arXiv:2602.01366v1 [stat.ME] 1 Feb 2026

由拉伸型非局部时间算子支配的分数阶 M/M/1 排队系统

Mehmet Sıddık Çadırcı[1], *

[1] 理学院，统计系，共和国大学，锡瓦斯，土耳其。

2026年2月3日

摘要

我们通过将扩展的非局部时间动力学引入柯尔莫哥洛夫前向方程，提出了经典 M/M/1 排队系统的一种非马尔可夫推广。该模型通过用扩展的卡普托型算子替代标准时间导数而得到。它保留了标准队列的生灭转移结构，同时在时间演化中引入记忆效应。我们利用拉普拉斯变换技术，推导出以 Kilbas-Saigo 函数表示的暂态概率显式表达式；该函数自然地作为与拉伸算子相关的弛豫核出现。我们构建了一种时变解释，并指出分数阶排队系统可视为经典 M/M/1 过程在一个非递减随机时间上的分布。我们观察到，分数阶排队系统可视为经典 M/M/1 过程在一个非递减随机时间上的分布。我们证明，在标准稳定性条件 $\rho < 1$ 下，稳态分布仍为几何分布，并且与经典队列的分布一致；同时证明，拉伸型分数阶参数会显著影响暂态阶段的收敛速率。基于蒙特卡罗模拟的数值示例突显了参数 $(\alpha,\ \gamma)$ 对空状态分布、尾长分布及平均尾部演化的影响，并验证了所提框架在刻画长记忆尾部动力学方面的灵活性。

关键词： M/M/1 队列、分数阶微积分、非马尔可夫动力学、拉伸分数阶算子、Kilbas–Saigo 函数。

1 引言

排队模型是描述通信系统、服务运营和随机网络中拥塞与延迟的经典框架。对于经典情形，M/M/1 队列具有马尔可夫性质，并由线性柯尔莫哥洛夫前向方程描述，其中转移概率由关于时间的普通导数决定。然而，复杂系统中的经验动力学往往表现出非局部时间效应和持续性，因此促使人们基于分数阶微积分构建非马尔可夫推广模型。

分数阶时间算子如今已成为刻画记忆效应和反常弛豫现象的标准工具；相关综述可参见 Podlubny(1999)；Diethelm(2010)；Kilbas 等人 (2006）。一条重要的概率论路径将分数阶演化方程与通过逆从属过程及相关非减过程实现的时间变换联系起来；例如参见 Meerschaert 和 Scheffler (2004年)；Meerschaert 等人(2011)；Schilling 等人 (2010）。这些随机表示为分数阶柯西问题提供了基于逆从属过程和时间变换半群的方案 Baeumer 和 Meerschaert(2001)；Toaldo (2015年）。

*通讯作者。电子邮箱：msiddikcadirci@cumhuriyet.edu.tr

根据更新理论，分数阶松弛自然促成了泊松型计数框架的分数阶推广 Mainardi 等人 (2004年)；Orsingher 和 Beghin(2004年)；Leonenko 等人 (2019）。这些进展表明，改变时间算子可以显著改变暂态状态，同时保留其底层的线性转移结构。

一种近期方法将标准 Caputo 算子替换为一个扩展非局部时间算子，该算子引入一个用于调节时间尺度的附加参数。在此设定下，松弛型方程的解借助 Kilbas-Saigo 函数表示；这是一种推广 Mittag-Leffler 函数族的特殊函数，能够呈现更丰富的衰减行为谱 Boudabsa 和 Simon (2021); Capelas de Oliveira 等人(2014)。这一扩展框架已针对由带有扩展非局部算子的弛豫方程所驱动的更新模型进行了详细阐述与分析 Beghin 等人 (2026b)。本研究表明，该框架对非局部时间算子同样有效。

与此同时，已有研究表明，伸缩分数阶算子可为 Pearson 扩散提供解析上易于处理的时间变化；在此情形下，特征函数展开与 Cauchy 问题可显式地用 Kilbas-Saigo 函数写出 Beghin 等人 (2026a)。此类研究提供了超越经典 inverse-bounded-bounds 范式的分析工具与随机表示。

尽管取得了这些进展，但这一方法尚未系统地应用于排队模型的瞬态分析。这是一个重要的研究空白，因为排队动态可以自然地通过 Kolmogorov 前向系统来表述，而其中的时间部分可以借助非局部算子编码记忆效应。本文以经典 M/M/1 前向方程为基础，并使用 Caputo 型扩展非局部算子替代普通时间导数。由此得到一个非马尔可夫排队系统，该系统可接受转移概率的时域表示，并以 Kilbas-Saigo 函数作为基本弛豫核。

贡献。 我们的主要贡献如下：（i）通过在前向方程中加入非局部时间算子，提出扩展分数阶 M/M/1 模型；（ii）运用拉普拉斯变换技术，借助 Kilbas-Saigo 函数及其变换结构，推导状态概率的解析表示；（iii）定义可恢复经典 M/M/1 模型及其标准 Caputo 时间分数阶对应模型的极限情形；（iv）提供基于时变模拟方案的蒙特卡罗样本，以量化扩展参数对瞬态性能指标的影响。本文其余部分安排如下。第 2 节汇总扩展非局部算子和 Kilbas-Saigo 函数所需的背景知识。第 3节介绍扩展分数阶 M/M/1 模型及其控制方程。第 4节给出5节讨论特殊情形和边界情形，第 6 节则提供数值示例。

2 预备知识

本节简要回顾经典 M/M/1 排队系统、本文中使用的扩展分数阶算子以及 Kilbas-Saigo 函数。本文仅介绍构建和分析第 3 节所述分数阶队列模型所需的内容。

2.1 经典 M/M/1 排队系统

让我们设想一个具有无限等候室的单服务台排队系统。顾客到达服从速率为 $\lambda > 0$ 的泊松过程，服务时间服从速率为 $\mu > 0$的指数分布。 $N(t)$表示时刻 $t \geq 0$队列中的顾客数量，并且对于 $n \in \mathbb{N}_0$给定$p_n(t) = \mathbb{P}\{N(t) = n\}$ 。

过程 $\{N(t)\ t \geq 0\}$ 是一个具有出生率 λ 和死亡率 μ 的时间连续马尔可夫链。各状态的概率满足柯尔莫哥洛夫前向方程

$$\frac{d}{dt}p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda+\mu)p_n(t) + \mu p_{n+1}(t), \qquad n \geq 0, \tag{1}$$

其中 $p_{-1}(t) = 0$，初始边界条件为 $p_n(0) = \delta_{n0}$。在稳定性条件 $\rho = \lambda/\mu < 1$ 下，众所周知，该过程服从以下平稳分布：

$$\pi_n = (1-\rho)\rho^n, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

方程（1）为分数阶推广提供了参考基点，我们将在后文对此进行讨论。

2.2 拉伸分数阶导数

分数阶微积分为在演化微分方程中引入时间依赖记忆效应提供了一种自然方法。假设 $0 < \alpha < 1$，并用 ${}^{C}D_t^{\alpha}$ 表示 Caputo 分数阶导数，该导数对绝对连续函数 f 定义为

$${}^{C}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\, d\tau, \qquad t > 0. \tag{2}$$

我们引入以下拉伸分数阶算子

$$\mathcal{D}_t^{(\alpha,\gamma)} f(t) := t^{-\gamma}\, {}^{C}D_t^{\alpha} f(t), \qquad 0 < \alpha < 1,\ \gamma \geq 0,\ \alpha + \gamma \leq 1. \tag{3}$$

参数 γ 对时间变量进行拉伸，从而能够分析更复杂的时间动态。算子（3）在 $\gamma = 0$ 时变为标准的 Caputo 导数，而经典的一阶导数则可通过以下极限过程得到 $\alpha = 1$。算子 $\mathcal{D}_t^{(\alpha,\gamma)}$ 是广义弛豫方程的基础数学工具，并使研究人员能够通过时间变换方法构建非马尔可夫随机模型。

从算子理论的角度来看，卷积型（非局部）导数在从属过程的首达时间与经过时间变换的 C_0-半群之间建立了直接联系，这些半群可参见 Toaldo(2015年）。Baeumer和Meerschaert (2001) 创造了随机表示，用以阐释需要进行时间变换的分数阶柯西问题。

2.3 Kilbas–Saigo 函数

使用算子 $\mathcal{D}_t^{(\alpha,\gamma)}$ 的分数阶微分方程，其解可用 Kilbas–Saigo（KS）函数求得。该函数扩展了 Mittag–Leffler 函数。参数为 $a > 0$、$m > 0$ 和 $l \in \mathbb{R}$ 的 KS 函数通过幂级数定义其值，具体方程如下

$$E_{a,m,l}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \qquad c_0 = 1, \quad c_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(1+a(km+l))}{\Gamma(1+a(km+l+1))}. \tag{4}$$

Kilbas-Saigo 函数是拉伸分数阶算子的特征函数。分数阶弛豫方程的解

$$\mathcal{D}_t^{(\alpha,\gamma)} f(t) = -\lambda f(t), \qquad f(0) = 1, \tag{5}$$

得到如下解

$$f(t) = E_{\alpha,\, 1+\gamma/\alpha,\, \gamma/\alpha}\left(-\lambda t^{\alpha+\gamma}\right). \tag{6}$$

当 $\gamma = 0$ 且（6）时，Kilbas–Saigo 函数可简化为经典的 Mittag–Leffler 函数，而（6）则成为时间分数阶弛豫方程的解。这一性质既与标准分数阶模型保持一致，又在经典动力学、分数阶动力学和拉伸分数阶动力学之间建立了无缝衔接。

3 由拉伸型非局部算子控制的分数阶 M/M/1 排队系统

本节展示了一种新的非马尔可夫扩展，它基于 M/M/1 排队系统，通过替换特定的时间导数构建而成。该模型在引入分数阶动态行为所带来的记忆效应的同时，保持了传统平衡方程的线性性质。

3.1 模型构造

设想一个缓冲容量无限的单服务器排队系统。顾客按照速率为 $\lambda > 0$ 的泊松过程到达，并逐个接受服务，每位顾客的服务时间服从速率为 $\mu > 0$ 的指数分布。假设 $N(t)$ 表示时刻 $t \geq 0$ 系统中的顾客数量，并且

$$p_n(t) := \mathbb{P}\{N(t) = n\}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

在经典的马尔可夫环境中，状态概率是众所周知的。柯尔莫哥洛夫前向方程

$$\frac{d}{dt}p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + \mu)p_n(t) + \mu p_{n+1}(t), \qquad n \geq 0, \tag{7}$$

满足规则 $p_{-1}(t) = 0$。

为引入非局部时间效应，我们将式（7）中的一阶导数替换为拉伸分数阶算子

$$\mathcal{D}_t^{(\alpha,\gamma)} := t^{-\gamma}\, {}^{C}D_t^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1,\ \gamma \geq 0,\ \alpha + \gamma \leq 1,$$

其中，${}^{C}D_t^{\alpha}$ 表示阶数为 α 的 Caputo 分数阶导数。

定义 1（分数阶 M/M/1 排队系统）。分数阶 M/M/1 排队系统定义为随机过程 $\{N_{\alpha,\gamma}(t)\ t \geq 0\}$，其状态概率 $p_n(t) = \mathbb{P}\{N_{\alpha,\gamma}(t) = n\}$ 满足以下分数阶差分微分方程

$$\mathcal{D}_t^{(\alpha,\gamma)}p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + \mu)p_n(t) + \mu p_{n+1}(t), \qquad n \geq 0, \tag{8}$$

其初始条件为 $p_n(0) = \delta_{n0}$。

(8) 中的分数阶动力学可通过时间变换马尔可夫系统立即得到解释。过程 $N_{\alpha,\ \gamma}(t)$ 是一个传统的 M/M/1 队列，它在由非减过程确定的随机时间下运行，该过程通过 Kilbas–Saigo 函数利用其拉普拉斯变换。此表示超越了传统的时间分数阶排队系统，因为它允许在模型中使用多种事件间隔时间分布类型。

3.2 概率解释

方程（8）中出现的分数阶动力学可解释为时间移位马尔可夫过程。过程 $N_{\alpha,\ \gamma}(t)$ 是一个标准 M/M/1 排队系统，它采用一种操作时间，而该时间服从一个非递减随机过程，其拉普拉斯变换由 Kilbas–Saigo 函数导出。这种表示扩展了标准时间分数阶排队模型，因为它允许采用不同类型的事件间隔时间分布。

参数 α 和 γ 控制时间变量中的记忆效应和拉伸程度。当 gamma 等于零时，该系统作为使用 Caputo 导数的时间分数阶 M/M/1 排队系统运行。当 alpha 和 gamma 的值分别设为一和零时，该系统作为马尔可夫 M/M/1 排队系统运行。

引理 1（正性与归一化）。 设 $\{p_n(t)\}_{n\geq 0}$ 为拉伸分数阶 *Kolmogorov* 系统 (8) 在初始条件 $p_n(0) = \delta_{n0}$下的解。对于所有 $t \geq 0$ 和 $n \geq 0$，以下结论成立：

1. $p_n(t) \geq 0$,
2. $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) = 1$.

证明。 (8) 中使用的拉伸时间算子，通过拉伸因子表示 Caputo 型非局部导数（参见 Beghin 等人(2026a) 中的定义）。对时间进行拉普拉斯变换后，(8) 可化为一个状态指标为 n 的线性差分系统，其具有经典 M/M/1 前向方程中的相同生灭结构，但包含一个拉伸非局部时间符号。

我们通过 Kilbas–Saigo 函数表示弛豫核的拉普拉斯逆变换。这里用到的一个重要性质是，对于可容许参数，有映射 $x \mapsto E_{a,m,l}(-x)$，其为完全单调函数（Beghin 等人（2026b））。此外，Beghin 等人（2026b）还指出并使用了完全单调性在与伯恩斯坦函数复合后仍得以保持这一性质。另外，这些性质确保所得弛豫核非负，因此解保持非负，即对于所有 $n \geq 0$ 和 $t \geq 0$, $p_n(t) \geq 0$。为进行归一化，对 $n \geq 0$ 求和式 (8)。生灭项通过望远镜求和给出 $S(t)$ 的封闭演化方程：$= \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)$ 和 $S(0) = 1$。由于扩展 Caputo 型方程相应的 Volterra 型积分表述存在奇异性（参见 Beghin 等人（2026b）中讨论的标准约化情形下的积分方程），对于所有 $t \geq 0$, $S(t) \equiv 1$ 成立。

□

定理 1（时间变换表示）。 假设 $\{N_{\alpha,\gamma}(t)\}_{t\geq 0}$ 是由 (8)描述的分数阶 *M/M/1* 排队系统。已知存在一个非减过程，其逆过程 $\{A_{\alpha,\gamma}(t)\}_{t\geq 0}$遵循以下规则

$$N_{\alpha,\gamma}(t) \stackrel{d}{=} N(A_{\alpha,\gamma}(t)), \qquad t \geq 0,$$

其中 $\{N(u)\}_{u\geq 0}$ 是速率为 (λ, μ)的经典 *M/M/1* 排队系统。

证明。 (11) 中的拉普拉斯域求解器呈现出与经典 M/M/1 排队系统相同的生灭结构，而拉普拉斯变量则通过由 $\mathcal{D}_t^{(\alpha,\gamma)}$ 生成的扩展符号而出现。

已知此类变换会产生分数阶 Cauchy 型问题，其随机解可表示为逆时间变换。由 Kilbas-Saigo 函数刻画的相关弛豫核可通过一个非减过程获得随机表示；另见 Beghin 等人(2026b,a)。将经典 M/M/1 子群通过这一反向时间变换约化为一个子群，可得分布中所假设的等式。

□

3.3 等待时间分布与非马尔可夫性

用扩展算子替代经典导数 $\mathcal{D}_t^{(\alpha,\gamma)}$ 意味着事件之间的等待时间不再服从指数分布。这会导致重尾等待时间行为，并由 Kilbas-Saigo 函数表示，该函数即为弛豫核。具体而言，这与分数阶排队系统、半马尔可夫过程和反向时间变换的一般理论相一致，也可以将其解释为由非局部时钟驱动的更新型生灭系统Meerschaert 和 Scheffler(2004年)；Toaldo(2015年)。

4 解析结果

本节给出了第 3 节中介绍的分数阶 M/M/1 排队系统状态概率的解析解。分析采用拉普拉斯变换方法和对拉伸分数阶算子的谱分析。该解可通过 Kilbas-Saigo 函数表示，它推广了 M/M/1 队列的传统瞬态解。

4.1 控制方程的拉普拉斯变换

状态概率的拉普拉斯变换可表示为函数

$$\tilde{p}_n(s) := \int_0^\infty e^{-st} p_n(t)\, dt, \qquad s > 0.$$

方程（8）的拉普拉斯变换，结合 Caputo 导数的性质，使我们得以推导出

$$s^{\alpha+\gamma}\tilde{p}_n(s) - s^{\alpha+\gamma-1}p_n(0) = \lambda\tilde{p}_{n-1}(s) - (\lambda+\mu)\tilde{p}_n(s) + \mu\tilde{p}_{n+1}(s), \tag{9}$$

对于 $n \geq 0$，其中 $\tilde{p}_{-1}(s) = 0$。方程（9）构成一个线性差分方程，因为初始条件表明 $p_n(0) = \delta_{n0}$ 在 $n = 0$ 处。分数阶Kolmogorov系统与非局部演化方程的分析通过标准的变换域约化进行，如 Podlubny（1999）；Mainardi （2010）的著作所示。

4.2 预解结构与生成函数

概率生成函数定义为

$$\tilde{G}(z,s) := \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}_n(s) z^n, \qquad |z| \leq 1.$$

研究人员运用生成函数方法，通过其排队预解来分析生灭过程与排队系统，依据Karlin 与 Taylor （1975）；Latouche 与 Ramaswami （1999）的著作。方程

$$\left(s^{\alpha+\gamma} + \lambda + \mu - \lambda z - \mu z^{-1}\right)\tilde{G}(z,s) = s^{\alpha+\gamma-1}. \tag{10}$$

方程（9）的计算需要通乘 z^n，并对 n的所有取值进行求和。该函数

$$\tilde{G}(z,s) = \frac{s^{\alpha+\gamma-1}}{s^{\alpha+\gamma} + \lambda + \mu - \lambda z - \mu z^{-1}}. \tag{11}$$

（11）中的数学表达式使用其分母，该分母表示用 $s^{\alpha+\gamma}$ 替换原始拉普拉斯变量s之后的标准 M/M/1 排队系统的预解函数。该模型通过这一观察显示出其非马尔可夫时间变换结构。

表示式（11）表明，该系统的拉普拉斯场求解器保持了标准 M/M/1 系统所具有的数学性质，因为它通过由拉普拉斯参数$\mathcal{D}_t^{(\alpha,\gamma)}$ 生成的扩展符号而产生。该系统的空间生灭生成元保持不变，因为它利用时间反演系统来生成其非马尔可夫空间动力学。分数阶排队系统允许采用定理（1）中给出的时间变换解释。

4.3 状态概率

对于 $\tilde{p}_n(s)$ 的具体表达式，可通过对其（11）以变量 z进行幂级数展开而得到。生灭过程分析得到如下结果

$$\tilde{p}_n(s) = \frac{1}{s^{1-\alpha-\gamma}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{\Phi(s)}, \tag{12}$$

其中包含

$$\Phi(s) := \frac{s^{\alpha+\gamma} + \lambda + \mu - \sqrt{(s^{\alpha+\gamma} + \lambda + \mu)^2 - 4\lambda\mu}}{2\mu}.$$

Cahoy等人Cahoy等人（2015年）研究了采用基于拉普拉斯变换的方法求解时间分数阶排队模型瞬态解的问题。该结果来自对（12）应用拉普拉斯变换的逆运算。

定理 2。令 $0 < \alpha < 1$、 $\gamma \geq 0$ 和 $\alpha + \gamma \leq 1$。分数阶 ***M/M/1*** 排队系统通过以下方程确定状态概率

$$p_n(t) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n E_{\alpha,\, 1+\gamma/\alpha,\, \gamma/\alpha}\left(-\kappa t^{\alpha+\gamma}\right), \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{13}$$

其中包含将 κ 定义为 μ 与 λ 之差，以及用 $E_{\alpha,\, 1+\gamma/\alpha,\, \gamma/\alpha}$表示的 ***Kilbas–Saigo*** 函数。

证明。 利用方程（12），接着应用拉普拉斯逆变换。此外，对于项$s^{-(1-\alpha-\gamma)}$，需要注意的是，我们处理的是 Kilbas–Saigo 函数的拉普拉斯变换，该函数是拉伸分数阶算子的已知特征函数。计算中的其他所有项均对应于 M/M/1 队列的经典求解过程，由此完成证明。

□

4.4 稳定性与极限行为

原框架中的稳定性条件同样适用于分数阶 M/M/1 排队系统。该系统在 $\rho = \lambda/\mu < 1$下呈现极限分布。Kilbas-Saigo 函数的渐近行为表明:

$$\lim_{t\to\infty} p_n(t) = (1-\rho)\rho^n, \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

这证明了系统的平稳分布与 M/M/1 队列分布一致。研究表明，根据 Meerschaert 等人 (2011) 的研究，非马尔可夫系统通过反向时间变换保留其时间不变性质。分数阶参数α 和 γ 通过延长达到平衡态所需的时间，限制了它们对系统的影响。

推论 1 （非指数弛豫）。 假设 $\rho < 1$ 和 $0 < \alpha < 1$, $\gamma \geq 0$ 和$\alpha+\gamma < 1$。函数 $p_n\,(t)$ 按照与算子 $\mathcal{D}_t^{(\alpha,\gamma)}$ 对应的扩展分数阶弛豫核，通过非指数收敛过程收敛到 π_n 。

5 特殊情形与一致性检验

本节考察所提出的分数阶 M/M/1 排队系统的若干极限情形。我们将证明，这些特殊情形与现有排队模型一致，并阐明分数阶参数 α 和 γ的作用。

5.1 化简为时间分数阶 M/M/1 排队系统

当我们将 $\mathcal{D}_t^{(\alpha,\gamma)}$ 设为零时，拉伸分数阶算子将变为标准的 Caputo 分数阶导数 ${}^{C}D_t^{\alpha}$。方程（8）中的方程组转化为下式

$${}^{C}D_t^{\alpha} p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda+\mu)p_n(t) + \mu p_{n+1}(t), \qquad n \geq 0,$$

这表示时间分数阶 M/M/1 排队系统，研究人员已在现有文献中对其进行了广泛研究。式（13）中的 Kilbas–Saigo 函数可简化为 Mittag–Leffler 函数

$$E_{\alpha,\,1,\,0}(-\kappa t^{\alpha}) = E_{\alpha}(-\kappa t^{\alpha}),$$

状态概率与研究人员针对标准时间分数阶排队系统推导出的结果一致。结果表明，我们的模型完整拓展了基于 Caputo 的分数阶 M/M/1 系统。

5.2 经典马尔可夫 M/M/1 排队系统

考察 $\alpha \to 1$ 和 $\gamma = 0$ 的极限。在此范围内，扩展分数阶算子等价于基本的一阶导数，而控制方程则转化为传统的柯尔莫哥洛夫前向方程，如下式所示：

$$\frac{d}{dt}p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + \mu)p_n(t) + \mu p_{n+1}(t).$$

该解 转化为以下指数函数 n

$$E_{1,1,0}(-\kappa t) = e^{-\kappa t},$$

由此从方程（13）导出标准 M/M/1 队列的瞬态概率分布。本研究提出的分数阶模型表明，它是经典马尔可夫队列运行机制的一个特例。

定理 3（拉伸分数阶动力学下的平稳分布）。将由 (8) 定义的拉伸分数阶 *M/M/1* 队列记为 $\{N_{\alpha,\gamma}(t)\}_{t\geq 0}$。假设经典交通强度满足 $\rho = \lambda/\mu < 1$。此时，该过程存在平稳分布。此外，该分布在拉伸分数阶时间变换下保持不变，并且与经典 *M/M/1* 排队系统的不变分布一致。

证明。扩展的分数阶 M/M/1 排队系统采用定理 1中定义的时间变换表示，即 $N_{\alpha,\ \gamma}(t) \overset{d}{=} N(A_{\alpha,\ \gamma}(t))$，其中 N 表示经典 M/M/1 队列，而 $A_{\alpha,\ \gamma}$ 表示非递减过程的逆过程。对于 $\rho < 1$，我们知道经典 M/M/1 队列正常返，且具有唯一的平稳分布。时间平移马尔可夫过程的一个重要性质是，由逆子过程驱动的时间变换会保留原过程的不变测度 Meerschaert 和 Scheffler(2004年);Meerschaert 等人 (2011)。

拉伸分数阶动力学仅影响时间，因为它们并不改变空间生灭生成元。$N_{\alpha,\gamma}$ 分布保持不变，因为它与 N 分布相匹配。该证明表明，平稳分布存在，并且在拉伸分数阶动力学下保持不变。

□

命题 1（平稳分布的不变性）。 我们假设 $\rho = \lambda/\mu < 1$ 成立。采用过程 $\{N_{\alpha,\gamma}(t)\}$ 的拉伸分数阶 *M/M/1* 排队系统达到与标准 *M/M/1* 排队系统分布一致的平稳分布。下面的方程定义了 *M/M/1* 排队系统的平稳分布

$$\pi_n = (1-\rho)\rho^n, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

证明。 我们在第4节中得到的状态概率的拉普拉斯变换将作为下一步的研究对象。拉伸分数阶柯尔莫哥洛夫系统预解式表明，存在一个对 $s \to 0^+$的所有取值均成立的确定极限。终值定理确立了决定该过程平稳分布的这一极限。

虽然拉伸分数阶算子 $\mathcal{D}_t^{(\alpha,\gamma)}$ 仅通过非局部记忆核改变时间弛豫，但生成元的空间生灭结构保持不变。已有研究表明，对于一般的非马尔可夫时变过程 Meerschaert 和 Scheffler （2004年）；Meerschaert 等人 （2011），由非递减过程生成的时间变化不会改变相关马尔可夫过程的不变测度。因此，扩展分数阶 M/M/1 排队系统的分布收敛于参数为 $\rho = \lambda/\mu$ 的经典 M/M/1 排队系统的分布。

□

5.3 稳态分布

在 $\rho < 1$ 的条件下，拉伸分数阶动力学直接影响暂态阶段的演化。根据定理 3 和命题 1，系统达到遵循 M/M/1 不变分布的稳定状态。

5.4 分数阶参数的解释

参数 α 控制分数阶微积分所带来的记忆效应强度，而 γ 则对时间变量进行额外拉伸。由于事件间隔具有重尾特性，当 $\alpha + \gamma < 1$ 时，系统的平稳化进程比经典情形更慢。当 $\alpha + \gamma$趋近于 1 时，模型开始呈现马尔可夫行为。所提出的框架能够灵活运行，可在经典分数阶排队动态与拉伸分数阶排队动态之间实现平滑过渡。

6 数值示例

本节通过数值示例展示分数阶参数 α 和 γ如何影响我们所建立的分数阶 M/M/1 排队模型的瞬态行为。到达率和服务率 λ，$\mu > 0$ 保持恒定，从而满足稳定性条件，因为 $\rho = \lambda/\mu < 1$。本研究考察了多个满足 $\alpha + \gamma \leq 1$ 条件的参数对，并将其表现与传统马尔可夫模型进行比较。

表 1 概述了用于绘制图 1–3 的模拟设计。所依据的经典 M/M/1 排队系统样本由事件驱动算法生成，性能指标则通过蒙特卡洛重复模拟加以估计；参见例如 Ross （2012）；Asmussen 与 Glynn （2007）。在拉伸分形模型中，物理时间通过按截断贝塔乘积方案生成的随机时间变换乘子对应于运行时间。

表 1：用于数值示例的模拟设置。

到达率	$\lambda = 0.8$
服务率	$\mu = 1.0$
交通强度	$\rho = \lambda/\mu = 0.8$
时间网格	$t_i = \dfrac{i}{249}\,20, \quad i = 0, \ldots, 249$
重复次数	$R = 3000$
快照时间	$t^* = 8$
截断级别	$n_{\max} = 35$
Beta乘积截断	$M_Z = 250$
随机种子（可选）	20260117

备注：在实现过程中，我们将初始网格点设为 $t_0 = 10^{-6}$，以避免拉伸幂项在 $t = 0$ 处出现数值不稳定性。

6.1 空状态概率的瞬态弛豫

系统在时刻 t 为空的概率，首先描述了我们通过方程 $p_0(t) = \mathbb{P}\{N(t) = 0\}$ 考察的瞬态弛豫行为。M/M/1排队系统表明，该概率会指数收敛至稳态值 $1 - \rho$。扩展分数阶动力学呈现出非指数模型，因此到达稳态的过程更为缓慢。

图1 展示了不同 $p_0(t)$ 和$(\alpha,\ \gamma)$ 取值下的演化情况。扩展分数阶算子引入的记忆效应会减缓弛豫过程，因为当记忆值从当前状态降低时，这些效应会占据主导地位。经典曲线$(\alpha,\ \gamma) = (1,\ 0)$ 作为参照一并列出。

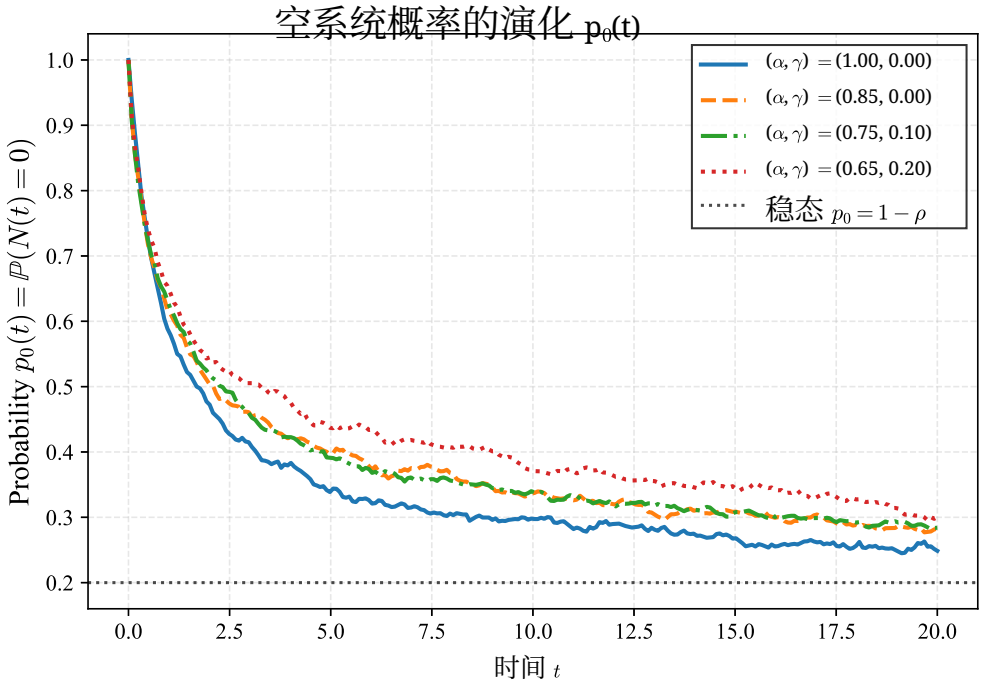


图1：在给定到达率与服务率 λ 和 μ的条件下，空系统概率 $p_0(t)$随(α,γ)不同组合的演化。虚水平线表示稳态值 $1-\rho$。

6.2 队长的分布快照

为了更详细地解释拉伸分数阶动力学的影响，我们考察固定观测时间 t^*处的完整队长分布。经典 M/M/1 排队系统将其概率质量集中于较小的尾部大小附近，而分数阶动力学则倾向于在中等 n值下于更长时间内保持更重的尾部。

图2 描绘了经验概率 $p_n(t^*)$ 其中 $t^* = 8$ 取 $n = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ n_{\max}$。与马尔可夫情形相比，随着 n 增大，分数阶模型在 $p_n(t^*)$上的下降明显更慢，这凸显了非局部时间算子引起的持久性效应。

6.3 平均队长及趋于平衡

我们将临时平均队列长度视为全局性能度量 .

$$m(t) = \mathbb{E}[N_{\alpha,\gamma}(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} n\, p_n(t).$$

对于 $\rho < 1$，我们有恒定的均值 $\rho/(1-\rho)$，它与分形参数无关。对于图 3 和图 1中相同的参数值，图 3 展示了$m(t)$的演化。尽管所有曲线都收敛到相同的常数极限，收敛速率却强烈依赖于(α,γ)。较小的 $\alpha+\gamma$ 会导致弛豫明显变慢，这证实了

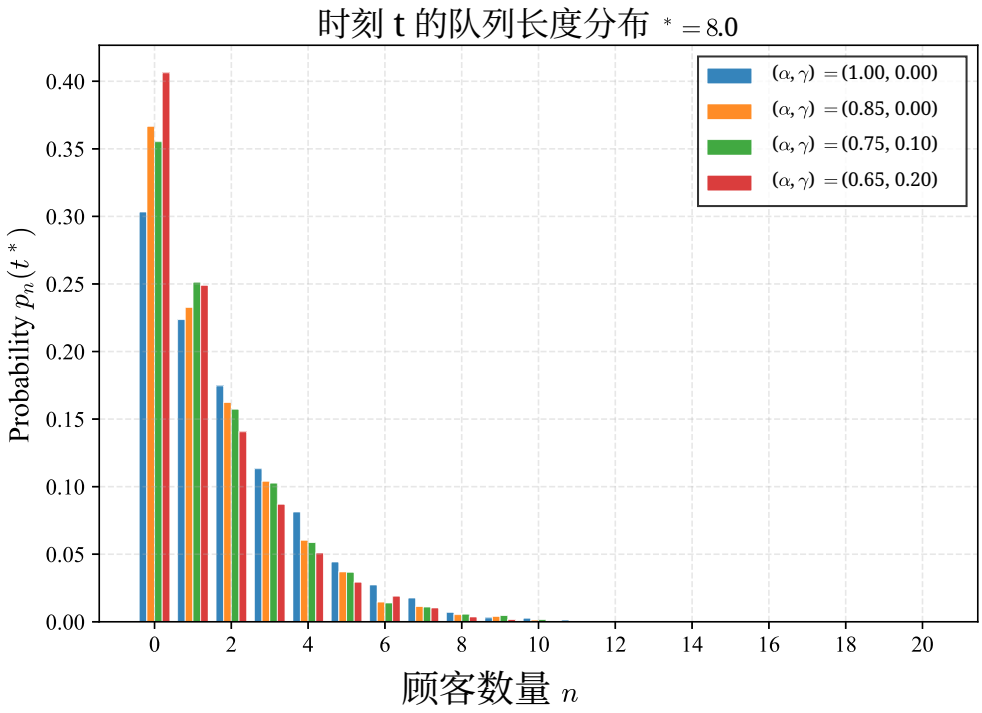


图2：不同（α，γ）下固定时刻 $t^* = 8$ 的队长分布 $p_n(t^*)$。与经典 M/M/1 情形相比，分数阶动力学呈现出更宽的分布。.

扩展分数阶动力学主要改变暂态阶段，同时保留长期平衡性质。

实现细节。 本研究的完整数值结果采用蒙特卡罗模拟，并结合分数阶 M/M/1 排队系统的时间变换模型获得。经典 M/M/1 排队系统的运行时间生成彼此独立的样本路径，这些样本路径由事件驱动算法产生，并由拉伸分数阶动力学评估在随机运行时间下的表现。研究采用均匀时间网格选择，同时将队列长度截断界限设定在不会产生明显尾部影响的水平。研究人员以矢量格式生成所有图表，以同时保持数值精度和视觉准确性。

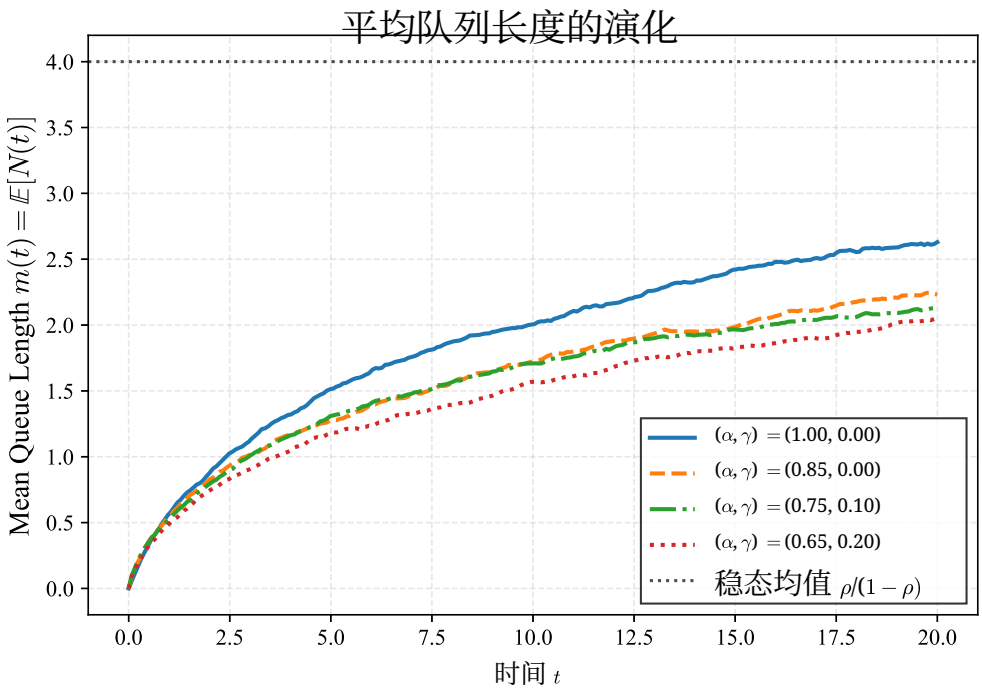


图 3：不同分数阶参数对 (α, γ) 下期望队列长度 $m(t)$ 的演化。虚线表示稳态均值 $\rho/(1-\rho)$。

7 结论

本文介绍了一种基于受应力非局部时间算子的经典 M/M/1 排队系统的分数阶扩展。我们通过在柯尔莫哥洛夫前向方程中以拉伸分数阶算子替代标准时间导数，构建了一个将记忆效应纳入时间演化、同时保留经典系统线性转移性质的非马尔可夫排队模型。

利用拉普拉斯变换技术推导了状态概率的解析表示，并用 Kilbas-Saigo 函数加以表示；该函数在求解基本分数阶弛豫方程时自然出现。所提出的表述是对经典 M/M/1 队列和基于卡普托导数的时间分数阶 M/M/1 队列的推广，并通过若干极限情形验证了其与已知模型的一致性。

采用时变模型的数值模拟展示了分数阶参数对暂态阶段的影响。可以观察到，支配扩展分数阶动力学的参数对收敛速率和瞬态性能指标有显著影响，而在通常的稳定性条件下，平稳分布仍与经典 M/M/1 排队系统的分布相似。我们提出了一种灵活且数学上自洽的方法，用于对具有记忆效应和非局部时间效应的排队系统进行建模。未来的扩展方向包括在多服务器系统、排队网络以及拉伸分数阶动力学下研究控制与优化问题。

致谢

作者声明，本研究未获得外部资助。

参考文献

Asmussen, S. 和 Glynn, P. W.（2007）。《随机模拟：算法与分析》。施普林格，纽约。Baeumer, B. 和 Meerschaert, M. M.（2001）。分数阶柯西问题的随机解。《美国数学会汇刊》，353(11):4273–4294。Beghin, L.、Leonenko, N.、Papić, I. 和 Vaz, J.（2026a）。拉伸型非局部皮尔逊扩散。《随机过程及其应用》，195:104854。Beghin, L.、Leonenko, N. 和 Vaz, J.（2026b）。拉伸型非局部算子下的弛豫方程：更新过程与时间变换过程。《理论概率杂志》。Boudabsa, L. 和 Simon, T.（2021）。Kilbas–Saigo 函数的一些性质。《数学》，9(3):217。Cahoy, D. O.、Polito, F. 和 Phoha, V. V.（2015）。分数阶排队系统及相关过程的瞬态行为。《应用概率中的方法与计算》，17:739–759。Capelas de Oliveira, E.、Mainardi, F. 和 Vaz, J.（2014）。基于 Kilbas 和 Saigo 函数的反常弛豫分数阶模型。《力学》，49:2049–2060。Diethelm, K.（2010）。《分数阶微分方程分析》。施普林格，柏林。Karlin, S. 和 Taylor, H. M.（1975）。《随机过程初级教程》。学术出版社。Kilbas, A. A.、Srivastava, H. M. 和 Trujillo, J. J.（2006）。《分数阶微分方程理论与应用》。爱思唯尔。Latouche, G. 和 Ramaswami, V.（1999）。《随机建模中的矩阵解析方法导论》。美国工业与应用数学学会。Leonenko, N.、Scalas, E. 和 Trinh, M.（2019）。分数阶非齐次泊松过程的极限定理。《应用概率杂志》，56(1):246–264。Mainardi, F.（2010）。《线性黏弹性中的分数阶微积分与波》。世界科学出版社。Mainardi, F.、Gorenflo, R. 和 Scalas, E.（2004）。泊松过程的分数阶推广。《越南数学杂志》，32:53–64。Meerschaert, M.、Nane, E. 和 Vellaisamy, P.（2011）。分数阶泊松过程与逆稳定子ordinator。《电子概率杂志》，16:1600–1620。Meerschaert, M. M. 和 Scheffler, H.-P.（2004）。具有无限均值等待时间的连续时间随机游走的极限定理。《应用概率杂志》，41(3):623–638。Orsingher, E. 和 Beghin, L.（2004）。时间分数阶电报方程与布朗时间电报过程。《概率论及相关领域》，128:141–160。Podlubny, I.（1999）。《分数阶微分方程》。学术出版社，伦敦。Ross, S. M.（2012）。《模拟》。学术出版社，波士顿，第5版。Schilling, R. L.、Song, R. 和 Vondraček, Z.（2010）。《伯恩斯坦函数：理论与应用》，第37卷，《德格鲁伊特数学研究》。德格鲁伊特出版社，柏林。Toaldo, B.（2015）。卷积型导数、从属过程的首次到达时与时间变换c_0半群。《位势分析》，42(1):115–140。