行波调制波导中的光放大与衰减

M. SUMETSKY

阿斯顿光子技术研究所，阿斯顿大学，伯明翰 *B4 7ET*，英国*m.sumetsky@aston.ac.uk*

摘要： 在光波导中传播的光可通过与行进声波相互作用，或与介电常数的射频调制相互作用，从而获得或损失功率。本文通过研究光波与一种弱行波介电常数微扰之间的相互作用，对这一传播过程进行建模。该微扰的频率远低于光频率，且其振幅沿传播方向呈指数衰减。本文分析了四种调制情形：瞬时调制、同步调制、斯托克斯共振和反斯托克斯共振。对于这些情形，获得了载波和边带的透射功率与反射功率，以及总增益功率和总损耗功率的简单表达式。尽管对于实际的调制和波导参数而言，可实现的总增益仍然较小，但反斯托克斯共振被确定为最有希望观测到调制诱导光放大的条件。

1. 引言

布里渊散射 [1, 2] 和时空介电常数调制 [3-5] 代表了生成边带和实现光放大的两种方式，二者都基于光波与非稳态介电常数微扰之间的能量交换。在布里渊放大中，强光泵浦通过电致伸缩激发相干声波。该声波形成介电常数的行波调制，从而实现光的窄带放大或衰减，以及频移边带的生成 [1, 2]。

相比之下，当时间依赖的介电常数微扰由外部源（如叉指换能器（IDT）[6, 7] 和射频电容器 [8, 9], ）诱导时，调制可以独立于光场维持。这种调制直接耦合频率和波数相隔的光学模式，从而实现放大和衰减，以及频率边带和光频梳生成 [3-5]。

时变调制电磁场的系统理论最早于20th 世纪中叶在微波和导波电子学领域得到发展，其中包括纯时间调制和行波调制 [10-23]。这些研究奠定了行波调制理论的基础，该理论基于耦合的 Floquet谐波、色散方程和相位匹配条件。此类研究中通常考虑的最简单波动方程形式如下：

$$\frac{\partial^2 \left(\varepsilon E\right)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0 . \tag{1}$$

这里， $E(x,t)$表示电磁场， c 是光速，而介电常数$\varepsilon(x,t)$对时间t 和坐标x 的依赖呈行波形式，其频率为ω_p ，传播常数为k_p,

$$\varepsilon(x,t) = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon(x,t), \quad \Delta\varepsilon(x,t) = \Delta\varepsilon_p \cos\left(k_p x - \omega_p t\right). \tag{2}$$

在参考文献 [16] 中，通过对调制幅度 $\Delta\varepsilon_p \ll \varepsilon_0$ 进行微扰，分析了方程 (1) 的解；而介电常数的调制部分 $\Delta\varepsilon(x,t)$ 则由方程 (2) 定义于区域 $0 < x < L$ 内，并假定在该区域之外为零。频率为 ω_0 、传播常数为 k_0 的相干波从左侧入射，在 $x < 0$ 处到达调制区域，其表达式设为

$$E^{(0)}(x,t)=\exp\left(ik_0x-i\omega_0t\right). \tag{3}$$

讨论了共振传输和反射的三个特殊情形。前两种分别是 斯托克斯 和 反斯托克斯共振，分别对应方程中的符号 + 和 –

$$k_p=k_p^{\pm}=\left(\pm2-\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)k_0\,. \tag{4}$$

对于静止情形，$\omega_p=0$，公式（2）描述的是常规光栅，而公式（4）对应于布拉格共振。参考文献 [16] 考虑的第三种情形是同步共振，此时调制的相速度 v_p 等于入射波的相速度 v_0:

$$v_p=v_0,\quad v_0=\frac{\omega_0}{k_0},\quad v_p=\frac{\omega_p}{k_p}\ . \tag{5}$$

参考文献 [17] 的作者表明，$\Delta\varepsilon_p$ 中的幂级数展开 在同步共振附近发散，因此，参考文献 [16] 提出的微扰理论无法应用。另一种做法是，参考文献 [14, 15, 23] 的作者采用 WKB（程函）近似求解该问题。这种近似假设调制波的频率和传播常数远小于输入波的频率和传播常数，$\omega_p\ll\omega_0$ 和 $k_p\ll k_0$。参考文献 [14, 15, 23] 中提出的方法不基于对 $\Delta\varepsilon_p$ 的微扰，因此适用于公式（5）定义的同步情形。由此可知，在同步机制下，输入波与行波相互作用时，输入波功率可以显著放大。研究还表明，对于磁导率和介电常数随时间和空间成比例变化、即具有恒定阻抗的系统，电磁波方程可以精确求解，并且公式（3）所示的输入波只能产生正向传播波 [10, 14]。

近年来，所述时空概念在微波理论[3, 5] 和光子学[4]中都得到了重新审视和进一步发展。研究人员详细考察了时空调制波导中的传输非互易性、光学频率梳生成和放大效应[24-32]。研究人员还提出并分析了介电常数由公式（2）定义的波动方程的守恒定律，以及支配时空谐波间重新分配的通量不变量[33-35]。

慢行波调制这一工作区间尤其受到关注，$\omega_p\ll\omega_0$ [24- 32]。此前关于低频调制对电磁波的变换和放大的研究成果[10-23] 得到了推进，并应用于光传播[29- 32]。然而，相关分析主要针对参数满足程函条件$\omega_p\ll\omega_0$ 和$k_p\ll k_0$ [32] 的系统，或针对具有恒定阻抗的系统[30], ；而在$k_p\sim k_0$ 时的斯托克斯与反斯托克斯共振传播这一重要情形（见公式（4））尚未得到充分研究。

据作者所知，目前对波动方程（式 (1)）的解的研究，主要针对在有限或无限区域内空间均匀的行波调制，其定义见式 (2)。对于这一模型，通过对 $\Delta\varepsilon_p/\varepsilon_0$ 进行微扰求解式 (1)，会发现在同步、斯托克斯和反斯托克斯共振附近解发散 [17, 19]。然而，实际中，表面声波和体声行波并不均匀。例如，由叉指换能器沿光波导激发的声波会随波导长度呈指数衰减，因此很难实现空间均匀。由此，研究调制非均匀性对光传播的影响颇有意义。

在此，我们研究光在受空间衰减行波调制的光波导中的传播。除了具有实际意义（其行为类似于由叉指换能器产生的声波）之外，引入行波衰减还使我们能够避免发散问题 [17, 19, 28] ，并推导出简单且物理意义明确的

载波和边带透射共振与反射共振的表达式。下文将在$\Delta\varepsilon_p/\varepsilon_0$ 中，利用二阶微扰理论推导瞬时调制、同步调制、斯托克斯调制和反斯托克斯调制，以及相应的总功率增益和损耗的表达式。特别是，我们给出了光与声波相互作用时可能产生的总放大效应的现实估算。通常，这种效应较小。然而，当调制长度足够大时，反斯托克斯共振下的总放大效应可能明显大于斯托克斯共振、同步调制或瞬时调制下的效应。

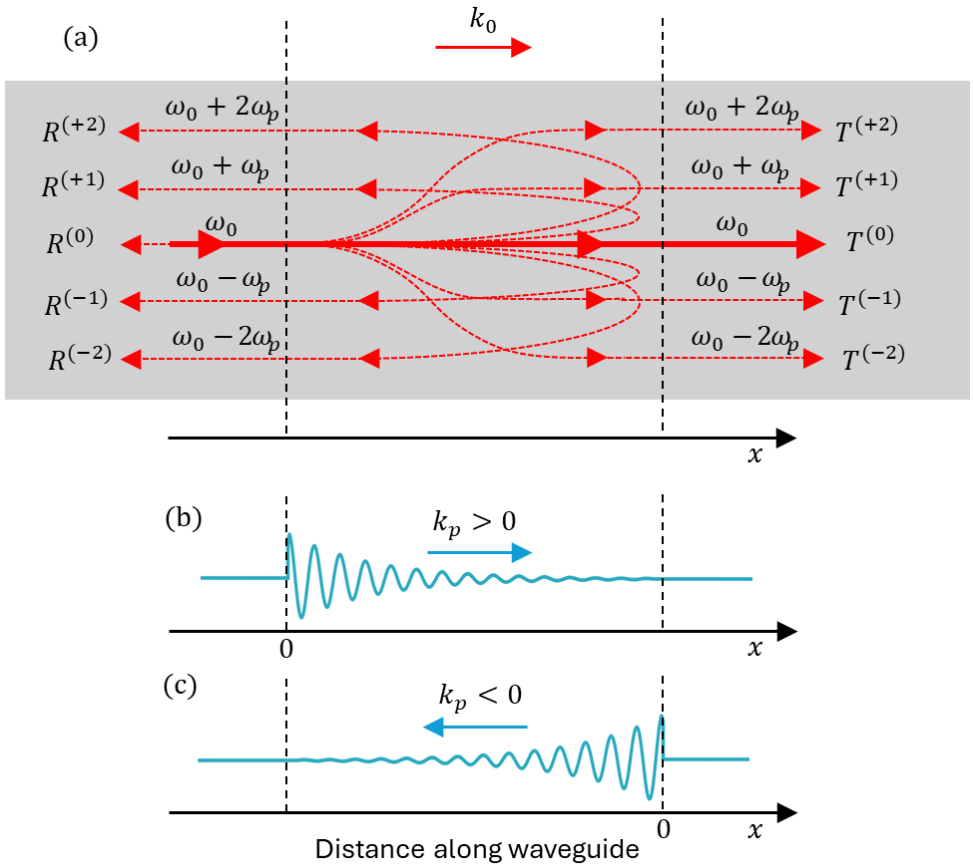


图 1. 空间衰减行波调制的光波导中光传播示意图。(a) 支持频率为 ω_0 的光学载波和频率为 $\omega_0 \pm \omega_p$ 和 $\omega_0 \pm 2\omega_p$ 的边带波的波导。(b) 与输入光波同向传播的行波（$k_p/k_0 > 0$）。与输入光波反向传播的行波（$k_p/k_0 < 0$）。

2. 一般形式

光在光子波导中的传播由波动方程（式 (1)）描述。与式 (2) 定义的空间均匀行波介电常数调制不同，我们将其对时间 t 和沿波导坐标 x 的依赖关系设为

$$\varepsilon(x,t) = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon(x,t), \quad \Delta\varepsilon(x,t) = \Delta\varepsilon_p \exp\left(-\alpha_p x\right)\cos\left(k_p x - \omega_p t\right)H(x), \tag{6}$$

其中 $H(x)$ 为赫维赛德函数，α_p 决定行波的空间衰减。我们假设由式 (3) 定义的相干光波从左侧 ($x < 0$) 入射到调制区域。下文所考虑的波导，其

支持频率为 ω_0 的光学载波以及频率为 $\omega_0 \pm$ ω_p $\omega_0 \pm 2\omega_p$ 1 k_p 和 的边带波，如图 (a) 所示。相对于输入光波同向传播（ / 0 $k_0 >$ ）和反向传播（$k_p/k_0 < 0$）的行波分别如图 1(b) 和 1(c) 所示。式 (6) 中衰减的空间分布类似于表面声波和体声波的衰减，尤其是由叉指换能器 [7, 8] 产生的声波。如下所示，指数衰减的存在使我们能够将微扰理论直接应用于式 (1)，其中时空相关介电常数由式 (6) 定义，并避免同步共振以及斯托克斯共振和反斯托克斯共振 [17, 19, 28] 处的奇点和发散问题。特别地，我们并非将解展开为一系列常规时空谐波 [17, 19, 28], , 而是将其展开为在空间中衰减的谐波。

由于我们关注传播常数 k_0 和 k_p之间的任意关系，尤其是 $k_0 \sim k_p$的情况，因此无法应用程函理论和传统的耦合波方程理论来求解波动方程（式 (1)）。我们改为按 $\Delta\varepsilon/\varepsilon_0$ 的幂次展开求解该方程：

$$E(x,t)\big|_{x>0} = E^{(0)}(x,t) + E^{(1)}(x,t) + E^{(2)}(x,t) + \ldots + \sum_{\pm} \Phi^{(\pm)}\left(\omega_0 t \pm k_0 x\right). \qquad (7)$$

这里， $\Phi^{(\pm)}(\omega_0 t)$ 是幅值较小的任意函数， $\left\|\Phi^{(\pm)}(\omega_0 t)\right\| \ll 1$ ，函数 $E^{(m)}(x,t)$ 则由递推方程求得：

$$\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E^{(m)}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 E^{(m)}}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \left(\Delta\varepsilon\, E^{(m-1)}\right)}{\partial t^2}, \qquad (8)$$

其中，零阶解 $E^{(0)}(x,t)$ 与式 (3) 定义的入射波一致。虽然 $E^{(0)}(x,t) \sim 1$ 且随时间按 $\exp(-i\omega_0 t)$ 变化，但式 (7) 中的项 $E^{(m)}(x,t)$ 与 $(\Delta\varepsilon_p/\varepsilon_0)^m$ 成正比，随 x 增大而衰减，并包含随时间按 $\exp\left\|-i(\omega_0 + q\omega_p)t\right\|$ 变化的谐波，$q = -m,\ -m+1,\ \ldots\ldots,\ m$：

$$E^{(m)}(x,t) = \left(\frac{\Delta\varepsilon_p}{\varepsilon_0}\right)^m \exp\left(ik_0 x - i\omega_0 t - m\cdot\alpha x\right) \sum_{q=-m}^{m} \left(U_q^{(m)} \exp\left(iq\cdot\left(k_p x - \omega_p t\right)\right)\right). \qquad (9)$$

参数 $U_q^{(m)}$ 为常数。将式 (9) 代入式 (8)，可将后者化为一个常微分方程；通过解析求解该方程，可以确定 $U_q^{(m)}$。

由于在 $x \gg \alpha_p^{-1}$ 处右侧不存在入射波，因此将式 (7) 中的函数 $\Phi^{(-)}(t)$ 在 $x > 0$ 处设为零，并假设该区域内的函数 $\Phi^{(+)}(t)$ 是出射波之和：

$$\Phi^{(+)}(x,t) = \sum_m T^{(m)} \exp\left(i\left(1 + m\cdot\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)\left(k_0 x - \omega_0 t\right)\right). \qquad (9)$$

这里，部分（边带）透射系数 $T^{(m)}$ 与 $(\Delta\varepsilon_p/\varepsilon_0)^{|m|}$ 成正比，并根据解及其导数在 $x = 0$ 处连续的条件，以级数 $T^{(m)} = \sum ((\Delta\varepsilon_p/\varepsilon_0)^{|m|} T_q^{(m)})_{q=|m|}^{\infty}$ 确定。类似地，在 $x < 0$ 处，我们令 $\Phi^{(+)}(t) = 0$ ，并

$$\Phi^{(-)}(x,t) = \sum_m R^{(m)} \exp\left(i\left(1 + m\cdot\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)\left(-k_0 x - \omega_0 t\right)\right), \qquad (10)$$

其中，边带反射系数 $R^{(m)}$ 与 $(\Delta\varepsilon_p/\varepsilon_0)^m$ 成正比，并可通过 $x = 0$ 处相同的连续性条件确定。

由于光波与行波相互作用，光波的功率可能增加或减小。因此，总输出功率增益或损耗，其定义为

$$\Delta P^{(tot)} = \sum_m \left(\left|T^{(m)}\right|^2 + \left|R^{(m)}\right|^2\right) - 1, \qquad (11)$$

可以为正值，表示功率增益；也可以为负值，表示功率损耗。下面，我们使用上述方程确定 $\Delta P^{(tot)}$ ，以及载波和边带的透射功率与反射功率 $|T^{(0)}|^2$、 $|T^{(\pm1)}|^2$、 $|R^{(0)}|^2$ 和 $|R^{(\pm1)}|^2$ ，精确到关于$\Delta\varepsilon_p/\varepsilon_0$的二阶项。由于$T^{(\pm1)}$、 $R^{(0)}$和$R^{(\pm1)}$ 是$\Delta\varepsilon_p/\varepsilon_0$的一阶项，因此只需将它们计算到一阶，即可确定相应的二阶功率。相比之下，$T^{(0)}$ 应计算到$\Delta\varepsilon_p/\varepsilon_0$的二阶项。

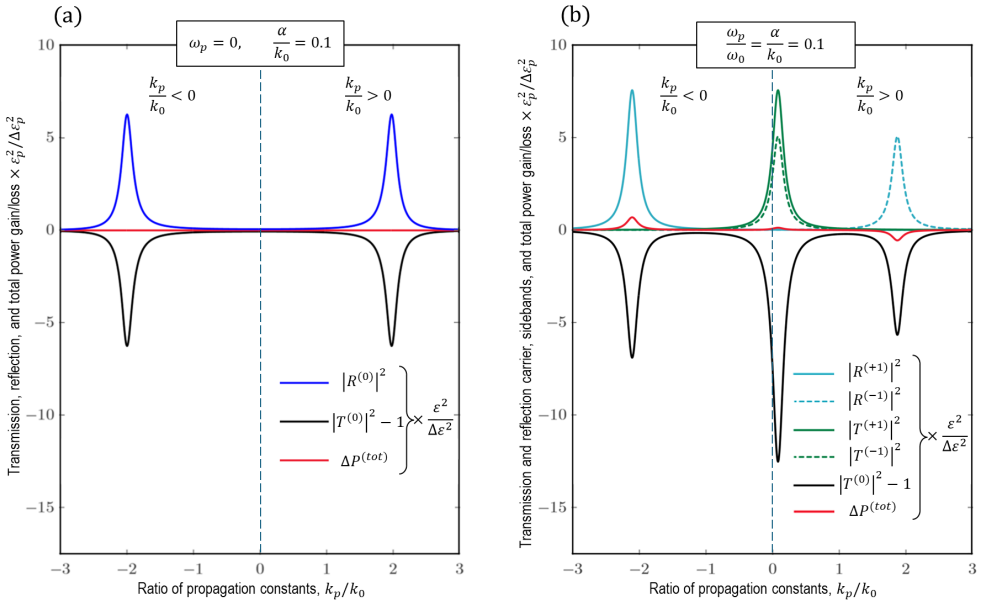


图 2 k_p α_p $k_0 =$. (a) 静态光栅的归一化透射和反射功率随$/k_0$ 的变化，适用于/.. (b) 载波和边带的归一化透射和反射功率，以及总功率增益随k_p/k_0 的变化；此时由行波调制，相对参数为$\omega_p/\omega_0 = \alpha_p/k_0 = 0$。1.

0 1

3. 静态调制

作为比较，我们首先考虑$\omega_p = 0$时的静态调制（即规则空间光栅）。此时，对于$|m| > 0$, 透射和反射系数为$T_{stat}^{(m)} = R_{stat}^{(m)} = 0$ ，并且$P_{stat}^{(tot)} = |T_{stat}^{(0)}|^2 + |R_{stat}^{(0)}|^2 = 1$。特别地，关于$\Delta\varepsilon_p/\varepsilon_0$的二阶微扰为：

$$\left|R_{stat}^{(0)}\right|^2 = 1 - \left|T_{stat}^{(0)}\right|^2 = \left(\frac{\Delta\varepsilon_p}{2\varepsilon_0}\right)^2 \frac{k_0^2\left(4k_0^2 + \alpha_p^2\right)}{\left(\left(2k_0 - k_p\right)^2 + \alpha_p^2\right)\left(\left(2k_0 + k_p\right)^2 + \alpha_p^2\right)}, \tag{12}$$

根据该方程，归一化反射功率 $|R_{stat}^{(0)}\Delta\varepsilon_p/\varepsilon_0|^2$ 可完全用无量纲参数 α_p/k_0 和 k_p/k_0表示。当 [36]时，它在众所周知的布拉格共振处达到最大值

$$k_p = k_p^{\pm} = \pm 2k_0 . \tag{13}$$

作为一个典型示例，图2(a)展示了 $|R_{stat}^{(0)}\Delta\varepsilon_p/\varepsilon_0|^2$ 随 k_p/k_0 变化的曲线，其中 $\alpha_p/k_0 = 0.1$。表1列出了 $k_p = 0$ 时布拉格共振处以及不存在光栅时的透射功率和反射功率表达式。在后一种情况下，反射的出现以及透射偏离 1，是由 $x = 0$ 处介电常数的不连续性造成的。

表1. 布拉格共振时静态光栅（$\omega_p = 0$）的透射功率和反射功率，以及不存在光栅时的透射功率和反射功率（$k_p = \pm k_0$和$k_p = 0$）。

Reflection and transmission gain/loss	Backward Bragg resonance, $k_p = \pm k_0$	No grating, $k_p = 0$
$\lvert R\rvert^2$	$\frac{1}{16}\left(\frac{k_0}{\alpha_p}\right)^2\left(\frac{\Delta\varepsilon_p}{\varepsilon_0}\right)^2$	$\frac{1}{16}\left(\frac{\Delta\varepsilon_p}{\varepsilon_0}\right)^2$
$\lvert T\rvert^2 - 1$	$-\frac{1}{16}\left(\frac{k_0}{\alpha_p}\right)^2\left(\frac{\Delta\varepsilon_p}{\varepsilon_0}\right)^2$	$-\frac{1}{16}\left(\frac{\Delta\varepsilon_p}{\varepsilon_0}\right)^2$
Total power gain/loss $\Delta P^{(tot)}$	0	0

4. 行波调制

在调制频率非零，即 $\omega_p \neq 0$ 时，载波和一阶边带的透射振幅与反射振幅按 $\Delta\varepsilon_p/\varepsilon_0$ 的一阶计算如下：

$$R^{(0)} = 0\,, \tag{14}$$

$$T^{(\pm 1)} = \frac{\Delta\varepsilon_p}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{k_0\left(\omega_0 \pm \omega_p\right)}{\pm\left(k_p\omega_0 - k_0\omega_p\right) + i\alpha_p\omega_0}\,, \tag{15}$$

$$R^{(\pm 1)} = \frac{\Delta\varepsilon_p}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{k_0\left(\omega_0 \pm \omega_p\right)}{2k_0\omega_0 \pm k_p\omega_0 \pm k_0\omega_p + i\alpha_p\omega_0}\,, \tag{16}$$

由此可立即计算出透射功率和反射功率 $|T^{(\pm 1)}|^2$ 和 $|R^{(\pm 1)}|^2$。载波透射功率 $|T^{(0)}|^2$以及总功率增益/损耗 $\Delta P^{(tot)}$ 的表达式较为繁复，是借助符号计算工具 Mathcad 得出的。为简洁起见，我们引入无量纲参数

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_p}{\omega_0},\quad \bar{k} = \frac{k_p}{k_0},\quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha_p}{k_0}. \tag{17}$$

于是得到：

$$\begin{aligned} \left|T^{(0)}\right|^2 &= 1 + \left(\frac{\Delta\varepsilon_p}{\varepsilon_0}\right)^2 \frac{A(\bar{\omega},\bar{k},\bar{\alpha})}{8D(\bar{\omega},\bar{k},\bar{\alpha})}, \\ \Delta P^{(tot)} &= \left(\frac{\Delta\varepsilon_p}{\varepsilon_0}\right)^2 \frac{B(\bar{\omega},\bar{k},\bar{\alpha})}{4D(\bar{\omega},\bar{k},\bar{\alpha})}, \end{aligned} \tag{18}$$

其中

$$\begin{aligned} A(\bar{\omega},\bar{k},\bar{\alpha}) &= -\left(\bar{\alpha}^4 + 6\bar{\alpha}^2 + 8 + (2\bar{\alpha}^2 - 2)\bar{k}^2 + \bar{k}^4\right) + 12\bar{k}\bar{\omega} + (2 - 4\bar{k}^2)\bar{\omega}^2 - 4\bar{k}\bar{\omega}^3 + \bar{\omega}^4 \\ B(\bar{\omega},\bar{k},\bar{\alpha}) &= \bar{\omega}\Big[-2\bar{k}\left(\bar{\alpha}^2 + \bar{k}^2\right) + \left((\bar{\alpha}^2 + \bar{k}^2)^2 + 4\bar{\alpha}^2 + 8\right)\bar{\omega} + \\ &\quad 2\bar{k}\left(\bar{\alpha}^2 + \bar{k}^2 - 5\right)\bar{\omega}^2 + 2\left(\bar{\alpha}^2 + \bar{k}^2 - 2\right)\bar{\omega}^3 + 2\bar{k}\bar{\omega}^4 + \bar{\omega}^5\Big] \\ D(\bar{\omega},\bar{k},\bar{\alpha}) &= \left(\bar{\alpha}^2 + \bar{k}^2 - 2\bar{k}\bar{\omega} + \bar{\omega}^2\right)\left((2 - \bar{k})^2 + \bar{\alpha}^2 + (2\bar{k} - 4)\bar{\omega} + \bar{\omega}^2\right)\times \\ &\quad \left((2 + \bar{k})^2 + \bar{\alpha}^2 + (2\bar{k} - 4)\bar{\omega} + \bar{\omega}^2\right) \end{aligned} \tag{19}$$

我们注意到，虽然我们主要关注慢调制频率 $\omega\!\!\!

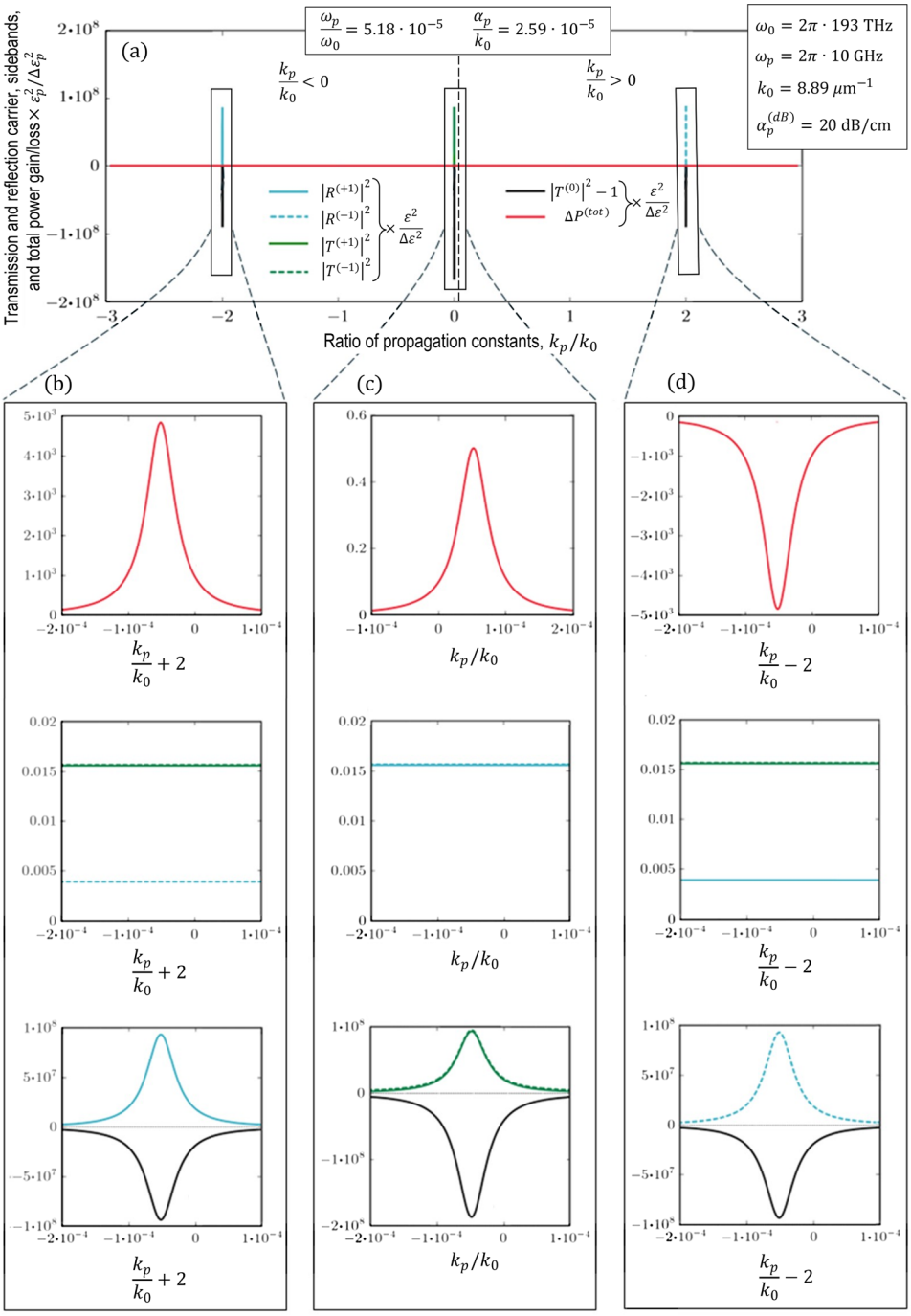


图 3. (a) 载波和边带的归一化透射与反射功率，以及总功率增益/损耗随 k_p/k_0 的变化；光波和调制参数为 $\omega_0 = 2\pi \cdot 193$ THz、$\omega_p = 2\pi \cdot 10$ GHz、ε_0 =4.84（铌酸锂）、$k_0 = \omega_0 \varepsilon_0^{1/2}/c = 8.89\ \mu\text{m}^{-1}$ 和 $\alpha_p = 230\ \text{m}^{-1}$，对应的调制功率衰减为 $\alpha_p^{(dB)} = 20$ dB/cm（以 dB 表示）。(b)、(c) 和 (d) 分别为 (a) 中曲线在反斯托克斯、同步和斯托克斯共振附近的局部放大图。

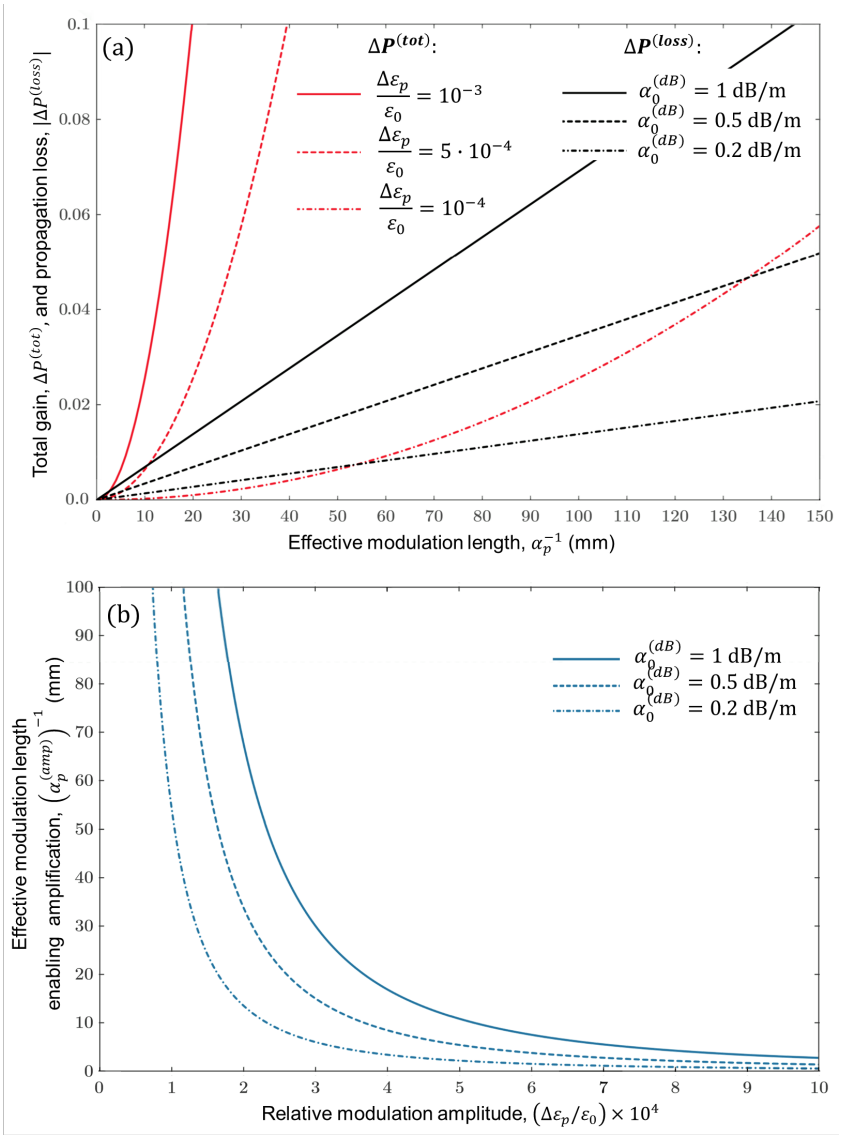


图4。(a) 在反斯托克斯共振处，调制引起的总增益 $\Delta P^{(tot)}$（红色实线、虚线和点划线）与波导长度为 $3\alpha_p^{-1}$ 时的材料损耗引起的衰减 $\Delta P^{(loss)}$ 的比较，二者均随有效调制长度 α_p^{-1} 变化；比较针对不同的相对介电常数调制幅度 $\Delta\varepsilon_p/\varepsilon_0$ 和材料衰减 $\alpha_0^{(dB)}$。(b) 对不同材料衰减 $\alpha_0^{(dB)}$，实现光放大的有效调制长度随相对调制幅度 $\Delta\varepsilon_p/\varepsilon_0$ 的变化。

若光波相速度 v_0 与行波相速度 v_p 相同，则两个透射边带功率 $|T^{(\pm1)}|^2$ （图2(b)中的绿色实线和虚线）都会出现同步共振（公式（5）和表2）。与斯托克斯共振和反斯托克斯共振类似，在满足公式（4）的条件下，载波功率 $|T^{(0)}|^2$ 出现负共振，而 $|T^{(+1)}|^2$ 和 $|T^{(-1)}|^2$ 的共振值为正，且等于 $\left(\omega_p^2/\omega_0^2\right)\left(k_0^2/\alpha_p^2\right)\left(\Delta\varepsilon_p^2/8\varepsilon_0^2\right)$。因此，与斯托克斯共振和反斯托克斯共振相比，这些共振随调制频率升高而衰减得快得多

ω_p（随调制频率升高的变化规律是 ω_p^2 而非 ω_p），并且同样按特征调制长度 α_p^{-1} 的平方成比例增长。

在静态极限下，$\omega_p \to 0$，我们得到$R^{(+1)} + R^{(-1)} = R_{stat}^{(0)}$。因此，在反斯托克斯共振和斯托克斯共振处的边带反射功率$|R^{(\pm 1)}|^2$（见式（16）和表2）与布拉格共振处的静态反射功率$|R_{stat}^{(0)}|^2$（式（12）和表1）一致。载波、边带以及总功率增益/损耗的相应表达式列于表2。从该表可以看出，总功率增益随调制频率ω_p^2 趋于零；当调制长度α_p^{-1}较大时，则达到$\Delta\varepsilon_p^2/8\varepsilon_0^2$的最大极限。

图3显示了在实际光波和调制参数下，载波、边带以及总增益/损耗功率随传播常数比k_p/k_0 的变化关系：$\omega_0 = 2\pi \cdot 193$ THz、$\omega_p = 2\pi \cdot 10$ GHz、$\varepsilon_0 = 4.84$（铌酸锂）、$k_0 = \omega_0 \varepsilon_0^{1/2}/c = 8.89$ μ $^{-1}$ $\alpha_p = 230$ $^{-1}$ $\alpha_p^{(dB)} =$ m, 20 e 且m对应的调制功率衰减（以dB表示）为log( ) $\alpha_p = 20$ dB/cm。可以看出，与图2(b)相比，反斯托克斯、斯托克斯和同步共振的峰显著变窄、变高。由于因子 $\omega_p^2/\omega_0^2 k_0^2/\alpha_p^2$ 的量级相近（见表2），同步共振处的总功率增益仍与图2(b)相似。然而，与$\omega_p/\omega_0 k_0^2/\alpha_p^2$ 成正比的反斯托克斯共振处总归一化功率增益，则增大了三个数量级以上（图3中为~$5 \cdot 10^3$，而图2(b)中为~1）。因此，反斯托克斯共振条件是实现光放大的最有效方式。

为估算可实现的光放大，我们将反斯托克斯共振处的总功率增益 $\Delta P^{(tot)}$ 与材料损耗造成的功率衰减 $\Delta P^{(loss)}$ 进行比较。由于所考虑的微扰理论仅适用于较小的增益或损耗，即 $|\Delta P^{(tot)}| \ll 1$，因此我们假设材料衰减 $\Delta P^{(loss)}$ 也较小，并可针对长度为 L、衰减常数为 α_0 的波导计算如下

$$\Delta P^{(loss)} = -2\alpha_0 L, \quad 2\alpha_0 L \ll 1. \tag{21}$$

假设调制波导的长度为 $L = 3\alpha_p^{-1}$，则该波导中将实现增益 $\Delta P^{(tot)}$，相对精度为 $\exp(-2\alpha_p L) = e^{-6} = 0.002$。要克服损耗，沿此波导长度的放大应满足条件 $\Delta P^{(tot)} + \Delta P^{(loss)} > 0$。利用式（20）中反斯托克斯共振处的 $\Delta P^{(tot)}$ 表达式，以及式（21）中 $\Delta P^{(loss)}$ 在 $L = 3\alpha_p^{-1}$ 时的表达式，可将后一个不等式写为

$$\alpha_p < \alpha_p^{(amp)}, \quad \alpha_p^{(amp)} = \frac{k_0^2}{48\alpha_0}\frac{\omega_p}{\omega_0}\left(\frac{\Delta\varepsilon_p}{\varepsilon_0}\right)^2, \tag{22}$$

此处引入了最大的调制衰减 $\alpha_p^{(amp)}$（因此有效调制长度 $1/\alpha_p^{(amp)}$ 最小），从而实现光放大。

例如，在图4(a)中，我们比较了在反斯托克斯共振处的功率增益 $\Delta P^{(tot)}$与损耗 $|\Delta P^{(loss)}|$（由公式 (20) 和 (21) 定义）随有效调制长度 $1/\alpha_p$ 变化的关系，参数取上述数值：$\omega_0 = 2\pi \cdot 193$ THz、$\omega_p = 2\pi \cdot 10$ GHz、$\varepsilon_0 = 4.84$ 以及 $k_0 = \omega_0 \varepsilon_0^{1/2}/c = 8.89$ μm^{-1}。对于相对介电常数调制幅度 $\Delta\varepsilon_p/\varepsilon_0 = 10^{-4}$、$5 \cdot 10^{-4}$和 10^{-3}，我们考察了增益 $\Delta P^{(tot)}$。根据近期实现的薄膜铌酸锂波导传播损耗数据——参考文献 [37] 通过化学机械抛光将损耗降至 $\alpha_0^{(dB)} = 20\log(e)\,\alpha_0 = 0.34$ dB/m，参考文献 [38], 通过氧气氛中的制造后退火将损耗降至 .2 dB/m，而参考文献 [39]，通过可靠的干法反应离子刻蚀将损耗降至 $\alpha_0^{(dB)} =$ 1.3 dB/m——我们计算了

图4(a)中的波导损耗 $|\Delta P^{(loss)}|$，取值分别为 $\alpha_0^{(dB)} = 0.2$、0.5 和 1 dB/m。从图中可以看出，对于实际可行的调制长度，要实现整体放大，相对介电常数调制幅度 $\Delta\varepsilon_p/\varepsilon_0$ 必须达到 10^{-4} 量级或更大。图4(a)还显示，实现放大所需的特征波导有效长度 $1/\alpha_p^{(amp)}$ 可以相当小：当 $\Delta\varepsilon_p/\varepsilon_0 = 10^{-3}$ 时为 ~ 1 mm；随着调制幅度减小，该长度迅速增大，在 $\Delta\varepsilon_p/\varepsilon_0 = 10^{-4}$ 时达到 ~ 100 mm。$1/\alpha_p^{(amp)}$ 对 $\Delta\varepsilon_p/\varepsilon_0$ 的实际依赖关系见图4(b)。

5. 结论

总之，我们分析了频率为 ω_0 、传播常数为k_0 的光波在波导中的传播；该波导的介电常数受到行波的微扰，该行波具有相对较小的频率$\omega_p \ll \omega_0$、传播常数k_p，以及由衰减常数α_p定义的沿波导长度的衰减。在波导介电常数相对调制幅度$\Delta\varepsilon_p/\varepsilon_0$的二阶微扰理论范围内，我们推导出了载波和一阶边带的透射功率与反射功率，以及总光功率增益和损耗的简单且物理意义清晰的表达式。

具体而言，我们考虑了瞬时调制（$k_p = 0$）、同步调制（
ω_p $k_p = \omega_0$ k_0 $k_p \cong 2k_0$ $k_p \cong$ / / ）
$-2k_0$
以及斯托克斯（ ）共振和反斯托克斯（ ）共振处的调制情形。我们表明，对于瞬时调制，相对功率增益受限于$\Delta\varepsilon_p^2/8\varepsilon_0^2$。相比之下，增益随调制长度$\alpha_p^{-1}$ 和频率比ω_p/ω_0 增大，并在同步共振处由$\Delta P^{(tot)} = \blacksquare\omega_p^2/\omega_0^2\blacksquare\blacksquare k_0^2/\alpha_p^2\blacksquare\blacksquare\Delta\varepsilon_p^2/8\varepsilon_0^2\blacksquare$（表2）确定，在反斯托克斯共振处由$\Delta P^{(tot)} = \blacksquare\omega_p/\omega_0\blacksquare\blacksquare k_0^2/\alpha_p^2\blacksquare\blacksquare\Delta\varepsilon_p^2/16\varepsilon_0^2\blacksquare$（式（20）和表2）确定。在所有情形中，由实际调制参数产生的功率增益都相对较小。然而，当调制长度相当大时，反斯托克斯共振处的增益可以明显更大。因此，反斯托克斯共振被建议作为观察行波诱导的光放大的最有利构型。

采用声波调制的薄膜铌酸锂波导的实际参数，我们表明，原则上，当调制足够强且范围足够广时，调制诱导的光增益可以克服波导本征损耗。具体而言，对于范围为 $\Delta\varepsilon_p/\varepsilon_0 \sim 10^{-4} - 10^{-3}$ 的相对介电常数调制幅度，随着 $\Delta\varepsilon_p/\varepsilon_0$ 在该范围内减小，要实现整体放大所需的有效调制长度会迅速从毫米级增至十厘米级。

本文考察的空间衰减调制模型是非周期空间调制的一个具体实例。探索更一般的非周期时空依赖关系，尤其是实际可实现的依赖关系 [7, 8, 40], , 以及时空噪声对光传播的影响，是值得未来研究的课题。我们还提出，将本研究结果拓展至光学谐振器或许能够实现显著光放大的器件，因为在光学谐振器中，反斯托克斯相互作用可以得到谐振增强。与宽带放大方案 [14, 15, 23, 28–32], 不同，谐振反斯托克斯放大仅依赖两种谐波相互作用，产生沿前向传播的载波频率光 ω_0 ，以及沿后向传播的边带频率光 $\omega_0 + \omega_p$。

资助。 本研究得到工程与物理科学研究委员会（EP/W002868/1 和 EP/X03772X/1 号拨款）的支持。

利益披露。 作者声明不存在利益冲突。

数据可用性。本文所述研究结果所依据的数据目前尚未公开，但可在提出合理请求后向作者获取。

参考文献

1. R. W. Boyd，《非线性光学》，第4版（Academic Press，2020）。2. A. Kobyakov、M. Sauer 和 D. Chowdhury，“光纤中的受激布里渊散射”，Adv. Opt. Photon. 2, 1 (2009)。3. S. Taravati 和 A. A. Kishk，“时空调制：原理与应用”，IEEE Microwave Mag. 21, 30 (2020)。4. E. Galiffi、R. Tirole、S. Yin、H. Li、S. Vezzoli、P. A. Huidobro、M. G. Silveirinha、R. Sapienza、R、A. Alù 和 J. B. Pendry，“时变介质光子学”，Adv. Photon. 4, 014002 (2022)。5. G. Ptitcyn、M. S. Mirmoosa、A. Sotoodehfar 和 S. A. Tretyakov，“时变电磁系统与电路基础教程：时间调制的历史概述与基本概念”，IEEE Ant. Prop. Mag. 65, 10 (2023)。6. A. V. Mamishev、K. Sundara-Rajan、F. Yang、Y. Du 和 M. Zahn，“叉指传感器与换能器”，Proc. IEEE, 92, 808 (2004)。7. D. Mandal 和 S. Banerjee，“表面声波（SAW）传感器：物理、材料与应用”，Sensors 22, 820 (2022)。8. G. Sinatkas、T. Christopoulos、O. Tsilipakos 和 E. E. Kriezis，“集成光子学中的电光调制”，J. Appl. Phys. 130, 010901 (2021)。9. Y. Hu、D. Zhu、S. Lu、X. Zhu、Y. Song、D. Renaud、D. Assumpcao、R. Cheng、C. J. Xin、M. Yeh 和 H. Warner，“薄膜铌酸锂上的集成电光学”，Nat. Rev. Phys. 7, 237 (2025)。10. A. Morgenthaler，“电磁波的速度调制”，IRE Trans. Microwave Theory Tech. 6, 167–172 (1958)。11. P. K. Tien，“传播电路中的参量放大与频率混合”，J. Appl. Phys. 29, 1347–1357 (1958)。12. A. L. Cullen，“行波参量放大器”，Nature, 181, 332 (1958)。13. G. M. Roe 和 M. R. Boyd，“分布式系统中的参量能量转换”，Proc. IRE 47, 1213 (1959)。14. S. I. Averkov 和 N. S. Stepanov，“具有行进参数的系统中的波传播”（俄文），Izv. VUZ. Radiofiz., 2, 203 (1959)。15. N. S. Stepanov，“具有变化参数的系统中的波传播”（俄文），Izv. VUZ. Radiofiz., 3, 672 (1960)。16. J. C. Simon，“渐进扰动对导引电磁波的作用”，IRE Trans. Microwave Theory Tech. 8, 18 (1960)。17. A. Hessel 和 A. A. Oliner，“具有渐进正弦扰动的介质中的波传播”，IRE Trans. Microwave Theory Tech. 9, 337 (1961)。18. N. M. Kroll，“空间延展介质中的参量放大及其在设计光频可调谐振荡器中的应用”，Proc. IEEE 51, 110 (1963)。19. E. Cassedy 和 A. A. Oliner，“时空周期介质中的色散关系：第一部分——稳定相互作用”，Proc. IEEE 51, 1342–1359 (1963)。20. D. Holberg 和 K. Kunz，“时变介电常数平板中场的参量特性”，IEEE Trans. Ant. Prop. 14, 183 (1966)。21. E. Cassedy，“时空周期介质中的色散关系：第二部分——不稳定相互作用”，Proc. I EEE 55, 1154 1168 1967– ( )。22. J. Bruno 和 C. Shulman，“时空谐波色散介质中的传播札记”，Proc. IEEE 56, 759 (1968)。23. J. Armstrong 和 N. Shiren，“行波相互作用中的相位与振幅聚束理论”，IEEE J. Quant. Electron. 9, 17 (1973)。24. Z. Yu 和 S. Fan，“由间接带间光子跃迁实现完全光隔离”，Nat. Photon. 3, 91 2009( )。25. S. Taravati，“平衡时空变化介质中的巨线性非互易性、零反射与零带隙”，Phys. Rev. Appl. 9, 064012 (2018)。26. A. Parriaux、K. Hammani 和 G. Millot，“电光频率梳”，Adv. Opt. Photon. 12, 223 (2020)。27. H. Sun、M. Khalil、Z. Wang 和 L. R. Chen，“集成电光频率梳产生的最新进展”，J. Semicond. 42, 041301 (2021)。28. S. Taravati、N. Chamanara 和 C. Caloz，“ 来自周期性时空调制平板的非互易电磁散射及其在准声学隔离器中的应用 ”，Phys. Rev. B 96, 165144 (2017)。29. E. Galiffi、P. A. Huidobro 和 J. B. Pendry，“光速超材料中的宽带非互易放大”，Phys. Rev. Lett. 123, 206101 (2019)。30. J. B. Pendry、E. Galiffi 和 P. A. Huidobro，“时变介质中的增益——一种新机制”，JOSA B, 38, 3360 (2021)。31. A. Darvish 和 A. A. Kishk，“有损色散介质中的时空调制及其对放大与屏蔽的影响”，IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 70, 2526 (2022)。

32. M. Sumetsky, 《以相对较低频率的行波调制光的变换与放大》, Phys. Rev. Res. **7**, 043066 (2025). 33. J. Zhang, W. Donaldson, 和 G. P. Agrawal, 《时空变化介质中电磁场的守恒定律及其意义》, Phys. Rev. A **109**, 013509 (2024). 34. I. Liberal, A. Ganfornina-Andrades, 和 J. E. Vázquez-Lozano, 《均匀时空超材料中的时空对称性与能量-动量守恒》, ACS photonics, **11**, 5273 (2024). 35. E. O. Hiltunen 和 L. Rueff, 《时间调制亚波长谐振器阵列的能量平衡与光学定理》, arXiv 预印本 arXiv:2507.11201 (2025). 36. R. Kashyap, 《光纤布拉格光栅》（Academic Press, 2009）。37. A. Shams-Ansari, G. Huang, L. He, Z. Li, J. Holzgrafe, M. Jankowski, M. Churaev, P. Kharel, R. Cheng,D. Zhu, N. Sinclair, B. Desiatov, M. Zhang, T. J. Kippenberg, 和 M. Lončar, 《薄膜铌酸锂波导中的材料损耗降低》, *APL Photon.* **7**, 081301 (2022). 38. R. Gao, N. Yao, J. Guan, L. Deng, J. Lin, M. Wang, 和 Y. Cheng, 《品质因数超过 10^8, 的超高品质因数铌酸锂微环》 *Chin. Opt. Lett.*, **20**, 011902 (2022). 39. Y. Hu, D. Zhu, S. Lu, X. Zhu, Y. Song, D. Renaud, D. Assumpcao, R. Cheng, C. J. Xin, M. Yeh, H. X. Zhu, Y. Hu, S. Lu, H. K. Warner, X. Li, Y. Song, L. Magalhães, A. Shams-Ansari, A. Cordaro, N. Sinclair, 和 M. Lončar, 《薄膜铌酸锂上的两千九百万本征品质因数单片微谐振器》, *Photon. Res.* **12**, A63 (2024). 40. Y. Zhou, F. Ruesink, S. Gertler, H. Cheng, M. Pavlovich, E. Kittlaus, A. L. Starbuck, A. J. Leenheer, A. T. Pomerene, D. C. Trotter, C. Dallo, K. M. Musick, E. Garcia, R. Reyna, A. L. Holterhoff, M. Gehl, A. Kodigala, J. Bowers, M. Eichenfield, N. T. Otterstrom, A. L. Lentine, 和 P. Rakich, 《通过与模式连续谱强耦合实现非互易耗散工程》, Phys. Rev. X **14**, 021002 (2024).