arXiv:2602.01424v1 [math.OA] 1 Feb 2026

冯·诺伊曼代数中具有非连通谱的算子

MINGHUI MA、RUI SHI 和 TIANZE WANG

摘要。设 $\mathcal{M}$ 为冯·诺伊曼代数，$\mathcal{I}$ 为 $\mathcal{M}$中的弱算子稠密理想，且 Φ 为 $\mathcal{I}$上的酉不变 $\|\cdot\|$-支配范数。本文给出关于 Φ 的一个充要条件，使得 $\mathcal{M}$中的每个算子都能表示为 $\mathcal{M}$ 中一个具有非连通谱的算子与 $\mathcal{I}$ 中一个 Φ-范数任意小的算子之和。类似地，若 $\mathcal{A}$ 是一个实秩零且维数大于一的含幺 C^*-代数，并且 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的本质理想，那么 $\mathcal{A}$ 中的每个元素都能写成 $\mathcal{A}$ 中一个具有非连通谱的算子与 $\mathcal{I}$ 中一个范数任意小的算子之和。

1. 引言

设 $\mathcal{H}$ 为复希尔伯特空间，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$为 $\mathcal{H}$上所有有界算子构成的代数。若与 T 交换的每个投影（分别地，幂等元）都是平凡的，则称 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的算子 T 是不可约的（分别地，强不可约的）。否则，称 T 是可约的（分别地，弱可约的）。由于每个幂等元都与某个投影相似，根据 [22, 推论 0.15], ，算子 T 是强不可约的，当且仅当对于每个可逆算子 X，XTX^{-1} 都是不可约的。根据解析函数演算（见 [3, 命题 4.11]），每个具有非连通谱的算子都是弱可约的；等价地，每个强不可约算子的谱都是连通的。

1968年，P. Halmos [10]证明，在可分复希尔伯特空间上，不可约算子的集合在算子范数拓扑下是稠密的 G_δ 子集。后来，他在 [11]提出了希尔伯特空间中的十个问题。其中第八个问题询问：可分无限维复希尔伯特空间上的每个算子，是否都是可约算子的极限？根据 D. Herrero 和 N. Salinas [13], 的一个结果，在无限维复希尔伯特空间上，具有非连通谱的算子集合一致稠密。因此，弱可约算子的集合也一致稠密。Halmos 第八个问题的肯定答案来自 D. Voiculescu [29] ，他运用了其卓越的非交换 Weyl–von Neumann

2020 数学主题分类。主要分类号 46L10，47A58；次要分类号 47C15，47B10。关键词和短语。非连通谱，酉不变范数，冯·诺伊曼代数，本质理想，实秩零。RUI SHI、MINGHUI MA 和 TIANZE WANG 获得国家自然科学基金委员会资助（编号：12271074）。MINGHUI MA 还获得中国博士后科学基金会资助（编号：2025M783077）以及中国博士后科学基金会博士后资助计划资助（编号：GZC20252022）。

定理。值得一提的是，D. Herrero 和 C. Jiang [12] 证明了，在可分无限维复希尔伯特空间上，强不可约算子集合在具有连通谱的算子集合中一致稠密。有关更多相关结果，请参阅 [7, 14, 15] 。

回顾一下，冯·诺伊曼代数是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的一个自伴含幺子代数，并且在弱算子拓扑下闭。此外，若 $\mathcal{M}$ 的中心由恒等元的标量倍数组成，则称其为因子。因子分为 I_n 型、I_∞ 型、II_1, 型、II_∞ 型和 III 型（见 [16, 定理 6.5.2]）。根据定义，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个 I 型因子。自然地，我们可以将因子中算子的不可约性这一概念加以推广。在因子 $\mathcal{M}$ 中，如果存在一个与 T 对易的非平凡投影（分别为幂等元）属于 $\mathcal{M}$，则称算子 T 为可约（分别为弱可约）。否则，称 T 在 $\mathcal{M}$ 中是不可约（分别为强不可约）。近年来，许多与可约或不可约算子有关的结果已推广到冯·诺伊曼代数 [5, 6, 20, 25, 26, 28]。正如 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 所示，因子中每个具有非连通谱的算子都是弱可约的。本文研究在本质理想中进行扰动时，冯·诺伊曼代数（分别为实秩零的 C^*-代数）中具有非连通谱的算子的稠密性（见定义 2.5）。

下文中，设 $\mathcal{M}$ 是一个冯·诺伊曼代数，$\mathcal{P}(\mathcal{M})$ 是 $\mathcal{M}$ 中投影的集合，$\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{M}$ 中一个弱算子稠密的（双边）理想，Φ 是 $\mathcal{I}$ 上的一个酉不变范数。例如，$\mathcal{M}$ 本身是 $\mathcal{M}$ 中一个弱算子稠密理想，而算子范数在 $\mathcal{M}$ 上是酉不变的。同样，有限秩算子集合以及更一般地，$p \geqslant 1$ 时 Schatten p 类算子集合，都是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的弱算子稠密理想。将弱算子稠密理想上的酉不变范数应用于算子理论问题，主要受到 Voiculescu 的工作 [30], 的启发；他在该工作中肯定地回答了 Halmos 第四问题（见 [11]），方法是将赋范理想引入正规算子的对角化研究中。与此同时，[30] 的主要结果开启了冯·诺伊曼代数领域一系列影响深远的发展（见 [1, 8, 9, 17–19, 27, 29–33]）。受这一研究方向的启发，我们为酉不变范数建立如下上确界—下确界定理。

定理 1.1 (**上确界-下确界**)。设 $\mathcal{M}$ 是一个冯·诺伊曼代数，且 维数 $\mathcal{M} > 1$, $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{M}$中的弱算子稠密理想，而 Φ 是 $\mathcal{I}$上的一个酉不变的 $\|\cdot\|$-支配范数。以下命题等价。

(1) 上确界 $_{0\neq P\in\mathcal{P}(\mathcal{M})}$ 下确界 $_{E\in\mathcal{I}\cap\mathcal{P}}^{0\neq E\leqslant P(\mathcal{M})}\Phi(E) < \infty$.(2) 对于任意的 $T \in \mathcal{M}$ 和 $\varepsilon > 0$, 存在算子 X 属于 $\mathcal{I}$，满足 $\Phi(X) < \varepsilon$，使得 $T + X$ 的谱是不连通的。

我们简要评论一下定理 1.1，希望这有助于更深入地理解算子结构与酉不变范数下扰动之间的关系。

为深入理解定理 1.1 中的条件 (1)，可以将 $\mathcal{M}$ 取为无穷多个 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的直和。在这种情况下，(1) 只要求 $\sup\{\Phi(E)\colon\ E$ 是 $\mathcal{M}\} < \infty$中的一个极小投影。

作为定理 1.1 和引理2.21的一个应用，在 $\mathcal{M}$ 中具有非连通谱的算子集合，在算子范数拓扑下是开且稠密的；等价地，在 $\mathcal{M}$ 中具有连通谱的算子集合，在算子范数拓扑下是闭且无处稠密的。因此，在每个维数大于一的因子中，弱可约算子集合在算子范数下稠密（参见 [6,定理 3。1]）。相比之下， [25, 定理 6。7] 的作者证明，在每个非 Gamma 型II_1 因子中，可约算子集合无处稠密且不闭；而 [8, 定理 5。1] 的作者证明，在每个可分真无限因子中，可约算子集合一致稠密。

与定理 1.1 不同，我们在C^*-代数的情形下得到了一个类似的结果。L. Brown 和 G. Pedersen [2] 为含幺 C^*-代数引入了实秩零的概念。将冯·诺伊曼代数作为一个真子类纳入其中（见[2, 命题 1.3]）， C^*-代数若具有实秩零，则含有丰富的投影；这一类代数的结构也与冯·诺伊曼代数的结构相近（见 [2, 定理 2.6]）。这大大简化了相应的 K-理论和分类问题，使实秩零成为 Elliott分类纲领发展的基石。对于具有实秩零的 C^*-代数，我们得到如下结果。关于含幺 C^*-代数中的本质理想 ，以及冯·诺伊曼代数中对此概念的刻画，见后文的定义 2.5 和推论 2.8。

定理 1.2。 设 $\mathcal{A}$ 是一个实秩零的含幺 C^*-代数，且 维数$\mathcal{A} > 1$，并且 $\mathcal{I}$是 $\mathcal{A}$中的一个本质理想。那么，对于每个 $T \in \mathcal{A}$ 和 $\varepsilon > 0$，都存在一个元素 X属于 $\mathcal{I}$，满足 $\|X\| < \varepsilon$，使得 $T + X$ 的谱是非连通的。

作为定理 1.2 和引理2.21 的直接应用，我们得到以下推论。

推论 1.3。 设 $\mathcal{A}$ 是一个实秩零的含幺 C^*-代数，且 维数$\mathcal{A} > 1$。那么， $\mathcal{A}$ 中具有非连通谱的元素构成的集合是开且稠密的。

这引出了如下问题。

问题 1.4. 在哪些含幺 C^*代数中，具有非连通谱的元素构成一个稠密子集?

本文结构如下。在第2节中，我们准备本质理想与酉不变范数的一些基本性质，并从谱理论发展若干技术工具。在第3.1节中，我们基于命题 3.3 和命题 3.5 证明定理 1.1。然后，我们在第3.2节中应用引理 3.6 以及命题 3.3 的证明来证明定理 1.2。最后，关于问题 1.4，我们在命题 3.8 中刻画 $\mathbb{R}$的紧子集 X 的一个充要条件，使得 $C(X)$中具有非连通谱的元素构成一个稠密子集。

2. 预备知识

本文用 $\mathcal{M}$ 表示一个冯·诺伊曼代数，并假设每个理想都是双边的。在冯·诺伊曼代数中，我们需要处理在算子范数拓扑下不闭的理想，例如每个 $p \geqslant 1$ 下 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的 Schatten p- 类算子理想。由于我们为理想发展出的工具旨在同时适用于冯·诺伊曼代数和 C^*代数，因此除非另有说明，本文约定理想在范数拓扑下不一定是闭的。

2.1. **本质理想与酉不变范数。**

定义2.1. 设 $\mathcal{M}$ 为一个冯·诺伊曼代数， $\mathcal{I}$ 为 $\mathcal{M}$中的一个理想。若 $\mathcal{I}$ 上的范数 Φ 满足：对于每个算子 $X \in \mathcal{I}$和酉算子 U， $V \in \mathcal{M}$，均有 $\Phi(UXV) = \Phi(X)$，则称其为酉不变范数。同时，若对所有 $X \in \mathcal{I}$均有 $\Phi(X) \geqslant \|X\|$，则称 Φ 为-支配的。

注2.2. 在 [19, 定义2.1。1], 范数 Φ 在 $\mathcal{I}$称为 $\|\cdot\|$-支配的，如果存在一个正标量 $\alpha > 0$ 使得 $\Phi(X) \geqslant \alpha\|X\|$ 对所有 $X \in \mathcal{I}$均成立。不失一般性，本文假设 $\alpha = 1$ 。

为方便读者，我们列出 [19,引理 2.1.5] 中酉不变范数的一些有用性质。

引理 2.3. 设 $\mathcal{M}$ 是一个冯·诺伊曼代数， $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{M}$中的一个理想，且 Φ 是 $\mathcal{I}$上的酉不变范数。

(1) $\Phi(AXB) \leqslant \|A\|\Phi(X)\|B\|$ 对所有 $X \in \mathcal{I}$ 和 A、$B \in \mathcal{M}$ 均成立。
(2) 对所有 $X \in \mathcal{I}$，都有 $|X|$、$X^* \in \mathcal{I}$，且 $\Phi(X) = \Phi(|X|) = \Phi(X^*)$。
(3) 若 $X \in \mathcal{M}$、$Y \in \mathcal{I}$ 和 $0 \leqslant X \leqslant Y$，则 $X \in \mathcal{I}$，且 $\Phi(X) \leqslant \Phi(Y)$。

设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺 C^*-代数，且 $\mathcal{A}_{sa}$ 是 $\mathcal{A}$ 中自伴算子的集合。根据 [2, 定理 2.6], ，我们称 $\mathcal{A}$ 具有实秩零，当且仅当有限谱自伴算子的集合在 $\mathcal{A}_{sa}$中稠密。注意，根据 [2, 命题 1.3]，每个冯·诺伊曼代数都具有实秩零。由引理 2.3 (2) 可知，冯·诺伊曼代数中的每个理想都是自伴的。如果不要求理想是闭的，那么对于 C^*-代数，同样的结论并不成立。我们给出以下例子来说明这一点。

例 2.4. 设 $\mathcal{A}$ 是由 ℓ^∞ 中所有收敛序列构成的 C^*-代数， θ 是一个无理数，并且 $X = \{\frac{1}{n}e^{2\pi in\theta}\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$。由于 $\mathcal{A}$ 是交换的， $\mathcal{A}X$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个理想。我们断言 $\mathcal{A}X$ 不是自伴的。否则，对于某个 $Y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$，有 $X^* = XY$。由此可得 $y_n = e^{-4\pi in\theta}$，因此 Y 不收敛。这就产生了矛盾。

设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺 C^*-代数，且 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个理想。那么， $\mathcal{I}$ 的闭包 $\overline{\mathcal{I}}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个闭理想。根据 [4, 引理 I.5.1]， $\mathcal{I}$ 是自伴的。因此，对于每个算子 $A \in \mathcal{A}$， $A\mathcal{I} = \{0\}$ 当且仅当 $\mathcal{I}A^* = \{0\}$。在下述定义中，不假设本质理想在算子范数拓扑下是闭的。

定义 2.5. 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺 C^*-代数。若对于每个算子 $A \in \mathcal{A}$， $A\mathcal{I} = \{0\}$ 都蕴含 $A = 0$；等价地，若对于每个算子 $A \in \mathcal{A}$， $\mathcal{I}A = \{0\}$都蕴含 $A = 0$，则称 $\mathcal{A}$ 的理想 $\mathcal{I}$ 为本质的。

不同于 [21, 定义 3.12.7], ，为方便读者，我们给出一个辅助引理。对于 $\mathcal{A}$中的子集 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$，用 $\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2$ 表示所有形如 A_1A_2 的乘积构成的集合，其中 $A_j \in \mathcal{S}_j$ 和 $j = 1, 2$。

引理 2.6. 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺 C^*-代数，且 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{A}$中的一个理想。则以下命题等价。

(1) $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{A}$中的一个本质理想。(2) 对于 $\mathcal{A}$中的每个非零理想 $\mathcal{J}$， $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} \neq \{0\}$。

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2)。设 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}$ 是一个非零理想，并取 $A \in \mathcal{J}$ 使得 $A \neq 0$。由于 $\mathcal{I}$ 是本质的，我们有 $\mathcal{I}A \neq \{0\}$，因此 $\mathcal{I}\mathcal{J} \neq \{0\}$。结合$\mathcal{I}\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$可得 $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} \neq \{0\}$。

(2) $\Rightarrow$ (1)。设 $A \in \mathcal{A}$ 满足 $A \neq 0$ 且 $\mathcal{J}$ =张成$\mathcal{A}A^*\mathcal{A}$。那么 $\mathcal{J}$ 是一个非零理想。由 (2)，在 $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$中存在一个形如 $B = \sum_j X_jA^*Y_j$的非零元素 B。由于 $BB^* \neq 0$，我们有 $\mathcal{I}B^* \neq \{0\}$，因此 $\mathcal{I}A \neq \{0\}$。所以， $\mathcal{I}$ 是本质的。□

下面的引理是为定义2.9准备的。

引理 2.7. 设 $\mathcal{A}$ 是一个实秩零的含幺 C^*-代数，且 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{A}$中的一个本质理想。那么，对于 $\mathcal{A}$中的每个非零投影 P，都存在 $\mathcal{I}$ 中的一个非零投影 E，使得 $E \leqslant P$。

证明。 由于 $\mathcal{I}$ 是本质的，存在 $\mathcal{I}$ 中的算子 T，使得 $PT \neq 0$。由于$\mathcal{A}$ 具有实秩零，存在 $\mathcal{A}$ 中的非零投影 $\{P_j\}_{j=1}^n$，其和为 I，以及标量 $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n = \|PT\|^2$，使得

$$\|T^*PT - (\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n)\| < \frac{1}{2}\lambda_n.$$

由此得出 $\|P_n T^*PTP_n - \lambda_n P_n\| < \frac{1}{2}\lambda_n$。因此 $P_n T^*PTP_n$是非零的，并且

$$\sigma(P_n T^*PTP_n) \subseteq \{0\} \cup \left[\frac{1}{2}\lambda_n, \frac{3}{2}\lambda_n\right].$$

根据著名等式 $\sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}$ 对所有算子 A 和 B均成立，我们得到

$$\sigma(PTP_n T^*P) \subseteq \{0\} \cup \left[\frac{1}{2}\lambda_n, \frac{3}{2}\lambda_n\right].$$

此外，$A = PTP_n T^*P \in \mathcal{I}$是非零的。令 χ为闭区间 $[\frac{1}{2}\lambda_n, \frac{3}{2}\lambda_n]$的特征函数，$f(t) = t^{-1}\chi(t)$，且 $E = \chi(A) = Af(A)$。那么，E是 $\mathcal{I}$ 中的一个非零投影，且满足 $E \leqslant P$。证明完毕。□

根据引理 2.7 的以下推论，在冯·诺伊曼代数中，我们将使用“弱算子稠密理想”这一术语，而不再使用“本质理想”。

推论 2.8。 设 $\mathcal{M}$ 为冯·诺伊曼代数。则 $\mathcal{M}$ 中的理想是本质的，当且仅当它是弱算子稠密的。

证明。 显然，每个弱算子稠密理想都是本质的。设 $\mathcal{I}$是 $\mathcal{M}$中的一个本质理想。令 $\{E_a\}_{a\in\mathbb{A}}$ 为 $\mathcal{I}$中非零投影的极大正交族。令 $P = I - \sum_{a\in\mathbb{A}} E_a$。如果 $P \neq 0$，则由引理 2.7，存在 $\mathcal{I}$ 中的非零投影 E_0，使得 $E_0 \leqslant P$。这与 $\{E_a\}_{a\in\mathbb{A}}$的极大性相矛盾。因此 $I = \sum_{a\in\mathbb{A}} E_a$。对于每个有限子集 $\Lambda \subseteq \mathbb{A}$，令 $E_\Lambda = \sum_{a\in\Lambda} E_a \in \mathcal{I}$。那么，对于 $\mathcal{M}$中的每个 T，TE_Λ 弱算子收敛于 T，当$\Lambda \to \mathbb{A}$时。这就完成了证明。□

对于冯·诺伊曼代数中的弱算子稠密理想上的每个酉不变范数 Φ，我们定义一个与 Φ 相关的常数 c_Φ 如下。

定义2.9。 设 $\mathcal{M}$ 是一个冯·诺伊曼代数， $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{M}$中的一个弱算子稠密理想，且 Φ 是 $\mathcal{I}$上的一个酉不变范数。对于 $\mathcal{M}$中的每个非零投影 P，令

$$f_\Phi(P) = \inf\{\Phi(E)\colon E \in \mathcal{I} \text{ is a nonzero subprojection of } P\}.$$

常数 c_Φ 定义为

$$c_\Phi = \sup\{f_\Phi(P)\colon P \text{ is a nonzero projection in } \mathcal{M}\}.$$

注 2.10. 注意，对冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$ 中的每个非零投影 P，都有 $0 \leqslant f_\Phi(P) < \infty$。根据定义， f_Φ 是递减的，即对于冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$ 中满足 $P \leqslant Q$ 的所有非零投影 P 和 Q，都有 $f_\Phi(P) \geqslant f_\Phi(Q)$。此外，若 $c_\Phi < \infty$、 $\delta > 0$，且 P 是冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$ 中的非零投影，则存在冯·诺伊曼代数 $\mathcal{I}$ 中的非零投影 E，使得 $E \leqslant P$ 且 $\Phi(E) < c_\Phi + \delta$。下文将不加说明地使用这一事实。

对于冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$ 中的每个投影 P，其中心支撑 记为 C_P。根据以下引理，冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$ 中任一非零投影 P 处的 f_Φ 的值仅取决于 C_P，即对于满足 $C_P = C_Q$ 的冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$ 中所有非零投影 P 和 Q，都有 $f_\Phi(P) = f_\Phi(Q)$。

引理 2.11. 设 $\mathcal{M}$ 是冯·诺伊曼代数， $\mathcal{I}$ 是$\mathcal{M}$中的弱算子稠密理想，且 Φ 是 $\mathcal{I}$上的酉不变范数。那么，对于 $\mathcal{M}$中的每个非零投影 P，都有 $f_\Phi(P) = f_\Phi(C_P)$。

证明。由于 f_Φ 是递减的，显然 $f_\Phi(P) \geqslant f_\Phi(C_P)$。对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\mathcal{I}$中的一个非零投影 E，使得 $E \leqslant C_P$，且 $\Phi(E) < f_\Phi(C_P) + \varepsilon$。由于$C_E C_P = C_E \neq 0$，根据 [16, 命题 6.1.8]，存在 $\mathcal{M}$ 中的一个非零部分等距算子 V，使得 $V^*V \leqslant E$且 $VV^* \leqslant P$。由引理 2.3 (1)，可得

$$\Phi(VV^*) = \Phi(VEV^*) \leqslant \Phi(E) < f_\Phi(C_P) + \varepsilon.$$

由此可得 $f_\Phi(P) < f_\Phi(C_P) + \varepsilon$。证明完毕。 □

以下两个引理是为命题 3.5 做准备的。

引理 2.12. 设 $\mathcal{M}$ 是一个冯·诺伊曼代数， $\mathcal{I}$ 是$\mathcal{M}$中的一个弱算子稠密理想， Φ 是 $\mathcal{I}$ 上的一个酉不变范数，且 $c_\Phi = \infty$。那么，对于每个整数$n \geqslant 1$，存在 $\mathcal{M}$ 中的一个中心投影 Z，使得 $0 < Z < I$，并且 $f_\Phi(Z) \geqslant n$以及

$$\sup\{f_\Phi(P)\colon P \textit{ is a nonzero central projection in } \mathcal{M}(I - Z)\} = \infty.$$

证明。 根据引理 2.11，存在一个非零中心投影 Z_0，属于 $\mathcal{M}$，使得$f_\Phi(Z_0) \geqslant n$。注意，

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}Z_0 \oplus \mathcal{M}(I - Z_0) \quad \text{and} \quad \mathcal{I} = \mathcal{I}Z_0 \oplus \mathcal{I}(I - Z_0).$$

令 $\Phi_0 = \Phi|_{\mathcal{I}Z_0}$ 和 $\Phi_0' = \Phi|_{\mathcal{I}(I-Z_0)}$ 为 Φ 的限制。于是 $c_{\Phi_0} = \infty$ 或 $c_{\Phi_0'} = \infty$。若 $c_{\Phi_0'} = \infty$，则 $Z_0 \neq I$，我们可以取 $Z = Z_0$。假设 $c_{\Phi_0} = \infty$。那么存在一个中心投影 Z_1，属于 $\mathcal{M}$，使得 $0 < Z_1 < Z_0$。类似地，我们有

$$\mathcal{M}Z_0 = \mathcal{M}Z_1 \oplus \mathcal{M}(Z_0 - Z_1) \quad \text{and} \quad \mathcal{I}Z_0 = \mathcal{I}Z_1 \oplus \mathcal{I}(Z_0 - Z_1).$$

设 $\Phi_1 = \Phi|_{\mathcal{I}Z_1}$ 和 $\Phi_1' = \Phi|_{\mathcal{I}(Z_0-Z_1)}$。则 $c_{\Phi_1} = \infty$ 或 $c_{\Phi_1'} = \infty$。若 $c_{\Phi_1'} = \infty$，则取 $Z = Z_1 \leqslant Z_0$。若 $c_{\Phi_1} = \infty$，则取 $Z = Z_0 - Z_1 \leqslant Z_0$。在这两种情况下，我们都有 $f_\Phi(Z) \geqslant f_\Phi(Z_0) \geqslant n$。证明完毕。□

引理 2.13。设 $\mathcal{M}$ 是一个冯·诺伊曼代数，$\mathcal{I}$ 是$\mathcal{M}$中的弱算子稠密理想，且 Φ 是 $\mathcal{I}$上的酉不变范数。则不等式

$$\|XZ\| f_\Phi(Z) \leqslant \Phi(X)$$

对 $\mathcal{I}$ 中的每个算子 X 以及 $\mathcal{M}$中的每个非零中心投影 Z 均成立。

证明。由引理 2.3 (2)，不妨设 X 是 $\mathcal{I}$中的一个正算子。不失一般性，设 $XZ \neq 0$。那么，对任意 $0 < a < \|XZ\|$，存在 $\mathcal{M}Z$ 中的一个非零投影 E，使得 $EXE \geqslant aE$。由引理 2.3 可知，$E \in \mathcal{I}$ 并且

$$af_\Phi(Z) \leqslant a\Phi(E) = \Phi(aE) \leqslant \Phi(EXE) \leqslant \Phi(X).$$

由 a 的任意性，证明得证。□

注 2.14. 因此，对所有 $X \in \mathcal{I}$，$\|X\| f_\Phi(I) \leqslant \Phi(X)$。所以，$\mathcal{I}$ 上的酉不变范数 Φ 是 $\|\cdot\|$-支配的，当且仅当 $f_\Phi(I) \geqslant 1$。

2.2. 谱理论工具。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是满足 $I_\mathcal{B} \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ 的含幺 C^*-代数。那么，根据命题 VIII.1.14]，对每个属于 $\mathcal{A}$ 的算子 A，都有 $\sigma_\mathcal{A}(A) = \sigma_\mathcal{B}(A)$。此外，根据 GNS 构造定理 I.9.12]，对于每个抽象 C^*-代数 $\mathcal{A}$，都存在一个忠实 *-表示 φ: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$，且 $\mathcal{A}$ 与具体的 C^*-代数 $\varphi(\mathcal{A})$ 等距 *-同构。因此，对每个属于 $\mathcal{A}$ 的算子 A，都有$\sigma(A) = \sigma(\varphi(A))$；而且，对 $\mathcal{A}$ 中 A 的谱的研究，总能归结为对 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中 $\varphi(A)$ 的研究。回顾一下，作用于 $\mathcal{H}$ 上的算子 T 的近似点谱记作 $\sigma_{ap}(T)$。

注 2.15。设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺 C^*-代数，T 是 $\mathcal{A}$ 中的一个算子，λ 是 $\sigma(T)$ 的边界 $\partial\sigma(T)$ 中的一个标量。那么 $(T-\lambda I)^*(T-\lambda I)$ 在 $\mathcal{A}$ 中不可逆。事实上，不妨设 $\mathcal{A}$ 是一个具体的 C^*- 代数，即它作用于复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上。由于 $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$，存在 $\mathcal{H}$ 中的单位向量序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$，使得当 $n \to \infty$ 时，$\|(T-\lambda I)x_n\| \to 0$。于是 $\|(T-\lambda I)^*(T-\lambda I)x_n\| \to 0$。证明完毕。

本节余下部分将为谱理论中出现的上三角形式算子构建一些技术工具；这些工具本身也具有独立的研究价值。

引理 2.16。设 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 为复希尔伯特空间，且 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$。假设 T 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的一个算子，其形式为

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_{12} \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_2 \end{matrix}. \tag{2.1}$$

那么 T 的谱满足

$$\sigma_{ap}(T_1) \cup \big(\sigma(T_2) \setminus \sigma(T_1)\big) \subseteq \sigma(T) \subseteq \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2).$$

证明。如果 T_1 和 T_2 均可逆，则 T 是一个可逆算子，其逆为

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} T_1^{-1} & -T_1^{-1}T_{12}T_2^{-1} \\ 0 & T_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_2 \end{matrix}.$$

由此可得 $\sigma(T) \subseteq \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$。

对于每个 $\lambda \in \sigma_{ap}(T_1)$，存在 $\mathcal{H}_1$ 中的单位向量序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得当 $n \to \infty$ 时，$\|(T_1 - \lambda I_{\mathcal{H}_1})x_n\| \to 0$。令 $y_n = x_n \oplus 0 \in \mathcal{H}$。则 $\|(T - \lambda I)y_n\| \to 0$，从而 $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$。因此，$\sigma_{ap}(T_1) \subseteq \sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma(T)$。

假设 T_1 可逆。显然，只要 T_2 不是满射，T 就不是满射。此外，若 $x_2 \in \ker T_2$，则 $(-T_1^{-1}T_{12}x_2) \oplus x_2 \in \ker T$。因此，只要 T_2 不是单射，T 就不是单射。由此可得 $\sigma(T_2) \setminus \sigma(T_1) \subseteq \sigma(T)$。□

根据等式 $\sigma(T_1) \cup \sigma(T_2) = \sigma(T_1) \cup \big(\sigma(T_2) \setminus \sigma(T_1)\big)$，以下推论可由引理 2.16 直接得出。

推论 2.17。令 T 为由 (2.1) 给出的算子。若 $\sigma(T_1) = \sigma_{ap}(T_1)$，则$\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$。特别地，若 T_1 为正规算子，则 $\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$。

下面的引理是推论 2.17 的某种逆命题。

引理 2.18. 设 T_1 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}_1$上的一个算子。若 $\sigma(T_1) \neq \sigma_{ap}(T_1)$，则存在一个具有(2.1) 形式的算子 T，使得 $\sigma(T) \neq \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$。

证明。不失一般性，假设 $0 \in \sigma(T_1) \setminus \sigma_{ap}(T_1)$。那么 T_1 是单射，且在 $\mathcal{H}_1$ 中有闭值域。令 $\mathcal{H}_2$ 为 $\mathcal{H}_1$和 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$的可数无限多个副本的直和。那么存在一个部分等距算子 V，属于 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$，其初始空间为 $\mathcal{H}_2$，终空间为 $\mathcal{H} \ominus \operatorname{ran}(T_1)$。令

$$T_{12} = I_{\mathcal{H}_1} V I_{\mathcal{H}_2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1) \quad \text{and} \quad T_2 = I_{\mathcal{H}_2} V I_{\mathcal{H}_2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2).$$

那么，由 (2.1) 给出的算子 T 在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中可逆。换言之， $0 \notin \sigma(T)$。由此可得， $\sigma(T)$ 是 $\sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$ 的真子集。□

注 2.19. 设 T_1 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}_1$上的一个算子。则存在一个算子 T，其形式为 (2.1)，使得 $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T_1)$ 由 [23]成立。这个结果比引理 2.18 更强，其证明所依赖的构造也比引理 2.18 的构造复杂得多。此外，若 T 具有形式 (2.1)，则我们可以写成

$$T^* = \begin{pmatrix} T_2^* & T_{12}^* \\ 0 & T_1^* \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{H}_2 \\ \mathcal{H}_1 \end{matrix}.$$

由此可　　由推论 2.17 可知，当 $\sigma(T_2^*) = \sigma_{ap}(T_2^*)$ 时， $\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$。

我们给出一个例子来说明引理 2.18。

例 2.20. 设 $\mathcal{H}$ 是一个复希尔伯特空间，其标准正交基为 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$，且 T 是作用在 $\mathcal{H}$ 上的双边移位算子，满足对每个整数 $n \in \mathbb{Z}$都有 $Te_n = e_{n+1}$。令 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 分别为 $\{e_n\}_{n\geqslant 0}$ 和$\{e_n\}_{n\leqslant -1}$的闭线性张成。由于 $\mathcal{H}_1$ 是 T的不变子空间，我们可以写成

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_{12} \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_2 \end{matrix}$$

如式（2.1）所示，其中 T_{12} 是秩一偏等距，且 T_1 和 T_2^* 都与单边移位算子酉等价。因此，我们有

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T_1) = \sigma_{ap}(T_2^*) = \mathbb{T} \quad \text{and} \quad \sigma(T_1) = \sigma(T_2) = \overline{\mathbb{D}},$$

其中 $\mathbb{T}$ 是单位圆周， $\mathbb{D}$ 是复平面 $\mathbb{C}$中的闭单位圆盘。因此， $\sigma(T)$是 $\sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$ 的真子集。

本节末尾，我们给出谱理论中的一个标准工具。为方便读者，我们简要概述其证明。

引理2.21。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺巴拿赫代数。那么， $\mathcal{A}$ 中具有非连通谱的元素构成的集合在范数拓扑下是开集。

证明。 设 T 是 $\mathcal{A}$ 中一个具有非连通谱的元素。那么，存在 $\mathbb{C}$ 中互不相交的有界开子集Ω_1 和Ω_2 ，使得

$$\sigma(T) \cap \Omega_1 \neq \varnothing, \quad \sigma(T) \cap \Omega_2 \neq \varnothing, \quad \text{and} \quad \sigma(T) \subseteq \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

令 χ_j 为 Ω_j 的特征函数，其中 $j = 1, 2$。则 $\chi_1(T)$ 和 $\chi_2(T)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的非零幂等元，且 $\chi_1(T) + \chi_2(T) = I$。

反证，若 T 不是非连通谱元素集合的内部点，则存在一个序列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$，其元素具有连通谱且收敛于 T。根据谱的上半连续性 [24, 定理 10。20]，存在 $n_1 \geqslant 1$ 使得 $\sigma(T_n) \subseteq \Omega_1 \cup \Omega_2$ 对每个 $n \geqslant n_1$成立。根据解析函数演算的连续性，存在 $n_2 \geqslant n_1$ 使得

$$\|\chi_j(T_n) - \chi_j(T)\| < \|\chi_j(T)\|$$

对每个 $j = 1, 2$ 以及每个 $n \geqslant n_2$。由此可得，对于 $j = 1, 2$，$\chi_j(T_n) \neq 0$。因此，对所有 $n \geqslant n_2$，T_n 的谱都是非连通的，这与假设矛盾。证明完毕。□

3. 主要结果

本节首先给出命题 3.3 和命题 3.5 的证明。主要结果定理 1.1 直接由这两个命题推出。接着，我们借助引理 3.6 证明定理 1.2。此外，命题 3.8 针对问题 1.4，给出了紧子集 X of $\mathbb{R}$ 满足以下条件的充要条件：具有非连通谱的 $C(X)$ 中的元素构成一个稠密子集。

3.1. 冯·诺伊曼代数中的扰动。

以下技术引理为命题 3.3 做准备。

引理 3.1. 设 $\mathcal{M}$ 是一个冯·诺伊曼代数，$\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{M}$ 中的一个弱算子稠密理想，且 Φ 是 $\mathcal{I}$ 上一个 $\|\cdot\|$-支配的酉不变范数，其中 $c_\Phi < \infty$。假设 T 是 $\mathcal{M}$ 中的一个算子，且 λ 是 $\sigma(T)$ 的边界点，即 $\lambda \in \partial\sigma(T)$。那么，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个非零投影 E 属于 $\mathcal{I}$，使得

$$\Phi(E) < 1 + c_\Phi \quad and \quad \Phi((T - \lambda I)E) < \varepsilon.$$

证明. 不失一般性，设 $\lambda = 0 \in \partial\sigma(T)$。由注 2.15 可知，$T^*T$ 不可逆。令 P 为 T^*T 关于闭区间 $[0, \frac{\varepsilon^2}{(1+c_\Phi)^2}]$ 的谱投影。显然，P 是 $\mathcal{M}$ 中的一个非零投影，且 $\|TP\| \leqslant \frac{\varepsilon}{1+c_\Phi}$。由引理 2.7，存在一个非零投影 E_0 属于 $\mathcal{I}$，使得 $E_0 \leqslant P$。由注 2.10，存在一个非零投影 $E \leqslant E_0$，使得$\Phi(E) < 1 + c_\Phi$。由于 E 是 P 的子投影，因此 $\|TE\| \leqslant \|TP\| \leqslant \frac{\varepsilon}{1+c_\Phi}$。结合引理 2.3 (1)，可得

$$\Phi(TE) \leqslant \|TE\|\Phi(E) < \varepsilon.$$

证明至此完成。□

注 3.2. E 的每个非零子投影也满足引理 3.1 中的结论。特别地，如果冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$ 是原子型的，即是 I 型因子的直和，那么可以将 E 选为极小投影。如果 $\mathcal{M}$ 是带有正规忠实半有限迹权 τ的 II 型$_\infty$ 因子，那么我们可以要求 $\tau(E) < \varepsilon$。

以下命题是本节的主要结果。

命题 3.3. 设 $\mathcal{M}$ 是一个冯·诺伊曼代数，满足 $\dim \mathcal{M} > 1$， $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{M}$中的弱算子稠密理想，且 Φ 是 $\mathcal{I}$上的酉不变 $\|\cdot\|$-支配范数，并满足 $c_\Phi < \infty$。那么，对任意 $T \in \mathcal{M}$ 和 $\varepsilon > 0$，存在算子 X 属于 $\mathcal{I}$，使得$\Phi(X) < \varepsilon$，且 $T + X$ 的谱不连通。

证明。 设 $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2(1+c_\Phi)} > 0$。假设 λ 是 $\sigma(T)$中的一个标量，使得

$$\operatorname{Re}\lambda = \max\{\operatorname{Re} z \colon z \in \sigma(T)\}.$$

那么 $\lambda \in \partial\sigma(T)$。不失一般性，我们可以假设 $\lambda = 0$。根据谱的上半连续性 [24, 定理 10。20], 存在 $0 < \delta < \varepsilon_0$，使得对每个满足 A 的算子 $\|A - T\| < \delta$ 以及每个 $z \in \sigma(A)$，都有实部$z < \varepsilon_0$。由引理 3.1，存在一个非零投影 E 属于 $\mathcal{I}$，使得

$$\Phi(E) < 1 + c_\Phi \quad \text{and} \quad \Phi(TE) < \delta. \tag{3.1}$$

由于 $\dim \mathcal{M} > 1$，我们可以进一步假设 $E \neq I$。这表明，对于每个 $z \in \sigma(T($ $I - E))$，$\operatorname{Re} z < \varepsilon_0$ $\|T(I - E) - T\| = \|TE\| \leqslant \Phi(TE) < \delta$。由推论 2.17 可得

$$\sigma(T(I - E)) = \{0\} \cup \sigma_{(I-E)\mathcal{M}(I-E)}((I - E)T(I - E)).$$

因此，对于每个 $z \in \sigma_{(I-E)\mathcal{M}(I-E)}((I - E)T(I - E))$，$\operatorname{Re} z < \varepsilon_0$。再次应用推论 2.17，集合

$$\sigma(\varepsilon_0 E + T(I - E)) = \{\varepsilon_0\} \cup \sigma_{(I-E)\mathcal{M}(I-E)}((I - E)T(I - E))$$

是不连通的。令 $X = (\varepsilon_0 I - T)E$。于是，由 (3.1) 及 ε_0 的定义可得

$$\Phi(X) \leqslant \varepsilon_0\Phi(E) + \Phi(TE) < \varepsilon.$$

证明完毕。 □

注 3.4. 由注 3.2 和命题 3.3 的证明可知，若 $\mathcal{M}$ 是原子型的，则 X 可以取为秩一算子。因此，我们得到了 [13] 中关于希尔伯特空间的主定理的新证明。此外，若 $\mathcal{M}$ 是具有正规忠实半有限迹权 τ 的 II 型 ∞ 因子，则我们可以要求 $\tau(R(X)) < \varepsilon$。

下面的命题是命题 3.3 的逆命题。

命题 3.5。设 $\mathcal{M}$ 是一个冯·诺伊曼代数，$\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{M}$ 中的弱算子稠密理想，Φ 是 $\mathcal{I}$ 上的酉不变 $\|\cdot\|$-支配范数，且满足 $c_\Phi = \infty$。则存在一个算子 $T \in \mathcal{M}$，使得对于满足 $\Phi(X) < 1$ 的每个 $X \in \mathcal{I}$，$\sigma(T+X)$ 都是连通的。

证明。根据引理 2.12，存在 $\mathcal{M}$ 中由非零中心投影组成的正交序列 $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得对于每个 $n \geqslant 1$，$f_\Phi(Z_n) \geqslant 2^n$。令 $Z_0 = I - \sum_{n=1}^{\infty} Z_n$。设 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是单位闭圆盘 $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ 中的稠密序列，使得对于每个 $n \geqslant 0$，$|\lambda_n| \leqslant 1 - 2^{-n}$。定义 $\mathcal{M}$ 中的算子 T 为

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n Z_n.$$

设 X 是 $\mathcal{I}$ 中一个满足 $\Phi(X) < 1$ 的算子。由引理 2.13 可知，对每个 $n \geqslant 0$，都有 $\|XZ_n\| \leqslant 2^{-n}$。因此

$$\|T + X\| = \sup_{n \geqslant 0} \|\lambda_n Z_n + XZ_n\| \leqslant 1.$$

因此 $\sigma(T+X) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$。对于每个标量 $\lambda \in \mathbb{D}$，都存在一个子列 $\{\lambda_{n_j}\}_{j=0}^{\infty}$ 收敛到 λ。对于每个 $j \geqslant 0$，取

$$\mu_j \in \sigma_{\mathcal{M}Z_{n_j}}(\lambda_{n_j} Z_{n_j} + XZ_{n_j}) \subseteq \sigma(T+X).$$

于是序列 $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ 收敛到 λ。由此可得 $\lambda \in \sigma(T+X)$。因此，$\sigma(T+X) = \mathbb{D}$。证明完毕。□

3.2. **实秩零 C^*-代数中的扰动**。受推论 2.8 和引理 3.1 的启发，我们在实秩零的含幺 C^*-代数中得到一个类似的技术性引理，并据此证明定理 1.2。

引理 3.6. 设 $\mathcal{A}$ 是一个实秩零的含幺 C^*-代数，且 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{A}$中的本质理想。设 T 是 $\mathcal{A}$ 中的一个元素，且 λ 是 $\sigma(T)$的边界点。那么对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个非零投影 E 属于 $\mathcal{I}$，使得 $\|(T - \lambda I)E\| < \varepsilon$。

证明。不失一般性，假设 $\lambda = 0$。由注 2.15 可知，T^*T 在 $\mathcal{A}$ 中不可逆。由于 $\mathcal{A}$ 具有实秩零，存在非零投影$\{P_j\}_{j=1}^{n}$属于 $\mathcal{A}$，其和为 I，以及标量 $0 = \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$，使得

$$\|T^*T - (\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n)\| < \varepsilon^2.$$

由此可得 $\|P_1 T^*T P_1\| < \varepsilon^2$。根据引理 2.7，存在一个非零投影 E，属于 $\mathcal{I}$，使得 $E \leqslant P_1$。显然，$\|TE\| < \varepsilon$。□

根据引理 3.6 和命题 3.3 的证明，我们得到实秩零的含幺C^*-代数的定理 1.2。

定理 *1.2* 的证明。 设 $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2} > 0$。按照命题 3.3 的证明，我们可以假设 $0 \in \sigma(T)$，且对所有 $z \in \sigma(T)$，$\mathrm{Re}\ z \leqslant 0$。此外，存在$0 < \delta < \varepsilon_0$，使得对于每个满足 $\|A - T\| < \delta$ 的算子 A 以及每个 $z \in \sigma(A)$，都有 $\mathrm{Re}\, z < \varepsilon_0$。根据引理 3.6，存在 $\mathcal{I}$ 中的非零投影 E，使得$\|TE\| < \delta$。令 $X = (\varepsilon_0 I - T)E$。类似于命题 3.3 的证明，我们有$\|X\| < \varepsilon$，且 $T + X$ 的谱是不连通的。□

接下来，我们在本文末尾简要讨论交换含单位 C^*-代数中的问题 1.4。对于 $\mathbb{R}$ 的每个子集 X，我们用 $|X|$ 表示 X 的基数，并用 $\mathrm{diam}(X) = \sup\{|x - y|: x, y \in X\}$ 表示其直径。

引理 3.7.设 X 是 $\mathbb{R}$的非空紧子集。若 X 不是有限个互不相交的闭区间之并，则存在 X 的非空闭开子集 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得 $\mathrm{diam}(X_n) \to 0$ 当 $n \to \infty$时成立。

证明。由于 $\mathbb{R} \setminus X$是开集，存在互不相交的开区间 $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{N}$，其并为$\mathbb{R} \setminus X$，其中 N可以是无限集。若 N是有限集，则根据假设， X 中存在一个孤立点 x_0。此时，对每个 $n \geqslant 1$，我们可以取 $X_n = \{x_0\}$。假设 N是无限集，$(a_1, b_1) = (-\infty, \min X)$，且 $(a_2, b_2) = (\max X, \infty)$。对每个 $n \geqslant 1$，我们选取一点 $c_n \in (a_n, b_n)$。于是 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界，且包含一个单调收敛子列 $\{c_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$。不失一般性，假设 $\{c_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$单调递增。对每个 $k \geqslant 1$，令 $X_k = (c_{n_k}, c_{n_{k+1}}) \cap X = [c_{n_k}, c_{n_{k+1}}] \cap X$。则 X_k 是 X的闭开子集。由于 $\{c_{n_k}\}_{k \geqslant 1}$ 收敛，我们得到，当 $k \to \infty$时，$\mathrm{diam}(X_k) \leqslant c_{n_{k+1}} - c_{n_k} \to 0$。证明完毕。□

利用引理 3.7，我们证明以下结果。

命题 3.8. 设 X 是实直线 $\mathbb{R}$ 的一个紧子集，且 $|X| > 1$。那么，在 $C(X)$ 中具有非连通谱的函数集是稠密的，当且仅当 X 不是有限个互不相交的闭区间的并。

证明。 假设 X 是有限个互不相交的闭区间的并。不失一般性，假设 $X = \bigcup_{k=1}^{n} [2k, 2k+1]$，其中 $n \geqslant 1$。我们在 X 上定义连续复值函数 f 如下：

$$f(t) = \begin{cases} 2t - 5, & t \in [2, 3], \\ i(2t - 4k - 1), & t \in [2k, 2k+1] \ \text{ and } \ 2 \leqslant k \leqslant n. \end{cases}$$

那么 f 不是 $C(X)$ 中具有非连通谱的函数的极限。

在证明的其余部分，假设 X 不是有限个互不相交的闭区间的并。由引理 3.7，存在 X 的非空闭开子集 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得当 $n \to \infty$ 趋于 $\to 0$ 时，$\operatorname{diam}(X_n) \to 0$。取子列后，不妨假设对于某个点 $t_0 \in X$，$\operatorname{dist}(t_0, X_n) \to 0$。此外，假设对于某个足够大的整数 $N \geqslant 1$，$X \subseteq [-N, N]$。令 $f \in C(X)$，并令 $\varepsilon > 0$。由 Tietze 延拓定理，存在定义在 $[-N, N]$ 上的连续函数 F，使得对每个 $t \in X$，$F(t) = f(t)$。显然，存在分段线性函数 $G \in C([-N, N])$，使得对每个 $t \in [-N, N]$，$\|G(t) - F(t)\| < \frac{\varepsilon}{3}$。根据假设，存在一个足够大的整数 $n_0 \geqslant 1$，使得对每个 $t \in X_{n_0}$，$|f(t) - f(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$。由于 G 是分段线性的，存在一个不在 G 值域内的标量 $\lambda \in \mathbb{C}$，使得 $|\lambda - f(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$。我们定义一个函数

$$g(t) = \begin{cases} \lambda, & t \in X_{n_0}, \\ G(t), & t \in X \setminus X_{n_0}. \end{cases}$$

于是 $g \in C(X)$、$\|g - f\| < \varepsilon$，且 g 的谱是非连通的。至此证明完成。□

注 3.9. 设 X 为复平面 $\mathbb{C}$ 中满足 $|X| > 1$ 的紧子集。若 $C(X)$ 中具有非连通谱的函数集合是稠密的，则 X 的内部为空。否则，我们可以假设 0 是 X 的一个内点，并且 $2\mathbb{D} \subseteq X$。设

$$F(z) = \begin{cases} z, & z \in \overline{\mathbb{D}}, \\ z(2 - |z|), & z \in 2\overline{\mathbb{D}} \setminus \overline{\mathbb{D}}, \\ 0, & |z| > 2. \end{cases}$$

设 f 为 F 在 X 上的限制。假设 $g \in C(X)$ 且 $\|g - f\| < \frac{1}{2}$。显然，

$$g(z) \in \frac{1}{2}\overline{\mathbb{D}} \subseteq g(\overline{\mathbb{D}}) \subseteq g(2\overline{\mathbb{D}}) \subseteq g(X)$$

对每个 $z \in X \setminus 2\mathbb{D}$ 成立。因此，$g(X) = \overline{g}(2\mathbb{D})$ 是连通的。所以，f 不是 $C(X)$ 中具有非连通谱的函数的极限。一般而言，要像命题 3.8 那样找到关于 X 的充要条件似乎很困难。

参考文献

[1] AlekseiBer, FedorSukochev, DmitriyZanin. 局部可测算子的海森堡关系。Adv. Math. 335 (2018), 211–230. MR3836663

[2] Lawrence G. Brown, Gert K. Pedersen. 实秩零的 C^*代数。《数学分析杂志》99 (1991), no. 1, 131–149. MR1120918[3] John Conway. 泛函分析教程。Grad. Texts in Math., 96 Springer- Verlag, New York, 1990. xvi+399 页。MR1070713[4]Kenneth Davidson. 以实例讲解 C^*代数。Fields Inst. Monogr., 6 American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. xiv+309 页。MR1402012[5] Junsheng Fang, Chunlan Jiang, Huaxin Lin, Feng Xu. 广义普遍无理旋转代数及其相关强不可约算子。Internat. J. Math. 24 (2013), no. 8, 1350059, 35 pp. MR3103875[6] Junsheng Fang, Chunlan Jiang, Rui Shi. 关于II型$_1$因子中算子的两个问题（中文）。Sci Sin Math, 2023, 53: 1621–1630. doi: 10.1360/SSM- 2022-0222[7]Frank Gilfeather. 算子的强可约性。Indiana Univ. Math. J. 22 (1972/73), 393–397. MR0303322[8]Donald Hadwin, Minghui Ma, Junhao Shen. 适当无限因子中的 Voiculescu 定理。《数学分析杂志》290 (2026), no. 1, Paper No. 111198, 34 pp. MR4964138[9] Donald Hadwin, Rui Shi. 半有限冯·诺伊曼代数中交换 C^*代数表示的一则注记。Oper. Matrices 12 (2018), no. 4, 1129–1144. MR3890754[10]Paul Halmos. 不可约算子。Michigan Math. J. 15 (1968), 215–223. MR0231233[11] Paul Halmos. 希尔伯特空间中的十个问题。Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), 887–933. MR0270173 [12] Domingo Herrero, Chunlan Jiang. 强不可约算子的极限与 Riesz 分解定理。Michigan Math. J. 37 (1990), no. 2, 283–291. MR1058401[13]Domingo Herrero, Norberto Salinas. 不连通谱算子是稠密的。Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), 525–526. MR0301535[14] Chunlan Jiang, Zongyao Wang. 希尔伯特空间上的强不可约算子。Pitman Res. Notes Math. Ser., 389, Longman, Harlow, 1998. x+243页。MR1640067[15] Chunlan Jiang, Zongyao Wang. 希尔伯特空间算子的结构。World Sci- entific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2006. x+248 页。MR2221863[16] Richard Kadison, John Ringrose. 算子代数理论基础，第二卷：高级理论。Academic Press, Orlando, FL, 1986. MR0859186[17]Victor Kaftal, Gary Weiss. 迹、理想与算术平均。Proc. Natl. Acad. Sci. USA 99 (2002), no. 11, 7356–7360. MR1907839

[18] 李其辉、Junhao Shen、沈俊豪、石锐、王立光。半有限冯·诺伊曼代数中自伴算子的扰动：加藤–罗森布鲁姆定理。《数学分析杂志》275 (2018)，第 2 期，259–287。MR3802483[19]李其辉、Junhao Shen、沈俊豪、石锐。将正规算子的 Voiculescu 定理推广到半有限冯·诺伊曼代数。Adv. Math. 375 (2020)，107347，55 页。MR4135419[20] MINGHUI MA、Junhao Shen、沈俊豪、石锐、TIANZE WANG。因子中不可约算子的乘积。arXiv:2512.12162，2025。doi.org/10.48550/arXiv.2512.12162[21] Gert Pedersen。C^*代数及其自同构群。伦敦数学会专著，14，学术出版社。 [Harcourt Brace Jovanovich 出版社],伦敦—纽约，1979，ix+416 页。MR0548006[22] Heydar Radjavi、Peter Rosenthal。不变子空间。数学与相关领域成果，卷 77 [数学与相关领域成果]施普林格出版社，纽约—海德堡，1973。xi+219 页。MR0367682[23]Charles Read。将算子从一个希尔伯特空间扩展到更大的希尔伯特空间，从而缩减其谱。《以色列数学杂志》57 (1987)，第 3 期，375–380。MR0889985[24]Walter Rudin。泛函分析。第二版。国际纯粹与应用数学丛书。麦格劳-希尔公司，纽约，1991。xviii+424 页。MR1157815[25]Junhao Shen、沈俊豪、石锐。非-Γ II 型$_1$ 因子中的可约算子。arXiv:1907.00573v3 [math.OA], 2019。doi.org/10.48550/arXiv.1907.00573[26] Junhao Shen、沈俊豪、石锐。冯诺依曼因子中不可约算子之和。《美国数学会会刊》148 (2020)，第 7 期，2901–2908。MR4099778[27] David Sherman。冯·诺伊曼代数中正规算子的酉轨道。《纯粹与应用数学杂志》605 (2007)，95–132。MR2338128[28]RUI SHI。半有限冯诺依曼因子中不可约算子的赋范理想扰动。《积分方程与算子理论》93 (2021)，第 3 期，论文编号 34，25 页。MR4270806[29]Dan Voiculescu。非交换 Weyl–von Neumann 定理。《罗马尼亚数学纯粹与应用评论》21 (1976)，第 1 期，97–113。MR0415338[30] Dan Voiculescu。希尔伯特空间算子的范数理想扰动的一些结果。《算子理论杂志》2 (1979)，第 1 期，3–37。MR0553861[31] Dan Voiculescu。希尔伯特空间算子的范数理想扰动的一些结果。II。《算子理论杂志》5 (1981)，第 1 期，77–100。MR0613049[32]Dan Voiculescu。K-理论与绝对连续谱的扰动。《数学物理通讯》365 (2019)，第 1 期，363–373。MR3900834[33] 夏景波。模洛伦兹理想的富格莱德交换关系。《美国数学会汇刊》377 (2024)，第 1 期，249–269。MR4684592

MINGHUI MA，大连理工大学数学科学学院，中国大连，116024

电子邮箱： minghuima@dlut.edu.cn

RUI SHI，大连理工大学数学科学学院，中国大连，116024

电子邮箱： ruishi@dlut.edu.cn

TIANZE WANG，大连理工大学数学科学学院，中国大连，116024

电子邮箱： swan0108@mail.dlut.edu.cn