 在容量存在不确定性的网络问题中，最坏有限最优值在合同设计背景下也有一种自然的解释。考虑这样一种情形：服务提供商在合同中承诺满足给定的运输需求，未能履约则需支付固定罚款或罚金。导致底层网络不可行的容量实现对应于违约，并会触发罚款；而可行的容量实现则会产生由最小费用流解决定的运营成本。通过评估所有可行情景中的最坏有限最优值，合同设计者可以确定在不违约的情况下可能产生的最高运营成本，从而为与不可行性相关的罚款设定合适的金额。反过来，从服务提供商的角度来看，该值使其能够比较可行容量退化下的最坏情形运营成本与不可行情形下需支付的罚金，从而判断签订合同在经济上是否合理。

动机 *3*：关注可行性的领导者所面对的网络阻断问题。 网络阻断问题可视为一种零和斯塔克尔伯格型博弈。领导者选择网络参数，以限制跟随者的可行域，从而迫使跟随者的最优解对其尽可能不利，也就对领导者尽可能有利。Smith 等人对网络阻断问题的框架进行了全面综述 Smith 等人(2013年); Smith 和 Song (2020年)。在其中的模型中，领导者可以不考虑是否会使跟随者的问题变得（不可）行而作出决策，因此并不区分最坏情形和最坏有限情形。这与我们的设定不同：我们只允许领导者作出能够使跟随者的问题保持可行的决策。我们从文献中给出两个网络阻断问题的例子，其中就存在此类约束。

首先，Hoppmann 和 Schwarz （2018年）将阻断框架应用于德国天然气网络，假设跟随者是希望以尽可能低的成本运输天然气的网络运营商，而领导者是网络的用户，负责设定源点和汇点的供给量与需求量。此外，网络运营商与用户之间的合同要求总供给量与总需求量相等，从而确保相应网络流问题的可行性。在我们的设定中，弧具有区间容量，而非区间供给与需求（相应地，即流量区间）。可以将弧的成本理解为网络中传输的媒体所具有的曝光度，可能产生某种（不）期望的效果（例如，在运输或通信网络中接触广告，或在毒品贩运网络中面临警方监控的风险）。领导者希望设定容量，使总曝光度尽可能大，而跟随者则希望尽可能降低曝光度。

其次，Wollmer （1970）研究了交通线网络（LOCP）中的打击目标选择问题。LOCP旨在根据对网络各部分妨碍作战部队或交通线使用者实现目标的程度，对网络各部分实施打击。弧的容量取决于针对这些弧发动的打击次数，而交通线使用者的目标是

根据打击后更新的容量，实现从源点到目的地的最小费用流。本文中的设定可以用LOCP公式建模；事实上，该公式更为一般，例如允许修复受攻击弧，或因打击而改变弧费用。相比之下，我们的研究涵盖了该问题更广泛的性质，并对其进行了更深入的探讨；特别是，我们讨论了多得少付悖论及其对问题复杂度的影响。

本文的研究成果。我们研究具有区间容量的最小费用网络流问题中最坏最优值的性质，分析其计算的理论复杂度，并提出用于确定该值的精确方法。我们还刻画了达到最坏最优值的情景结构。此外，我们探讨了“多得反而少”悖论，这是一种违反直觉的现象：增加要求流可能导致最坏情形最优成本降低。总之，这些结果既为不确定性下的网络流问题提供了新的理论见解，也为求解这类问题提供了算法工具。

1.1. 相关研究成果

文献已在不同背景下研究过区间不确定性下的最小费用网络流问题。

Hoppmann-Baum (2022年）研究了双层规划框架下最小费用流问题的最大化和最小化变体。该公式允许存在多个源节点和汇节点，且供给与需求为区间值。与我们的模型不同，弧容量被视为固定实数值（也可能为无穷大），而非区间。基于区间运输问题（ITP）这一特殊情形，作者证明，在所研究的模型中，计算所有情景下的最坏最优成本是NP困难的。推广ITP也是本研究的动机之一。ITP的一些基本结果已成功得到推广或沿用。第5 节中基于互补松弛分解的精确算法，实质上采用了与Garajová和Rada (2023年）针对ITP提出的基于MILP的公式相同的思路。准极端情景的概念（定理14 和15）使得能够通过有限约简计算ITP的最坏有限最优值（Carrabs等人，2021年；Garajová和Rada，2024年）。凸性结果（定理4）源自其与D’Ambrosio等人(2020年）中的相应结果的类比。

Hashemi等人（2006）研究了具有区间成本和固定容量的最小费用流问题的一种变体。在该论文中，他们将经典的组合算法扩展到区间情形，并根据区间上的完全序求解了该问题。

Kasperski （2008年）考虑了一个密切相关的问题：在具有区间权重的流网络中寻找最小 s–t 割。作者综述并分析了极小极大后悔方法，研究了该模型的算法和计算复杂性性质，并证明了该问题在若干类图上是NP困难的。该专著还讨论了区间不确定性下的其他离散网络优化问题。

Singh等人（2005年）运用多参数灵敏度分析，研究了供需、弧容量和费用的扰动对最小费用流问题的影响。他们刻画了由同时和独立的参数扰动所产生的临界区域，并将分析扩展到了多商品流。

最小费用流问题也在鲁棒优化的背景下得到了研究。Büsing等人（2022）分析了存在不确定供给与需求时带有一致流约束的问题。Chassein和Kinscherff（2019）研究了成本函数存在不确定性的鲁棒整数最小费用流问题。这两项研究也考察了串并联图这一类图，并分析了该特殊情形下问题的计算复杂性；本文同样对此进行了研究（定理11）。

最后，Gupta和Puri （1995）研究了扰动下最小费用网络流问题中的多得少付悖论。在他们的公式中，初始弧容量是给定的，核心问题是增加某些容量是否会导致总最小费用降低。相比之下，我们对该悖论的分析仅将网络结构和弧费用作为输入（定理 18）。Cenciarelli等人 Cenciarelli等人（2019）研究了另一种相关现象，并推导出呈现布雷斯悖论的交通网络的刻画。

1.2. 论文结构

本文余下部分安排如下：第2 节正式介绍具有区间容量的最小费用网络流问题，以及相关记号和定义。第3 节研究该模型的基本性质，重点关注最坏最优值、最坏情景和可行容量集合。第4 节探讨该问题的计算复杂性，证明一般情形下具有强NP困难性，且串并联图这一特殊情形下具有NP困难性。第5 节给出用于计算最坏最优值的混合整数线性规划公式，以及适用于串并联图的伪多项式算法。第6 节考察最坏情形的结构性质，并给出一个界，限定容量未设为相应边界的弧的数量。第7节讨论多得少付悖论，包括对一般图和完全图的刻画，并探讨不受该悖论影响的成本矩阵的性质。最后，第8节总结主要结果、总结全文，并概述未来研究的可能方向。

2. 问题构建

我们首先回顾最小费用流问题的标准线性规划模型，并引入必要的记号。然后，我们将影响弧容量的区间值不确定性纳入模型，并构建本文所讨论的问题：计算最坏最优值并刻画相应的最坏情景。

下文中，我们用 $\mathbb{N}$ 表示包含0的自然数集合，即所有非负整数的集合。类似地，符号 $\mathbb{R}^+$ 表示所有非负实数的集合。

最小费用流。 考虑一个有向图 $G = (V, E)$，其中有 $n := |V|$ 个节点和 $m := |E|$条弧。此外，给定以下内容：

- 一个源节点 $s \in V$,
- 一个汇点 $t \in V$,

- 弧容量 u: $E \to \mathbb{R}^+$; 值 u_e 或 u_{ij} 表示给定弧的容量 $e = (i,\ j) \in E$,

- 成本函数 c: $E \to \mathbb{R}^+$; 数值 c_e 或 c_{ij} 表示沿弧 $e = (i,\ j) \in E$传输单位流量的成本,

- 从 s 到 t 需要传输的流量 $f \in \mathbb{N}$ （不失一般性，假设其为正）。

最小费用流问题的目标是以最低成本将流量为 f 的流从源点 s传输到汇点 t 。形式化地，该问题表述如下:

$$\min \sum_{(i,\ j)\in E} c_{ij}x_{ij} \tag{1a}$$

$$\text{subject to} \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = 0, \qquad \forall i \in V \setminus \{s,t\}, \tag{1b}$$

$$\sum_{j:(s,\ j)\in E} x_{sj} - \sum_{j:(j,\ s)\in E} x_{js} = f, \tag{1c}$$

$$\sum_{j:(t,j)\in E} x_{tj} - \sum_{j:(j,t)\in E} x_{jt} = -f, \tag{1d}$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij}, \qquad \forall (i,j) \in E. \tag{1e}$$

区间容量。我们考虑网络流模型的一般化，其中弧容量可能具有区间不确定性。给定满足 $x \le x$ 的两个值 $x,\ x \in \mathbb{R}$ ，我们将区间 $\boldsymbol{x} = [x, x]$ 定义为集合 $\{x \in \mathbb{R} :\ x \le x \le x\}$，其中 x 和 x 分别是区间 $\boldsymbol{x}$ 的下界和上界。符号 $\mathbb{IR}$ 用于表示所有区间的集合，区间量用粗体字母表示。现在，我们可以通过映射 $\boldsymbol{u}$: $E \to \mathbb{IR}$ 来表示弧上的区间容量，该映射与下界映射u: $E \to \mathbb{R}^+$和上界映射 u: $E \to \mathbb{R}^+$ 相关，并且对于每条弧 $e \in E$ 都满足 $\boldsymbol{u}_e = [u_e, u_e]$。不失一般性地，假设由 u 和 u 确定的下界和上界为非负整数。

情景。我们使用“情景”一词来指代一个特定的最小成本流问题实例，或指代确定此类实例的弧容量选择 $u \in \boldsymbol{u}$ 。这里，选择 $u \in \boldsymbol{u}$ 表示满足 $u_e \in \boldsymbol{u}_e$ 的任意函数 u: $E \to \mathbb{R}^+$ ，其中每个 $e \in E$ 均满足该条件。此外，我们用 G_u 表示容量为 $u \in \boldsymbol{u}$ 的图的一个特定实例，并用 c（u）表示相应最优流的最小成本。

最坏最优值与最坏情景。本文所研究的主要问题是寻找带区间容量的最小费用流问题的一个可行情景，使其产生最高的最优值。记 $\mathcal{U}$ 为相对于给定流f的可行容量集合，即集合

$$\mathcal{U} = \{u \in \boldsymbol{u} \mid G_u \text{ admits a feasible flow of size } f\}.$$

注意，$\mathcal{U} \neq \emptyset$ 当且仅当容量为 u 的情景 f允许存在大小为 f 的流。因此，不失一般性，我们可以假设给定的最小费用流问题存在可行容量，因为可以预先高效地验证这一性质。形式化地，我们定义

最坏最优 具有区间容量 $\boldsymbol{u}$ 的最小费用流问题的值为

$$c_w \coloneqq \max\ c(u)\ \text{ subject to }\ u \in \mathcal{U}.$$

此外，我们也将任何使 c_w 达到最优值的情景 $u \in \mathcal{U}$ 称为该问题的最坏情景。

3. 模型的基本性质

我们通过研究模型的一些与最坏最优值相关的基本性质，开始分析具有区间容量的最小成本问题。具体而言，我们考察最优值函数、最坏情景以及所有可行情景集合的性质。

3.1. 可行容量集合

在最坏最优值 c_w 的定义中，我们在可行容量 $u \in \mathcal{U}$ 的约束下最大化最优值 $c(u)$。因此，本节将重点讨论给定流 f 时，可行容量集合 $\mathcal{U}$ 的性质。我们首先观察集合 $\mathcal{U}$ 的一些基本几何性质。

命题 1。 集合 $\mathcal{U}$ 是一个凸多面体集合。

证明。 显然，给定的容量 $u \in \boldsymbol{u}$ <style id='6}当且仅当存在一个流 x 使得二元组 x， u 满足线性系统（1b）–（1e）。因此，我们通过一个线性系统以及集合 $\mathcal{U}$ 本身到变量子空间 u的投影，得到了可行二元组集合的多项式表示。因此，命题得证。

□

此外，如果容量为整数，则 $\mathcal{U}$的顶点也具有相同性质。我们提醒一下，本文始终假设需求流为整数。

引理 2。 如果_u、 u 和需求流 f 均为整数，则 $\mathcal{U}$ 的顶点具有整数坐标。

证明。 考虑 $u \in \mathcal{U}$，其中对于至少一个 e， u_e 不是整数。我们证明存在一个平移$a \neq 0$，使得 $u + a \in \mathcal{U}$以及 $u - a \in \mathcal{U}$，这意味着 u位于 $\mathcal{U}$ 中一条线段的内部，因而不可能是顶点。当我们讨论 a时，假设除明确说明的项之外，所有项均为零。

定义 $E^{u \notin \mathbb{N}} \coloneqq \{e \in E \mid u_e \text{ 不是整数}\}$。

设 x 是 G_u中的一个大小为 f 的可行流。如果存在 $e \in E^{u \notin \mathbb{N}}$ 使得 $x_e < u_e$，这意味着x对于 $u + a$ 和 $u - a$ 是可行的，只要 $a_e > 0$ 足够小；也就是说， u 不是$\mathcal{U}$的顶点。因此，从现在起，我们只讨论对所有 $e \in E^{u \notin \mathbb{N}}$均有 $x_e = u_e$ 的情形。

定义 $E^{x \notin \mathbb{N}} \coloneqq \{e \in E \mid x_e \text{ 不是整数}\}$ 并且

$$V^{x \notin \mathbb{N}} \coloneqq \{v \in V \mid (v, v') \in E^{x \notin \mathbb{N}} \vee (v', v) \in E^{x \notin \mathbb{N}} \text{ for some } v' \in V\}.$$

注意，图 $G^{x \notin \mathbb{N}} = (V^{x \notin \mathbb{N}},\ E^{x \notin \mathbb{N}})$ 中存在一个（无向）环。这是因为 $V^{x \notin \mathbb{N}}$ 中的每个节点的度至少为 2：由于我们要求每个节点都至少关联一条边，因此没有节点的度可以为 0

；而由于流量平衡约束，也没有节点的度可以为 1——每个节点的流量平衡值都是整数（f、 $-f$ 或 0）。如果一条边向某个节点输入或从该节点输出非整数流，那么至少还需要另一条边来使该节点的流量平衡值调整为整数。在所有节点的度都大于或等于 2 的图中，必定存在一个（无向）环。将构成该环的边集记为 C。

现在，我们将证明可以同时增大和减小环 C 上各边的非整数容量（我们将构造一个合适的偏移量 a）。任意固定该环的方向 C。记 C^{f} 为 C 中沿正向的边集合（即方向与所选方向一致的边），记 C^{b} 为 C 中沿反向的边集合。令 $\varepsilon > 0$ 为一个足够小的数。对所有 $e \in C^{\mathrm{f}} \cap E^{u \notin \mathbb{N}}$，考虑 $a_e = \varepsilon$；对所有 $e \in C^{\mathrm{b}} \cap E^{u \notin \mathbb{N}}$，考虑 $a_e = -\varepsilon$。所有 $e \in E^{C \wedge u \in \mathbb{N}} := C \setminus E^{u \notin \mathbb{N}}$ 的容量保持不变。现在证明 $u - a$ 和 $u + a$ 都是可行情景。对于情景 $u + a$，流 x' 满足

$$x'_e = \begin{cases} x_e + \varepsilon & \text{if } e \in C^{\mathrm{f}}, \\ x_e - \varepsilon & \text{if } e \in C^{\mathrm{b}}, \\ x_e & \text{otherwise.} \end{cases}$$

是可行的：满足节点流量平衡约束（1b）–（1d），边 $E \setminus C$（流和容量未改变）以及边 $C \cap E^{u \notin \mathbb{N}}$（容量以与流相同的方式改变）均满足容量约束（1e）。对于其余边，即集合 $E^{C \wedge u \in \mathbb{N}}$中的边，以下性质成立：对每个 $e \in E^{C \wedge u \in \mathbb{N}}$，都有 $0 < x_e < u_e$。因此，$x'_e = x_e \pm \varepsilon$ 是可行的。

对于情景 $u - a$，见证可行性的流是流 x'，其中 $e \in C^{\mathrm{f}}$上为 $x'_e = x_e - \varepsilon$，$e \in C^{\mathrm{b}}$ 上为 $x'_e = x_e + \varepsilon$，$e \in E \setminus C$上为 $x'_e = x_e$。该流可行的论证与情景 $u + a$相同。

总之，我们证明了：任何在某条边上具有非整数容量的可行情景 u，都位于由另外两个可行情景所确定的线段的内部，因此这样的 u不可能是顶点。

□

现在的问题是，集合 $\mathcal{U}$ 是否可以通过线性不等式组获得高效表示。答案是否定的。定理3 表明，在最坏情况下，我们需要指数数量的线性约束来描述 $\mathcal{U}$。

定理3. 集合 $\mathcal{U}$ 无法用多项式数量的线性约束来描述。

证明。我们构造一个流问题实例，其中需要指数数量的不等式。令 G 为一个具有 n 个节点的完全图，即 $V = \{1, \ldots, n\}$ 和$E = \{(i, j) \in V^2 \mid i \neq j\}$。我们为每个$e \in E$设定流 $f = 1$ 和区间容量 $\boldsymbol{u}_e = [0, 2]$。现在，当且仅当每个割的大小至少为 f时，容量 $u \in \boldsymbol{u}$ 才是可行的。更正式地说，

$$1 = f \leq \sum_{i \in S,\, j \notin S} u_{ij}, \quad \forall S : s \in S \subseteq V \setminus \{t\}. \tag{2}$$

这个系统由 2^{n-2} 个线性不等式组成，我们声称其中没有一个是不冗余的。将对应于集合 S 的不等式记为 $ineq(S)$。如果不等式 $ineq(S^*)$ 是冗余的，那么它可以由其他一些不等式$ineq(S_1)$...，$ineq(S_k)$的某个非负线性组合推出。然而，由于这些不等式包含了 $ineq(S^*)$ 中未涉及的变量，并且变量的系数为正，因此我们无法得到这样的非负线性组合。

基于类似的原因，即使加入下界约束 $u \geq \underline{u} = 0$，(2) 中的所有不等式也都不是冗余的。

现在，凸多面体集合的所有顶点

$$\{u \mid u \geq \underline{u} = 0,\ u \text{ satisfies } (2)\}$$

都位于超立方体 $[0,1]^{|E|}$中，因为对于这些顶点，(2) 中的一些不等式以等式形式成立。因此，上界约束 $u_{ij} \leq \overline{u}_{ij} = 2$ 不会影响这些顶点，所以 (2) 中的所有不等式都不是冗余的。

□

3.2. 最优值函数

利用可行容量集合 $\mathcal{U}$，我们可以等价地将最坏最优值定义为

$$c_w = \max\ c(u)\ \text{ subject to }\ u \in \mathcal{U}.$$

根据定理 1 ，我们知道 $\mathcal{U}$ 是一个凸多面体集合。在这里，我们证明最优值函数 $c(u)$ 是一个凸函数，这有助于理解为何计算 c_w 十分困难。函数 $c(u)$ 的凸性可由参数规划理论推导得出，但为求完整，我们仍给出证明。

命题 4. 最优值函数 $c(u)$ 在 $\mathcal{U}$ 上是凸函数。

证明。 对于容量 $u \in \mathcal{U}$，我们可以用对偶问题替换原始线性规划问题（1），其形式为

$$c(u) = \max\ u^T y + d^T z\ \text{ subject to }\ (y,z) \in Z$$

对于某个向量 d 和凸多面体集合 Z。现在，对于容量 $u_1,\ u_2 \in \mathcal{U}$ 及其凸组合 $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$，我们有

$$\begin{aligned}
c(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) &= \max_{(y,z)\in Z} (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)^T y + d^T z \\
&= \max_{(y,z)\in Z} \lambda_1 (u_1^T y + d^T z) + \lambda_2 (u_2^T y + d^T z) \\
&\leq \max_{(y,z)\in Z} \lambda_1 (u_1^T y + d^T z) + \max_{(y,z)\in Z} \lambda_2 (u_2^T y + d^T z) \\
&= \lambda_1 c(u_1) + \lambda_2 c(u_2),
\end{aligned}$$

这证明了最优值函数 $c(u)$ 在 $\mathcal{U}$ 上的凸性。 □

3.3. 最坏情景与最优流

现在让我们考察取得最坏最优值 c_w 的情景的性质。我们首先展示一个可以轻松刻画最坏情景的实例。

命题 5。 如果容量 $u := u$ 下的最小费用流问题是可行的，那么 c_w 在 $u := u$ 下取得。

证明。 对于容量 $u := u$, 线性规划（1）的可行集是所有情景中最小的，因此最优值最大。 □

具有区间容量的最小费用流问题可能有多个最坏情形。在尝试寻找具有特定结构的最坏情景之前，让我们先讨论最优流的一些有用性质。定理 6表明，对于最坏情形中的任意最优流，都存在一个相对于该流具有最小容量的最坏情形。

引理 6。 考虑情景 $u \in \mathcal{U}$。设 x 是情景 u 中的最优流。令 $u' := \text{最大值}\{u, x\}$，其中最大值按逐分量方式理解。那么 x 也是情景 u' 下的最优流。此外，如果 u 是一个最坏情形，那么 u' 也同样是最坏情形。

证明。 情景 u 下线性规划（1）的可行集是情景 u' 的可行集的超集（根据 u'的定义），因此 c（u）$\leq c$（u'）成立。此外， x 也是情景 u' 下（1）的一个可行解。因此， x 见证了 c（u）$= c$（u'），并且 x 是 u'的最优解。

此外，如果 u 是一个最坏情形，且 $c(u) = c_w$，那么 $c(u') = c_w$ 也成立，因为$c(u) = c(u')$。 □

我们还可以观察到，给定情景的任意最优解都可以转换为这样一个解：任意两个节点之间的弧，至多只有一个方向上存在正流量。这样的解称为互补的。定理7 对该结果进行了形式化并给出了证明。

引理 7。 对于情景 $u \in \mathcal{U}$，其对应的最小费用流问题存在一个最优解，使得对于每一对弧 （i、j）、（j、i）$\in E$，我们有 $x_{ij} \cdot x_{ji} = 0$。

证明。 考虑一个最优解 x，其中对于某些节点$i, j \in V$，(i, j) 和 (j, i) 上的流量均为正。通过从弧 (i, j) 和 (j, i) 上各减去大小为 $\varepsilon = \min\{x_{ij}, x_{ji}\} > 0$ 的流量，构造一个可行解 x'，即 $x'_{ij} = x_{ij} - \varepsilon$ 和 $x'_{ji} = x_{ji} - \varepsilon$。

如果 $c_{ij} > 0$ 或 $c_{ji} > 0$，从两条弧上减去流量会严格降低目标值，从而得到 $c(x') < c(x)$，这与解 x 的最优性矛盾。因此，由于假设弧成本非负， $c_{ij} = c_{ji} = 0$ 成立。由此可得 $c(x') = c(x)$，因此 x' 是该问题的最优解，同时也满足 $x'_{ij} \cdot x'_{ji} = 0$。

对于所有双向均有正流量的节点对，可以重复此操作，从而得到具有所需性质的最优解。 □

定理 8 指出，经典最小费用流问题满足整性定理。

定理 8 (Ahuja等人 (1993年，定理9.10))。 给定一个整数情景 $u \in \mathcal{U}$ 和整数需求流 f， u 存在一个最优流 x 使得 x 为整数。

现在我们证明，对于具有区间容量的最小费用流问题的最坏情景，也可以证明一个类似的整性定理。

定理 9. 如果容量 u和 u以及需求流 f 均为整数，那么存在一个整数情景 u ，满足 $c(u) = c_w$。

证明。 回顾一下， $c_w = \max c(u)$ 满足条件 $u \in \mathcal{U}$。由于 $c(u)$ 根据定理 4 是凸函数，且 $\mathcal{U}$ 是一个凸多面体（定理 1），其顶点均为整数（定理 2），因此存在一个整数极大点。

□

4. 计算复杂性

现在我们正式探讨计算最坏最优值问题的计算复杂性 c_w。注意，我们的问题可以表述为一个具有区间右端项的线性规划的最坏情况下的有限最优值（Hladík，2018年）。一般而言，已证明此问题是 NP困难的；然而，由于我们的流问题具有特殊结构，我们必须单独考察其计算复杂性。

定理 10. 计算 c_w 的问题是强 *NP* 困难。

证明。 我们从一个 NP 困难问题进行归约，该问题要求确定无权图中的最长路径。

为了将最长路径问题归约到计算 c_w的问题，我们考虑路径所有可能的起点和终点节点对 $\binom{n}{2}$ （s， t）。对于每一对，我们在该图上求解一个流问题实例，其中要求流为 $f = 1$、成本为 $c_{ij} = 1$ ，且所有弧的区间容量为 $\boldsymbol{u}_{ij} = [0, 1]$ 。那么，从 s 到 t的最长路径可达到 c_w ，而 c_w 的每个整数最优解都能得出从 s 到 t的最长路径。

因此，只需求解 O（n^2）个寻找 c_w 的问题，即可解决确定无权图中最长路径的 NP 困难问题。 □

由于上述证明利用了从有向图中寻找最长路径（或哈密顿路径）的 NP 困难问题进行归约，因此，计算 c_w 的问题即使限于最长路径（或哈密顿路径）难以计算的图子类，仍然是 NP 困难的。例如，有向平面图的入度和出度至多为二（Plesník，1979）。

定理 11 给出了另一个从背包问题出发的NP困难性归约。该归约使得即使对于串并联图这一特殊类别（树宽为2的图）也能推导出困难性结果。串并联图是可以通过一系列以下操作构造的图：

1. 弧创建：创建一个新的图的不相交分量，由一个新的源点 s、一个新的汇点 t 以及弧 (s, t) 组成，

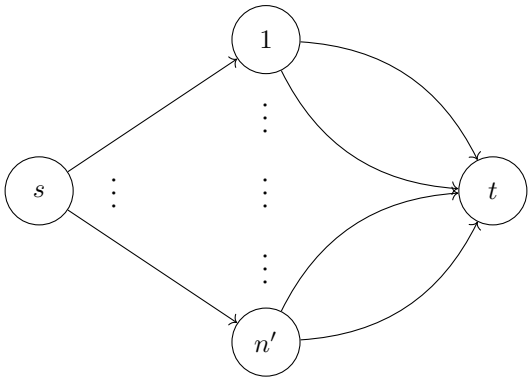

图 1：从背包问题到具有区间容量的最小费用流问题的归约。弧上方的数字表示容量，弧下方的数字表示成本。

2. 串联组合：将两个不相交分量——一个以 s_1 为源点、以 t_1 为汇点，另一个以 s_2 为源点、以 t_2 为汇点——通过合并 t_1 与 s_2 组合成一个分量，使得所得分量具有源点 $s = s_1$ 和汇点 $t = t_2$，3. 并联组合：将两个不相交分量——一个以 s_1 为源点、以 t_1 为汇点，另一个以 s_2 为源点、以 t_2 为汇点——通过合并 s_1 与 s_2 以及 t_1 与 t_2 组合成一个分量，使得所得分量具有源点 $s = s_1 = s_2$ 和汇点 $t = t_1 = t_2$。

请注意，尽管串并联图中从 s 到 t 的路径数量可能呈指数级增长，但所提出的归约构造出的最小费用流问题实例中，路径数量只有线性级。

定理 11. 对于串并联图类以及从 s 到 t 有 $O(n)$ 条路径的图，计算 c_w 是 *NP*困难的。

证明。 我们从具有整数数据的 0-1背包问题进行归约：给定容量为 $b \in \mathbb{N}$ 的背包和一组物品 $\{1, \ldots, n'\}$，其重量为 $a \in \mathbb{N}^{n'}$，价值为 $c' \in \mathbb{N}^{n'}$，计算

$$c_K \coloneqq \max {c'}^T y \text{ subject to } a^T y \leq b,\ y \in \{0,1\}^{n'}.$$

我们在图 1 所示的串并联图上构造一个具有区间容量的最小费用流问题实例，1其中源节点为 s，汇点为 t，并且背包问题中的每件物品对应一个节点和三条弧。弧上方的数字表示容量，弧下方的数字表示成本。需求流设为 $f = \min\{b, \sum_{i=1}^{n'} a_i\}$。

注意，所构造的实例是一个多重图。这样做不失一般性，因为可以通过插入辅助节点将平行弧细分。还要注意，从 s 到 t 有 $2n' = O(n)$ 条路径，并且该图是串并联图。

我们声称，所构造的实例满足 $c_K = c_w$。

如果 $\sum_{i=1}^{n'} a_i \leq b$，所有物品都可以放入背包，因此背包问题很简单。在这种情况下，只有一个可行情景允许传输流 f：对每个 $i \in \{1, \ldots, n'\}$，我们都将区间容量设为 $u_{si} = a_i$。我们有 $c_w = \sum_{i=1}^{n'} c'_i = c_K$。

在证明的其余部分中，我们假设 $\sum_{i=1}^{n'} a_i > b$，因此有 $f = b$。

为证 ve $c_K \leq c_w$，我们考虑背包问题的一个最优解 y^*，其最优 al

值为 $c_K = c'^T y^*$。该最优解中物品的总重量为 $w = a^T y^*$。我们构造一个情景 u，如下设置 $c(u) = c_K$：对于每个满足 $y_i^* = 1$ 的 i，设置 $u_{si} = a_i$。由于 y^* 是背包问题的一个最优解，因此该解中无法再向背包添加任何物品，并且对于每个满足 $y_j^* = 0$ 的 j，都有 $a_j > r$：$= b - w$。我们任选其中一个，记为 j'，并设置 $u_{sj'} = r$。对于所有其他 j，设置 $u_{sj} = 0$。在此情景下，最小费用流运输：

- r 单位的流经节点 j'，且由于我们有 $r \leq a_{j'} - 1$，成本为 0，
  对于每个满足 $y_i^* = 1$ 的 i，有 • a_i 单位的流经节点 i，其中一单位对应成本 c'_i，另一单位对应零成本。

因此，该情景下的成本至少为 c_K，并且我们有 $c_w \geq c_K$。

剩下要证明的是 $c_K \geq c_w$。根据定理 8 和 9，我们知道存在一个情景u^*，其中 $c(u^*) = c_w$，其最优流为 x^*，且对所有 $e \in E$ 都有 $x_e^* \in \mathbb{N}$。我们构造背包问题的解 y'，使其满足 $c'^T y' = c_w$，并证明它是可行的。对于流 x^* 使用的每条具有非零成本的弧 (i,t)，我们只需令 $y'_i = 1$。这样构造的 y' 是背包问题的可行解：当且仅当所述弧 (i,t) 传输大小为 1 的流时，$y'_i = 1$ 成立；而这又当且仅当大小为 a_i 的流经节点 i 时成立。由于 $f = b$，我们有 $a^T y' \leq b$。我们知道 y' 是背包问题的一个可行解，因此 $c_K \geq c'^T y' = c_w$，证明完毕。

□

具有有理数数据的背包问题。请注意，定理11证明中使用的背包问题具有整数系数。这使得我们能够证明其弱 NP 困难性。不过，通过更仔细地构造该实例，我们也可以将系数为有理数的背包问题归约到此问题；据称该问题是强 NP 困难的（Wojtczak，2018年）。

5. c_w的精确计算

正如我们在第4节中所证明的，计算具有区间容量的最小费用流问题的最坏最优值是 NP 困难的。因此，设计一种高效的多项式时间方法来求得精确值 c_w希望渺茫。

本节中，我们基于对偶性理论，给出一种用于计算c_w 的混合整数线性规划公式。该公式使我们能够利用现有的整数规划求解器和启发式算法来应对这一具有挑战性的问题。

此外，我们还为串并联图的子类设计了一种用于计算 c_w 的伪多项式算法，其时间复杂度关于节点数、弧数和流的大小呈多项式关系。请回忆，对于这一子类，定理11也证明了该问题是 NP 困难的。

5.1. 混合整数线性规划公式

现在，我们将推导一个混合整数线性规划模型，用于计算最坏最优值 c_w，该模型基于互补松弛。此前，c_w 类似的方法曾用于计算区间运输问题类别中的Garajová和Rada，2023年）。或者，我们也可以采用Hladík(2018年提出的一般方法，通过分解为基稳定区域来计算区间线性规划的最坏最优值。

这里，我们首先利用对偶性和互补松弛，将该问题建模为一个带有额外指示约束的线性规划（某些整数规划求解器也支持这些约束）。

设 $\mathcal{S}$ 表示所有网络流 x 的并集，这些网络流对于容量$u \in \mathcal{U}$的某种设定是最优的。于是，计算最坏有限最优值 c_w 的问题可以等价地重新表述为求目标函数在 $\mathcal{S}$上的最大值，即

$$\max \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij} \text{ subject to } x \in \mathcal{S}.$$

为了给出最优集的描述 $\mathcal{S}$，我们可以利用线性规划中的对偶性：最优解可由原始可行性与对偶可行性以及互补松弛条件来刻画（另见Ahuja等人（1993年，第9.4章）了解详情）。由此得到如下表述：

$$\begin{aligned}
&\max \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij} \\
&\text{subject to} \quad \text{constraints (1b)} - \text{(1e)}, \\
&\qquad \pi_i - \pi_j - \alpha_{ij} \le c_{ij}, && \forall (i,j) \in E, \\
&\qquad \alpha_{ij} \ge 0, && \forall (i,j) \in E, \\
&\qquad c^{\pi}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j, && \forall (i,j) \in E, \\
&\qquad \underline{u}_{ij} \le u_{ij} \le \overline{u}_{ij}, && \forall (i,j) \in E, \\
&\qquad \begin{cases} x_{ij} = 0 & \text{if } c^{\pi}_{ij} > 0, \\ c^{\pi}_{ij} = 0 & \text{if } 0 < x_{ij} < u_{ij}, \\ x_{ij} = u_{ij} & \text{if } c^{\pi}_{ij} < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

在该表述中，互补松弛借助指示约束实现，这些约束根据变量 c^{π}_{ij}的符号强制等式 $x_{ij} = 0$ 或 $x_{ij} = u_{ij}$ 成立。注意，关于 $c^{\pi}_{ij} = 0$ 的指示约束可以省略，因为它是其余两个约束的推论：若 $c^{\pi}_{ij} \neq 0$，则 $x_{ij} \in \{0, u_{ij}\}$，因此 $x_{ij} \notin \{0, u_{ij}\}$ 蕴含 $c^{\pi}_{ij} = 0$。

最后，我们可以将指示约束改写为大M约束，从而将模型重新表述为混合整数规划。为此，我们引入辅助二元变量y_{ij}， $z_{ij} \in \{0,1\}$ 并按如下方式替换每个指示约束：

$$c^{\pi}_{ij} > 0 \implies x_{ij} = 0 \qquad c^{\pi}_{ij} \le M y_{ij} \text{ and } x_{ij} \le M(1 - y_{ij}) \tag{3}$$

$$c^{\pi}_{ij} < 0 \implies x_{ij} = u_{ij} \qquad c^{\pi}_{ij} \ge -M z_{ij} \text{ and } u_{ij} - x_{ij} \le M(1 - z_{ij}) \tag{4}$$

常数 M 的一个足够大取值可定义为

$$M = \max \left\{ \max_{(i,j)\in E} \overline{u}_{ij};\ \ 2 \cdot \sum_{(i,j)\in E} c_{ij} + \max_{(i,j)\in E} c_{ij} \right\}.$$

这种设定允许变量 c^{π}_{ij}、 x_{ij} 以及差值 $u_{ij} - x_{ij}$ 取得足够大的

值。变量 x_{ij} 的值和表达式 $u_{ij} - x_{ij}$ 可由相应弧的容量上界 u_{ij} 从上方界定。变量 c_{ij}^{π} 是 $-\pi_i$、π_j 与弧 c_{ij} 的成本之和，其中变量 π_i 和 π_j 分别是节点 i 和 j 处流量平衡约束的影子价格。因此，这些变量表示目标值相对于约束右端项变化的变化量，因此其值可由图中一条（无向）路径或一个环的最大成本界定。显然，该成本可由所有边的成本之和界定。请注意，也可以为不同变量使用不同的 M 值，以获得更紧的界。

5.2. 串并联图的伪多项式算法

现在考虑一类特殊的具有区间容量的最小费用网络流问题，其底层网络是串并联图。在定理 中也已证明，计算最坏最优值 c_w 在这一类图上同样是 NP困难的。11本节中，我们针对容量取整数值 n且需求流为正m 的串并联图，提出一种算法，其运行时间关于节点数 f、弧数u 和流量大小 u 为多项式。 $E \to \mathbb{N}$ $f \in \mathbb{N}$。

_ –

回顾一下，串并联图通过三种操作构造而成：弧创建、并联组合和串联组合（参见第 4节）。在构造过程中，会创建并合并一些分量。注意，每次弧创建操作都会创建1 个新分量：一条弧和 2 个新节点；而两种组合操作都会将2 个现有分量合并为 1 个更复杂的分量，同时保持弧数不变，并将节点数减少1 （串联组合时）或2（并联组合时）。因此，任何具有 m 条弧的串并联图至多有 $2m$ 个节点，且可通过至多 $2m - 1 = \mathcal{O}(m)$ 次操作构造而成。

算法思路。 给定一个在串并联图 G 上具有区间容量 $\boldsymbol{u}$ 的最小费用流问题实例，我们考虑有限操作序列 $o_1, \ldots, o_q$，该序列构造出 G。对于流 x 和容量 $u \in \boldsymbol{u}$，如果有至少一个 $e \in P$ 满足 $x_e = u_e$，我们就称图中的一条（有向）路径 P 为饱和的 。

对于构造过程中生成的每个分量，我们都会计算并存储以下数据：

- 成本映射 d：$\{0, 1, \ldots, f\} \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$，用于存储给定流量通过该分量时的最坏情况下的最优成本；如果流量 f' 对该分量而言不可行，则令 $d(f') = -\infty$,

- 最小可限制流 $r \in \mathbb{N}$，即必须通过该分量的最小流量，使得存在某些容量 $u \in \boldsymbol{u}$，令从源点到汇点的所有路径都饱和；或者等价地，在所有情景 $u \in \boldsymbol{u}$ 下可通过该分量输送的最大流量，并且，

- 在情景 $u \in \boldsymbol{u}$ 中穿过该分量的最大可运输流 r；实际上，也可以根据成本映射在时间 $O(f)$ 内计算出这一信息，方法如下

$$\bar{r} = \max\{f' \in \{0, 1, \ldots, f\} \mid d(f') \geq 0\}.$$

处理完整个构造序列后，算法会返回$d(f)$ 图 G上大小为 f 的流所能达到的最大成本c_w，这对应于最坏最优值c_w。注意，得益于定理8和9所证明的性质，计算过程中只需考虑整数流。

为了设计伪多项式算法，我们对构造 G所需的$\mathcal{O}$（m）次操作逐一完成以下步骤：

- 提出一种方法，用以计算由三类串并联图操作所得分量的成本映射 d、最小可限制流 $\underline{r}$（以及可能还有最大流 $\overline{r}$）。
- 证明每一类操作的计算仅依赖于 f，并且这种依赖关系是多项式的。

下面，我们针对这三类操作中的每一类来处理这些步骤。

弧创建。 在弧创建过程中，会创建一个仅含单条弧 e 的分量，其容量为 $[u_e, u_e]$ 、成本为 c_e 。显然，对于该分量，可将最小可限制流 $\underline{r}$ 设为 u_e，因为这是使从源点到汇点的唯一路径（弧）达到饱和的最低容量。此外，大小为 $f' \le u_e$ 的流可以经由该分量输送，并且对于每个 $f' \in \{0, 1, \ldots, u_e\}$，（最大）费用可简单地计算为 $d(f') = c_e \cdot f'$。因此，我们有

$$\underline{r} = \underline{u}_e, \qquad \overline{r} = \overline{u}_e, \qquad d(f') = \begin{cases} c_e \cdot f' & \text{if } f' \in \{0, 1, \ldots, \overline{u}_e\}, \\ -\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

构造该映射的时间复杂度为 $\mathcal{O}(f)$。

串联组合。 设 C_1 和 C_2 为串联组合中使用的两个原始分量，其最小可限制流分别为 $\underline{r}_1$、$\underline{r}_2$，最大流分别为 $\overline{r}_1, \overline{r}_2$ ，成本映射分别为 d_1、d_2，并设 C 表示新组合而成的分量，其最小可限制流为$\underline{r}$，最大流为 $\overline{r}$ ，成本映射为 d。在此操作中，其中一个汇点与其中一个源点合并，从而在图 C中形成一个割点，且 C 中的所有路径都是原分量 C_1、C_2中路径的串联组合。要通过新组合的分量发送大小为 f' 的流， C_1 和 C_2 都必须能够输送 f'。因此，最小可限制流（以及最大流）取决于限制更强的分量，而输送该流的最大费用则由 C_1 和 C_2内的最大费用之和得到，即

$$\underline{r} = \min\{\underline{r}_1, \underline{r}_2\}, \qquad \overline{r} = \min\{\overline{r}_1, \overline{r}_2\}, \qquad d(f') = d_1(f') + d_2(f') \quad \text{for } f' \in \{0, 1, \ldots, f\}.$$

构造该映射的时间复杂度为 $\mathcal{O}(f)$。

并联组合。 设 C_1 和 C_2 是并联组合中使用的两个分量，它们的最小可限制流分别为 $\underline{r}_1$、$\underline{r}_2$，最大流分别为 $\overline{r}_1, \overline{r}_2$ ，成本映射分别为 d_1、d_2；设 C 表示新组合而成的分量，其最小可限制流为 $\underline{r}$，最大流为 $\overline{r}$ ，成本映射为 d。在此操作中，将 C_1 和 C_2 的源点合并，为 C 创建源点，并将汇点合并为一个汇点。

请注意， C_1 和 C_2 中的所有路径都可以分别在 C 中使用，因为组合不会在前两个分量之间产生任何重叠（源点和汇点除外）。因此， C 的最小可限制流和最大流可计算如下：

$$\underline{r} = \underline{r}_1 + \underline{r}_2, \qquad \overline{r} = \overline{r}_1 + \overline{r}_2.$$

新创建的分量 C 通常可以提供更多方式来传输给定数量的流。为了在 C中传输大小为 f' 的流，我们区分以下三种情况：

a) 假设 $r_1 + r_2 < f'$。在这种情况下， C_1 和 C_2 的合计容量不足以在 C中传输大小为 f'的流，因此我们可以设置 $d(f') = -\infty$。b) 假设 $r_1 + r_2 > f'$。在这种情况下， f'可以通过 C传输，但不能作为两个可限制流之和进行传输。因此，任何大小为 f' 的结果流在 C 中都不可限制，且需求流 f' 对于所有可能的情景都是可行的，这意味着我们可以使用任意标准算法，将 $d(f')$计算为容量为 u 时的最小费用流。不过，还有一种更高效的方法： $d(f')$可以表示为使用此前计算出的 d_1， d_2， r_1和 r_2 ，即

$$d(f') = \min\left\{d_1(f_1) + d_2(f' - f_1) \;\middle|\; f_1 \in [f' - \underline{r}_2, \underline{r}_1] \cap [0, f']\right\}. \tag{5}$$

下面说明这个表达式的合理性。由于 C 的两个组合部分彼此独立，因此流f' 可以拆分为两股大小为 f_1 、经由 C_1 以及 f_2 、经由 C_2的流之和；只要 $f_1 \le r_1$ 且 $f_2 \le r_2$， 流 f' 就会通过成本最低的组合进行传输$f_1 + f_2$。此外，有 $f_1 \in [0, f']$。经由 $f_1 > r_1$或 $f_2 > r_2$的流之和会要求至少增大一条弧的容量，因此其成本不会高于表达式（5）所示的情形，另见定理5。

c) 假设 $r_1 + r_2 \le f'$且 $r_1 + r_2 \ge f'$。这是最有趣的情形：一般来说，可限制流和不可限制的流量都可能对 f' 有贡献。我们实际上证明，只需考虑两股可限制流之和即可。

我们断言

$$d(f') = \max\left\{d_1(f_1) + d_2(f' - f_1) \;\middle|\; f_1 \in [\max\{\underline{r}_1, f' - \overline{r}_2\}, \min\{f' - \underline{r}_2, \overline{r}_1\}]\right\}. \tag{6}$$

显然，(6) 中的最大值是在 f' 到 f_1 的这类分解上求得的， f_2 满足$f_1 \in [r_1, r_1]$，并且 $f_1 = f' - f_2 \in [f' - r_2, f' - r_2]$意味着 $f_2 \in [r_2, r_2]$。因此，计算得到的$d(f')$可以通过两个可限制流获得，而值 $d(f')$则可以由某个情景强制实现。

接下来证明不存在总成本更高的情景。为导出矛盾，假设存在情景 u^{con} ，其中传输 f' ，成本为 $c^{\text{con}} > d(f')$ 。该流可分解为流 f_1^{con}和 f_2^{con}，分别经过 C_1 和 C_2。要么是 $f_1^{\text{con}} < r_1$，要么是 $f_2^{\text{con}} < r_2$，因为其他所有情况都已由（6）考察。不失一般性，假设 $f_1^{\text{con}} < r_1$。在情景 u^{con}中，可通过 C_1 传输大小为 r_1 的流，成本为 $c_1 = d_1(r_1)$ （因为可以假设 C_1 中的所有容量都设为其下限）；也可通过 C_2 传输流量为 $f' - r_1$的流，成本为 $c_2 \le d_2(f' - r_1)$ （这种流量大小是可行的，因为$f' - r_1 < f' - f_{\text{con1}} = f_{\text{con2}}$）。但是，成本为 $c_1 + c_2$的流并未被选为最优解

容量为 u^{con} 的最小费用流，这意味着 $c_1 + c_2 \geq c^{\text{con}}$。此外，我们有 $d(f') \geq d_1(r_1) + d_2(f' - r_1)$，因为如果 $f_{\text{con}_1} < r_1$，那么 $r_1 > f' - f_2^{\text{con}} \geq f' - r_2$ 且 $f_1 = r_1$ 是（6）中最大化时考察的值之一。综合以上结果，我们最终得到矛盾：

$$c_1 + c_2 \geq c^{\text{con}} > d(f') \geq d_1(r_1) + d_2(f' - r_1) \geq c_1 + c_2.$$

总体而言，情形 b) 与 c) 在流 f_1 通过 C_1 的 $O(f)$ 个价值上求最小或最大。对 $O(f)$ 个流 f' 的价值重复这一过程。总体而言，并联组合可在时间 $O(f^2)$ 内完成。

我们合束对算法的描述，并以关于其复杂度的简单命题 ty.

命题 12. 上述算法在时间 $O(mf^2)$ 内计算 c_w，其中 m 是弧创建操作的次数。

6. 最为极端的最坏情景

在定理 5 中，我们证明了若下界容量是可行的，则它们对应于最坏情景。然而，在许多实例中，可行性假设可能不成立，且最小容量可能过低而无法输送要求流。因此，我们现在探讨在区间容量最为极端的设定下对最坏情景的刻画。

如果容量设置 $u_{ij} \in \boldsymbol{u}_{ij}$ 满足 内部 条件，则 $u_{ij} \in \operatorname{int} \boldsymbol{u}_{ij}$，即 $u_{ij} \notin \{u_{ij}, u_{ij}\}$。定理 13 和 14 回答了这样一个问题：对于对应于 c_w 的情景，能够得到的内部值的最小数量是多少。

定理 13。 最坏情况值 c_w 在某个情景 $u \in \mathcal{U}$ 下取得，该情景中具有内部容量的弧构成一片森林。

证明。 考虑一个最坏情景 $u \in \mathcal{U}$。我们将证明，可以修改情景 u，使其具有内部值的弧满足所需性质。首先，不失一般性地，可以考虑相对于其互补最优解 u 而言最小的最坏情景 x （见定理 6和定理 7）。

以下过程迭代更新情景 u 和流 x，以减少具有内部容量的弧的数量：

1. 令 G_u^{int}为 $G_u =$ 的子图（V， E），其中仅包含具有内部容量的弧，即 .

$$G_u^{\text{int}} = (V, E^{\text{int}} := \{(i,j) \in E \mid (i,j) \text{ has interior capacity } u_{ij}\}).$$

2. 在图 G_u^{int} 中查找任意一个环（不考虑弧的方向）。如果不存在，则结束此过程——具有内部值的弧构成一个森林。否则，令该环由以下节点序列组成： i_1、 i_2、.....、$i_K = i_1 \in V$。

3. 令 $\mathcal{K} := \{1, \ldots, K-1\}$。计算沿该环对流 δ 的期望变化：

$$\delta := \min\Big\{ \min\{\overline{u}_{i_k,i_{k+1}} - x_{i_k,i_{k+1}} \mid (i_k, i_{k+1}) \in E^{\text{int}},\, k \in \mathcal{K}\},\\ \min\{x_{i_{k+1},i_k} - \underline{u}_{i_{k+1},i_k} \mid (i_{k+1}, i_k) \in E^{\text{int}},\, k \in \mathcal{K}\}\Big\}.$$

4. 对于每个 $k \in \mathcal{K}$，我们设定：

$$\begin{aligned} x_{i_k,i_{k+1}} &= x_{i_k,i_{k+1}} + \delta, && \text{if } (i_k, i_{k+1}) \in E^{\text{int}}, \\ x_{i_{k+1},i_k} &= x_{i_{k+1},i_k} - \delta, && \text{if } (i_{k+1}, i_k) \in E^{\text{int}}. \end{aligned}$$

5. 对于在步骤 2 中找到的环上的每条弧 e，设定 $u_e = x_e$。

6. 转到步骤 1。

从步骤 2 可以清楚地看出，一旦该过程终止，它将产生一个新情景 u^*，使得具有内部容量的弧不构成任何环——因此其图是一个森林。由于每次迭代中至少有一个容量被设定为非内部值（根据 δ 的定义），并且只有具有内部值的容量会被修改，该过程在有限次迭代后终止。为完成证明，我们证明该新情景对于给定问题也是一个有效的最坏情景。

首先，我们可以从步骤 3 中 δ 的定义以及步骤 4 中对 x 的修改看出，步骤 5 中定义的新容量相对于给定的上下界是有效的。因此，我们有 $u^* \in \boldsymbol{u}$。

此外，我们声称，如果原情景 $u \in \mathcal{U}$ 的最优值是最坏最优值 $c(u) = c_w$，那么修改后情景 u^* 的最优值也为 c_w。也就是说，我们证明，最坏情景 u 的互补最优解 x（成本为 c_w）经过修改后变为流 x^*，它是情景 u^* 的互补最优解，且成本相同。

考虑一个环 C，并固定该环的方向。定向环的成本是其各弧成本之和，其中，正向弧（即方向与所选方向一致的弧 G）对总成本的贡献为 c_e，而反向弧（方向与所选方向相反）对总成本的贡献为 $-c_e$。注意，步骤 2 中找到的环的成本均为零。否则，我们可以选择该环的一个方向（在步骤 2 中），使得按照步骤 4 和 5 进行修改后，得到一个最优成本更高的情景 u'，其最优成本为 $c(u') > c(u)$；这与原情景 u是最坏情景的假设相矛盾。

分别用 x' 和 u' 表示在步骤 4 和步骤 5 中得到的更新后解和容量。在每次迭代中，解 x' 相对于 u'都是可行流：

a) 在步骤 4 中改变环上的流之后，解 x' 仍然构成一个有效流（暂不考虑容量），因为流守恒约束仍然满足。b) 在步骤 5 中更新容量之后，步骤 4 得到的流 x' 是修改后情景u'的可行解，因为所有容量约束（以及流约束）都得到满足。

最后，在步骤 4 和 5 之后，流 x' 是情景 u' 下的最优解。这可以根据最小费用流最优性的残量图刻画来证明；该刻画仅取决于原图中当前流量可以增加的那些弧

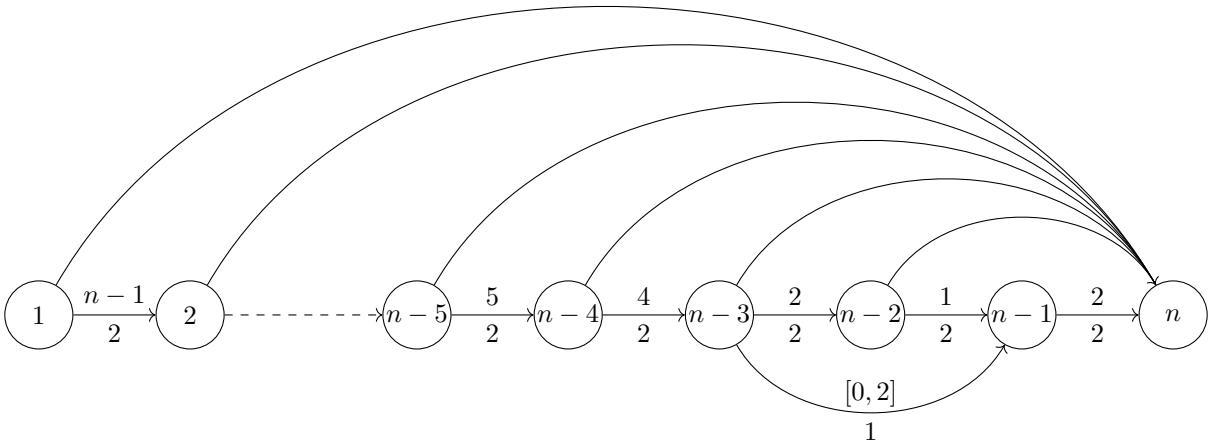

图2：带区间容量的最小费用流问题，如例1所示。

（增加量为 $x_e < u_e$）或减少量为（ $x_e > 0$）。已知，当且仅当残量图中不含负环时，给定的流才是最优的（详情参见 Ahuja等人 （1993年，定理 9.1）。在这里，改变环上的流量和容量后，残量图中不会出现新的弧。因此，如果原流 x 是 u 的最优解，且残量图中不存在负环，那么更新后不会产生新的负环，因此新流 x' 是新情景 u'下的最优解。此外，流 x' 是情景u'下的互补最优流，且相对于 x'是最小的。

□

推论14。 最坏情况值 c_w 在某一情景 $u \in \mathcal{U}$ 下取得，使得 u的容量值中至多有 $n-1$个为内部值。

证明。直接由定理13得到，因为具有 n 个节点的森林至多有 $n-1$ 条弧。 □

此外，我们可以证明定理14 中所得到的内部容量数目的界是紧的。例1 给出了一个具有 n 个节点的网络，其中每个最坏情景都有 $n-1$个内部值。该结果在定理15中得到正式证明。

例1。 考虑具有 n 个节点 $V = \{1, \ldots, n\}$ 和 $2n-2$ 条弧的图，如图2所示。弧上方的数字对应容量，弧下方的数字为费用。具体而言，弧集 $e \in E$ 定义如下：

$$
\begin{aligned}
(i, i+1) \in E, \quad & c_e = 2, \quad && u_e = n - i, && \text{for } i \in \{1, \ldots, n-4\}, \\
(i, i+1) \in E, \quad & c_e = 2, \quad && u_e = n - i - 1, && \text{for } i \in \{n-3, n-2\} \\
(n-1, n) \in E, \quad & c_e = 2, \quad && u_e = 2, && \\
(i, n) \in E, \quad & c_e = 1, \quad && \boldsymbol{u}_e = [0, 2], && \text{for } i \in \{1, \ldots, n-2\}, \\
(n-3, n-1) \in E, \quad & c_e = 1, \quad && \boldsymbol{u}_e = [0, 2]. &&
\end{aligned}
$$

目标是将大小为 $f = n$ 的流从源节点 $s = 1$ 运送到汇点 $t = n$。

请注意，在示例 1 中，恰好有 $n-1$ 条弧具有区间容量。定理 15证明，在最坏情景下，所有这些弧的容量都必须设为一个内部值。因此，这些弧构成了定理 13.

命题15. 对于示例 *1*中给出的具有区间容量的最小费用流问题，最坏最优值 c_w 仅在情景 $u \in \mathcal{U}$ 下取得，其中 $u_e = 1$ 对每条具有区间容量的弧 $e \in E$ 均成立。

证明。 弧分为两类：具有区间容量的曲线弧 和具有精确容量的直线弧 。考虑陈述中的情景 $u \in \mathcal{U}$，其中所有曲线弧都满足 $u_e = 1$ 。

显然，情景 u 下问题是可行的，因为大小为 n 的流可以通过网络输送。

我们证明以下辅助断言：给定一个节点 $i \in \{1, \ldots, n-4\}$，假设大小为 $n-i+1$ 的流必须通过 i 输送。如果对于某个可行情景 $u' \in \mathcal{U}$， $c(u') = c_w$，那么 $u'_{i,\,n} = 1$。

首先，反设 $u'_{i,\,n} < 1$。那么 u' 不是可行情景，因为离开 i 的弧的总容量为 $n-i+u'_{i,\,n} < n-i+1$，因此无法输送要求流。

其次，假设 $u'_{i,n} > 1$。注意，弧 (i,n) 是从 i 到 n成本为 $c_{i,n} = 1$ 的最廉价路径。那么，存在另一个可行情景 $u'' \in \boldsymbol{u}$，满足 $u''_{i,n} = 1$；在该情景下，流 $u'_{i,n} - 1$ 必须沿直弧 $(i, i+1)$ 运输，其成本至少为$c_{i,i+1} = 2 > c_{i,n}$。然而，情景 u'' 随后满足 $c(u') < c(u'') \leq c_w$。

因此，我们可以假设，对于每个 $i \in \{1, \ldots, n-4\}$，$u_{i,n} = 1$，且必须将大小为 4 的流从节点 $n-3$ 运输到 n。有 4 条可用路径，在情景 u 下，每条路径恰好运输一个单位流量：

路径 1：$(n-3) \to n$，成本为 1；路径 2：$(n-3) \to (n-2) \to n$，成本为 3；路径 3：$(n-3) \to (n-2) \to (n-1) \to n$，成本为 6；路径 4：$(n-3) \to (n-1) \to n$，成本为 3。

请注意，路径 3 的容量是确定的，无法增加。若要提高流的成本，就必须有一些流量通过路径 2 和路径 4 运输。然而，这是不可能的：在这些路径上增加 δ 的流量会使费用增加 $2 \cdot 3 \cdot \delta$；但与此同时，路径 3 上的流的成本会减少 6δ，路径 1 上的流的成本也会减少 δ。因此，任何迫使流量经由路径 2 和路径 4 运输的容量变化，都会使成本减少 δ。我们可以发现，任何容量变化都无法使成本 $c(u)$ 增加，甚至无法使其保持不变。因此， u 是唯一的最坏情景。

□

此前，Carrabs等人(2021也证明了区间供给与需求下的运输问题存在一个类似结果：最坏情景下的内部值数量最多可限制为一个。这一结果可能会让人认为，影响内部值数量的重要参数是 s 与 t之间的距离。然而，当 s 与 t 之间的距离小得多时，也可以构造出与上述类似的例子，因此一般而言，距离并不会直接影响内部值的数量。

7. 多得少付悖论

在经典运输问题中，某些实例可能出现一种违反直觉的现象：运输货物的总量增加，整体运输成本反而降低。这种被称为多得少付悖论的现象，一直是现有文献研究和讨论的主题。在更一般的区间容量最小费用流问题模型中，也能观察到类似情况：在某些实例中，增加需求流 f 竟可能导致最坏情况下的最优成本 c_w降低。

具体而言，给定一个具有区间容量的最小费用流问题实例，如果存在需求流量 f 和 f'，且 $f < f'$，使其各自的最坏最优值 c_w，c'_w 满足 $c'_w < c_w$，则称多得少付悖论 发生。因此，增加需求流量会使相应最小费用流问题的最坏最优值降低。请注意，不失一般性，我们可以将悖论是否发生的考察范围限定在 $f' = f + 1$ 的情形，因为只需逐一增加需求流量，直到悖论发生即可。

例2。 考虑图3所示图上的一个网络流实例。弧上方的数字表示区间容量，弧下方的数字表示费用。

对于需求流 $f = 1$，我们得到情景 $u_{s2} = u_{1t} = 0$ 下的最坏最优值 $c_w = 12$ （图4a）。然而，对于增加后的流量 $f = 2$，我们有 $c_w = 4$，因为必须将容量设为 $u_{s2} = u_{1t} = 1$ 才能使问题可行（图4b）。增加的容量使流量可以分别沿每条“廉价”路径 s–2–t 和 s–1–t 发送1单位，而不必沿价格昂贵的路径 s–1–2–t 发送；后者曾用于 $f = 1$。

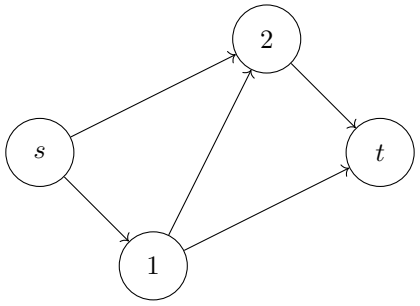

图 3：一个具有区间容量的最小费用流问题实例，其中存在多得少付悖论（见例 2）。

我们将说明，多得少付悖论与流的增广路径的存在有关。形式化地说，图中流 x 的一条增广路径 是由一系列弧组成的序列，这些弧对应于一条从源点 s 到汇点 t 的无向路径；对于路径上的每条正向弧（i，j），其容量为 $x_{ij} < u_{ij}$；对于路径上的每条反向弧，其容量为 $x_{ij} > 0$。请注意，增广路径的成本按如下方式计算：正向弧 e 对总成本的贡献为 c_e，而反向弧 e 的贡献为 $-c_e$。

示例中成本函数的关键性质2在于，如果我们考虑沿路径 s–1–2–t，则存在一条增广路径 s–2–1–t （相对于情景u 图4b所示）。不过，示例3 说明，更多换更少悖论也可能
–

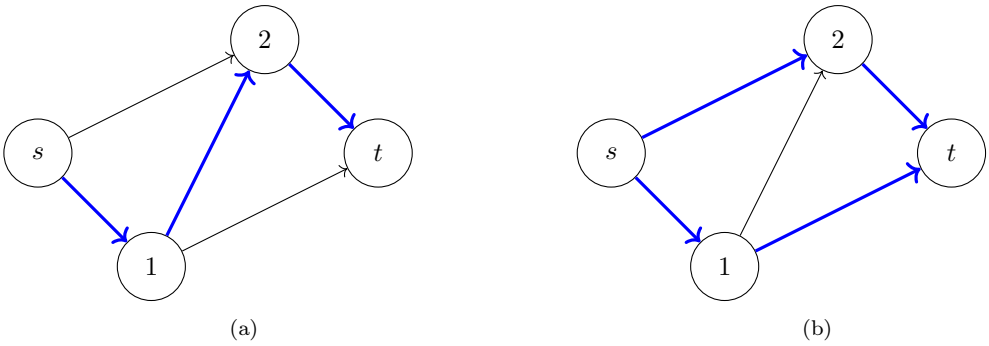

图4：例2中的多得少付悖论。对于需求流 $f = 1$，我们有 $c_w = 12$ （*a*），而对于$f = 2$，我们得到 $c_w = 4$ （*b*）。

出现在结构更复杂的网络中，这表明增广路径上可能存在多段反向弧序列。

例3。考虑图5中所示的图。同样，弧上方的数字是容量，弧下方的数字是费用。

对于需求流 $f = 1$，该情景下的最坏最优值为 $c_w = 29$ $u_{s2} = u_{14} = u_{3t} = 0$ （图6a）。然而，对于增大的流量 $f = 2$，我们有 $c_w = 27$，因为必须将容量设为 $u_{s2} = u_{14} = u_{3t} = 1$，才能使需求流可行（图6b）。现在，增大的容量使得我们可以沿着每条“更便宜”的路径 s–1–4–t 和 s–2–3–t 发送 1 单位流量，而不必像处理 $f = 1$ 时那样，使用代价高昂的路径 s–1–2–3–4–t 。

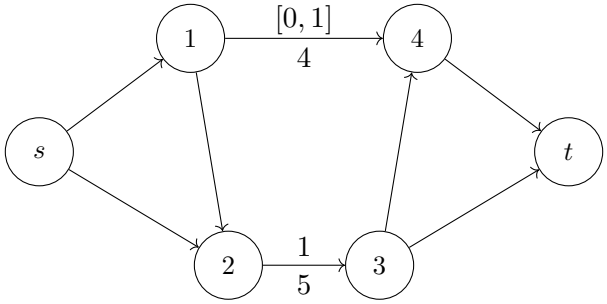

图5：一个更复杂的、具有区间容量并容许多得少付悖论的最小费用流问题实例（见例3）。

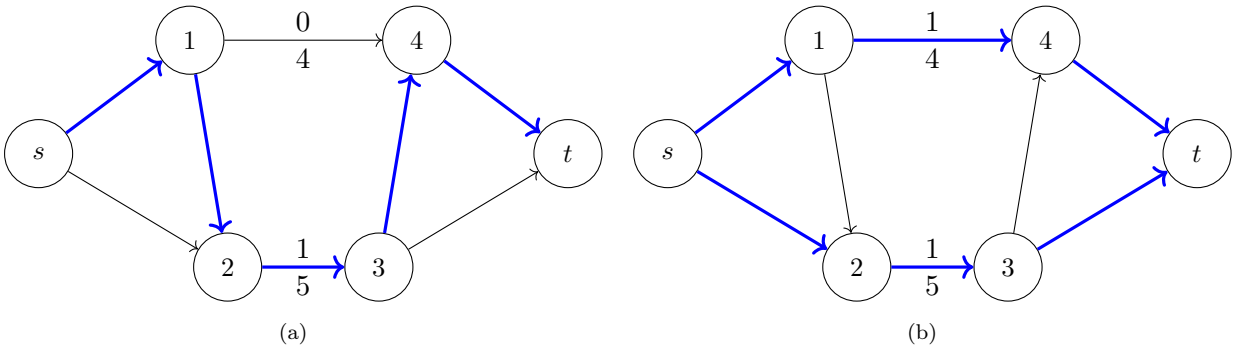

图6：例3中的多得少付悖论。对于需求流 $f = 1$，我们有 $c_w = 29$ （*a*），而对于$f = 2$，我们得到 $c_w = 27$ （*b*）。

7.1. 悖论的刻画

现在，我们来考察会出现多得少付悖论的网络流问题的结构。定理 16 给出了悖论发生的一个必要条件，该条件基于增广路径。

命题 16（悖论的必要条件）。 设 $G = (V, E)$ 为一个有向图，源点为 $s \in V$，汇点为 $t \in V$，且具有非负成本函数 $c\colon\ E \to \mathbb{R}^+$。若对于某些区间容量 $\boldsymbol{u}\colon\ E \to \mathbb{IR}$ 和流量 f，出现了多得少付悖论，则存在一个大小为 f 的 s–t 流 x^f，它对于某个情景 $u \in \boldsymbol{u}$ 可行，并且存在一条相对于 u、用于 x^f 的负成本增广路径。

证明。 设 u^f 为大小为 f 的流对应于最坏情景的容量，类似地， u^{f+1} 为大小为 $f+1$ 的流对应的容量。设 x^f 和 x^{f+1} 为相应的最优流。对每条弧 $e \in E$，定义 $u_e^* := \max\{u_e^f, u_e^{f+1}\}$。

定义流之差 $x^* := x^{f+1} - x^f$，它对应于流量为 1 的流。由于$c(u^f) > c(u^{f+1})$， x^* 的总成本为负。若 x^* 中流量非零的弧构成一条路径，则证明完成，因为它们构成了在容量 $u^* \in \boldsymbol{u}$ 下用于 x^f 的增广路径。否则， x^* 由一条路径 P 和若干个环组成。

路径 P 的成本为负，因此根据命题中的陈述，它构成一条增广路径；或者至少存在一个成本为负的环 C。然而，后一种情况与假设矛盾： x^{f+1} 是流量为 $f+1$的最小费用流，因为我们可以通过让流经过该环 C来降低流的成本。

□

另一方面，定理 17 为具有区间容量的最小费用流问题中多得少付悖论的发生提供了一个充分条件。

命题 17（悖论的充分条件）。 设 $G = (V, E)$ 为一个有向图，具有源点 $s \in V$、汇点 $t \in V$和非负成本函数 $c\colon\ E \to \mathbb{R}^+$。若存在容量$u\colon\ E \to \mathbb{R}^+$、一个对 u 可行的 s–t 流 x^f，其流量为 f，以及一条对 x^f 而言成本为负的增广路径，则存在可导致多得少付悖论的区间容量。

证明。 设 x^f 为一个流量为 f、总成本为 c^f的流，并用 P 表示成本为负的增广 s–t路径。用 x^{f+1} 表示沿路径 P额外发送一个单位流量、由 x^f 形成的流量为 $f+1$ 的流。此外，将所有弧的区间容量设为$\boldsymbol{u}_e := [0, \max\{x_e^f, x_e^{f+1}\}]$。分别用 c_w^f和 c_w^{f+1}表示对应于区间容量 $\boldsymbol{u}$ 及流量 f 和 $f+1$的最坏情况下的最优成本。

首先，注意到 $c^f \le c_w^f$ 成立，因为 x^f 是容量为 $u := x^f$时的最优流。其次，由于 P 是负成本增广路径，因此 $c^{f+1} < c^f \le c_w^f$。

如果 x^{f+1} 是最坏情况最优解，那么 $c_w^{f+1} = c^{f+1} < c_w^f$ 成立，证明完成。否则，存在一个成本为 $c_w^{f+1} > c^{f+1}$的最坏情况解 x^*。在这种情况下，我们可以通过有限序列的增劣环从 x^{f+1} 得到 x^*；也就是说，沿这些环增加一个单位的流量，也会增加总成本。

考虑这样一个恶化圈 C。该环 C 使用了增广路径P 上的一些弧，以及 P之外的一些弧。在弧 $e \notin P$ 上，流量会减少，否则就会

超过上界容量 $u_e = \max\{x_e^f, x_e^{f+1}\} = x_e^f = x_e^{f+1}$。现在，我们通过沿着环 C发送一个单位流量，将流x^f 修改为流 $\tilde{x}^f$ 。由于 C 具有正费用，相应的总成本会增加到 $\tilde{c}^f > c^f$。接下来，我们用 $\tilde{x}^f$代替 x^f，重复上述推理。请注意，这一过程会在有限步内结束，因为每次迭代都会严格增加流的成本。该过程结束后，不可能再存在恶化圈。

□

结合这两个条件，我们得到了定理 18中所述多得少付悖论的完整刻画。请注意，该刻画仅基于基础图以及与各弧相关的成本。

定理18。 设 $G = (V, E)$ 是一个有向图，具有源点 $s \in V$、汇点 $t \in V$以及非负成本函数 c: $E \to \mathbb{R}^+$。那么，以下陈述等价：

(a) 存在区间容量 $\boldsymbol{u}$: $E \to \mathbb{IR}$ 和某个流量 f，使得出现多得少付悖论。*(b)* 存在区间容量 $\boldsymbol{u}$: $E \to \mathbb{IR}$、一个大小为 f 的流 x^f （该流对于情景 $u \in \boldsymbol{u}$ 是可行的），以及一条相对于 u、针对 x^f 的负成本增广路径。

证明。 该定理可由定理 16 和 17直接推出。 □

一个尚未解决的问题是，能否将该条件弱化为如下陈述：当且仅当网络中存在改进路径时，悖论才会出现，而不论初始流如何。这里，对于具有非负成本函数 c: $E \to \mathbb{R}^+$ 的图 $G = (V, E)$，改进路径是指一系列弧 $e_1 = (s, v_1)$ e_2、……、 e_k, $e_{k+1} = (v_k, t) \in E$，它们构成一条无向s–t 路径，且该路径的总成本为负（正向弧 e 对总成本的贡献为 c_e ，而反向弧 e 的贡献为 $-c_e$）。在定理20中，我们将证明，对于完全图，该弱化条件成立。首先，我们考察完全图上成本最负的改进路径的刻画，这将有助于后续证明。

引理19。 对于有向完全图，成本最负的改进路径对应于一系列弧 $e_1 = (s, v_1)$ $e_2, \ldots,$ e_k, $e_{k+1} = (v_k, t)$，其中所有弧 $e_2, \ldots, e_k$均可选为反向弧。

证明。 设 P 表示成本最负的改进路径，并假设存在一条正向弧 $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$位于 P上，其中 $i \in \{2, \ldots, k\}$。将 e_i替换为反向弧 $(v_i, v_{i-1}) \in E$时，路径 P的总成本变化为 $-2 \cdot c_{e_i}$。然而，由于所有弧成本均非负，使用反向弧替代正向弧不会增加 P的成本。

□

定理20 (完全图悖论)。 设 $G = (V, E)$ 为有向完全图，其源点为 $s \in V$，汇点为 $t \in V$，且成本函数 c: $E \to \mathbb{R}^+$非负。那么，以下陈述等价：

(a) 存在区间容量 $\boldsymbol{u}$: $E \to \mathbb{IR}$ 以及流量 f，使得多得少付悖论发生。*(b)* 存在一条从 s 到 t 的负成本改进路径。

证明。“(a) $\Rightarrow$ (b)” 根据定理 16，存在一个流 x^f，它对于情景 $u \in \boldsymbol{u}$ 可行，并且存在一条增广 s–t 路径 P，对于 x^f 而言具有负成本。路径 P 也是该网络的一条改进路径。

“(b) $\Rightarrow$ (a)” 令 P 为一条从 s 到 t、成本最负的改进路径，并令 f 为 P 上反向弧的数量。对于每条满足 $i,\ j \notin \{s,t\}$ 的反向弧 $e=(i,j)$，沿路径 s–j–i–t 发送单位流。总计可得到大小为 f 的流 x^f。

我们构造一个情景 u：对流 x^f 使用的所有弧，设置相应容量 $u_e = 1$；对其余弧，设置容量 $u_e = 0$。此外，对于上述过程涉及的弧（即参与流 x^f 或位于改进路径 P 上的弧），我们设置区间容量 $\boldsymbol{u}_e := [0,1]$；其他弧的区间容量设为 $\boldsymbol{u}_e := [0,0]$。

根据构造，我们现在得到最小费用流问题的一个情景 u，其需求流大小为 f，相应的最优流为 x^f。对于区间容量 $\boldsymbol{u}$ 下大小为 f 的流，这也是最坏情景；否则就会与 P 是成本最负的路径这一点相矛盾。因此，x^f 的成本就是最坏最优值 c_w^f。

对于需求流量 $f+1$，只有一个可行流 x^{f+1}（其最坏最优值为 c_w^{f+1}），它由 x^f 经由增广路径 P得到。由于路径 P的成本为负，x^{f+1} 的成本低于 x^f 的成本，因此我们有 $c_w^{f+1} < c_w^f$，这意味着悖论发生了。

□

7.2. 免疫费用矩阵

最后，我们还可以考察一类成本矩阵的性质：无论区间容量如何设定，这类矩阵都不会导致多得少付悖论。换言之，这类矩阵免疫 于该悖论。定理 21 表明，若考虑所有这类免疫费用矩阵（针对完全图），它们构成一个凸多面锥。

命题21。令 $\mathcal{C}$ 为满足以下条件的有向完全图上所有成本矩阵的集合：对于任意区间容量，多得少付悖论都不会发生。则 $\mathcal{C}$ 是一个凸多面锥。

证明。根据定理 20，对于给定的费用，当且仅当从s 到 t 的每条路径都是非改进路径时，悖论才不会发生。从 s 到 t 的路径数量有限，并且对每条路径，非改进成本条件都具有齐次线性不等式的形式。 □

根据定理21的证明，集合 $\mathcal{C}$ 可以用线性不等式组来描述。然而，描述它所需的不等式数量是指数级的。以下难解性结果说明了为何需要如此大量的不等式。

命题22。给定费用 c，判定问题 $c \in \mathcal{C}$ 是强 *co-NP* 困难的 .

证明。要检查 $c \in \mathcal{C}$，我们只需检查是否不存在成本为负的改进路径。如定理 19所示，对于完全图，成本最低的改进路径由以下部分组成

一条正向弧（$s,\ i$）、一系列反向弧，最后是一条正向弧（$j,\ t$）。因此，成本最低的改进路径的成本为

$$\min_{i,j\notin\{s,t\}} \big(c_{si} - ldp(i,j) + c_{jt}\big),$$

其中，$ldp(i,\ j)$是从 j 到 i的有向路径的最大成本。

因此，我们从图 G中的最长路径这一强 NP 困难问题出发构造一个归约。我们将 G 中各弧的成本设为 1，然后添加成本为 0 的弧，使该图成为完全图。最后，我们添加节点 s 和 t ，并添加所有以 s 和 t 为起点或终点、成本为 0 的弧。现在，从 s 到 t 的最负改进路径对应于原图 G中的最长路径。

□

8. 结论

我们研究了弧容量具有区间不确定性的最小费用网络流问题中最坏最优值及相应最坏情形的性质，其中每个容量都可以取其规定上下界内的任意值。我们首先确立并证明了可行容量集合和最优值函数的基本凸性性质。随后，我们证明，计算最坏最优值是一个强 NP 困难问题；即使对于串并联图类以及路径数量呈线性增长的图类，该问题仍然是 NP 困难的。

此外，我们基于线性规划中的对偶性和互补松弛理论，提出了一种基于混合整数线性规划公式的精确方法，用于计算最坏最优值。对于串并联图，我们开发了一种伪多项式算法，其复杂度关于节点数、弧数和要求流量呈多项式关系。

我们还分析了最坏情形的结构，并证明在极端最坏情形中，容量未设为其区间边界的弧构成一片森林。该结果意味着此类弧的数量至多为 $n-1$，其中 n 是网络中的节点数。我们还构造了一类能够达到该上界的实例，从而证明了该界是紧的。

最后，我们讨论了多得少付悖论：在某些实例中，增加要求流量会导致最坏情形最优成本降低。我们基于可行流的增广路径，对这一悖论给出了普遍刻画，并针对完全图证明了一个更强的结果。此外，我们还探讨了不受该悖论影响的成本矩阵的性质，并证明，检验给定成本矩阵是否不受该悖论影响是一个强 co-NP 困难问题。

未来的研究可以深入分析最坏情形的结构性质。一项有趣的任务是识别哪些弧可以证明包含在至少一个或每个最坏情形中，或被排除在外，并找出进行此类分类的充分条件或必要条件。

进一 此外，鉴于该问题已被证明通常属于NP困难问题，因此研究其 ar

特殊类型的图（例如无环图或稀疏图，以及具有有限区间不确定性的网络）中最坏最优值及相应最坏情景的计算，并开发用于估计最坏最优值的高效近似方法，具有特别重要的意义。

CRediT 作者贡献声明

Miroslav Rada：概念构思、方法设计、撰写初稿、审阅与编辑、验证。**Milan Hladík**：概念构思、方法设计、撰写初稿、审阅与编辑、监督。**Elif Radová Garajová**：概念构思、方法设计、撰写初稿、审阅与编辑、验证。**FrancescoCarrabs**：概念构思、方法设计、审阅与编辑、验证。**RaffaeleCerulli**：概念构思、方法设计、审阅与编辑、监督。**CiriacoD'Ambrosio**：概念构思、方法设计、审阅与编辑、验证。

利益冲突声明

作者声明，他们不存在已知的可能影响本文所报告研究工作的竞争性经济利益或个人关系。

数据可用性

不适用。

资助

M. Rada 和 E. Radová Garajová 获得捷克科学基金会项目 23-07270S 的资助。M. Hladík 获得捷克科学基金会项目 25-15714S 的资助。

参考文献

Ahuja, R., Magnanti, T., Orlin, J., 1993年。《网络流：理论、算法与应用》。第1版，培生，上萨德尔河，新泽西州。

Büsing, C., Koster, A.M.C.A., Schmitz, S., 2022. 一致流约束下的鲁棒最小费用流问题。《运筹学年鉴》312, 691–722. doi:10.1007/s10479-021-04426-0。

Carrabs, F., Cerulli, R., D'Ambrosio, C., Della Croce, F., Gentili, M., 2021. 区间免疫运输问题的一种改进启发式方法。《Omega》104, 102492. doi:10.1016/j.omega.2021.102492。

Cenciarelli, P., Gorla, D., Salvo, I., 2019. 一种用于检测有向图中是否可能出现布雷斯悖论的多项式时间算法。Algorithmica 81, 1535–1560. doi:10.1007/s00453-018-0486-6.

Chassein, A., Kinscherff, A., 2019. 严格鲁棒整数最小费用流问题的复杂性：综述与进一步结果。《计算机与运筹学》104, 228–238. doi:10.1016/j.cor.2018.12.021. D'Ambrosio, C., Gentili, M., Cerulli, R., 2020. 区间（免疫）运输问题的最优值范围问题。《Omega》95, 102059. doi:10.1016/j.omega.2019.04.002. Estes, A.S., Ball, M.O., 2020. 随机网络流问题的面。《SIAM优化学报》30, 2355–2378. doi:10.1137/19M1286049. Ford, L.R., Fulkerson, D.R., 1962年. 《网络中的流》。Research Studies / 兰德公司，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿。Garajová, E., Rada, M., 2023年. 区间运输问题：可行性、最优性与最坏最优值。《中欧运筹学杂志》31, 769–790. doi:10.1007/s10100-023-00841-9. Garajová, E., Rada, M., 2024. 区间运输问题的准极端约简，载于：Moosaei, H., Hladík, M., Pardalos, P.M.（编），《信息系统动力学》，施普林格·自然瑞士，尚。第83–92页。
doi:10.1007/978-3-031-50320-7_6. Ghatee, M., Hashemi, S.M., 2008年. 模糊性质下的广义最小费用流问题：公交网络规划问题中的应用。《应用数学建模》32, 2490–2508.
doi:10.1016/j.apm.2007.09.030. Gupta, A., Puri, M.C., 1995. 最小费用网络流问题中的"多（相同）得少"悖论。《优化》33, 167–177. doi:10.1080/02331939508844073. Hashemi, S.M., Ghatee, M., Nasrabadi, E., 2006. 求解最小区间费用流问题的组合算法。《应用数学与计算》175, 1200–1216. doi:10.1016/j.amc.2005.08.044. Hladík, M., 2018年. 区间线性规划中的最坏情况下的有限最优值。《克罗地亚运筹学评论》9, 245–254.
doi:10.17535/crorr.2018.0019. Hoppmann, K., Schwarz, R., 2018. 寻找最大最小费用流以评估天然气网络容量，载于：Kliewer, N., Ehmke, J.F., Borndörfer, R.（编），《2017年运筹学会议论文集》，施普林格国际出版，尚。第339–345页。doi:10.1007/978-3-319-89920-6_46. Hoppmann-Baum, K., 2022. 关于计算最大和最小最小费用流的复杂性。《网络》79, 236–248. doi:10.1002/net.22060paper. Kasperski, A., 2008年. 《区间数据离散优化——极小极大后悔与模糊方法》。第228卷，《模糊性与软计算研究》。施普林格，柏林，海德堡。
doi:10.1007/978-3-540-78484-5. Krile, S., 2004年. 最小费用流问题在集装箱运输中的应用，载于：会议论文集。Elmar-2004。第46届海洋电子国际研讨会，第466–471页。网址：https://ieeexplore.ieee.org/document/1356421/references。

Mao, R., Zhu, J., 2009. 最小费用流问题的鲁棒离散优化，载于：2009年智能系统与应用国际研讨会，第 1–4 页。doi：10.1109/IWISA.2009.5073102。Plesník, J., 1979. 度数上界为二的平面有向图中哈密顿回路问题的 NP 完全性。《信息处理快报》8, 199–201。doi：10.1016/0020-0190(79)90023-1。Singh, S., Gupta, P., Bhatia, D., 2005. 最小费用网络流问题的多参数灵敏度分析，载于：Gervasi, O., Gavrilova, M.L., Kumar, V., Laganá, A., Lee, H.P., Mun, Y., Taniar, D., Tan, C.J.K.（编），计算科学及其应用——ICCSA 2005，施普林格，柏林，海德堡。第 1190–1202 页。doi：10.1007/11424925_124。Slump, C.H., Gerbrands, J.J., 1982年. 基于网络流方法从双投影重建左心室。《计算机图形学与图像处理》18, 18–36。doi：10.1016/0146-664X(82)90097-1。Smith, J.C., Prince, M., Geunes, J., 2013年. 现代网络阻断问题与算法。施普林格纽约，纽约州纽约市。第 1949–1987 页。doi：10.1007/978-1-4419-7997-1_61。Smith, J.C., Song, Y., 2020年. 网络阻断模型与算法综述。《欧洲运筹学杂志》283, 797–811。doi：10.1016/j.ejor.2019.06.024。Su, L.H., Cheng, T.C.E., Chou, F.D., 2013年. 基于最小费用网络流方法的抢占式并行机调度。《计算机与工业工程》64, 453–458。doi：10.1016/j.cie.2012.04.020。Wojtczak, D., 2018年. 有理问题的强 NP 完全性，载于：Fomin, F.V., Podolskii, V.V.（编），计算机科学——理论与应用，施普林格国际出版，尚。第 308–320 页。doi：10.1007/978-3-319-90530-3_26。Wollmer, R.D., 1970. 交通线网络中的打击目标选择算法。《运筹学》18, 497–515。doi：10.1287/opre.18.3.497。