arXiv:2602.01403v1 [math.AP] 1 Feb 2026

多层过滤系统的半群解

George Avalos
Univ. Nebraska-Lincoln
Lincoln, NE
gavalos@math.unl.edu

Galen Richard JustinT. Webster
Univ. of Maryland, Baltimore County
Baltimore, MD
grichar1@umbc.edu

Univ. of Maryland, Baltimore County
Baltimore, MD
websterj@umbc.edu

2026年2月3日

摘要

我们研究描述多层过滤系统的一组耦合偏微分方程的解。具体而言，我们通过孔隙弹性界面，研究黏性不可压缩流与体域孔隙弹性的相互作用。该构型由两个通过板界面相连的三维环面子域组成，板界面允许发生弹性变形和灌流流体动力学。控制系统的动力学包括体流体区域中的斯托克斯方程、体孔隙弹性区域中的比奥方程，以及界面处 Mikeli´c 提出的最新多孔板模型。耦合发生在板的上表面和下表面，涉及质量守恒、应力平衡，以及流体自由流动的某种滑移条件。

我们在希尔伯特空间框架下，通过 Lumer-Phillips 定理寻求强解（及温和解）。预解分析采用一种非标准的混合变分公式，以刻画界面处复杂的多物理场耦合。我们明确刻画与线性柯西问题相关的无穷小生成元，并证明其在适当选取的有限能量空间上生成一个 C_0-半群。借助该半群，我们可以通过扰动理论处理板位移中的弹性非线性项。这些结果与比奥-斯托克斯过滤系统的相关结果相呼应，并补充了近期建立的多层过滤弱解理论。半群的作用使得结构（板）非线性能够直接纳入动力学。这些结果也为多层过滤的后续稳定性与正则性分析，以及比较不同渗流构型的谱性质和正则性性质创造了条件，并有助于阐明多孔板动力学的缓和作用是否能够提升正则性并增强稳定性。

Keywords：流体-孔隙弹性结构相互作用，过滤，Beavers-Joseph-Saffman，半群方法，多层系统

2020 AMS MSC: 74F10, 76S05, 35M13, 76M30, 35D30

致谢：第一作者部分得到美国国家科学基金会数学科学部 1907823 和西蒙斯基金资助 MP-TSM-00002793 的支持；第三作者部分得到美国国家科学基金会数学科学部 2307538 的支持。

1 引言

孔隙弹性是指弹性可变形多孔介质中的流体流动 [11,18,31]。当孔隙弹性模型与流体自由流动相耦合时，由此得到的偏微分方程（PDEs）耦合系统称为流体-孔隙弹性结构相互作用（FPSI） [1,10,25] 或过滤系统 [32]。从历史上看，这些模型源于土壤固结和资源开采等地质学动因，尤其适用于土床或海床附近的流动 [32]（及其中引用的文献）。由于许多生物系统都可以建模为 FPSI 问题，近年来研究重点逐渐转向这些应用 [10,12,13]，例如动脉中的血流和／或器官和组织系统中的流动——更多讨论请参见 [6, 11] 及其中引用的文献。在某些情况下，将 FPSI 系统描述为多层孔隙弹性系统 [3] 可以改进其建模。这些多层系统由一个与三维流体自由流动相耦合的三维主体孔隙弹性层，以及二维缓冲动力学组成，后者通常代表网状弹性板 [22–24] 或孔弹性板 [10]。网状板提供弹性动力学，但

它不会“感知”流体动力学，并能完美地实现比奥压力与斯托克斯压力之间的流体耦合；Mikeli´c [20,27] 的孔隙弹性板是一种低维多孔弹性模型，包含弹性和流体动力学。引入这类板模型会给建模和分析带来额外挑战，尤其是在弱形式以及与动力学生成元相关的耦合椭圆系统方面。由此产生的过滤模型类别具有多物理场和多尺度特征，因此必须仔细考虑跨低维界面的动力学耦合。

本文研究耦合的 Biot-孔弹性板-Stokes 系统。此处的板是近期备受关注的前述“2.5D”多孔弹性系统 [20,27]。这一独特模型是一块标准的二维弹性板（可能具有弹性非线性），它通过一个沿法向（耦合方向）作用、并“连接”板界面顶面与底面的膨胀变量，实现三维灌注。我们将采用 [10], 提出的界面物理耦合条件；该文在若干物理状态下构造了弱解。对于侧向边界，我们将参照近期过滤分析 [6,8,10,22–24]，在侧向采用空间周期边界条件。我们的目标是将线性过滤系统表述为适当状态空间中的柯西问题，该状态空间既符合与动力学相关的自然能量恒等式，也能体现重要的边界条件和耦合条件。我们将设定一个动力学生成元 $\mathbf{A}$，并致力于刻画其定义域 $\mathcal{D}(\mathbf{A})$，使得可以应用 Lumer-Phillips 定理 [30] 。

所选的状态空间表述将需要引入一个流体压力子问题，从而能够将斯托克斯流体压力从状态空间中消去，这一做法近期见于 [6], ，并改编自如今已成经典的工作，例如 [4]。定义 $\mathcal{D}(\mathbf{A})$后，借助经仔细分部积分即可直接推出耗散性。为证明极大性，将通过椭圆方法处理预解式系统；具体而言，我们在精心选择的辅助空间上构造一个混合变分系统，以便运用 Babu˘ska-Brezzi 引理的一种形式。由此，Lumer-Phillips 定理给出一个与比奥-孔弹性板-Stokes动力学相对应的强连续（C_0）压缩半群。按照标准方法 [30]——更多细节见 [6]——该半群导出强解（初值属于 $\mathcal{D}(\mathbf{A})$），以及作为温和解和弱解的有限能量解（它们将如 [8]中所示彼此一致）。

在 [10],中研究这一多层系统时，研究仅着眼于弱解的存在性。其核心贡献还包括对耦合动力学本身的弱形式，以及弱强唯一性判据，并涵盖了某些非线性和退化机制。另一方面，本文选择采用半群理论，从而获得强解和温和解的完整适定性。强解的正则性体现在对生成元定义域的刻画中。结构非线性——此处为冯·卡门板非线性——可以通过标准的半群扰动结果 [30]轻松纳入分析。此外，强解可用作逼近解来构造弱解（即使在退化机制下也如此），并且根据 [8]近期提出的半群方法，这些弱解具有唯一性。最后，极大性步骤中进行的预解分析为通过谱分析研究多层动力学的长时间稳定性 [3]（例如，参见 [3]）提供了起点。借助这一多层渗流半群，后续工作可以将这些定性性质（如正则性和稳定性）与 [6]的Biot-Stokes渗流进行比较。

我们简要说明线性半群框架如何容纳减缓板动力学中具有物理意义的非线性项。大挠度效应是可能存在的，且与 FPSI 建模相关。具体而言，对于周围体介质的动定义域 表述，即 [22–24], 中的 $\Omega_b = \Omega_b(t)$ 和 $\Omega_f = \Omega_f(t)$，定义域的演化可能导致界面几何并非常定，尤其是不能视为平坦界面域的扰动。为处理此类情形，数学方法必须考虑界面的几何性质。特别是，采用具有内在大挠度结构（例如按 von K´arm´an 的意义）的板模型（网状或多孔弹性板），有望提高建模效能。本文将讨论范围限定于固定体几何，但利用半群来容纳板动力学中的三次型非线性弹性效应。我们给出的论证可推广至一大类局部利普希茨扰动，这些扰动常见于大挠度板动力学中（例如 Berger 板和基尔霍夫板）。与此同时，这应被视为迈向含灌注的完整非线性多孔板理论的第一步；在后续工作中，我们将建立并分析 Mikeli´c 多孔板模型的非线性对应版本。

2 主要结果与讨论的非正式陈述

本文的核心工作是将耦合的比奥-孔弹性板-斯托克斯动力学恰当地表述为自然有限能量状态空间$\mathbf{X}$上的抽象柯西问题，并证明相应的演化算子$\mathbf{A}$是$\mathbf{A}$的无穷小生成元，并在$\mathbf{X}$上生成一个C_0-压缩半群。具体而言，我们定义$\mathbf{A}$在其定义域$\mathcal{D}(\mathbf{A})$上的作用，使得方程$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t)$的解对应于线性多层过滤（无外力作用），并满足给定的界面条件和边界条件。半群生成性进而保证：对于每个$\mathbf{y}_0 \in \mathbf{X}$，存在唯一的温和（有限能量）解；对于每个$\mathbf{y}_0 \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$，存在唯一的强解。随后，我们利用扰动理论来容纳 von K´arm´an 大挠度板动力学，从而在这一非线性情形下得到强解和温和解。

2.1 工作创新

尽管基础渗流构型和弱形式源自先前的研究，本文为多层系统建立了半群层面的适定性理论。这带来了纯粹在弱解层面无法显现的新分析工具。主要内容如下：

- *Biot*-孔弹性板-*Stokes*系统的完整适定性。我们给出了一个显式生成元$\mathbf{A}$，并对$\mathcal{D}(\mathbf{A})$进行了严谨刻画，其中编码了孔弹性板顶面和底面的多物理场界面条件（质量守恒、应力传递和滑移）。在惯性和非退化区间内，我们证明弱解与强解的存在唯一性；随后还可将强解用作逼近解以获得弱解。

- 针对多孔板耦合的非标准预解分析。作为中介的多孔弹性板引入了额外且相互耦合的表面未知量和迹，从而产生一个无法化约为标准 Stokes-Biot 传输问题的椭圆预解系统。为解决这一问题，我们在辅助空间上构造了一个混合变分系统，并运用 Babu˘ska-Brezzi 定理得到唯一的弱预解解；随后又证明该解事后属于$\mathcal{D}(\mathbf{A})$。

- 多层情形下的流体压力消除。与流固耦合半群公式的构造类似，我们通过引入一个依赖于其余未知量的压力子问题，避免将 Stokes 压力作为状态变量处理（参见 [4,6]）。这大幅简化了状态空间，并使能量恒等式更加清晰；以往的弱解分析并未采用（也不需要）这种做法。

- 为扰动、谱分析／稳定性分析和正则性分析奠定基础。建立线性半群后，便可将板中的结构非线性项（例如 von K´arm´an 型非线性项）纳入模型 [30]。此外，本文构建的预解结构为开展谱分析和渐近稳定性研究提供了自然的出发点，研究思路与 [3] 相同。

2.2 与既有文献的比较

本文的分析最适合置于近来文献中的三个研究方向之间：

(i) 多层过滤的弱解理论：在 [10] 同一耦合多层模型中（多孔弹性区域主体部分采用比奥模型，流体区域主体部分采用斯托克斯模型，并设有孔弹性板界面），已有研究从弱解的角度进行处理，其中包括含有准静态分量以及某些非线性／退化效应的情形。该方法基于变分法和时间离散，得出了弱解存在性（以及唯一性判据，但并未证明真正的唯一性）。该研究未探讨正则性理论。相比之下，本文针对惯性且非退化的区间，通过识别生成元及其定义域，证明了完整的线性半群适定性（包括温和解和强解）。这必然要求对界面和边界条件进行更精细的刻画（尤其是与$\mathcal{D}(\mathbf{A})$相容的正则性），并在极大性步骤中采用不同的一组椭圆型工具，同时得到强解并证明所有类别解的唯一性。

(ii) 解耦孔弹性板：论文 [20] 侧重于孔弹性板 [27]自身的演化，强调板动力学（包括准静态表述）的存在性与唯一性，并且在

惯性情形下，采用基于半群的方法处理板生成元。我们的工作可视为将这一视角扩展到完全耦合的渗流构型，其中板同时与上方的斯托克斯流和下方的比奥介质相互作用。这种耦合会产生传输问题，板的两侧均具有耦合迹，因此需要在预解式层面采用混合公式，而这在解耦板分析中并无对应形式。

(iii) 无中介板的 *Biot-Stokes* 半群理论：文献 [6] 为耦合的三维比奥/斯托克斯系统建立了半群框架，且该系统没有低维界面层。这为该过滤系统带来了强适定性与温和适定性，并在极限情形下构造了弱解。文献 [8],则为 Biot-Stokes 动力学中的弱解提供了完整的适定性。对于此处的过滤，界面条件有很大不同，分析也因此简化为类似于此前 Stokes-Lam´e 耦合研究中的双域传输。我们的模型在界面处引入了额外的“2.5D”多孔弹性动力学，从而形成真正的三分量耦合（流体/体相多孔弹性/板），并产生相应更丰富的预解式系统，这一思路受文献 [3]启发。尽管如此，我们借鉴了文献 [6]中的两项关键结构性思想：(a) 通过辅助压力问题将 Stokes 压力从状态空间中消去（另见文献 [4]中的经典半群流固耦合公式）；以及 (b) 通过混合变分公式和 Babu˘ska–Brezzi 论证确立极大性。本文的创新之处在于，必须彻底重新设计这些机制，以适应孔弹性板变量及其双侧耦合。

3 偏微分方程模型与建模背景

3.1 空间区域与物理量

感兴趣的空间构型如下图所示。它由一个三维环面区域组成，其中二维界面将各个主体区域分隔开来。

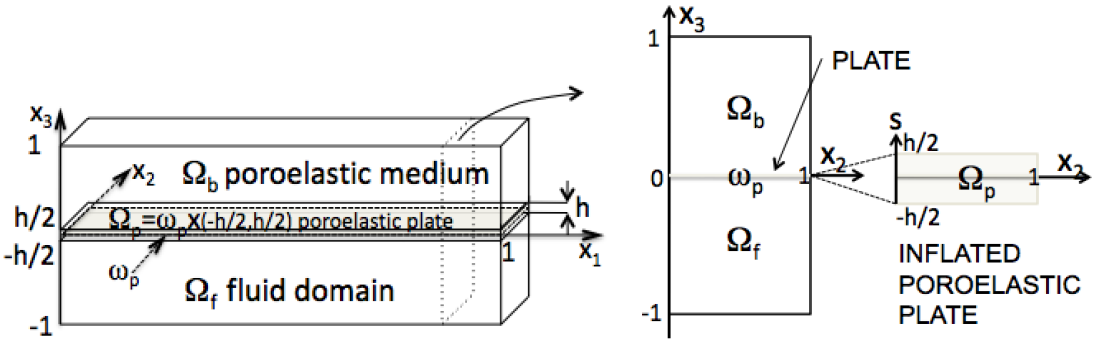


图 1：左：三维定义域 Ω，包括板压力 Ω_p。右：穿过定义域 Ω 的二维垂直剖面。（原图来自 [10]。）

集合 $\Omega_b := (0,1)^2 \times (0,1)$ 是比奥区域，$\Omega_f := (0,1)^2 \times (0,-1)$ 是自由流体区域。孔弹性板使用两个区域；$\omega_p := (0,1)^2 \times \{0\}$ 是位移区域，$\Omega_P := (0,1)^2 \times (-h/2, h/2)$ 是用于板压力的膨胀区域。请注意，对于压力区域，使用膨胀变量 s，尽管它与 x_3相对应，但两者并不相同。这是我们遵循的一项特定约定，源自 Mikeli´c [10]。感兴趣的界面包括弹性板界面 $\Gamma_I := \omega_p$，以及顶部和底部板压力界面 $\omega_p^+ = \partial\Omega_p|_{s=h/2}$ 和 $\omega_p^- = \partial\Omega_p|_{s=-h/2}$。顶部和底部边界分别为 $\Gamma_b := \partial\Omega_b|_{\mathbf{x}_3=1}$ 和 $\Gamma_f := \partial\Omega_f|_{\mathbf{x}_3=-1}$。令 $\Omega := \Omega_b \cup \omega_p \cup \Omega_f$，则其侧面为 $\Gamma_{lat} := \partial\Omega \setminus (\Gamma_b \cup \Gamma_f)$。最后，板边界为 $\Gamma_c := \partial\omega_p$。

此处所关注的物理常数为——详见 [18, 27, 31, 32] 以获取更多信息：

- $(\lambda_b, \mu_b, \rho_b, \alpha_b, \quad c_b, \quad k_b)$，其中 λ_b，μ_b 是 Biot 体域的拉梅常数，ρ_b 是稠密性

孔弹性矩阵的， α_b 是比奥-威利斯系数， c_b 是约束储存系数，且k_p 是孔弹性矩阵的常数渗透率。

• $(D,\ \gamma,\ \rho_p,\ \alpha_p,\ c_p,\ k_p)$，其中 $D>0$ 是板的弹性刚度， $\gamma>0$ 是为保证强制性而添加的系数。其他常数与三维比奥区域中的相同，但此处针对的是孔弹性板。

• $(\rho_f,\ \mu_f)$分别表示流体稠密性和动力黏度。

系统中使用的变量如下:

• $(\boldsymbol{\eta},\ p_b)$表示定义在 Ω_b上的孔弹性位移和压力

• $(w,\ p_p)$分别表示板的横向位移和孔弹性板压力，分别定义在 ω_p 和 Ω_p上;

• $(\mathbf{u}\ p_f)$表示定义在 Ω_f上的斯托克斯流体速度和压力。

我们利用 ˜孔弹性板的伴随对 $\mathcal{K},\ \mathcal{K}$，定义如下（见 [20]):

定义 1. 矩算子 $\mathcal{K}:\ L^2(\Omega_p)\ \to L^2(\omega_p)$具有连续作用

$$\mathcal{K}(p)=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 p\ dx_3.$$

此外，我们定义 $\tilde{\mathcal{K}}:\ L^2(\omega_p)\ \to L^2(\Omega_p)$ 其作用为

$$\tilde{\mathcal{K}}(q)=x_3 q.$$

这些算子互为伴随，即:

$$(\mathcal{K}(p),q)_{L^2(\omega_p)}=(p,\tilde{\mathcal{K}}(q))_{L^2(\Omega_p)};\ \forall p\in L^2(\Omega_p),\ q\in L^2(\omega_p).$$

为了定义我们关注的偏微分方程，我们将使用以下应力张量。首先，我们通过其作用定义对称梯度 $\mathbf{D}:\ \mathbf{D(v)}=\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v}+(\nabla\mathbf{v})^T)$。由此可引入弹性应力。

定义 2. 我们引入圣维南-基尔霍夫弹性应力张量 *[21],*

$$\sigma^E(\boldsymbol{\eta})=2\mu_b\mathbf{D}(\boldsymbol{\eta})+\lambda_b(\nabla\cdot\boldsymbol{\eta})\mathbf{I}.$$

由此得到完整的孔隙弹性应力张量 *[18, 31]*

$$\sigma_b(\boldsymbol{\eta},p_b)=\sigma^E(\boldsymbol{\eta})-\alpha_b p_b\mathbf{I}.$$

最后，我们采用标准的流体应力张量

$$\sigma_f(\mathbf{u},p_f)=2\mu_f\mathbf{D}(\mathbf{u})-p_f\mathbf{I}.$$

注 3.1。 请注意，当 $\nabla\cdot\mathbf{v}=0$ 时，

$$2\,\mathrm{div}\{\mathbf{D}(\mathbf{v})\}=\Delta\mathbf{v}+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})=\Delta\mathbf{v}.$$

同样，由 $\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{D}(\cdot)$ 的对称性可知

$$\begin{aligned}(\sigma^E(\boldsymbol{\eta}),\mathbf{D}(\mathbf{w}))_{L^2}&=2\mu_b(\mathbf{D}(\boldsymbol{\eta}),\mathbf{D}(\mathbf{w}))_{L^2}+\lambda_b((\nabla\cdot\boldsymbol{\eta})\mathbf{I},\mathbf{D}(\mathbf{w}))_{L^2}\\&=2\mu_b(\mathbf{D}(\boldsymbol{\eta}),\nabla\mathbf{w})_{L^2}+\lambda_b((\nabla\cdot\boldsymbol{\eta})\mathbf{I},\nabla\mathbf{w})_{L^2}\\&=(\sigma^E(\boldsymbol{\eta}),\nabla\mathbf{w})_{L^2}.\end{aligned}$$

使用 th 注释 3.1 中的对称性，以及弗罗贝尼乌斯张量积的定义，我们有 e

$$(\sigma^E(\boldsymbol{\eta}), \mathbf{D}(\mathbf{w}))_{L^2} = (\sigma^E(\mathbf{w}), \mathbf{D}(\boldsymbol{\eta}))_{L^2}. \tag{3.1}$$

我们还约定，基本单位向量 $\mathbf{e}_i$ 的方向与$\mathbf{x}_i$ 相同（见图 1）。符号 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_i$ 表示（切向）情形，其中 $i = 1$, 2。

3.2 动力学模型

我们重述根据 [10], 改编的模型。具体而言，所考虑的多层系统为:

$$\rho_b \boldsymbol{\eta}_{tt} - \nabla \cdot \sigma^E(\boldsymbol{\eta}) + \alpha_b \nabla p_b = \mathbf{F}_b \qquad \text{on } (0,T) \times \Omega_b \tag{3.2}$$

$$[c_b p_b + \alpha_b \nabla \cdot \boldsymbol{\eta}]_t - \nabla \cdot (k_b \nabla p_b) = S \qquad \text{on } (0,T) \times \Omega_b \tag{3.3}$$

$$\rho_p w_{tt} + D\Delta_{\omega_p}^2 w + \gamma w + \alpha_p \Delta_{\omega_p} \mathcal{K}(p_p) = F_p \qquad \text{on } \omega_p \tag{3.4}$$

$$[c_p p_p - \alpha_p \tilde{\mathcal{K}}(\Delta_{\omega_p} w)]_t - \partial_s (k_p \partial_s p_p) = 0 \qquad \text{on } \Omega_p \tag{3.5}$$

$$\rho_f \mathbf{u}_t - \mu_f \Delta \mathbf{u} + \nabla p_f = \mathbf{F}_f \qquad \text{on } \Omega_f \tag{3.6}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \qquad \text{on } \Omega_f. \tag{3.7}$$

上文的板的强迫项在下文中记作 $F_p = \sigma_b \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3|_{\omega_p} - \sigma_f \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3|_{\omega_p}$。上文在算子中写作 k_b 和 k_p，表示未来工作中可能将它们视为变量或非线性系数 [10, 11, 20]。虽然此处未作说明，该系统还会有相应的柯西数据。多层 Biot-Stokes 解变量在 $(0,T) \times \Gamma_I$ 上的耦合条件为:

$$\langle 0, 0, w \rangle = \boldsymbol{\eta}|_{\omega_p} \qquad \text{(continuity of vertical displacements)} \tag{3.8}$$

$$\beta \mathbf{u}|_{\omega_p} \cdot \boldsymbol{\tau} = -[\sigma_f|_{\omega_p} \mathbf{e}_3] \cdot \boldsymbol{\tau} \qquad \text{(Beavers-Joseph-Saffman; tangential velocity slip])} \tag{3.9}$$

$$k_p \partial_s p_p|_{\omega_p^+} = k_b \partial_{\mathbf{x_3}} p_b|_{\omega_p} \qquad \text{(continuity of vertical filtration velocities)} \tag{3.10}$$

$$p_p|_{\omega_p^+} = p_b|_{\omega_p} \qquad \text{(continuity of pore pressures)} \tag{3.11}$$

$$w_t - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_3)|_{\omega_p} = k_p \partial_s p_p|_{\omega_p^-} \qquad \text{(continuity of filtration velocities)} \tag{3.12}$$

$$-\sigma_f \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3|_{\omega_p} = p_p|_{\omega_p^-} \qquad \text{（垂向流体应力连续性）。} \tag{3.13}$$

对于非交互边界条件，我们首先断言，板将在其边界处被夹持，即,

$$w = \partial_\nu w = 0, \quad \text{on } \partial\omega_p.$$

注 3.2。 虽然流体和体多孔弹性区域是环面的（即采用周期边界条件），但夹持板可以消除强解所涉及的某些非关键技术问题。其他多层分析中也采用过此类假设 [10, 22]。

对于侧面，我们引入几个相关空间：这里的定义域 Ω 表示 Ω_b 或 Ω_f，我们定义以下具有侧向周期性的索об列夫空间；即,

$$H^k_{\#}(\Omega) = \{\phi \in H^k(\Omega) \ : \ \gamma_j[\phi]|_{x_i=0} = \gamma_j[\phi]|_{x_i=1};\ j = 0, 1, k-1,\ i = 1, 2\},$$

其中， i 指图 1 中所述的指标。这里，设 Γ_l 表示 Ω 的一个侧边， $\gamma_m|_{\Gamma_j}$ 是通常的 Sobolev迹映射，限制在一个边界子区域上；也就是说，对于足够光滑的 $\varphi \in H^m(\Omega)$, $m \geq 1$,

$$\gamma_{m-1}(\varphi)|_{\Gamma_l} = \left. \frac{\partial^{m-1}\varphi}{\partial \mathbf{n}^{m-1}} \right|_{\Gamma_l};$$

例如参见 [9,推论 4.3，第 21] 页。随后，我们定义空间

$$H^k_{\#,*}(\Omega) = \{f \in H^k_{\#}(\Omega) \ : \ f|_\Gamma = 0\},$$

其中，与前面一样，Ω 或为 Ω_f （因此 Γ 是 Γ_f），或为 Ω_b （因此 Γ 是 Γ_b）。

此外，我们将记

$$H^{-\frac{1}{2}}_{\#}(\Omega_f) = \big\{T \in \mathcal{D}'(\partial\Omega_f) : \big\langle T|_{\Gamma_\alpha}, g\big\rangle_{\Gamma_\alpha} = \Big\langle T|_{\Gamma_\beta}, g\Big\rangle_{\Gamma_\beta}, \ \forall g \in H^1_{\#}(\Omega_f) \\ \text{and for each pair of opposing lateral sides } \Gamma_\alpha \text{ and } \Gamma_\beta\big\} \tag{3.14}$$

[1]对于 $H^{-2}_{\#}(\Omega_b)$，类似的定义同样成立。

给定这些空间后，我们将进一步说明解变量的正则性，以及边界界面 Γ_I以外的边界条件：

$$\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}^1_{\#,*}(\Omega_b), \ \ p_b \in H^1_{\#,*}(\Omega_b); \qquad \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1_{\#,*}(\Omega_f); \qquad w \in H^2_0(\omega_p), \ \ p_p \in H^1(\Omega_p).$$

在后文中，能量恒等式将证明这种正则性是合理的；我们稍后也将说明强迫项的正则性。

3.3 能量恒等式

定义 3. 关于希尔伯特空间 $\mathbf{H}^1$, ， 我们定义范数与对称双线性型，

$$\|\cdot\|^2_E = a_E(\cdot,\cdot) = (\sigma^E(\cdot), \mathbf{D}(\cdot))_{L^2(\Omega_b)},$$

借助 *Korn* 不等式与 *Poincar´e* 不等式，它确实等价于标准的 $\mathbf{H}^1$-范数 *[21]*。

为得到形式上的能量恒等式，我们将方程 (3.2)–(3.7) 分别乘以 $(\boldsymbol{\eta}_t, p_b, w_t, p_p, \mathbf{u})$，并在适当的空间中积分。最后，我们在此令$\mathbf{F}_b = \mathbf{F}_f = \mathbf{0}$ 与 $S = 0$ 。假定必要的正则性，我们的形式计算得到：

$$\begin{aligned}
(E.1) \quad 0 &= \big(\rho_b \boldsymbol{\eta}_{tt} - \nabla\cdot\sigma^E(\boldsymbol{\eta}) + \alpha_b \nabla p_b, \boldsymbol{\eta}_t\big)_{L^2(\Omega_b)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big[\rho_b\|\boldsymbol{\eta}_t\|^2_{\Omega_b} + \|\boldsymbol{\eta}\|^2_E\big] + \int_{\Gamma_I} \sigma^E(\boldsymbol{\eta})\mathbf{e}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_t d\Gamma_I + (\alpha_b\nabla p_b, \boldsymbol{\eta}_t)_{L^2(\Omega_b)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big[\rho_b\|\boldsymbol{\eta}_t\|^2_{\Omega_b} + \|\boldsymbol{\eta}\|^2_E\big] + \int_{\Gamma_I} \sigma^E(\boldsymbol{\eta})\mathbf{e}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_t d\Gamma_I - \cancel{(\alpha_b p_b, \nabla\cdot\boldsymbol{\eta}_t)_{L^2(\Omega_b)}} - \alpha_b\int_{\Gamma_I} p_b\mathbf{e}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_t d\Gamma_I.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(E.2) \quad 0 &= \big(\big[c_b p_b + \alpha_b\nabla\cdot\boldsymbol{\eta}\big]_t - \nabla\cdot(k_b\nabla p_b), p_b\big)_{L^2(\Omega_b)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big[c_b\|p_b\|^2_{\Omega_b}\big] + \cancel{(\alpha_b\nabla\cdot\boldsymbol{\eta}_t, p_b)_{L^2(\Omega_b)}} + k_b\|\nabla p_b\|^2_{\Omega_b} + \int_{\Gamma_I} k_b\nabla p_b\cdot\mathbf{e}_3 p_b d\Gamma_I.
\end{aligned}$$

此外，结合

$$F_p = \sigma_b\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3 - \sigma_f\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3, \tag{3.15}$$

我们有

$$(E.3)\quad (F_p, w_t)_{L^2(\omega_p)} = \big(\rho_p w_{tt} + D\Delta_{wp}^2 w + \gamma w + \alpha_p \Delta_{\omega_p}\mathcal{K}(p_p), w_t\big)_{L^2(\omega_p)}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big[\rho_p\|w_t\|_{\omega_p}^2 + \gamma\|w\|_{\omega_p}^2\big] + \big(\Delta_{\omega_p}\big[D\Delta_{\omega_p} w + \alpha_p\mathcal{K}(p_p)\big], w_t\big)_{L^2(\omega_p)}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big[\rho_p\|w_t\|_{\Omega_b}^2 + \gamma\|w\|_{\Omega_b}^2\big] + \big(D\Delta_{\omega_p} w, \Delta_{\omega_p} w_t\big)_{L^2(\omega_p)} + \cancel{\big(\alpha_p\mathcal{K}(p_p), \Delta_{\omega_p} w_t\big)_{L^2(\omega_p)}}.$$

$$(E.4)\quad 0 = \big(\big[c_p p_p - \alpha_p\tilde{\mathcal{K}}(\Delta_{\omega_p} w)\big]_t - \partial_s k_p \partial_s p_p, p_p\big)_{L^2(\Omega_p)}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big[c_p\|p_p\|_{\Omega_p}^2\big] + k_p\|\partial_s p_p\|_{\Omega_p}^2 - \cancel{\big(\alpha_p\tilde{\mathcal{K}}(\Delta_{\omega_p} w_t), p_p\big)_{L^2(\Omega_p)}} - \int_{\omega_p^+} k_p(\partial_s p_p)p_p d\omega_p^+$$
$$+ \int_{\omega_p^-} k_p(\partial_s p_p)p_p d\omega_p^-.$$

$$(E.5)\quad 0 = \big(\rho_f \mathbf{u}_t - \mu_f\Delta\mathbf{u} + \nabla p_f, \mathbf{u}\big)_{\mathbf{L}^2(\Omega_f)}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big[\rho_f\|\mathbf{u}\|_{\Omega_f}^2\big] + \mu_f\|\nabla\mathbf{u}\|_{\Omega_f}^2 - \int_{\Gamma_I}\mu_f\mathbf{e}_3\cdot\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}d\Gamma_I + \int_{\Gamma_I} p_f\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_3 d\Gamma_I.$$

~此处，我们着重考察边界项。首先，利用 $\mathcal{K}$ 和 $\tilde{\mathcal{K}}$ 互为伴随这一点，可得:

$$\big(\alpha_p\mathcal{K}(p_p), \Delta_{\omega_p} w_t\big)_{L^2(\omega_p)} - \big(\alpha_p\tilde{\mathcal{K}}(\Delta_{\omega_p} w_t), p_p\big)_{L^2(\Omega_p)} = 0. \tag{3.16}$$

接下来，我们利用σ_f的定义，即:

$$-\int_{\Gamma_I}\mu_f(\mathbf{e}_3\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{u} + \int_{\Gamma_I} p_f\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_3 = -\int_{\Gamma_I}\sigma_f\cdot\mathbf{e}_3\mathbf{u}$$

以及(3.15)中 F_p 的定义，可得:

$$-\int_{\Gamma_I}\sigma_f\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{u}d\Gamma_I - \int_{\Gamma_I}(F_p)w_t d\Gamma_I = \int_{\Gamma_I}\sigma_f\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3[w_t - (\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{u})]d\Gamma_I - \int_{\Gamma_I}\sigma_f\mathbf{e}_3\cdot\tau(\tau\cdot\mathbf{u})]d\Gamma_I - \int_{\Gamma_I}\sigma_b\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3 w_t d\Gamma_I. \tag{3.17}$$

对这一关系应用以下边界界面条件:

$$w_t - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_3)|_{\omega_p} = k_p\partial_s p_p|_{\omega_p^-};\quad -\sigma_f\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3|_{\omega_p} = p_p|_{\omega_p^-};\quad \beta\mathbf{u}|_{\omega_p}\cdot\boldsymbol{\tau} = -\sigma_f|_{\omega_p}\mathbf{e}_3\cdot\boldsymbol{\tau}. \tag{3.18}$$

将这些条件应用于(3.17)，可得:

$$-\int_{\Gamma_I}\sigma_f\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{u}d\Gamma_I - \int_{\Gamma_I}(F_p)w_t d\Gamma_I = -\int_{\omega_p^-} k_p(\partial_s p_p)p_p d\omega_p^- + \beta\int_{\Gamma_I}|\mathbf{u}\cdot\tau|^2 d\Gamma_I - \int_{\Gamma_I}\sigma_b\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3 w_t d\Gamma_I. \tag{3.19}$$

因此，此时可以将关系式(E.1)–(E.5)与(3.19)结合起来。利用

$$\mathcal{E}(t) \equiv \rho_b\|\eta_t(t)\|_{\Omega_b}^2 + \|\eta(t)\|_E^2 + c_b\|p_b(t)\|_{\Omega_b}^2$$
$$+\rho_p\|w_t(t)\|_{\omega_p}^2 + \left\|D^{\frac{1}{2}}\Delta_{\omega_p} w(t)\right\|_{\omega_p}^2 + c_p\|p_p(t)\|_{\Omega_p}^2 + \rho_f\|\mathbf{u}(t)\|_{\Omega_f}^2. \tag{3.20}$$

对于 $t > 0$，我们有,

$$
\begin{aligned}
0 = \quad & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + \int_{\Gamma_I} \sigma_b \mathbf{e}_3 \cdot \eta_t d\Gamma_I + k_b \left\|\nabla p_b\right\|_{\Omega_b}^2 + k_p \left\|\partial_s p_p\right\|_{\Omega_p}^2 + \int_{\Gamma_I} k_b \nabla p_b \cdot \mathbf{e}_3 p_b d\Gamma_I \\
& - \int_{\omega_p^+} k_p (\partial_s p_p) p_p d\omega_p^+ + \mu_f \left\|\nabla \mathbf{u}\right\|_{\Omega_f}^2 + \beta \int_{\Gamma_I} \left|\mathbf{u} \cdot \tau\right|^2 d\Gamma_I - \int_{\Gamma_I} \sigma_b \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 w_t d\Gamma_I
\end{aligned}
$$

为完成能量关系的推导，利用界面边界条件，

$$
\langle 0, 0, w \rangle = \boldsymbol{\eta}|_{\omega_p},
$$

我们有

$$
- \int_{\Gamma_I} \sigma_b \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\eta}_t d\Gamma_I + \int_{\Gamma_I} \sigma_b \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 w_t d\Gamma_I = 0. \tag{3.21}
$$

此外，利用界面条件，

$$
k_p \partial_s p_p|_{\omega_p^+} = k_b \partial_{x_3} p_b|_{\omega_p}; \quad p_p|_{\omega_p^+} = p_b|_{\omega_p},
$$

我们有

$$
- \int_{\omega_p^+} k_p (\partial_s p_p) p_p + \int_{\Gamma_I} k_b \nabla p_b \cdot \mathbf{e_3} p_b = 0. \tag{3.22}
$$

将 (3.21) 和 (3.22) 代入 (3.21) 右端，最终得到，

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = - \left[\beta \int_{\Gamma_I} \left|\mathbf{u} \cdot \tau\right|^2 d\Gamma_I + \left\| k_b^{\frac{1}{2}} \nabla p_b \right\|_{\Omega_b}^2 + \left\| k_p^{\frac{1}{2}} \partial_s p_p \right\|_{\Omega_p}^2 + \mu_f \left\|\nabla \mathbf{u}\right\|_{\Omega_f}^2 \right], \tag{3.23}
$$

其中，能量函数 $\mathcal{E}(t)$ 仍如 (3.20) 所示。

这一关系揭示了动力学过程中的守恒量，这些守恒量将体现在对动力学解变量施加的有限能量（状态空间）条件中。此外，它还表明了问题中存在的耗散，这些耗散来自三个空间区域中的扩散，以及Beavers-Joseph-Saffman滑移条件导致的阻力。

4 动力学算子

4.1 流体压力消除

我们首先遵循 [6] 中的方法来消去相应的流固压力。具体而言，部分地通过对Stokes问题（3.6）两边应用散度算子，可将流体压力变量 p_f——同样在Ω_f的侧面上呈周期性——刻画为下述边值问题的解：

$$
\begin{cases}
\Delta p_f = 0 \ \text{ in } \Omega_f \\
\partial_{\mathbf{e}_3} p_f = \mu_f \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_3 \ \text{ on } \Gamma_f \\
p_f = p_p(\cdot, -h) + 2\mu_f \mathbf{D}(\mathbf{u}) \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \ \text{ on } \Gamma_I
\end{cases} \tag{4.1}
$$

且 p_f 在Ω的侧面上是周期的。上文中，第二个关系式是通过将(3.6)两边与法向方向 $-\mathbf{e_3}$, 作点积，然后在 Γ_f上取Dirichlet迹而得到的。第三个方程来自界面条件

$$
-\sigma_f \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3|_{\omega_p} = p_p|_{\omega_p^-}.
$$

我们形式地借助如下“狄利克雷”与“诺伊曼”映射写出(4.1)的解，这些映射给出边界函数 [4]的调和延拓：

$$\phi = N_f g \iff \begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{in } \Omega_f \\ \partial_{\mathbf{e}_3}\phi = -g & \text{on } \Gamma_f \\ \phi = 0 & \text{on } \Gamma_I \\ \phi \text{ is periodic} & \text{on } \partial\Omega_f \setminus (\Gamma_I \cup \Gamma_f) \end{cases} \qquad \psi = D_I h \iff \begin{cases} \Delta\psi = 0 & \text{in } \Omega_f \\ \partial_{\mathbf{e}_3}\psi = 0 & \text{on } \Gamma_f \\ \psi = h & \text{on } \Gamma_I \\ \psi \text{ is periodic} & \text{on } \partial\Omega_f \setminus (\Gamma_I \cup \Gamma_f). \end{cases}$$

根据椭圆理论， $D_f \in \mathcal{L}(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_f)\ L^2(\Omega_f))$ 和 $N_f \in \mathcal{L}(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_f)\ L^2(\Omega_f))$，此处适用，因为整体区域是环面的，即光滑且没有角点，也不存在相交的混合边界条件；参见 [26]。据此，我们定义以下算子 Π_i,

$$\Pi_1 p_p = D_I[p_p|_{\omega_p^-}],\ \Pi_2 \mathbf{u} = D_I[(\mathbf{e}_3 \cdot [2\mu_f \mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{e}_3])_{\Gamma_I}] + N_f[(\mu_f \Delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_3)_{\Gamma_f}],$$

相应的格林映射为 $G_i = -\nabla\Pi_i$。借助这些映射，不可压压力变量作为方程 (4.1) 的解，可表示为

$$p_f = \Pi_1(p_p) + \Pi_2(\mathbf{u}). \tag{4.2}$$

此外，斯托克斯偏微分方程的演化 (3.6)（取强迫项为零）可写为

$$\rho_f \mathbf{u}_t = \mu_f \Delta\mathbf{u} + G_1(p_p) + G_2(\mathbf{u}). \tag{4.3}$$

4.2 组成空间

下文中，下标 b、p 和 f 将分别附加于与比奥、多孔板和斯托克斯系统相关的空间及变量。对于板压力方程，为了生成半群，有必要量化垂直方向相对于水平方向的正则性。为此，我们将使用以下各向异性 Sobolev 空间及其相应范数：

$$H^{0,0,k}(\Omega_p) = \left\{\phi \in L^2(\Omega_p)\ :\ \partial_s\phi, \ldots, \partial_s^k\phi \in L^2(\Omega_p)\right\}$$

$$\|\phi\|_{H^{0,0,k}(\Omega_p)} = \left(\sum_{i=0}^{k} |\partial_s^i\phi|_{L^2(\Omega_p)}\right)^{1/2}.$$

为正式展开讨论，我们需要说明上述各向异性 Sobolev 空间中函数的 s-迹。

引理 4.1。 若 $q \in H^{0,0,1}(\Omega_p)$，则 $q|_{\omega_p^+}$在 $H^{-\frac{1}{2}}(\omega_p^+)$中定义良好。（对 ω_p^- 作相应修改即可。）

证明。 事实上，令 $\mathbf{n}_p = [n_1, n_2, n_s]$ 表示相对于几何 Ω_p的外单位法向量；令 $\gamma_0^+ \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_p)\ H^1(\Omega_p))$ 表示零阶 Sobolev 迹映射的右连续逆，$\gamma_0 \in \mathcal{L}(H^1(\Omega_p)\ H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_p))$——参见 [21] 或定理 3.38]。据此，给定 $g \in H_0^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\omega_p^+)$，记其在 $\partial\Omega_p$其余部分上的零延拓为 g_{ext}。于是，通过在 s中分部积分，可得恒等式：

$$\int_{\omega_p^+} q g d\omega_p^+ = \int_{\partial\Omega_p} q g_{ext} n_s d\partial\Omega_p = \int_{\Omega_p} (\partial_s q)\gamma_0^+(g_{ext}) d\Omega_p + \int_{\Omega_p} q(\partial_s\gamma_0^+(g_{ext})) d\Omega_p,$$

因此，通过迹算子的满射性，并经连续性延拓后，我们得到定义良好的映射，

$$q \in H^{0,0,1}(\Omega_p) \implies \left\{ q|_{\omega_p^+} \in H^{-\frac{1}{2}}(\omega_p^+) \text{ and } q|_{\omega_p^-} \in H^{-\frac{1}{2}}(\omega_p^-)\right\} \tag{4.4}$$

□

同理，可以得到高阶迹映射，

$$q \in H^{0,0,2}(\Omega_p) \Longrightarrow \left\{ \partial_s q|_{\omega_p^+} \in H^{-\frac{1}{2}}(\omega_p^+) \text{ and } \partial_s q|_{\omega_p^-} \in H^{-\frac{1}{2}}(\omega_p^-) \right\}. \tag{4.5}$$

此外，如果 $q \in H^{0,\,0,\,2}(\Omega_p)$，那么泛函 $\partial_s q|_{\omega_p^+}$ 具有如下作用，

$$\vartheta \to \int_{\omega_p^+} \partial_s q \vartheta d\omega_p^+ = \int_{\Omega_p} \partial_s^2 q \vartheta d\Omega_p + \int_{\Omega_p} q \partial_s \vartheta d\Omega_p, \quad \text{for all } \vartheta \in H^{0,0,1}(\Omega_p)$$

$\partial_s q|_{\omega_p^+}$也同样如此。因此，类似地， $\partial_s q|_{\omega_p^+}$， $\partial_s q|_{\omega_p^-} \in [\gamma_0[H^{0,0,1}(\Omega_p)]]$ ′

上述引理使我们能够处理与板压力动力学相关的各向异性 Sobolev 空间上的迹，并以典型方式（例如， [21, 第2]章）论证在 s 中进行分部积分。

对于该动力学对应的有限能量空间，我们现在定义

$$\begin{aligned}
\mathbf{V} &\equiv \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega_f) : \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega_f; \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \Gamma_f\}; \\
\mathbf{X_0} &\equiv \mathbf{H}^1_{\#,*}(\Omega_b) \times \mathbf{L}^2(\Omega_b) \times L^2(\Omega_b) \times H_0^2(\omega_p) \times L^2(\omega_p) \times L^2(\Omega_p) \times \mathbf{V}; \\
\mathbf{X} &\equiv \{[\eta, \zeta, p_b, w, v, p_p, \mathbf{u}] \in \mathbf{X_0} : \eta = w\mathbf{e}_3 \text{ on } \Gamma_I\}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

我们将在能量空间 $\mathbf{X}$ 上定义内积：对于$\mathbf{y}_i = [\eta_i, \zeta_i, p_{b,i}, w_i, v_i, p_{p,i}, \mathbf{u}_i]^T$ 属于$\mathbf{X}$,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)_X = {} & a_E(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) + \rho_b(\boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\zeta}_2)_{L^2(\Omega_b)} + c_b(p_{b,1}, p_{b,2})_{L^2(\Omega_b)} \\
& + \rho_p(v_1, v_2)_{L^2(\omega_p)} + D(\Delta w_1, \Delta w_2)_{L^2(\omega_p)} + \gamma(w_1, w_2)_{L^2(\omega_p)} + c_p(p_{p,1}, p_{p,2})_{L^2(\Omega_p)} \\
& + \rho_f(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)_{L^2(\Omega_f)}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

4.3 算子与定义域

在上述能量空间上，我们现在着手定义多层 Biot-Stokes 动力学算子 $\mathbf{A}$:$\mathbf{X} \to \mathbf{X}$ 如下：

定义 4. （$\mathbf{A}$ 的定义域）设 $\mathbf{y} = [\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}, p_b, w, v, p_p, \mathbf{u}]^T \in \mathbf{X}$，则 $\mathbf{y} \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$ 当且仅当：**(i)**正则性条件成立：

(A.1) $\nabla \cdot \sigma^E(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbf{L}^2(\Omega_b)$*(A.2)* $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{H}^1_{\#,*}(\Omega_b)$

(A.3) $p_b \in H^1_{\#}(\Omega_b)$ 且 $\sigma_b(\eta, p_b)\mathbf{e}_3 \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}{}_{\#}(\Omega_b)$)

(A.4) $\Delta p_b \in L^2(\Omega_b)$ 且 $\nabla p_b \cdot \mathbf{n_f} \in H^{-\frac{1}{2}}{}_{\#}(\partial$
$\Omega_b)$

(A.5) $v \in H_0^2(\omega_p)$

(A.6) $p_p \in H^{0,0,2}(\Omega_p)$ （因此（*4.4*）和（*4.5*）适用） *(A.7)* $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1_{\#}(\Omega_f)$。**(ii)** 以下压力子问题正则性成立： $\exists \pi \in L^2(\Omega_f)$，使得

(A.8) $\mu_f \Delta \mathbf{u} - \nabla \pi \in \mathbf{V}$ （因此本项与（*A.7*）给出 $\sigma_f(\mathbf{u}\ \pi)\mathbf{e}_3 \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_f)$)-

(A.9) $2\mu_f \mathbf{D}(\mathbf{u})|_{\partial\Omega_f} \in \mathbf{H}^{-1/2}{}_{\#}(\Omega_f)$

(A.10) $\pi|_{\partial\Omega_f} \in H^{-1/2}{}_{\#}(\Omega_f)$

(A.11) $\Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_f} \in H^{-3/2}(\Gamma_f)$.

(iii) 关于板分量的附加正则性要求（由 *(A.3)* 和 *(A.8)* 保证定义良好）成立：

(A.12) $D\Delta_{\omega_p}^2 w + \alpha_p \Delta_{\omega_p}\mathcal{K}(p_p) + \sigma_f(\mathbf{u},\pi)\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3|_{\omega_p} - \sigma_b(\eta,p_b)\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3|_{\omega_p} \in L^2(\omega_p).$

(iv) 满足以下边界界面条件：

(A.13) $\langle 0,0,v\rangle = \boldsymbol{\zeta}|_{\omega_p} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_I)$

(A.14) $\beta\mathbf{u}|_{\omega_p}\cdot\boldsymbol{\tau} = -\sigma_f(\mathbf{u},\pi)\mathbf{e}_3\cdot\boldsymbol{\tau}|_{\omega_p} \in H^{-1/2}(\Gamma_I)$

(A.15) $k_p\partial_s p_p|_{\omega_p^+} = k_b\partial_{x_3}p_b|_{\omega_p} \in H^{-1/2}(\Gamma_I)$

(A.16) $p_p|_{\omega_p^+} = p_b|_{\omega_p} \in H^{1/2}(\Gamma_I)$

(A.17) $v - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_3)|_{\omega_p} = k_p\partial_s p_p|_{\omega_p^-} \in H^{-1/2}(\Gamma_I)$

(A.18) $-\sigma_f(\mathbf{u},\pi)\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3|_{\omega_p} = p_p|_{\omega_p^-} \in H^{-1/2}(\Gamma_I).$

注 4.1（迹的正则性）。我们注意到，在上述匹配界面条件中，迹的识别是在两者中正则性较高者的层次上进行的，这是由能量空间的既定性质所决定的。所有迹至少在分布意义下定义于 $\mathcal{D}(\mathbf{A})$ 上，并据此进行匹配。随后可以推断定义域上的额外正则性。

指定了$\mathbf{A}$ 的定义域：$\mathbf{X}\ \to\mathbf{X}$后，给定$\mathbf{y}\ =[\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta},p_b,w,v,p_p,\mathbf{u}]^T\in\mathcal{D}(\mathbf{A})$，我们便相应地规定其作用：

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta} \\ \rho_b^{-1}\nabla\cdot\sigma^E(\boldsymbol{\eta}) - \rho_b^{-1}\alpha_b\nabla p_b \\ -c_b^{-1}\alpha_b\nabla\cdot\boldsymbol{\zeta} + c_b^{-1}k_b\Delta p_b \\ v \\ \rho_p^{-1}(F_p - D\Delta_{\omega_p}^2 w - \gamma w - \alpha_p\Delta_{\omega_p}\mathcal{K}(p_p)) \\ c_p^{-1}\alpha_p\tilde{\mathcal{K}}(\Delta v) + c_p^{-1}k_p\partial_s^2 p_p \\ \rho_f^{-1}[\mu_f\Delta\mathbf{u} - \nabla\pi], \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathbf{H}^1_{\#,*}(\Omega_b) \\ \mathbf{L}^2(\Omega_b) \\ L^2(\Omega_b) \\ H_0^2(\omega_p) \\ L^2(\omega_p) \\ H^{0,0,1}(\Omega_p) \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

此处，差项 F_p 如式 (3.15) 所示；回忆

$$F_p = \sigma_b(\eta,p_b)\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3|_{\omega_p} - \sigma_f(\mathbf{u},\pi)\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3|_{\omega_p} \tag{4.9}$$

此外，$\pi = \Pi_1 p_p + \Pi_2\mathbf{u}\ \in L^2(\Omega f)$，其中 Π_i 如式 (4.2) 所定义；事实上，π作为定义定义域时在 (A.8) 中确定的变量，必然 是流体压力子问题 (4.1) [6] 的解。

总之，多层Biot-Stokes系统 (3.2)–(3.13) 的适定性问题可归结为以下抽象柯西问题：给定 $\mathbb{F}=[0,\mathbf{F}_b,S,0,0,0,\mathbf{F}_f]^T\in L^2(0,T;\mathbf{X})$，求 $\mathbf{y}\ =[\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta},p_b,w,v,p_p,\mathbf{u}]^T\in\mathcal{D}(\mathbf{A})$，使得

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbb{F},\quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0\ \text{ on } (0,T). \tag{4.10}$$

因此，我们着手证明$\mathbf{A}$ 在 $\mathcal{D}(\mathbf{A})\ \subset\mathbf{X}\ \to\mathbf{X}$上生成强连续压缩半群。为此，根据 Lumer-Phillips 定理 [21, 30], ，只需证明其耗散性（第 6 节）和极大性（第 7 节）。随后，直接应用 Lumer-Phillips 定理，即可按标准方式得到该柯西问题的强解和温和解（半群解）。

5 主要结果的精确陈述

我们的核心支撑定理是关于 $\mathcal{A}$ 的半群生成定理。

定理 *5.1*。设 *Biot-板-Stokes* 系统 *(3.2)–(3.13)* 中的参数为 c_b、$c_p > 0$。则在 X 上与之相关的建模算子 $\mathcal{A}$，由 *(4.8)* 定义，其定义域 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 如定义*4*所给出，是 X 上强连续半群 $\{e^{\mathcal{A}t} : t \geq 0\}$ 的生成元，其中该半群由压缩映射构成。因此，对于 $y_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$，我们有 $e^{\mathcal{A}}y_0 \in C([0,T]; \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1((0,T); X)$，其在强意义下满足 *(4.10)*，且 $\mathcal{F} = [\mathbf{0}, \mathbf{0}, 0, 0, 0, 0, \mathbf{0}]^T$；类似地，对于 $y_0 \in X$，我们有 $e^{\mathcal{A}}y_0 \in C([0,T]; X)$，其在广义意义下满足 *(4.10)*，且 $\mathcal{F} = [\mathbf{0}, \mathbf{0}, 0, 0, 0, \mathbf{0}]^T$。

作为推论，我们得到方程组 (3.2)–(3.13) 的强解和温和解（或广义解），包括具有一般力的非齐次情形。这里，方程组 (3.2)–(3.13) 的强解是指 (3.2)–(3.13) 在每个时刻都逐点成立；温和解则满足 (3.2)–(3.13) 的时间积分形式（参数变易形式）。通过极限过程（如 [8] following [6] 中所述）——当 $c_b, c_p > 0$ 时，对半群使用光滑数据，随后又如 $c_b, c_p \searrow 0$ 那样采用“压缩性消失”论证——我们可以得到所有 $c_b, c_p \geq 0$ 的弱解。此外，如 $[6, 8]$ 中所述，这些弱解是适定的。

最后，我们讨论含有 von K´arm´an 板非线性的系统的适定性。我们将证明，这可视为柯西问题 (4.10) 的一个扰动，其强迫函数$\mathcal{F}$(y)是局部 Lipschitz 连续的。

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathcal{F}(\mathbf{y}),\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \ \text{ on } (0,T). \tag{5.1}$$

由此扰动可得到局部适定性，而全局（时间）适定性则由先验能量恒等式推出，该恒等式保证解在能量范数下有界。

定理 5.2. 对于任意 $T > 0$，扰动柯西问题 *(5.1)* 在 $\mathbf{X}$ 上对所有$[0,T]$均为半群适定。也就是说，考虑非线性板方程(8.4)后，(3.2)–(3.13)中的偏微分方程问题在 $[0,T]$ 上以有限能量温和解的意义适定。

此外，我们有解的全局时间估计：对于任意 $T > 0$

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathcal{E}(\boldsymbol{\eta}(t), \boldsymbol{\zeta}(t), p_b(t), w_t(t), v(t), p_p(t), \mathbf{u}(t)) \leq \mathbf{C}(\boldsymbol{\eta}_0, \boldsymbol{\zeta}_0, p_{b,0}, w_0, v_0, p_{p,0}, \mathbf{u}_0, F_0). \tag{5.2}$$

6 算子 A 的耗散性 : $\mathbf{X} \to \mathbf{X}$

设给定 $\mathbf{y} = [\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}, p_b, w, v, p_p, \mathbf{u}]^T \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$。那么，根据 (4.8) 中对算子作用的描述，我们有，

$$(\mathbf{A}y, y)_{\mathbf{X}} = \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta} \\ \rho_b^{-1}\nabla\cdot\sigma^E(\boldsymbol{\eta}) - \rho_b^{-1}\alpha_b\nabla p_b \\ -c_b^{-1}\alpha_b\nabla\cdot\boldsymbol{\zeta} + c_b^{-1}k_b\Delta p_b \\ v \\ \rho_p^{-1}(F_p - D\Delta_{\omega_p}^2 w - \gamma w - \alpha_p\Delta_{\omega_p}\mathcal{K}(p_p)) \\ c_p^{-1}\alpha_p\tilde{\mathcal{K}}(\Delta v) + c_p^{-1}k_p\partial_s^2 p_p \\ \rho_f^{-1}[\mu_f\Delta\mathbf{u} - \nabla\pi] \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\zeta} \\ p_b \\ w \\ v \\ p_p \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \right)_X \tag{6.1}$$

仿照上文推导能量恒等式时的计算，并结合式 (4.7) 中能量内积的定义，这一计算可写为

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\mathbf{y}, \mathbf{y})_{\mathbf{X}} \quad &= \quad -k_p \left\|\nabla p_b\right\|^2_{L^2(\Omega_b)} - 2\mu_f \left\|\mathbf{D}(\mathbf{u})\right\|^2_{L^2(\Omega_f)} - k_p \left\|\partial_s p_p\right\|^2_{L^2(\omega_p)} \\ &\quad + I_{bdry} + \left\langle F_p, v\right\rangle_{\omega_p}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

其中 I_{bdry} 项为,

$$I_{bdry} = -\int_{\Gamma_I} \sigma_b \mathbf{e}_3\cdot\boldsymbol{\zeta} d\Gamma_I - \left\langle \nabla p_b\cdot\mathbf{e}_3, p_b\right\rangle_{\omega_p} + k_p\left\langle \partial_s p_p, p_p(\mathbf{n}_p)_s\right\rangle_{\partial\Omega_p} + \int_{\Gamma_I}\sigma_f\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{u}d\Gamma_I. \tag{6.3}$$

同样，$\mathbf{n}_p = [n_1, n_2, n_s]$ 是Ω_P上的外单位法向量。此外，通量差项 F_p如(4.9)所给。（在本工作中，我们还利用了 $\mathcal{K} \in \mathcal{L}\left(L^2(\Omega_P)\ L^2(\omega_p)\right)$ 与 $\tilde{\mathcal{K}} \in \mathcal{L}\left(L^2(\omega_p)\ L^2(\Omega_P)\right)$ 互为伴随这一事实。）

利用区域边界界面条件 (A.14)、(A.17) 和 (A.18)，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_I} \sigma_f \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{u} d\Gamma_I - \int_{\Gamma_I} \sigma_f \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 v d\Gamma_I &= \int_{\Gamma_I} \sigma_f \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_i (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i) d\Gamma_I - \int_{\Gamma_I} \sigma_f \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 v d\Gamma_I \\ &= \int_{\Gamma_I} \sigma_f \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\tau} (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}) d\Gamma_I + \int_{\Gamma_I} \sigma_f \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_3) - v] d\Gamma_I \\ &= -\beta \|\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}\|^2_{L^2(\omega_p)} + \int_{\omega_p^-} k_p (\partial_s p_p) p_p d\omega_p^-.\end{aligned}$$

由此关系可得

$$\begin{aligned} & I_{bdry} + \langle F_p, v \rangle_{\omega_p} \\ = & \cancel{-\int_{\Gamma_i} \sigma_b \mathbf{e}_3 \cdot \zeta d\Gamma_I} \cancel{- \langle \nabla p_b \cdot \mathbf{e}_3, p_b \rangle_{\omega_p}} + \cancel{k_p \langle \partial_s p_p, p_b \rangle_{\omega_p^-}} \\ & -\beta \left\| \mathbf{u} \cdot \tau \right\|^2_{\Gamma_I} + \cancel{\langle \sigma_b \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3, v \rangle_{\omega_p}} \\ = & -\beta \left\| \mathbf{u} \cdot \tau \right\|^2_{\Gamma_I}, \end{aligned} \tag{6.4}$$

其中，在最后一步中，我们使用了区域边界界面条件 (A.13)、(A.15) 和 (A.16)。最后，将关系式 (6.4) 应用于 (6.3) 右端，我们得到关系式 $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$,

$$(\mathbf{A}\mathbf{y}, \mathbf{y})_X = -k_b \|\nabla p_b\|^2_{L^2(\Omega_b)} - 2\mu_f \|\mathbf{D}(\mathbf{u})\|^2_{L^2(\Omega_f)} - k_p \|\partial_s p_p\|^2_{L^2(\Omega_p)} - \beta \|\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}\|^2_{L^2(\omega_p)} \leq 0.$$

也就是说，$\mathbf{A}$在$\mathbf{X}$上是耗散的。

7 极大性

7.1 相关双线性形式的推导

给定$\mathbf{F} \in \mathbf{X}$，以及给定的参数 $\lambda > 0$，我们希望找到$\mathbf{y} = [\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}, p_b, w, v, p_p, \mathbf{u}]^T \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$，使其满足方程

$$(\lambda I - \mathbf{A})\mathbf{y} = \mathbf{F}. \tag{7.1}$$

在（7.1）中取 $\lambda = 1$，该预解关系变为:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta} \\ \boldsymbol{\zeta} - \rho_b^{-1} \nabla \cdot \sigma^E(\boldsymbol{\eta}) + \alpha_b \rho_b^{-1} \nabla p_b \\ p_b + c_b^{-1} \alpha_b \nabla \cdot \boldsymbol{\zeta} - c_b^{-1} k_b \Delta p_b \\ w - v \\ v + \rho_p^{-1} [D \Delta^2_{\omega_p} w + \gamma w + \alpha_p \Delta_{\omega_p} \mathcal{K}(p_p) - F_p] \\ p_p - \alpha_p c_p^{-1} \tilde{\mathcal{K}}(\Delta_{\omega_p} v) - c_p^{-1} k_p \partial_s^2 p_p \\ \mathbf{u} - \rho_f^{-1} \mu_f \Delta \mathbf{u} + \rho_f^{-1} \nabla \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ \mathbf{f}_7 \end{bmatrix} \in \mathbf{X}. \tag{7.2}$$

通过代入 $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\eta} - \mathbf{f}_1$ 和 $v = w - f_4$，我们得到:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} - \rho_b^{-1} \nabla \cdot \sigma^E(\boldsymbol{\eta}) + \alpha_b \rho_b^{-1} \nabla p_b \\ p_b + c_b^{-1} \alpha_b \nabla \cdot \boldsymbol{\eta} - c_b^{-1} k_b \Delta p_b \\ w + \rho_p^{-1} [D \Delta^2_{\omega_p} w + \gamma w + \alpha_p \Delta_{\omega_p} \mathcal{K}(p_p) - F_p] \\ p_p - \alpha_p c_p^{-1} \tilde{\mathcal{K}}(\Delta_{\omega_p} w) - c_p^{-1} k_p \partial_s^2 p_p \\ \mathbf{u} - \rho_f^{-1} \mu_f \Delta \mathbf{u} + \rho_f^{-1} \nabla \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_1 \\ f_3 + c_b^{-1} \alpha_b \nabla \cdot \mathbf{f}_1 \\ f_5 + f_4 \\ f_6 - \alpha_p c_p^{-1} \tilde{\mathcal{K}}(\Delta_{\omega_p} f_4) \\ \mathbf{f}_7 \end{bmatrix}. \tag{7.3}$$

为处理这一关系，我们定义辅助空间

$$\Sigma = \Big\{ \boldsymbol{\psi} = [\boldsymbol{k}, q_b, \xi, q_p, \boldsymbol{\delta}]^T \in \mathbf{H}^1_{\#,*}(\Omega_b) \times H^1_{\#,*}(\Omega_b) \times H^2_0(\omega_p) \times H^{0,0,1}(\Omega_p) \times \mathbf{H}^1_{\#,*}(\Omega_f) : \\ \boldsymbol{k}|_{\Gamma_I} = \xi \mathbf{e}_3,\ q_b|_{\Gamma_I} = q_p|_{\omega_p^+} \Big\},$$

（请注意，我们没有对该空间中的流体分量施加无散约束。）我们为 Σ 配备如下内积：对于给定的 $\boldsymbol{\phi} = [\boldsymbol{\eta}, p_b, w, p_p, \mathbf{u}]^T \in \Sigma$和 $\boldsymbol{\psi} = [\mathbf{k}\ q_b, \xi, q_p, \boldsymbol{\delta}]^T \in \Sigma$,

$$(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi})_\Sigma = a_E(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{k}) + (\nabla p_b, \nabla q_b)_{L^2(\Omega_b)} + D(\Delta w, \Delta \xi)_{L^2(\omega_p)} + (p_p, q_p)_{H^{0,0,1}(\Omega_p)} + \mu_f (\nabla \mathbf{u}, \nabla \boldsymbol{\delta})_{L^2(\Omega_f)}.$$

现在我们可以定义约化问题的弱形式。假设$\mathbf{y} = [\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}, p_b, w, v, p_p, \mathbf{u}]^T \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$是（7.1）的一个解，我们对约化系统（7.3）取关于 $\psi = [\mathbf{k}\ q_b, \xi, q_p, \delta] \in \Sigma$的（最初形式上的） Σ-内积:

$$\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} - \rho_b^{-1} \nabla \cdot \sigma^E(\boldsymbol{\eta}) + \alpha_b \rho_b^{-1} \nabla p_b \\ p_b + c_b^{-1} \alpha_b \nabla \cdot \boldsymbol{\eta} - c_b^{-1} k_b \Delta p_b \\ w + \rho_p^{-1} [D \Delta^2_{\omega_p} w + \gamma w + \alpha_p \Delta_{\omega_p} \mathcal{K}(p_p) - F_p] \\ p_p - \alpha_p c_p^{-1} \tilde{\mathcal{K}}(\Delta_{\omega_p} w) - c_p^{-1} k_p \partial_s^2 p_p \\ \mathbf{u} - \rho_f^{-1} \mu_f \Delta \mathbf{u} + \rho_f^{-1} \nabla \pi \end{bmatrix}, \boldsymbol{\psi} \right)_\Sigma = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_1 \\ f_3 + c_b^{-1} \alpha_b \nabla \cdot \mathbf{f}_1 \\ f_5 + f_4 \\ f_6 - \alpha_p c_p^{-1} \tilde{\mathcal{K}}(\Delta_{\omega_p} f_4) \\ \mathbf{f}_7 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\psi} \right)_\Sigma . \tag{7.4}$$

我们接下来使用形式计算逐行简化方程组:

$$\begin{aligned} (R.1) \quad & \rho_b(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{k})_{L^2(\Omega_b)} - (\nabla \cdot \sigma^E(\boldsymbol{\eta}), \mathbf{k})_{L^2(\Omega_b)} + \alpha_b (\nabla p_b, \mathbf{k})_{L^2(\Omega_b)} \\ & = \rho_b(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{k})_{L^2(\Omega_b)} + (\sigma^E(\boldsymbol{\eta}), \nabla \mathbf{k})_{L^2(\Omega_b)} - \alpha_b (p_b, \nabla \cdot \mathbf{k})_{L^2(\Omega_b)} - \int_{\partial \Omega_b} \sigma_b \cdot \mathbf{n} \mathbf{k} \\ & = \rho_b(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{k})_{L^2(\Omega_b)} + a_E(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{k}) - \alpha_b (p_b, \nabla \cdot \mathbf{k})_{L^2(\Omega_b)} + \int_{\Gamma_I} \sigma_b \cdot \mathbf{e}_3 \mathbf{k}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (R.2) \quad & c_b(p_b, q_b)_{L^2(\Omega_b)} + \alpha_b (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}, q_b)_{L^2(\Omega_b)} - k_b (\Delta p_b, q_b)_{L^2(\Omega_b)} \\ & = c_b(p_b, q_b)_{L^2(\Omega_b)} + \alpha_b (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}, q_b)_{L^2(\Omega_b)} + k_b (\nabla p_b, \nabla q_b)_{L^2(\Omega_b)} - k_b \int_{\partial \Omega_b} \nabla p_b \cdot \mathbf{n} q_b \\ & = c_b(p_b, q_b)_{L^2(\Omega_b)} + \alpha_b (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}, q_b)_{L^2(\Omega_b)} + k_b (\nabla p_b, \nabla q_b)_{L^2(\Omega_b)} + k_b \int_{\Gamma_I} \nabla p_b \cdot \mathbf{e}_3 q_b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (R.3) \quad & \rho_p(w, \xi)_{L^2(\omega_p)} + ([D \Delta^2_{\omega_p} w + \gamma w + \alpha_p \Delta_{\omega_p} \mathcal{K}(p_p) - F_p], \xi)_{L^2(\omega_p)} \\ & = \rho_p(w, \xi)_{L^2(\omega_p)} + (D \Delta_{\omega_p} w + \alpha_p \mathcal{K}(p_p), \Delta_{\omega_p} \xi)_{L^2(\omega_p)} + \gamma (w, \xi)_{L^2(\omega_p)} - (F_p, \xi)_{L^2(\omega_p)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (R.4) \quad & c_p(p_p, q_p)_{L^2(\Omega_p)} - \alpha_p (\tilde{\mathcal{K}}(\Delta_{\omega_p} w), q_p)_{L^2(\Omega_p)} - k_p (\partial_s^2 p_p, q_p)_{L^2(\Omega_p)} \\ & = c_p(p_p, q_p)_{L^2(\Omega_p)} - \alpha_p (\tilde{\mathcal{K}}(\Delta_{\omega_p} w), q_p)_{L^2(\Omega_p)} + k_p (\partial_s p_p, \partial_s q_p)_{L^2(\Omega_p)} \\ & \quad - \int_{\partial \Omega_p} k_p \partial_s p_p q_p (\mathbf{n_p})_s d \partial \Omega_p \\ & = c_p(p_p, q_p)_{L^2(\Omega_p)} - \alpha_p (\tilde{\mathcal{K}}(\Delta_{\omega_p} w), q_p)_{L^2(\Omega_p)} + k_p (\partial_s p_p, \partial_s q_p)_{L^2(\Omega_p)} \\ & - \int_{\omega_p^+} k_p [\partial_s p_p] q_p d \omega_p^+ + \int_{\omega_p^-} k_p [\partial_s p_p] q_p d \omega_p^- \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(R.5)\quad & \rho_f(\mathbf{u},\boldsymbol{\delta})_{L^2(\Omega_f)} - \mu_f(\Delta\mathbf{u},\boldsymbol{\delta})_{L^2(\Omega_f)} + (\nabla\pi,\boldsymbol{\delta})_{L^2(\Omega_f)} \\
&= \rho_f(\mathbf{u},\boldsymbol{\delta})_{L^2(\Omega_f)} + \mu_f(\nabla\mathbf{u},\nabla\boldsymbol{\delta})_{L^2(\Omega_f)} - \int_{\partial\Omega_f} \nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\boldsymbol{\delta} - (\pi,\nabla\cdot\boldsymbol{\delta})_{L^2(\Omega_f)} + \int_{\partial\Omega_f} \pi\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{n} \\
&= \rho_f(\mathbf{u},\boldsymbol{\delta})_{L^2(\Omega_f)} + 2\mu_f(D(\mathbf{u}),D(\boldsymbol{\delta}))_{L^2(\Omega_f)} - (\pi,\nabla\cdot\boldsymbol{\delta})_{L^2(\Omega_f)} - \int_{\partial\Omega_f} \sigma_f\cdot\mathbf{n}\boldsymbol{\delta} \\
&= \rho_f(\mathbf{u},\boldsymbol{\delta})_{L^2(\Omega_f)} + 2\mu_f(D(\mathbf{u}),D(\boldsymbol{\delta}))_{L^2(\Omega_f)} - (\pi,\nabla\cdot\boldsymbol{\delta})_{L^2(\Omega_f)} - \int_{\Gamma_I} \sigma_f\cdot\mathbf{e}_3\boldsymbol{\delta}.
\end{aligned}
$$

此外，我们还将 F_p 展开为其组成部分，

$$
-\int_{\Gamma_I} F_p\xi = -\int_{\Gamma_I} \sigma_b\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3\xi + \int_{\Gamma_I} \sigma_f\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3\xi. \tag{7.5}
$$

现在，对于上述包含 σ_f 的各项，我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_I} \sigma_f\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3\xi - \int_{\Gamma_I} \sigma_f\cdot\mathbf{e}_3\boldsymbol{\delta} \\
&\qquad = \int_{\Gamma_I} \sigma_f\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3[\xi - (\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{e}_3)] - \int_{\Gamma_I} \sigma_f\mathbf{e}_3\cdot\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{\tau}) \\
&\qquad = -\int_{\Gamma_I} p_p(\cdot,-h/2)[\xi - (\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{e}_3)] + \beta\int_{\Gamma_I} (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\tau})(\boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{\tau}),
\end{aligned} \tag{7.6}
$$

利用边界界面条件 (A.14) 和 (A.18) 后。类似地，对于上述包含 σ_b 的各项，我们有

$$
-\int_{\Gamma_I} \sigma_b\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3\xi + \int_{\Gamma_I} \sigma_b\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{k} = 0, \tag{7.7}
$$

利用施加于试验空间的界面条件后。在此处，我们将 $(R.1)$、$(R.3)$ 和 $(R.5)$ 相加，并考虑到 (7.5)-(7.7)。于是有，

$$
\begin{aligned}
&(R.1)+(R.3)+(R.5) = \rho_b\left(\eta,\mathbf{k}\right)_{L^2(\Omega_b)} + a_E\left(\eta,\mathbf{k}\right) \\
&\quad + \rho_p\left(w,\xi\right)_{L^2(\Omega_p)} + D\left(\Delta_{\omega_p}w,\Delta_{\omega_p}\xi\right)_{L^2(\Omega_p)} + \gamma\left(w,\xi\right)_{L^2(\Omega_p)} \\
&\quad + \rho_f\left(\mathbf{u},\delta\right)_{L^2(\Omega_f)} + 2\mu_f\left(\mathbf{D}\right)(\mathbf{u}),\mathbf{D}(\delta))_{L^2(\Omega_f)} - \textstyle\int_{\Gamma_I} p_p(\cdot,-h/2)\left[\xi - \delta\cdot\mathbf{e}_3\right] + \beta\int_{\Gamma_I}\left(\mathbf{u}\cdot\tau\right)\left(\delta\cdot\tau\right) \\
&\quad - \alpha_b\left(p_b,\nabla\cdot\mathbf{k}\right)_{L^2(\Omega_b)} + \alpha_p\left(\mathcal{K}(p_p),\Delta\xi\right)_{L^2(\Omega_p)} - \left(\pi,\nabla\cdot\delta\right)_{L^2(\Omega_f)}.
\end{aligned} \tag{7.8}
$$

此外，回想起 $f_4 = w - v$，由定义域判据 (A.17) 可得

$$
\begin{aligned}
\int_{\omega_p^-} k_p[\partial_s p_p]q_p &= \int_{\Gamma_I} [v - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_3)]q_p(\cdot,-h/2) + \int_{\Gamma_I} f_4 q_p(\cdot,-h/2) - \int_{\Gamma_I} f_4 q_p(\cdot,-h/2) \\
&= \int_{\Gamma_I} [w - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_3)]q_p(\cdot,-h/2) - \int_{\Gamma_I} f_4 q_p(\cdot,-h/2).
\end{aligned} \tag{7.9}
$$

由 (A.18)，我们还有，
（（ $\int_{\omega_p} f_4 q_p(\cdot,\ -h)$ 项将加入待处理的 inf-sup 公式的强迫项中。）此外，由 (A.15) 和 (A.16)，

$$
\int_{\Gamma_I} k_b\nabla p_b\cdot\mathbf{e}_3 q_b - \int_{\omega_p^+} k_p[\partial_s p_p]q_p = 0. \tag{7.10}
$$

因此，根据（7.4）和（7.5）至（7.10）：如果 $\mathbf{y} = [\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta},p_b,w,v,p_p,\mathbf{u}]^T \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$ 求解预解方程（7.1），那么对于所有 $\psi = [\mathbf{k}\ \ q_b,\xi,q_p,\boldsymbol{\delta}] \in \Sigma$,

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{F},\psi)_{\mathbf{X}} = ((I-\mathbf{A})\,\mathbf{y},\psi)_{\mathbf{X}} = \textstyle\sum_{i=1}^{5}(R.i)\\
&= \rho_b\,(\eta,\mathbf{k})_{L^2(\Omega_b)} + a_E\,(\eta,\mathbf{k}) + c_b\,(p_b,q_b)_{L^2(\Omega_b)} + k_b\,(\nabla p_b,\nabla q_b)_{L^2(\Omega_b)}\\
&\quad + \rho_p\,(w,\xi)_{L^2(\Omega_p)} + D\left(\Delta_{\omega_p} w,\Delta_{\omega_p}\xi\right)_{L^2(\Omega_p)} + \gamma\,(w,\xi)_{L^2(\Omega_p)}\\
&\quad + c_p\,(p_p,q_p)_{L^2(\Omega_p)} + k_p\,(\partial_s p_p,\partial_s q_p)_{L^2(\Omega_p)}\\
&\quad + \rho_f\,(\mathbf{u},\boldsymbol{\delta})_{L^2(\Omega_f)} + 2\mu_f\,(\mathbf{D}(\mathbf{u}),\mathbf{D}(\boldsymbol{\delta}))_{L^2(\Omega_f)} - \textstyle\int_{\Gamma_I} p_p(\cdot,-h/2)\,[\xi - \boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{e}_3] + \int_{\Gamma_I}[w-\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_3]\,q_p(\cdot,-h/2)\\
&\quad + \beta\textstyle\int_{\Gamma_I}(\mathbf{u}\cdot\tau)\,(\boldsymbol{\delta}\cdot\tau) - \alpha_b\,(p_b,\nabla\cdot\mathbf{k})_{L^2(\Omega_b)} + \alpha_b\,(\nabla\cdot\boldsymbol{\eta},q_b,)_{L^2(\Omega_b)} + \alpha_p\left(\mathcal{K}\,(p_p)\,,\Delta_{\omega_p}\xi\right)_{L^2(\omega_p)}\\
&\quad - \alpha_p\left(\widetilde{\mathcal{K}}\,(\Delta_{\omega_p} w)\,,q_p\right)_{L^2(\Omega_p)} - (\pi,\nabla\cdot\boldsymbol{\delta})_{L^2(\Omega_f)} - \textstyle\int_{\Gamma_I} f_4 q_p(\cdot,-h/2).
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

对预解方程解的刻画引出了以下变分问题：求一对 $[\boldsymbol{\phi},\pi]\in\Sigma\times L^2(\Omega f)$，使得

$$
a(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi}) + b(\boldsymbol{\psi},\pi) = \{(\boldsymbol{\psi}) \quad \forall\boldsymbol{\psi}\in\Sigma \tag{7.12}
$$

$$
b(\boldsymbol{\psi},\chi) = 0 \qquad \forall\chi\in L^2(\Omega_f), \tag{7.13}
$$

这里（取自 (7.11)），双线性形式和数据如下：对于给定的 $\boldsymbol{\phi}=[\boldsymbol{\eta},p_b,w,p_p,\mathbf{u}]^T\in\Sigma$和 $\boldsymbol{\psi}=[\mathbf{k}\ q_b,\ \xi,\ q_p,\ \boldsymbol{\delta}]^T\in\Sigma$，以及 $\chi\in L^2(\Omega f)$

$$
\begin{aligned}
a(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi}) \equiv\ & \rho_b(\boldsymbol{\eta},\mathbf{k})_{L^2(\Omega_b)} + a_E(\boldsymbol{\eta},\mathbf{k}) + c_b(p_b,q_b)_{L^2(\Omega_b)} + k_b(\nabla p_b,\nabla q_b)_{L^2(\Omega_b)}\\
&+ \rho_p(w,\xi)_{L^2(\omega_p)} + D(\Delta_{\omega_p} w,\Delta_{\omega_p}\xi)_{L^2(\omega_p)} + \gamma(w,\xi)_{L^2(\omega_p)} + c_p(p_p,q_p)_{L^2(\Omega_p)}\\
&+ k_p(\partial_s p_p,\partial_s q_p)_{L^2(\Omega_p)} + \rho_f(\mathbf{u},\boldsymbol{\delta})_{L^2(\Omega_f)} + 2\mu_f(\mathbf{D}(\mathbf{u}),\mathbf{D}(\boldsymbol{\delta}))_{L^2(\Omega_f)}\\
&+ \beta\int_{\Gamma_I}(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\tau})(\boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{\tau}) + \alpha_p(\mathcal{K}(p_p),\Delta_{\omega_p}\xi)_{L^2(\omega_p)} - \alpha_p(\tilde{\mathcal{K}}(\Delta_{\omega_p} w),q_p)_{L^2(\omega_p)}\\
&+ \alpha_b(\nabla\cdot\boldsymbol{\eta},q_b)_{L^2(\Omega_b)} - \alpha_b(p_b,\nabla\cdot\mathbf{k})_{L^2(\Omega_b)}\\
&+ \int_{\Gamma_I}[w-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_3)]q_p(\cdot,-h/2) - \int_{\Gamma_I} p_p(\cdot,-h/2)[\xi-(\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{e}_3)];
\end{aligned}
\tag{7.14}
$$

$$
b(\boldsymbol{\psi},\chi) \equiv -(\chi,\nabla\cdot\boldsymbol{\delta})_{L^2(\Omega_f)}; \tag{7.15}
$$

$$
\begin{aligned}
\{(\boldsymbol{\psi}) \equiv\ & \rho_b(\mathbf{f}_2+\mathbf{f}_1,\mathbf{k})_{L^2(\Omega_b)} + (c_b f_3 + \alpha_b\nabla\cdot\mathbf{f}_1,q_b)_{L^2(\Omega_b)}\\
&+ \rho_p(f_5+f_4,\xi)_{L^2(\omega_p)} + (c_p f_6 - \alpha_p\tilde{\mathcal{K}}(\Delta_{\omega_p} f_4),q_p)_{L^2(\Omega_p)}\\
&+ \int_{\Gamma_I} f_4 q_p(\cdot,-h/2) + \rho_f(\mathbf{f}_7,\boldsymbol{\delta})_{L^2(\Omega_f)}.
\end{aligned}
\tag{7.16}
$$

混合变分公式 (7.12)-(7.13) 构成了预解关系 (7.1) 的形式。因此，我们将为运用 Babu˘ska-Brezzi 定理做好准备，以证明该方程组存在唯一解（附录 A）。

注意，若动力学算子对于某个 $\lambda>0$ 是极大的，那么它就是极大的 $\forall\lambda>0$ [30]。为简便起见，我们选取了 $\lambda=1$，因为 $\lambda\neq 1$ 只会使数据中的正系数有所不同。

7.2 强制性与连续性

由 (7.14) 和 (7.15) 给出的双线性形式 $a(\cdot,\ \cdot):\Sigma\times\Sigma$ 和 $b(\cdot,\ \cdot):\Sigma\times L^2(\Omega f)$，显然都是连续的。（特别是，应用索伯列夫迹定理以及 Korn 和 Poincar´e 不等式来估计边界积分，该积分部分构成了 $a(\cdot,\ \cdot)$。）此外，$a(\cdot,\ \cdot)$ 是 Σ-椭圆的：给定

$\boldsymbol{\phi} = [\boldsymbol{\eta}, p_b, w, p_p, \mathbf{u}]^T \in \Sigma$，我们有

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi}) &= \left(\rho_b \|\boldsymbol{\eta}\|^2_{L^2(\Omega_b)} + \|\boldsymbol{\eta}\|^2_E\right) + \left(c_p \|p_b\|^2_{L^2(\Omega_b)} + k_b \|\nabla p_b\|^2_{L^2(\Omega_b)}\right) \\ &+ \left(\rho_p \|w\|^2_{L^2(\omega_p)} + D\|\Delta_{\omega_p} w\|^2_{L^2(\omega_p)} + \gamma \|w\|^2_{L^2(\omega_p)}\right) + \left(c_p \|p_p\|^2_{L^2(\Omega_p)} + k_p \|\partial_s p_p\|^2_{L^2(\Omega_p)}\right) \\ &+ \left(\rho_f \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(\Omega_f)} + 2\mu_f \|D(\mathbf{u})\|^2_{L^2(\Omega_f)} + \beta \int_{\Gamma_I} |\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}|^2\right) \\ &\geq C(\rho_b, c_p, k_b, \rho_p, D, \gamma, c_p, k_p, \rho_f, \mu_f, \beta) \|\boldsymbol{\phi}\|^2_\Sigma. \end{aligned}$$

此处的关键在于证明双线性型 $b(\cdot,\cdot): \Sigma \times L^2(\Omega_p)$ 满足 Babuška-Brezzi 条件。也就是说，存在常数 $\beta > 0$ 使得

$$\forall \chi \in L^2(\Omega_f) \quad \sup_{\boldsymbol{\phi} \in \Sigma \setminus \{0\}} \frac{b(\boldsymbol{\phi}, \chi)}{\|\boldsymbol{\phi}\|_\Sigma} \geq \beta \|\chi\|_{L^2(\Omega_f)}. \tag{7.17}$$

我们的证明遵循与 [6] 中相同的步骤。我们有

$$\sup_{\boldsymbol{\phi} \in \Sigma, \boldsymbol{\phi} \neq 0} \frac{b(\boldsymbol{\phi}, \chi)}{\|\boldsymbol{\phi}\|_\Sigma} \geq \sup_{\substack{\boldsymbol{\phi} \in \Sigma, \mathbf{u} \neq 0 \\ \boldsymbol{\eta}=0, p_b=0, \\ p_p=0, w=0}} \frac{b(\boldsymbol{\phi}, \chi)}{\|\boldsymbol{\phi}\|_\Sigma} \geq \frac{b(\tilde{\boldsymbol{\phi}}, \chi)}{\|\tilde{\boldsymbol{\phi}}\|_\Sigma} \tag{7.18}$$

~ ~其中 $\phi \in \Sigma$ 具有形式 $\phi = [0,0,0,0,\tilde{}\mathbf{u}],$，其中 $\tilde{}\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1_{\#,*}(\Omega f)$ 是任意的。利用 (7.15 中双线性型 $b(\boldsymbol{\phi}, \pi)$ 的定义以及 Σ 的范数，我们于是有

$$\frac{b(\tilde{\boldsymbol{\phi}}, \pi)}{\|\tilde{\boldsymbol{\phi}}\|_\Sigma} = -\frac{(\pi, \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}})}{\|\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^2(\Omega_f)}} \tag{7.19}$$

考虑到这一比值，我们考虑如下边值问题：求 $\tilde{}\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1_{\#}(\Omega f)$，使得

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} &= -\chi \text{ on } \Omega_f \\ \tilde{\mathbf{u}}|_{\Gamma_I} &= -\left(\frac{\int_{\Omega_f} \chi d\Omega_f}{meas(\Gamma_I)}\right) \mu(x) \mathbf{e}_3 \quad \text{on } \Gamma_I \\ \tilde{\mathbf{u}}|_{\Gamma_f} &= \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_f . 7.21 \end{aligned} \tag{7.20}$$

这里，μ 是一个截断函数，使得

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{on } \Gamma_I \\ \text{a nonegative, periodic function, on each lateral face } \Gamma \text{ of } \Omega_f, \end{cases}$$

并且 $\text{supp}(\mu) \cap \Gamma_f = \varnothing$。该边值问题有一个解 [19] ——因为可解性的相容条件已得到满足——并具有连续依赖估计，

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{H^1(\Omega)} \leq c_1 \|\chi\|_{L^2(\Omega_f)}. \tag{7.21}$$

将此解 $\tilde{}\mathbf{u}$ 代入（7.19），可得

$$\frac{b(\tilde{\boldsymbol{\phi}}, \chi)}{\|\tilde{\boldsymbol{\phi}}\|_\Sigma} = -\frac{(\chi, \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}})}{\|\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^2(\Omega_f)}} = \frac{\|\chi\|^2_{L^2(\Omega_f)}}{\|\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^2(\Omega_f)}}. \tag{7.22}$$

由 $\|\mathbf{D}(.)\|$ 范数与 $\mathbf{H}^1$ 范数的范数等价性，以及连续依赖估计 (7.21)，我们

进而得到

$$\frac{\|\chi\|^2_{L^2(\Omega_f)}}{\|\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^2(\Omega_f)}} \geq c_2 \frac{\|\chi\|^2_{L^2(\Omega_f)}}{\|\chi\|_{L^2(\Omega_f)}} = c_2\|\chi\|_{L^2(\Omega_f)}.$$

由此估计以及 (7.18)，对于给定的 $\chi \in L^2(\Omega f)$，现在可得

$$\sup_{\boldsymbol{\phi}\in\Sigma,\boldsymbol{\phi}\neq 0} \frac{b(\boldsymbol{\phi},\chi)}{\|\boldsymbol{\phi}\|_\Sigma} \geq c_2\|\chi\|_{L^2(\Omega_f)}.$$

对于任意的 $\pi \in L^2(\Omega f)$。由此下确界-上确界估计（针对连续的 $b(\cdot,\ \cdot)$），且由于 $a(\cdot.)$ 连续并具有 Σ-椭圆性，Babu˘ska-Brezzi 定理保证存在一对 $\phi \in \Sigma$ 和 $\pi \in L^2$，使其唯一地解方程组 (7.12)-(7.13)。

7.3 $\mathcal{D}(\mathbf{A})$ 的恢复

现在我们希望证明，Babu˘ska-Brezzi 系统 (7.12)-(7.13) 的唯一解 $(\boldsymbol{\phi},\ \pi) \in \Sigma \times L^2(\Omega f)$ 可导出 $\mathcal{D}(\mathbf{A})$ 中的一个元素。（同样，$\boldsymbol{\phi} = [\boldsymbol{\eta}, p_b, w, p_p, \mathbf{u}]^T$。）

第 1 部分。 我们先从 (7.12)-(7.13) 的变分解中提取一些初步关系。令试验函数为 $\psi = [\mathbf{k}\ q_b,\ \xi,\ q_p, \boldsymbol{\delta}]^T \in \Sigma$，其中 $\mathbf{k} \in [\mathcal{D}(\Omega_b)]^3$, $q_b = 0,\ q_p = 0,\ \xi = 0$，且 $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$。对于这个特定的试验函数 $\boldsymbol{\psi}$，由变分关系 (7.12) 可得

$$\rho_b(\boldsymbol{\eta},\mathbf{k})_{L^2(\Omega_b)} + a_E(\boldsymbol{\eta},\mathbf{k}) - \alpha_b(p_b,\nabla\cdot\mathbf{k})_{L^2(\Omega_b)} = \rho_b(\mathbf{f}_2+\mathbf{f}_1,\mathbf{k}).$$

根据 Σ 中的正则性，由（7.12）可得

$$\rho_b\boldsymbol{\eta} - \nabla\cdot\sigma^E(\boldsymbol{\eta}) + \alpha_b\nabla p_b = \rho_b(\mathbf{f}_2+\mathbf{f}_1), \tag{7.23}$$

在分布的意义下，并且由于 $\mathcal{D}(\Omega_b)$ 的稠密性，在 L^2 意义下。因此，

$$\nabla\cdot\sigma^E(\boldsymbol{\eta}) = \rho_b\boldsymbol{\eta} + \alpha_b\nabla p_b - \rho_b(\mathbf{f}_2+\mathbf{f}_1) \in \mathbf{L}^2(\Omega_b). \tag{7.24}$$

随后，通过能量方法可由此正则性得到

$$\sigma^E(\boldsymbol{\eta})\cdot\mathbf{n} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega_b). \tag{7.25}$$

通过改变试验函数 $\boldsymbol{\psi}$ 的选择，可以对每个解变量应用同样的推理，从而得到以下关系：

$$k_b\Delta p_b = c_b p_b + \alpha_b\nabla\cdot\boldsymbol{\eta} - c_b f_3 - \alpha_b\nabla\cdot\mathbf{f}_1 \in L^2(\Omega_b) \tag{7.26}$$

$$k_b\nabla p_b\cdot\mathbf{n_b} \in H^{-1/2}(\partial\Omega_b) \tag{7.27}$$

$$-\mu_f\Delta\mathbf{u} + \nabla\pi = -\rho_f\mathbf{u} + \rho_f\mathbf{f}_7 \quad \in \mathbf{L}^2(\Omega_f) \tag{7.28}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \ \text{ in } \ \Omega_f \ (\text{from} \quad (7.13)) \tag{7.29}$$

$$\sigma_f\cdot\boldsymbol{e}_3 \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Omega_f) \tag{7.30}$$

$$\tag{7.31}$$

$$c_p p_p - k_p\partial_s^2 p_p - \alpha_p\tilde{\mathcal{K}}(\Delta w) = c_p f_6 - \alpha_p\tilde{\mathcal{K}}(\Delta_{\omega_p} f_4) \in L^2(\Omega_p), \tag{7.32}$$

由于 Σ 中的位移匹配约束，双线性型的“薄”板分量情况更为微妙。令 (7.12) 中的试验函数 $\boldsymbol{\psi}$ 为 $\boldsymbol{\psi} = [\mathbf{k}\,\mathbf{0},\ \xi,\ \mathbf{0},\ 0]^T \in \Sigma$，则我们

have

$$\begin{aligned}
&\rho_b\left(\eta,\mathbf{k}\right)_{L^2(\Omega_b)}+a_E\left(\eta,\mathbf{k}\right)-\alpha_b\left(p_b,\nabla\cdot\mathbf{k}\right)_{L^2(\omega_b)}+\rho_p\left(w,\xi\right)_{L^2(\omega_p)}+D\left(\Delta_{\omega_p}w,\Delta_{\omega_p}\xi\right)_{L^2(\omega_p)}\\
&+\gamma\left(w,\xi\right)_{L^2(\omega_p)}+\alpha_p\left(\Delta_{\omega_p}\mathcal{K}\left(p_p\right),\xi\right)_{L^2(\omega_p)}-\int_{\Gamma_I}p_p(\cdot,-h/2)\xi d\Gamma_I\\
=\;&\rho_b\left(\mathbf{f}_2+\mathbf{f}_1,\mathbf{k}\right)_{L^2(\Omega_b)}+\rho_p\left(f_5+f_4,\xi\right)_{L^2(\omega_p)}.
\end{aligned}$$

应用 (7.23) a　　将 (7.24) 应用于此表达式，并利用 $\mathbf{k}|_{\Gamma_I}=\xi$ 这一事实，我们便得到关系式　　n

$$\begin{aligned}
&\rho_p\left(w,\xi\right)_{L^2(\omega_p)}+D\left(\Delta w,\Delta\xi\right)_{L^2(\omega_p)}+\gamma\left(w,\xi\right)_{L^2(\omega_p)}-\left\langle\sigma_b(\eta,p_b)\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3,\xi\right\rangle_{\Gamma_I}\\
&+\alpha_p\left(\Delta_{\omega_p}\mathcal{K}\left(p_p\right),\xi\right)_{L^2(\omega_p)}-\textstyle\int_{\Gamma_I}p_p(\cdot,-h/2)\xi d\Gamma_I\\
&\quad=\rho_p\left(f_5+f_4,\xi\right)_{L^2(\omega_p)}.
\end{aligned}$$

由于对于任意函数 $h\in H_0^2(\Gamma_I)$，都可以找到 $\varpi\in H^1_{\#,*}(\Omega_b)\cap H^2(\Omega_b)$——见下文 (7.36) 中对 [14],的刻画——使得 $\varpi|_{\Gamma_I}=h$，因此我们有

$$\rho_p w+D\Delta^2 w+\gamma w+\alpha_p\Delta_{\omega_p}\mathcal{K}\left(p_p\right)-\sigma_b(\eta,p_b)\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3-p_p(\cdot,-h/2)=\rho_p[f_5+f_4]\ \text{ in } L^2(\Gamma_I).\tag{7.33}$$

第2部分。 这里，我们为 (7.12)-(7.13) 的解对 $[\phi,\pi]\in\Sigma\times L^2(\Omega f)$ 建立"隐藏正则性"，其中同样有 $\phi=[\boldsymbol{\eta},p_b,w,q_b,\mathbf{u}]^T$。
(i) 首先，对于

$$\partial\Omega_f=\bigcup_{j=1}^{6}\Gamma_j,\tag{7.34}$$

其中每个 Γ_j 表示 Ωf 的六个边之一，则

$$\left\{\pi|_{\Gamma_j},\left.\frac{\partial\pi}{\partial\mathbf{n}_f}\right|_{\Gamma_j}\right\}\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j)\times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_j),\text{ for } j=1,...,6.\tag{7.35}$$

为证明这一包含关系，我们将使用（全局）Sobolev迹映射的刻画，$\gamma=(\gamma_0,\gamma_1):H^2(\Omega f)\to H^1(\partial\Omega f)\times L^2(\partial\Omega f)$（定义在 Lipschitz区域 Ωf上）。也就是说,

$$f\to\gamma(f)=\left[\gamma_0(f)=f|_{\partial\Omega_f},\gamma_1(f)=\left.\frac{\partial f}{\partial\mathbf{n}_f}\right|_{\partial\Omega_f}\right].$$

对于这个映射，有

$$Range(\gamma)=\left\{[h_0,h_1]\in H^1(\partial\Omega_f)\times L^2(\partial\Omega_f):\nabla_{\partial\Omega_f}h_0+h_1\mathbf{n}_f\in\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_f)\right\}\tag{7.36}$$

（参见 [14]中的定理5，第702页。这里，$\nabla_{\partial\Omega_f}$ 是切向梯度。）
　利用这一结果以及 $\Gamma\equiv\Gamma_j$，对于某个指标 j，设

$$g_0\in H_0^{\frac{3}{2}+\epsilon}(\Gamma),g_1\in H_0^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\Gamma)\tag{7.37}$$

给定；随后，令 $\widetilde{g_0}$ 和 $\widetilde{g_1}$ 分别表示它们在整个 $\partial\Omega f$上的零延拓。于是，根据 [28],中的定理3.33，第95页

$$\widetilde{g_0}\in H^{\frac{3}{2}+\epsilon}(\partial\Omega_f),\widetilde{g_1}\in H^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\partial\Omega_f).\tag{7.38}$$

因此，由 (7.36) 可知 $[\widetilde{g_0},\widetilde{g_1}]\in Range(\gamma)$。于是，若我们调用连续右逆

γ^+，即 $\gamma^+ \in \mathcal{L}(Range(\gamma)\ H^2(\Omega f)$ 满足 $\gamma\gamma^+ = I$，那么

$$\left\langle \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{n}_f}, g_0 \right\rangle_\Gamma - \langle \pi, g_1 \rangle_\Gamma = \left(\pi, -\Delta\gamma^+([\widetilde{g_0}, \widetilde{g_1}])\right)_{\Omega_f} + 0, \tag{7.39}$$

利用 π 是调和函数这一事实之后。（本质上，我们是在模仿 [2], 第 265 页中相应命题的证明，该证明针对光滑流体几何情形。）估计右端项时，部分利用了 π 是 (7.12)-(7.13) 的压力解分量这一事实，我们得到

$$\begin{aligned} \left|\left(\pi, -\Delta\gamma^+([\widetilde{g_0}, \widetilde{g_1}])\right)_{\Omega_f}\right| &\leq C \|\pi\|_{L^2(\Omega)} \left\|\Delta\gamma^+([\widetilde{g_0}, \widetilde{g_1}])\right\|_{L^2(\Omega_f)} \\ &\leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{X}} \left\|\nabla_{\partial\Omega_f}\widetilde{g_0} + \widetilde{g_1}\mathbf{n}_f\right\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Omega_f)}, \end{aligned}$$

利用刻画 (7.36) 之后。由于零延拓 $\widetilde{g_i}$ 来源于 (7.37) 中的 g_i，因此我们得到

$$\left|\left(\pi, -\Delta\gamma^+([\widetilde{g_0}, \widetilde{g_1}])\right)_{\Omega_f}\right| \leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{X}} \left(\|g_0\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} + \|g_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\right). \tag{7.40}$$

(7.39) 与 (7.40) 的结合，以及 $H_0^{s+\epsilon}(\Gamma)$ 在 H_0^s 中的稠密性，现在给出

$$\left|\left\langle \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{n}_f}, g_0 \right\rangle_\Gamma - \langle \pi, g_1 \rangle_\Gamma\right| \leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{X}} \left(\|g_0\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} + \|g_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\right), \text{ for all } g_0 \in H_0^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \text{ and } g_1 \in H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

由此估计可得 (7.35)。

(ii) 进而，给定立方体边 Γ，如 (7.34) 中所示，令 $\mathbf{g} \in \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\Gamma)$，其零延拓为 $\widetilde{\mathbf{g}} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\partial\Omega f)$。此外，结合零阶 Sobolev迹映射 γ_0 的右连续逆 $\gamma_0^+ \in \mathcal{L}(\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega f), \mathbf{H}^1(\Omega f))$，我们得到

$$\begin{aligned} \langle 2\mu_f \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_f, \mathbf{g} \rangle_\Gamma &= 2\mu_f \left(\mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{D}(\gamma_0^+[\widetilde{\mathbf{g}}])\right)_{L^2(\Omega_f)} + \mu_f \left(\Delta\mathbf{u}, \gamma_0^+[\widetilde{\mathbf{g}}]\right)_{L^2(\Omega_f)} \\ &= \left(\nabla\pi, \gamma_0^+[\widetilde{\mathbf{g}}]\right)_{L^2(\Omega_f)} + \rho_f \left(\mathbf{u}, \gamma_0^+[\widetilde{\mathbf{g}}]\right)_{L^2(\Omega_f)} - \rho_f \left(\mathbf{f}_7, \gamma_0^+[\widetilde{\mathbf{g}}]\right)_{L^2(\Omega_f)}. \end{aligned} \tag{7.41}$$

使用斯托克斯流 (7.28) 后。关于右侧的第一项,

$$\begin{aligned} \left|\left(\nabla\pi, \gamma_0^+[\widetilde{\mathbf{g}}]\right)_{L^2(\Omega_f)}\right| &\leq |\langle \pi, \mathbf{g} \rangle_\Gamma| + \left|\left(\pi, \nabla \cdot \gamma_0^+[\widetilde{\mathbf{g}}]\right)_{L^2(\Omega_f)}\right| \\ &\leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{X}} \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \end{aligned}$$

使用 (7.35) 以及 π 是 (7.12)-(7.13) 的压力解分量这一事实后，将此估计应用于 (7.41)，并利用 $\mathbf{u}$ 是 (7.12)-(7.13) 的解分量这一事实进行估计，我们得到

$$\left|\langle 2\mu_f \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_f, \mathbf{g} \rangle_\Gamma\right| \leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{X}} \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \text{ for given } \mathbf{g} \in \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\Gamma).$$

$\mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\Gamma)$ 在 $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 中的稠密性现在给出,

$$\|2\mu_f \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_f\|_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{X}}, \text{ for given side } \Gamma \text{ of cube } \Omega_f. \tag{7.42}$$

(iii) 最后，对于给定的 Ωf 的面 Γ，取 $\pm\mathbf{e}_j$ 为其法向量。然后将方程 (7.28) 两边与 $\mathbf{e}_j$ 点乘，并将其迹限制到 Γ，于是得到

$$\mu_f \Delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_j = \nabla\pi \cdot \mathbf{e}_j + \rho_f \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_j - \rho_f \mathbf{f}_7 \cdot \mathbf{e}_j \text{ in } \Omega_f.$$

随后，取 对两边取 Dirichlet迹，将其限制到 Γ ，然后进行估计，于是得到 e

$$\|\mu_f \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_j\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)} \leq \|\nabla \pi \cdot \mathbf{e}_j\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)} + C\|\mathbf{F}\|_{\mathbf{X}}.$$

现在利用估计式 (7.35) 即可得到迹正则性,

$$\|\mu_f \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_f\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)} \leq C\|\mathbf{F}\|_{\mathbf{X}}, \quad \text{for any given side of the cube } \Omega_f. \tag{7.43}$$

我们还注意到，由于解分量 $p_p \in H^{0,\ 0,\ 2}(\Omega p)$，由 (4.4) 和 (4.5) 可得迹

$$\left\{ p_p|_{\omega_p^+},\ \partial_s p_p|_{\omega_p^+},\ p_p|_{\omega_p^-},\ \partial_s p_p|_{\omega_p^-} \right\} \in [H^{-\frac{1}{2}}(\omega_p^+)]^2 \times [H^{-\frac{1}{2}}(\omega_p^-)]^2. \tag{7.44}$$

第 3 部分。 (a) 我们证明迹项 $[\sigma_f(\mathbf{u}\ \pi)\mathbf{n}_f]_{\partial\Omega_f}$属于 $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}{}_{\#}(\partial\Omega f)$。给定立方体 Ωf的两个侧 面 Γ_a和 Γ_b，设 $\mathbf{g} \in \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\Gamma_a)$ 已知。则可以找到 $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega f)$，使其满足边值问题

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \quad \text{in } \Omega_f \\ \mathbf{v} &= \mathbf{g} \quad \text{on } \Gamma_a \cup \Gamma_b \\ \mathbf{v} &= \mathbf{0} \quad \text{on } \partial\Omega_f \diagdown (\Gamma_a \cup \Gamma_b). \end{aligned} \tag{7.45}$$

注意到，可解性的基本相容条件已满足，因为

$$\int_{\Gamma_a} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_f d\Gamma_a + \int_{\Gamma_b} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_f d\Gamma_b = 0.$$

用这个变量以及 Γ_a 的单位法向量 $\pm\mathbf{e}j$ ， $j = 1$ 或 2，我们于是有

$$\begin{aligned} & \langle 2\mu_f \mathbf{D}(\mathbf{u})(\pm\mathbf{e}_j) - \pi(\pm\mathbf{e}_j), \mathbf{g} \rangle_{\Gamma_a} + 2\mu_f \langle \mathbf{D}(\mathbf{u})(\mp\mathbf{e}_3) - \pi(\mp\mathbf{e}_j), \mathbf{g} \rangle_{\Gamma_a} \\ & 2\mu_f \left(\mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{D}(\mathbf{v})\right)_{\Omega_f} + \mu_f \left(\Delta\mathbf{u}, \mathbf{v}\right)_{\Omega_f} - \left(\nabla\pi, \mathbf{v}\right)_{\Omega_f} \\ = \quad & (\pi, \nabla \cdot \mathbf{v})_{\Omega_f} \\ & \text{(after using (7.12) and (7.28)} \\ = \quad & 0. \end{aligned}$$

因此,

$$[2\mu_f \mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n}_f - \pi\mathbf{n}_f]_{\partial\Omega_f} \in \mathbf{H}_{\#}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_f). \tag{7.46}$$

（b）逐字引用 [6, (4.26) 中第 19–20] 页的计算，我们得到

$$2\mu_f \mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n}_f \in \mathbf{H}_{\#}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_f); \tag{7.47}$$

由此与 (7.46) 依次可得,

$$\pi \in \mathbf{H}_{\#}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_f);. \tag{7.48}$$

（c）以类似方式，针对 (7.12)-(7.13) 的解 ϕ 中的比奥偏微分方程分量，我们有:

$$\nabla p_b \cdot \mathbf{n}_f|_{\partial\Omega_b} \in H_{\#}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_b);\ \ \sigma_b(\eta)|_{\partial\Omega_b}\, \sigma_b(\eta) \in H_{\#}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_b). \tag{7.49}$$

第 4 部分. 我们通过证明各种边界界面条件均得到满足，来完成区域恢复。对于方程 (7.12)-(7.13) 的变分解 $(\phi, \pi) \in \Sigma \times L^2(\Omega f)$，并给定 $\psi =$

$[\mathbf{k}\ q_b, \xi, q_p, \boldsymbol{\delta}] \in \Sigma$，对 7.24)-(7.32) 应用格林公式，并进一步利用现已由 (7.44)、(7.47)、(7.48) 和 (7.49) 得到的边界迹，可得以下恒等式:

$$\begin{aligned}(\rho_f \mathbf{f}_7, \boldsymbol{\delta})_{L^2(\Omega_f)} &= \rho_f\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta}\right)_{L^2(\Omega_f)} + (-\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla\pi, \boldsymbol{\delta})_{L^2(\Omega_f)} \\ &= \rho_f\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta}\right)_{L^2(\Omega_f)} + 2\mu_f(\mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{D}(\boldsymbol{\delta}))_{L^2(\Omega_f)} - (\pi, \nabla\cdot\boldsymbol{\delta})_{L^2(\Omega_f)} - \langle\sigma_f(\mathbf{u}, \pi)\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\delta}\rangle_{\Gamma_I}; \end{aligned} \tag{7.50}$$

$$\begin{aligned}(\rho_b[\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_1], \mathbf{k})_{\mathbf{L}^2(\Omega_b)} &= \rho_b\left(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{k}\right)_{\mathbf{L}^2(\Omega_b)} - (\nabla\cdot\sigma_E(\boldsymbol{\eta}) - \alpha_b\nabla p_b, \mathbf{k})_{L^2(\Omega_b)} \\ &= \rho_b\left(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{k}\right)_{\mathbf{L}^2(\Omega_b)} + a_E(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{k}) - \alpha_b(p_b, \nabla\cdot\boldsymbol{k})_{L^2(\Omega_b)} + \langle\sigma_b(\boldsymbol{\eta}, p_b)\mathbf{e}_3, \mathbf{k}\rangle_{\Gamma_I}; \end{aligned} \tag{7.51}$$

$$\begin{aligned}(c_b f_3 + \alpha_b\nabla\cdot\mathbf{f}_1, q_b)_{L^2(\Omega_b)} &= (c_b p_b + \alpha_b\nabla\cdot\boldsymbol{\eta}, q_b)_{L^2(\Omega_b)} - (k_b\Delta p_b, q_b)_{L^2(\Omega_b)} \\ &= (c_b p_b + \alpha_b\nabla\cdot\boldsymbol{\eta}, q_b)_{L^2(\Omega_b)} + (k_b\nabla p_b, \nabla q_b)_{L^2(\Omega_b)} + \langle k_b\partial_{\mathbf{e}_3} p_b, q_b\rangle_{\Gamma_I}; \end{aligned} \tag{7.52}$$

$$\begin{aligned} & (\rho_p[f_5 + f_4], \xi)_{L^2(\omega_p)} \\ = \ & \rho_p\left(w, \xi\right)_{L^2(\omega_p)} + D\left(\Delta_{\omega_p} w, \Delta_{\omega_p}\xi\right)_{L^2(\omega_p)} + \gamma\left(w, \xi\right)_{L^2(\omega_p)} + \left(\alpha_p\Delta_{\omega_p}\mathcal{K}(p_p), \xi\right)_{L^2(\omega_p)} \\ & - \langle\sigma_b(\eta, p_b)\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3, \xi\rangle_{\Gamma_I} - (p_p(\cdot, -h/2), \xi)_{L^2(\omega_p)} \end{aligned} \tag{7.53}$$

$$\begin{aligned} & \left(c_p f_6 - \alpha_p\tilde{\mathcal{K}}(\Delta_{\omega_p} f_4), q_p\right)_{L^2(\Omega_p)} \\ & \quad = c_p\left(p_p, q_p\right)_{L^2(\Omega_p)} - \alpha_p\left(\tilde{\mathcal{K}}(\Delta_{\omega_p} w), q_p\right)_{L^2\Omega_p)} - \left(k_p\partial_s^2 p_p, q_p\right)_{L^2(\Omega_p)} \\ & = c_p\left(p_p, q_p\right)_{L^2(\Omega_p)} - \alpha_p\left(\tilde{\mathcal{K}}(\Delta_{\omega_p} w), q_p\right)_{L^2\Omega_p)} + (k_p\partial_s p_p, \partial_s q_p)_{L^2(\Omega_p)} \\ & \quad - \langle k_p\partial_s p_p, q_p\rangle_{\omega_p^+} + \langle k_p\partial_s p_p, q_p\rangle_{\omega_p^-}. \end{aligned} \tag{7.54}$$

现在，将关系式（7.50）—（7.54）相加，再从所得的和中减去变分关系（7.12）。这样，对于所有 $\psi = [\mathbf{k}\ q_b、\ \xi、\ q_p、\ \boldsymbol{\delta}] \in \Sigma$，我们得到以下关系式:

$$\begin{aligned} & -\langle\sigma_f(\boldsymbol{u}, \pi)\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{\delta}\rangle_{\Gamma_I} + \langle k_b\partial_{\boldsymbol{e}_3} p_b, q_b\rangle_{\Gamma_I} - \langle k_p\partial_s p_p, q_p\rangle_{\omega_p^+} + \langle k_p\partial_s p_p, q_p\rangle_{\omega_p^-} - \beta\int_{\Gamma_I}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\tau})(\boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{\tau})d\Gamma_I \\ & \quad - \int_{\Gamma_I}[w - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_3)]q_p(\cdot, -h/2)d\Gamma_I - \int_{\Gamma_I} p_p(\cdot, -h/2)(\boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{e}_3)d\Gamma_I = -\int_{\Gamma_I} f_4 q_p(\cdot, -h/2)d\Gamma_I. \end{aligned} \tag{7.55}$$

（a）此时，我们令

$$v = w - f_4 \in H_0(\omega_p). \tag{7.56}$$

现在，给定 $h \in H_0^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Gamma_I)$，令 $\tilde{h}$ 表示其零延拓。因此，$\tilde{h} \in H_0^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\partial\Omega p)$。由索伯列夫迹定理，$\exists\Theta(h) \in H'(\Omega p) \ni \Theta(h)|_{\omega_p^-} = h$ 且 $\Theta(h)|_{\omega_p^+} = 0.$。在式（7.55）中取 Σ-试验函数$\psi = [\mathbf{0}, 0, 0, \Theta(h)\ \mathbf{0}]^T$，可得

$$\langle k_p\partial_s p_p - [v - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_3], h\rangle_{\Gamma_I} = 0, \forall h \in H_0^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Gamma_I) \tag{7.57}$$

事实上，由稠密性可知 $\forall h \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_I)$。因此

$$k_p\partial_s p_p|_{\omega_p^-} = v - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_3). \tag{7.58}$$

(b) 给定 $g \in H_0^{\frac{1}{2}\pm\varepsilon}(\ \Gamma_I)$，那么其在 Ωf 上的零延拓 $\tilde{g}$ 属于 $H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\partial\Omega f)$。根据 Sobolev 迹定理 m

因此存在 $\phi \in H^1_{\#,*}(\Omega_f) \ni \phi|_{\Gamma_I} = \tilde{g}|_{\Gamma_I} = g.$。再取 $\psi = [\mathbf{0}, 0, 0, 0, \phi \boldsymbol{e}_3]^T$, 式 7.55 变为

$$-\langle \sigma_f \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3, g \rangle_{\Gamma_I} - \int_{\Gamma_I} p_p(\cdot, -h/2) g d\Gamma_I = 0,$$

对于给定的 $g \in H_0^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Gamma_I)$。因此,

$$-\sigma_f \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3|_{\Gamma_I} = p_p|_{\omega_p^-}. \tag{7.59}$$

(c) 取与 (b) 中相同的函数 $\phi \in H^1_{\#,\ *}(\Omega_f)$，并在 7.55 中取试验函数 $\psi = [\mathbf{0}, 0, 0, 0, \phi \boldsymbol{e}_j]^T$， j =1，2， 我们得到

$$-\sigma_f \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{\tau}|_{\Gamma_I} = \beta(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\tau})|_{\Gamma_I}. \tag{7.60}$$

(d) 最后，再次使用一个 $H_0^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Gamma_I)$ 函数 g 在 Ω 上的零延拓 $\tilde{g} \in H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\partial\Omega_f)$，索伯列夫迹定理保证 $\exists \Phi_b \in H^1_{\#,\ *}(\Omega_b) \ni \Phi_b|_{\Gamma_I} = g$。同样，该定理给出 $\Phi_p \in H^1(\Omega_p) \ni$

$$\Phi_p = \begin{cases} g & \text{on } \omega_p^+ \\ 0 & \text{on } \partial\Omega_p \setminus \omega_p^+. \end{cases}$$

随后在 7.55 中取 Σ- 试验函数 $\psi = [\mathbf{0}, \Phi_b, 0, \Phi_p, \mathbf{0}]^T$，我们得到

$$\langle k_b \partial_{\boldsymbol{e}_3} p_b - k_p \partial_s p_p, g \rangle_{\Gamma_I} = 0, \forall g \in H_0^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Gamma_I),$$

因此

$$k_b \partial_{\boldsymbol{e}_3} p_b = k_p \partial_s p_p|_{\omega_p^+}. \tag{7.61}$$

注意，将界面条件 7.59 应用于方程 7.33，便可得到所需结果:

$$\rho_b w + D\Delta^2_{\omega_p} w + \gamma w + \alpha_p \Delta_{\omega_p} \mathcal{K}(p_p) - F_p = \rho_p [f_5 + f_4] \text{ in } L^2(\omega_p)$$

其中，一如既往

$$F_p \equiv \sigma_b \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 - \sigma_f \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3.$$

最后，令

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\eta} - \mathbf{f}_1 \in \boldsymbol{H}^1_{\#,*}(\Omega_b).$$

至此，极大性论证完成。

8 非线性扩展：冯·卡门板

本节将证明，在存在标量 von K的情况下，动态问题 *´árm´án* 非线性项 [16]的温和解具有适定性。

$$f(w) = [w, v(w) + F_0]$$

它由 von K´árm´án 括号定义

$$[u, w] = \partial_x^2 u \partial_y^2 w + \partial_y^2 u \partial_x^2 w - 2\partial_{xy} u \partial_{xy} w$$

且 F_0 是一个给定函数，属于 $H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$。按照 [5], ，我们重述一些关于 von K´árm´án 非线性项的基本事实，这些事实取自 [16], ，并由此得到 f 从 $H_0^2(\omega_p) \to L^2(\omega_p)$的局部利普希茨连续性质。后者通过标准的扰动结果 [30], ，使得在存在非线性项的情况下可以延拓半群解。

为了获得这一核心性质，我们依赖于一项称为艾里尖锐正则性的现代性质

应力函数。至于　也就是说，可见于 [16, 推论 1.4.4]。首先，记其满足如下估计：

$$\|A_C^{-1}[u,w]\|_{W^{2,\infty}(\omega_p)} \le C\|u\|_{2,\omega_p}\|w\|_{2,\omega_p}, \tag{8.1}$$

其中， A_C 表示在 ω_p上满足固支边界条件的双调和算子。函数 $v = v(u)$称为艾里应力函数，它满足以下边值问题

$$\Delta^2 v + [u,u] = 0; \quad v|_{\partial\omega_p} = \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\omega_p} = 0.$$

结合前面的两项，由（8.1）可得

$$\|v(w)\|_{W^{2,\infty}(\omega_p)} \le C\|w\|^2_{2,\omega_p}.$$

由此可证明

$$\|[u_1, v(u_1)] - [u_2, v(u_2)]\|_{L^2(\omega_p)} \le C\Big(\|u_1\|^2_{H_0^2(\omega_p)} + \|u_2\|^2_{H_0^2(\omega_p)}\Big)\|u_1 - u_2\|_{H_0^2(\omega_p)} \tag{8.2}$$

（ [16, 推论 1.4。5]）因此，非线性项 $f(w) = [w, v\,w + F_0]$ 从 $H_0^2(\omega_p)$到$L^2(\omega_p)$是局部利普希茨连续的。

我们还要指出，von K´arm´an 非线性是势的。也就是说，存在一个与 f相关的势能泛函 Π 。对于 von K´arm´an 非线性，它的形式为

$$\Pi(w) = \frac{1}{4}\int_{\omega_p}\Big(|\Delta v(w)|^2 - 2w[w, F_0]\Big)dx,$$

并且具有如下性质： Π 是 $H_0^2(\omega_p)$上的 C^1-泛函，使得 f 是 Π:$-f(w) = \Pi'(w)$的Fr´echet导数。由此可得，对于光滑函数 w:

$$\frac{d}{dt}\Pi(w) = (\Pi'(w), w_t) = -(f(w), w_t)_{\omega_p}.$$

Moreover $\Pi(\cdot)$在 $H_0^2(\omega_p)$上局部有界，并且存在 $\eta < 1/2$ 和 $C \ge 0$ 使得tha t

$$\eta\|\Delta w\|^2_{\omega_p} + \Pi(w) + C \ge 0\,, \quad \forall\, w \in H_0^2(\omega_p)\,. \tag{8.3}$$

注 8.1. 我们注意到，例如在 [15, 17], 中讨论的Berger和Kirchhoff非线性项满足上述性质；它们：(i) 是局部利普希茨连续 $H_0^2(\omega_p) \to L^2(\omega_p)$，(ii) 具有满足上述性质的 C^1 原函数 Π。

我们现在讨论系统(3.2)–3.13，其中 F_p 如上所述包含非线性恢复力 $f(w)$。也就是说，我们在右端取p板非线性：

$$w_{tt} + D\Delta^2_{\omega_p} w + \gamma w + \alpha_p \Delta_{\omega_p}\mathcal{K}(p_p) = \sigma_b \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3|_{\omega_p} - \sigma_f \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3|_{\omega_p} + [w, v(w) + F_0] \ \text{ on } \ \Omega\times(0,\infty). \tag{8.4}$$

我们将证明在 von K´arm´an 非线性存在时，温和解 （按 [30] 的意义）的适定性。为此，我们定义一个非线性算子 $\mathcal{F}$： $\mathbf{X}\to\mathbf{X}$，其定义为

$$\mathcal{F}\big([\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}, p_b, w, v, p_p, \mathbf{u}]\big) = [\mathbf{0}, \mathbf{0}, 0, 0, f(w), 0, \mathbf{0}].$$

根据上文 f 的性质，该映射从 $\mathbf{X}\to\mathbf{X}$ 到该空间是局部利普希茨连续的，因此将其视为对柯西问题 (4.10) 的扰动，如 (5.1) 所示

定理 8.1。 (5.1) 中的非线性柯西问题按温和解的意义是适定的。也就是说：在 $t \in [0, t_{max})$ 上存在唯一的局部时间温和解 $\mathbf{y}(t)$ （它也是一个弱解）。此外，对于 $\mathbf{y}_0 \in D(\mathcal{A})$，相应的解是强解。

在任一情况下，当 $t_{max}(\mathbf{y}_0) < \infty$ 时，我们有 $||\mathbf{y}(t)||_{\mathbf{X}} \to \infty$ ，当 $t \nearrow t_{max}(y_0)$ 时。

证明。 利用定理 5.1 得到的流固耦合半群 $e^{\mathcal{A}t}$，可直接应用 [30,定理 1.4，第 185] 页，以及针对半群动力学的局部利普希茨扰动的局部版本 [30, 定理 1.6，第 189], 页。

□

为了保证全局解，即对于任意 $T>0$，(5.1) 在 $[0,T]$ 上的有效解，我们必须利用 Π 的“良好”结构。存在非线性（即 (8.4)）时，能量恒等式可通过标准方法，利用 Π 的性质（见 [15,17]）得到。考虑 $\mathbf{y}_0=[\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\zeta}_0,p_{b,0},w_0,v_0,p_{p,0},\mathbf{u}_0]^T\in\mathbf{X}$。与 (5.1) 对应的任意温和解都满足：

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}\big(\boldsymbol{\eta}(t),\boldsymbol{\zeta}(t),p_b(t),w_t(t),v(t),p_p(t),\mathbf{u}(t)\big)+\Pi(w(t))\\&=\mathcal{E}\big(\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\zeta}_0,p_{b,0},w_0,v_0,p_{p,0},\mathbf{u}_0\big)+\Pi(w(0))\end{aligned}\tag{8.5}$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\left[\beta\int_{\Gamma_I}|\mathbf{u}\cdot\tau|^2\,d\Gamma_I+\left\|k_b^{\frac{1}{2}}\nabla p_b\right\|_{\Omega_b}^2+\left\|k_p^{\frac{1}{2}}\partial_s p_p\right\|_{\Omega_p}^2+\mu_f\left\|\nabla\mathbf{u}\right\|_{\Omega_f}^2\right]d\tau.\tag{8.6}$$

由此先验关系、格朗沃尔不等式以及 (8.3) 中对 Π 的界可知，先前得到的局部温和解在任意区间 $[0,T]$ 上都必然有界；由此立即得到下文所述的最终（非线性）适定性定理。

定理 8.2 （定理 5.2 的重述。）。 对于任意 $T>0$，柯西问题 *(5.1)* 在 $\mathbf{X}$ 上对所有 $[0,T]$ 都是半群适定的。也就是说，考虑到非线性板方程 (8.4)，(3.2)–(3.13) 中的偏微分方程问题，对于初始数据 $\mathbf{y}_0\in\mathbf{X}$，在温和解意义下是适定的。

此外，我们还得到了关于解的全局时间 估计：

$$\sup_{t\in[0,\infty)}\ \mathcal{E}(\boldsymbol{\eta}(t),\boldsymbol{\zeta}(t),p_b(t),w_t(t),v(t),p_p(t),\mathbf{u}(t))\le\mathbf{C}(\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\zeta}_0,p_{b,0},w_0,v_0,p_{p,0},\mathbf{u}_0,F_0).\tag{8.7}$$

9 未来工作

本文给出的主要结果补充了关于 [6,8] 中 Biot-Stokes 渗流的半群解以及 [10] 中弱解的相关结果。具体而言，我们为以孔弹性板为中间界面的多层过滤提供了算子理论框架。由此，我们得以证明，相应的动力学算子生成一个强连续半群，从而在惯性区间和非退化区间内给出强解和半群（温和）解。借助该半群，我们能够通过扰动理论将大挠度非线性纳入并适配于解框架。

在本节简短讨论中，我们尝试从当前已可开展的未来工作角度阐释本研究结果，并探讨本研究在其他多物理场和／或孔弹性研究平台中的用途。

- 首先，借助半群框架，我们可以进一步研究解的正则性和稳定性。前者可通过运用椭圆正则性结果（在适用时）获得，从而明确强解情形下耦合动力学的正则性类别。基于这些信息，我们可以考虑涉及体域孔隙弹性以及流体非线性的非线性扩展（可能采用不动点方法，参见 [11–13]）。

  关于稳定性，本文所构造的预解问题使我们得以开展谱分析，以确定问题中的耗散和耦合是否足以实现渐近稳定性，甚至更强的稳定性概念。虽然在这些耦合情形下，一致稳定性不太可能成立——参见 [3, 4]——但我们认为，问题中的耗散本身足够强，能够带来一定程度的衰减。

  最后，随着 [6], 中建立的 Biot-Stokes 过滤系统相关结果，两种过滤动力学——Biot-Stokes 和多层系统——的上述两个问题都可以进行比较研究。由此，可以从孔弹性板作为界面的角度，研究其是否会提高或降低正则性，以及是否会增强或削弱稳定性。

• 我们坦承，此处采用环面区域是出于数学上的便利。尤其是，与边界三重点、角点和界面边相关的技术问题十分棘手。然而，一项即将发表的研究将利用有关三维耦合系统的若干最新发现 [7] ，这应能使高阶界面迹得以解析和定义；迄今为止，这在技术上一直难以实现。核心问题围绕压力的解析，以及如何在流体区域中定义一个在极低正则性下仍适用的椭圆问题。

我们认为，本文的结果在近期可以适当地改写为（强解和半群）解，同时需注意边界分量不分离所引入的正则性修正，以及即使对于强解，也需要在广义意义上解释某些高阶迹。

• 尽管本文工作处理的是线性多孔板（如 [27] 中所推导并在 [10,20], 中所研究），仍有一些研究群体对非线性扩展感兴趣。特别是，对于运动区域（如流固相互作用文献中的ˇCaniˊc等人），界面不应以静态方式处理。因此，有必要采用大挠度板模型。另一方面，多孔板的推导（利用标度与均匀化）本质上应包含非线性挠度区间中非线性灌注的可能性——因为这些动力学必然是耦合的。

本文证明了能够在板中纳入结构非线性，而不考虑运动界面或多孔板的内部扩散。我们注意到，援引网状板 的文献或许也很容易允许板非线性，但不包含灌注动力学。因此，我们认为扩展本文结果有两条自然途径：（1）推导并分析允许在变形区域上进行灌注的大挠度模型；（2）将此类模型纳入运动区域框架（如 [22–24]），其中多孔板的大挠度确实决定界面，并由此决定随时间演化的流体区域与体多孔弹性区域。

Babuška-Brezzi 引理 [21]

定理 A.1. *Babuška-Brezzi* 设 Σ 和 V 为实*Hilbert*空间。设 $a\colon \Sigma\times\Sigma\to\mathbb{R}$ 和 $b\colon \Sigma\times V\to\mathbb{R}$ 为连续双线性型。设

$$Z=\{\sigma\in\Sigma \mid b(\sigma,v)=0,\forall v\in V\}.$$

假设 a 是*Z*-椭圆的，且 b 满足*Babuška-Brezzi*条件：存在 $\beta>0$ 使得 at

$$\sup_{\tau\in\Sigma\setminus\{0\}}\frac{b(\tau,v)}{\|\tau\|_\Sigma}\geq\beta\|v\|_V,\forall v\in V.$$

那么，给定 $\kappa\in\Sigma$ 和 $l\in V$，存在唯一的$(\sigma,u)\in\Sigma\times V$使得

$$\begin{aligned} a(\sigma,\tau)+b(\tau,u)&=(\kappa,\tau)_\Sigma && \forall\tau\in\Sigma\\ b(\sigma,v)&=(l,v)_V && \forall v\in V. \end{aligned}$$

参考文献

[1] Ilona Ambartsumyan、Eldar Khattatov、Ivan Yotov和Paolo Zunino。Stokes–Biot流体-多孔弹性结构相互作用模型的Lagrange乘子法。 *Numerische Mathematik*，140(2):513–553，2018。

[2] G. Avalos和M. Dvorak。耦合流固相互作用的一种新极大性论证及其对无散有限元方法的启示。 *Applicationes Mathematicae*, (35):259–280，2008。

[3] G. Avalos、P.G. Geredeli 与 B. Muha。多层热-波-波系统的适定性、谱分析与渐近稳定性。 *Journal of Differential Equations*, 269(9):7129–7156，2020年。

[4] G. Avalos 与 R. Triggiani。流固相互作用中出现的耦合偏微分方程组。I. 显式半群生成元及其谱性质。 *Fluids and waves*, *Contemp. Math*, (440):15–54, 2007年。[5] George Avalos、Pelin G. Geredeli 与 Justin T. Webster。具有弹性边界的线性化可压缩流体的半群适定性。 *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, 23(3):1267–1295, 2018年。[6] George Avalos、Elena Gurvich 与 Justin T. Webster。基于半群方法的流体-多孔弹性结构相互作用的弱解与强解。 *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 48(4):4057–4089, 2025年。[7] George Avalos 与 Yuhao Mu。对流体-结构偏微分方程相互作用中压力消去的再考察及其启示。 *arXiv preprint arXiv:2511.06615*, 2025年。[8] George Avalos 与 Justin T. Webster。比奥–斯托克斯相互作用的弱解唯一性。 *Pure and Applied Analysis* 7 4 1111 1139, 2025 , ( ): – 。[9] C. Bernardi 、 M. Dauge 与 Y. Maday。 *Polynomials in the Sobolev World*。https://hal.science/hal-00153795v1, 2007年。[10] L. Bociu、S. Canic、B. Muha 与 J.T. Webster。与斯托克斯流相互作用的多层多孔弹性。 *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 53 6 6243 6279, 2021 , ( ): – 。[11] L. Bociu 、 G. Guidoboni 、 R. Sacco 与 J.T. Webster。非线性多孔弹性与多孔黏弹性模型的分析。 *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 222:1445–1519, 2016年。[12] L. Bociu、B. Muha 与 J.T. Webster。含不可压缩组分的非线性多孔弹性中的弱解。 *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 67 103563 2022 , ( ), 。[13] L. Bociu 与 J.T. Webster。非线性准静态多孔弹性。 *Journal of Differential Equations*, 296:242–278, 2021年。[14] A. Buffa 与 G. Geymonat。关于 $w^{2\,p}\ \omega$ $\mathbb{R}^3$ *C. R. Acad. Sci. Paris Serie* 中函数的迹，( )，适用于 中的利普希茨区域。 , , ( ): – 。[15] Igor Chueshov。与线性化可压缩黏性流体相互作用的非线性弹性板的动力学。 *Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications* 95 650 665, 2014 , , : – 。[16] Igor Chueshov 与 Irena Lasiecka。 *Von Karman evolution equations: Well-posedness and long time dynamics*。施普林格，2010年。[17] Igor Chueshov、Irena Lasiecka 与 Justin T. Webster。超音速流-板相互作用中的演化半群。 *Journal of Differential Equations* 254 4 1741 1773, 2013 , ( ): – 。[18] Olivier Coussy。 *Poromechanics*。约翰 · 威立父子出版公司，2004 年。[19] G. Galdi。 *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations: Steady-state problems*。施普林格科学与商业媒体，2011年。[20] E. Gurvich 与 J.T. Webster。多孔弹性板系统的弱解。 *Applicable Analysis*, 101(5):1617–1636, 2022年。[21] S. Kesavan。 *Topics in functional analysis and applications*。新时代国际出版社，金奈，第3版，2019年。[22] Jeffrey Kuan 与 Suncica Canic。具有非线性耦合的流体-多孔黏弹性结构相互作用问题。 *Jorunal de Mathematiques Pures and Appliques* 2024 , 。[23] Jeffrey Kuan、Sunˇcica ˇCani´c 与 Boris Muha。含多孔弹性介质的正则化移动边界流固相互作用问题的弱解存在性。 *Comptes Rendus. Mécanique*, 351(S1):505–534, 2023年。[24] Jeffrey Kuan、Sunˇcica ˇCani´c 与 Boris Muha。针对具有非线性几何耦合的流体-多孔弹性结构相互作用问题的正则化界面方法。 *arXiv preprint arXiv:2508.18065*, 2025年。[25] Tongtong Li 与 Ivan Yotov。流体-多孔弹性结构相互作用的混合弹性公式。 *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 56 1 1 40, 2022 , ( ): – 。[26] J.-L. Lions 与 E. Magenes。 *Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Volume I*。施普林格出版社，纽约，1972年。[27] A. Marciniak-Czochra 与 A. Mikeli´c。固支比奥–基尔霍夫–洛夫多孔弹性板方程的严格推导。 *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 215(3):1035–1062, 2015年。[28] W. McLean。 *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*。剑桥出版社，纽约，2000年。[29] B. Muha 与 J.T. Webster。运动细丝中具有灌注的动态多孔弹性板。 *preprint*, 2026年。[30] A. Pazy。 *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*。施普林格，纽约，1983年。[31] R.E. Showalter。多孔弹性介质中的扩散。 *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 251(1):310–340, 2000年。[32] R.E. Showalter。 *Control theory of partial differential equations*, 章：与斯托克斯流耦合的多孔弹性渗流，第243–256页。查普曼与霍尔/CRC，2005年。