arXiv:2602.01432v1 [math.PR] 1 Feb 2026

次不变核动力学

JAMES TIAN

摘要。我们研究沿有限个自映射拉回的正定核，并假设相关分支算子满足次不变性不等式。迭代会产生一个递增的核塔及其缺陷核。在对角有界的条件下，该核塔存在最小不变主控核，并具有规范的缺陷空间实现，以及一个显式的对角调和包络，用以判定有限性与爆炸。我们还给出概率表示和边界表示：一个二次变差为缺陷序列的高斯鞅模型，以及用于归一化缺陷的规范 Doob 路径测度和边界特征模型。

目录

1. 引言 1
2. 次不变性与不变主控函数 4
3. 对角动力学 11
4. 高斯缺陷鞅 16
5. 边界模型与Doob变换 18
参考文献 23

1. 引言

我们考虑一种简单但稳健的情形：在集合 X 上的正定核K： $X \times X \to \mathbb{C}$，沿着有限个映射$\phi_1$、.....、$\phi_m$： $X \to X$反复拉回。基本对象是作用于核上的相应“分支”算子 L,

$$(LJ)(s,t) := \sum_{i=1}^{m} J(\phi_i(s), \phi_i(t)),$$

并且我们始终假设次不变性不等式 $LK \geq K$ 在正定序意义下成立。通俗地说，这一条件意味着核沿着 ϕ-树传输时不会损失正质量。它让人联想到次调和性，以及算子代数上的完全正映射所满足的 $\Phi(A) \geq A$ 形式的不等式 [Pau02], ，并且它隐含地出现在多种情形中：迭代函数系统和自相似结构、用于非可逆马尔可夫动力学的基于核的模型，以及给定核位于一个

2020 20, 60 46 22 31 20, 37 30, 47 15数学主题分类。 主要分类：E；次要分类：C C A G。关键词与短语。 正定核；再生核希尔伯特空间；不变主控核；缺陷分解；分支动力学；Doob变换；边界路径测度；高斯鞅。

更对称或不变的模型核之下的压缩插值问题，参见 [LP16,AM02, Pau02, PR16]。从另一个互补的视角来看，沿动力系统传输函数或观测量所得到的算子（Koopman 型和 Perron-Frobenius 型算子），近年来已在再生核希尔伯特空间（RKHS）框架下得到分析；在此框架中，核发挥状态空间度量的作用，而传递算子则具有谱理论和逼近理论 $\mathcal{H}_K$ [KSM20]；相关构造还产生了适用于系综动力学的整族再生核希尔伯特空间 [DHMT24]。

从 K 和 (ϕ_i) （第 2节）开始， L 的动力系统生成一个核塔

$$K_0 := K, \qquad K_{n+1} := LK_n \quad (n \geq 0),$$

以及它们的亏量 $D_n := K_{n+1} - K_n$。可以将 K_n 视为沿着根式 ϕ-树中所有长度为-n的分支进行遍历后得到的 n 步核，而 D_n则记录了在 n 与 $n+1$层之间注入的新正质量。本文的第一个目标是理解这一过程的“不变完备化”：递增的核塔 (K_n) 在什么条件下会收敛到极限核 K_∞， K_∞ 从 L继承了什么结构，以及原始核 K 如何嵌入这一完备化之中？始终将正定性理解为 Aronszajn [Aro50] 意义下的经典概念（另见 [PR16、SS16、BTA04]）。一个自然的有限性要求是对角有界条件

$$\sup_{n \geq 0} K_n(s,s) < \infty \quad \text{for all } s \in X.$$

这一假设是有意设置得较弱的：我们不对 X假设任何拓扑或测度，也不对映射 ϕ_i 假设任何紧致性或谱性质。我们的第一个主要结果表明，在这一假设下，该核塔具有一个规范的 L-不变完备化。核 K_n 逐点递增，并收敛到满足以下条件的正定核 K_∞

$$K_\infty \geq K, \qquad LK_\infty = K_\infty,$$

并且 K_∞ 在所有 L-不变且支配 K的核中是最小的。此外，缺陷塔具有正交实现：可以在一个通过逐层添加缺陷空间而得到的环境希尔伯特空间上表示 K_∞ ，从而 K可通过规范压缩从 K_∞ 恢复。特别是，子不变动力系统在其自身的不变完备化内部，导出了 K 的一种具体的拉东-尼科迪姆型表示，其思想与 Sz.-Nagy-Foiaş 缺陷分解和压缩算子模型理论 [SNFBK10], 颇为接近，但该构造是在核的层面上进行的，且不假设预先存在的希尔伯特空间上有一个算子。<style>不变完备化还为映射 ϕ_i所关联的多变量行等距算子提供了自然构造，使这一构造纳入多变量膨胀理论的范畴 [Arv98]。特别是，行等距算子及其 Wold 型分解的算子理论结构 [SZ08、Ful23]为此处产生的正交缺陷分解提供了有益的组织框架类比。

本文的第二个主题是探究这种完备化何时确实是有限的，以及它会在哪里失效（第3节）。关键观察是，对角动力学解耦为 ϕ树上的一个纯组合过程。记

$$u_n(s) := K_n(s,s), \qquad s \in X,$$

可得到一个作用于非负函数的分支算子 P，

$$(Pu)(s) := \sum_{i=1}^{m} u(\phi_i(s)),$$

使得 $u_{n+1} = Pu_n$，从而 $u_n = P^n u_0$。我们证明，(u_n) 的逐点增长由一个势理论图景所支配：函数

$$h_\infty(s) := \sup_{n\geq 0} u_n(s)$$

是 $u_0(s) = K(\{\mathrm{v5},\ s)$ 的最小 P-调和上主函数。这引出了一个向前不变的有限性区域

$$X_{\mathrm{fin}} := \{s \in X :\ h_\infty(s) < \infty\},$$

在该区域上，不变完备化 K_∞ 有定义，且其对角项有限；而在此区域之外，对角项沿核塔单调发散。除了这一刻画之外，我们还给出了实用的、基于树的判据——李雅普诺夫型衰减条件，以及基于分支计数的互补性非衰减机制。这些判据与树和分支马尔可夫链上的经典势理论相似，但在此针对的是核塔的对角项，而非标量调和函数 [LP16、Woe09、Soa94]。近期关于树上调和函数和多重调和函数边界表示的研究 [PW19、PW20]，以及关于分支型动力系统的 Martin 边界的研究 [BCZ24]，为理解调和上主函数和有限性区域在树索引增长问题中的作用提供了更多背景。

这项工作的第三个组成部分是对缺陷塔和压缩进行概率重新诠释（第4节）。我们构造一个高斯场，其各层截断具有协方差核 K_N，并形成一个增量相互正交的鞅；该鞅的可预测二次变差就是缺陷塔(D_n)。在有限集上，当且仅当 K_N 的格拉姆矩阵一致有界时，这个鞅才收敛，其极限协方差为 K_∞。在环境希尔伯特空间层面，压缩算子成为两个高斯协方差结构之间一个实在的拉东–尼科迪姆导数：一个结构的核为K_∞，另一个的核为 K。这一观点与高斯过程和再生核希尔伯特空间之间众所周知的对应关系相契合 [RW06，BCR84，Lif12，BTA04],；但在这里，高斯结构是专为次不变动力系统所诱导的特定缺陷分解而设计的。随机树上的边界过程和跳跃动力学 [Tok20] 则从另一个角度提供了概率视角，揭示树边界如何编码以树为指标的演化的极限行为。

最后一部分（第5节）对完备化进行了边界/路径空间组织。我们通过转向符号边界 $\Omega = \{1,\dots,m\}^{\mathbb{N}}$，并从极小调和优函数 h_∞中提取一族规范的 Doob变换马尔可夫测度μ_s，定义于Ω上，从而将词动力学中隐含的树结构明确呈现出来。这就产生了分支动力学的归一化“Doob”版本，并为归一化核迭代和缺陷塔给出边界柱集展开；随后可借助显式的边界特征映射，将其实现为一个 L^2-边界格拉姆核。这使本文的核次不变性问题与离散分支/图系统的路径空间测度和边界表示构造 [BJ22、BJ24、PW20], 联系起来，同时仍将输出保持

在核/再生核希尔伯特空间层面（而非仅限于调和函数或算子代数数据）。

总体思想是：不等式 $LK \geq K$ 沿映射的有限分支系统迭代时，会迫使不变完备化与对角增长动力学呈现出丰富且相当刚性的结构。由此形成的图景与算子理论中的膨胀和模型理论[SNFBK10, Arv98, SZ08, Ful23]，、树上的势理论与分支过程 [LP16, Woe09, Soa94, PW19, PW20, BCZ24]，，以及概率与统计中的高斯/再生核希尔伯特空间方法 [BTA04, RW06, Lif12]都有相通之处。它也与更广泛的、面向动力系统的基于核的算子方法相一致，其中传递算子通过再生核希尔伯特空间结构加以研究 [KSM20, DHMT24]。与此同时，这里的设定是组合的、核理论的：不需要测度、拓扑或环境算子代数。

2. 次不变性与不变主控函数

在本节中，我们建立分支算子 L 作用于正定核的基本次不变性理论。

设 X 为一个集合， $K\colon\ X\times X\to\mathbb{C}$ 为一个正定（p.d.）核，且 $\phi_1,\dots,\phi_m\colon X\to X$ 为 X上的映射。我们采用标准约定 $K_s(\cdot)\colon=K(\cdot,s)$，从而对所有 $s\in X$ 与 $f\in\mathcal{H}_K$，有$K(s,t)=\langle K_s,K_t\rangle_{\mathcal{H}_K}$以及 $f(s)=\langle K_s,f\rangle_{\mathcal{H}_K}$，其中$\mathcal{H}_K$ 是 K的再生核希尔伯特空间（RKHS）。全文中，所有内积对第二个变量都是线性的。

设 $\mathcal{K}(X)$表示 X上所有正定核的集合，并在 $J_1-J_2\in\mathcal{K}(X)$时记作 $J_1\geq J_2$。

定义作用于 $\mathcal{K}(X)$的线性算子 L 如下

$$(LJ)(s,t):=\sum_{i=1}^{m}J(\phi_i(s),\phi_i(t)).$$

对于任意 $J\in\mathcal{K}(X)$，每个拉回核

$$(s,t)\mapsto J(\phi_i(s),\phi_i(t))$$

都是正定的，因此 $LJ\in\mathcal{K}(X)$。特别地， L 是保序的： $J_1\geq J_2$ 蕴含$LJ_1\geq LJ_2$。

假设次不变性不等式

$$LK\geq K. \tag{2.1}$$

等价地，缺陷核

$$D:=LK-K$$

是正定的，即 $D\in\mathcal{K}(X)$。

对于所有 $n\in\mathbb{N}_0\coloneqq\{0,1,2,\dots\}$，定义核塔

$$K_{n+1}:=LK_n,\quad K_0:=K,$$

以及缺陷迭代

$$D_n:=K_{n+1}-K_n,\quad D_0:=D.$$

最后，假设满足以下有限性条件：

$$\sup_{n\geq0}K_n(s,s)<\infty,\quad\forall s\in X. \tag{2.2}$$

定理 2.1. 在上述设定下：

(1) 对所有 s、$t \in X$，极限

$$K_\infty(s,t) := \lim_{n\to\infty} K_n(s,t) \tag{2.3}$$

存在（有限），且 K_∞ 属于 $\mathcal{K}(X)$ 并满足

$$K_\infty \geq K, \quad LK_\infty = K_\infty.$$

此外，K_∞ 是 K的极小 L-不变主控核。也就是说，若 $J \in \mathcal{K}(X)$、$J \geq K$且 $LJ = J$，则 $J \geq K_\infty$。

(2) 亏量满足 $D_n = L^n D$，且对每个 $N \geq 1$，

$$K_N = K + \sum_{n=0}^{N-1} D_n. \tag{2.4}$$

特别地，

$$K_\infty = K + \sum_{n=0}^{\infty} D_n, \tag{2.5}$$

其中，该级数在 X的每个有限子集上按格拉姆矩阵的意义收敛。

(3) 设 $\mathcal{H}_{D_n}$ 是 D_n 的再生核希尔伯特空间，并令

$$\mathcal{E} := \mathcal{H}_K \oplus \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{H}_{D_n}. \tag{2.6}$$

对每个 $s \in X$，定义

$$v(s) := K_s \oplus \bigoplus_{n\geq 0} (D_n)_s \in \mathcal{E}.$$

则 $v(s)$ 定义良好，且

$$K_\infty(s,t) = \langle v(s), v(t)\rangle_{\mathcal{E}}.$$

设 $P_0 : \mathcal{E} \to \mathcal{H}_K$ 为到第一个直和项的坐标投影，并定义 $A := P_0^* P_0$（$\mathcal{E}$ 上的一个正压缩算子）。于是

$$K(s,t) = \langle v(s), Av(t)\rangle_{\mathcal{E}}.$$

因此，次不变动力学在不变完备化 K_∞ 中规范地给出了 K 的拉东-尼科迪姆压缩表示，其意义是：对所有 s、$t \in X$，$K_\infty(s,t) = \langle v(s) \;\; v(t)\rangle_{\mathcal{E}}$，且 $K(s,t) = \langle v(s) \;\; Av(t)\rangle_{\mathcal{E}}$。

证明。假设（2.1）蕴含

$$K_1 - K_0 = LK - K = D_0 \geq 0.$$

归纳地，若 $K_n \geq K_{n-1}$，则 $K_{n+1} = LK_n \geq LK_{n-1} = K_n$。因此 $\{K_n\}$ 是一个递增序列。特别地，每个差值

$$D_n := K_{n+1} - K_n$$

是正定的。此外，根据 $K_{n+1} = LK_n$ 我们计算得出

$$D_n = K_{n+1} - K_n = LK_n - LK_{n-1} = L(K_n - K_{n-1}) = LD_{n-1}.$$

因此，对于所有 $n \geq 0$， $D_n = L^n D$。因此，对于 $N \geq 1$,

$$K_N - K = \sum_{n=0}^{N-1} (K_{n+1} - K_n) = \sum_{n=0}^{N-1} D_n,$$

由此证明了有限层能量恒等式（2.4）。

固定一个有限集 $F = \{x_1, \ldots, x_r\} \subset X$。考虑格拉姆矩阵

$$G_n := [K_n(x_a, x_b)]_{a,b=1}^r .$$

每个 G_n 都是半正定的，且 $G_{n+1} - G_n = [D_n(x_a, x_b)]$ 是半正定的；因此 G_n 在厄米矩阵的序下递增。由（2.2），对角元 $(G_n)_{aa} = K_n(x_a, x_a)$ 在 n 中对每个 a 一致有界，因此

$$\operatorname{tr}(G_n) = \sum_{a=1}^r K_n(x_a, x_a) \leq \sum_{a=1}^r \sup_{n \geq 0} K_n(x_a, x_a) < \infty.$$

由于 $G_n \geq 0$，可得 $\|G_n\| \leq \mathrm{tr}(G_n)$，故 $\sup_n \|G_n\| < \infty$。因此 $\{G_n\}$ 在算子范数下递增且一致有界，从而（在算子范数下）收敛到一个半正定矩阵

$$G_\infty := \lim_{n \to \infty} G_n.$$

特别地，对每个 $1 \leq a, b \leq r$,

$$(G_\infty)_{ab} = \lim_{n \to \infty} K_n(x_a, x_b).$$

由于这对每个有限的 F 都成立，逐点极限

$$K_\infty(s,t) := \lim_{n \to \infty} K_n(s,t)$$

定义了一个正定核。由单调性立即得到 $K_\infty \geq K$。为证明 $LK_\infty = K_\infty$，固定 $s, t \in X$ 并计算

$$(LK_\infty)(s,t) = \sum_{i=1}^m K_\infty(\phi_i(s), \phi_i(t)) = \sum_{i=1}^m \lim_{n \to \infty} K_n(\phi_i(s), \phi_i(t)).$$

由于 m 是有限的，我们可以将极限移入求和号，得到

$$\begin{aligned}(LK_\infty)(s,t) &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^m K_n(\phi_i(s), \phi_i(t)) \\ &= \lim_{n \to \infty} (LK_n)(s,t) = \lim_{n \to \infty} K_{n+1}(s,t) = K_\infty(s,t).\end{aligned}$$

关于极小性：若 $J \geq K$ 且 $LJ = J$，则由 L 的正性可得，

$$J = L^n J \geq L^n K = K_n \quad \text{for all } n.$$

取 $n \to \infty$ 得到 $J \geq K_\infty$。这就完成了 (1) 的证明。

最后，恒等式 (2.5) 的含义是，对于每个有限的 F，格拉姆矩阵满足

$$[K_\infty(x_a, x_b)]_{a,b} = [K(x_a, x_b)]_{a,b} + \sum_{n=0}^\infty [D_n(x_a, x_b)]_{a,b},$$

其中收敛是指厄米矩阵序下的收敛，因为部分和为$G_N - G_0$，并递增至 $G_\infty - G_0$。这是式 (2) 的格拉姆矩阵形式。

定义希尔伯特空间

$$\mathcal{E} := \mathcal{H}_K \oplus \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{H}_{D_n}.$$

固定 $s \in X$。我们声称

$$\sum_{n\geq 0} \|(D_n)_s\|^2_{\mathcal{H}_{D_n}} < \infty,$$

因此，$v(s) = K_s \oplus \bigoplus_{n\geq 0} (D_n)_s$ 是 $\mathcal{E}$中的良定义元素。事实上，在任意再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}_J$ 中，都有 $\|J_s\|^2_{\mathcal{H}_J} = J(s, s)$。因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} \|(D_n)_s\|^2_{\mathcal{H}_{D_n}} &= \sum_{n=0}^{N-1} D_n(s,s) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(K_{n+1}(s,s) - K_n(s,s)\right) = K_N(s,s) - K(s,s).\end{aligned}$$

令 $N \to \infty$ 并利用（2.2），可得其有限性:

$$\sum_{n\geq 0} \|(D_n)_s\|^2_{\mathcal{H}_{D_n}} = K_\infty(s,s) - K(s,s) < \infty.$$

因此，对于每个 s，都有 $v(s) \in \mathcal{E}$。现在固定 s，$t \in X$。对于每个 N,

$$\left\langle K_s \oplus \bigoplus_{n=0}^{N-1} (D_n)_s,\ K_t \oplus \bigoplus_{n=0}^{N-1} (D_n)_t \right\rangle_{\mathcal{E}} = K(s,t) + \sum_{n=0}^{N-1} D_n(s,t) = K_N(s,t),$$

利用再生核希尔伯特空间的恒等式 $\langle K_s,\ K_t\rangle_{\mathcal{H}_K} = K(s,\ t)$ 和 $\langle (D_n)_s,\ (D_n)_t\rangle_{\mathcal{H}_{D_n}} = D_n(s,\ t)$，以及望远镜恒等式。令 $N \to \infty$。则 $K_N(s,\ t) \to K_\infty(s,\ t)$，而 $\mathcal{E}$中的部分和在范数意义下收敛到 $v(s)$ 和 $v(t)$。因此，内积收敛，从而得到

$$\langle v(s), v(t)\rangle_{\mathcal{E}} = \lim_{N\to\infty} K_N(s,t) = K_\infty(s,t).$$

这就证明了（3）中的特征表示。令 P_0： $\mathcal{E} \to \mathcal{H}_K$ 为到第一个直和项的坐标投影，并令 A： $= P_0^* P_0$。于是，A 是 $\mathcal{E}$上的正压缩算子，并且

$$\langle v(s), Av(t)\rangle_{\mathcal{E}} = \langle P_0 v(s), P_0 v(t)\rangle_{\mathcal{H}_K} = \langle K_s, K_t\rangle_{\mathcal{H}_K} = K(s,t),$$

如所述。 □

命题 2.2。保持上述设定，并定义 K_∞ 。令 $\mathcal{H}_{K_\infty}$ 为 K_∞的再生核希尔伯特空间。在 $\operatorname{span}\{(K_\infty)_s$： $s \in X\}$ 上定义

$$V : \operatorname{span}\{(K_\infty)_s : s \in X\} \to \mathcal{H}_{K_\infty}^{\oplus m}, \qquad V(K_\infty)_s := \bigoplus_{i=1}^{m} (K_\infty)_{\phi_i(s)}.$$

于是 V可延拓为一个等距算子，并将 $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ 写作 $V_i \in B(\mathcal{H}_{K_\infty})$，我们有

$$\sum_{i=1}^{m} V_i^* V_i = I.$$

此外，存在一个正压缩算子 $A \in B(\mathcal{H}_{K_\infty})$，使得

$$K(s,t) = \langle (K_\infty)_s, A(K_\infty)_t\rangle_{\mathcal{H}_{K_\infty}} \quad (s,t \in X), \tag{2.7}$$

并且 $LK \geq K$ 等价于

$$\sum_{i=1}^{m} V_i^* A V_i \geq A$$

（已在 $\operatorname{span}\{(K_\infty)_s : s \in X\}$ 上验证，因此在 $\mathcal{H}_{K_\infty}$ 上以形式意义成立）。

证明。由 $LK_\infty = K_\infty$ 可得，对于 $s,t \in X$，

$$\begin{aligned}\langle V(K_\infty)_s, V(K_\infty)_t\rangle_{\mathcal{H}_{K_\infty}^{\oplus m}} &= \sum_{i=1}^{m} K_\infty(\phi_i(s),\phi_i(t)) \\ &= K_\infty(s,t) = \langle (K_\infty)_s, (K_\infty)_t\rangle_{\mathcal{H}_{K_\infty}},\end{aligned}$$

因此，V 在核截面的稠密线性张成上是等距的，并可延拓为一个等距算子。令 $V = \bigoplus_i V_i$，则得到

$$\langle f,g\rangle = \langle Vf, Vg\rangle = \sum_i \langle V_i f, V_i g\rangle = \left\langle f, \left(\sum_i V_i^* V_i\right) g\right\rangle,$$

因此，$\sum_i V_i^* V_i = I$。算子 A 是定理 2.1中的压缩，在 $\mathcal{H}_{K_\infty}$ 上由恒等映射实现

$$K(s,t) = \langle (K_\infty)_s, A(K_\infty)_t\rangle.$$

最后，对于 $s,t \in X$，

$$\begin{aligned}\sum_i K(\phi_i(s),\phi_i(t)) &= \sum_i \left\langle (K_\infty)_{\phi_i(s)}, A(K_\infty)_{\phi_i(t)}\right\rangle \\ &= \left\langle (K_\infty)_s, \left(\sum_i V_i^* A V_i\right)(K_\infty)_t\right\rangle,\end{aligned}$$

因此，$LK \geq K$ 当且仅当$\sum_i V_i^* A V_i \geq A$ 在 $\operatorname{span}\{(K_\infty)_s\}$ 上成立，故在$\mathcal{H}_{K_\infty}$上以二次型意义成立。□

注 2.3. 命题 2.2表明，K 的拉东-尼科迪姆压缩可在 $\mathcal{H}_{K_\infty}$ 上按（2.7）所示在内部实现。特别地，不变完备化K_∞ 包含了足够的信息，可通过压缩来表示 K。不过，（$\mathcal{E}$ 2.6）中的辅助膨胀空间仍然很有用。首先，它使压缩算子完全显式：在 $\mathcal{E}$ 上有 $A = P_0^* P_0$，其中 $P_0 : \mathcal{E} \to \mathcal{H}_K$ 是坐标投影。其次，$\mathcal{E}$ 将缺陷塔保留为正交直和，因此分解（2.5）在希尔伯特空间层面得以实现；这便于进行截断和估计，并追踪各个缺陷核的贡献 D_n。

“拉东-尼科迪姆”一词源自算子代数上完全正映射的拉东-尼科迪姆（RN）定理。若 Φ，Ψ 是定义在 C^*-代数或冯·诺依曼代数上的正规完全正映射，且 $\Phi \leq \Psi$ 按通常序关系成立，则对于 Ψ 的斯廷斯普林膨胀（π，H_Ψ，V），存在一个正压缩算子$0 \leq B \leq I_{H_\Psi}$，使得 $B \in \pi(\mathcal{A})'$ 并且

$$\Phi(x) = V^* B \pi(x) V, \qquad x \in \mathcal{A},$$

例如参见 [BS86、Arv98、Pau02]中关于该定理不同版本的论述。在该设定下B 是 Φ 相对于 Ψ的拉东-尼科迪姆导数，作用于膨胀空间 H_Ψ上。当前的核构造是再生核希尔伯特空间层面上的直接类比（[Aro50、SS16、Tia25]）。

推论 2.4。 令 $\mathcal{W}_n := \{1,\dots,m\}^n$ 为长度为 n 的词集合，其中 $\mathcal{W}_0 := \{\emptyset\}$。对于 $w = i_1 \cdots i_n \in \mathcal{W}_n$ 令

$$\phi_w := \phi_{i_1} \circ \cdots \circ \phi_{i_n}, \qquad \phi_\emptyset := \mathrm{id}_X.$$

那么，对每个 $J \in \mathcal{K}(X)$ 以及每个 $n \geq 0$，

$$(L^n J)(s,t) = \sum_{w \in \mathcal{W}_n} J(\phi_w(s), \phi_w(t)).$$

特别是，

$$K_n(s,t) = \sum_{w \in \mathcal{W}_n} K(\phi_w(s), \phi_w(t)),$$
$$D_n(s,t) = \sum_{w \in \mathcal{W}_n} D(\phi_w(s), \phi_w(t)).$$

此外，对每个 $N \geq 1$，

$$K_N(s,t) = K(s,t) + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{w \in \mathcal{W}_n} D(\phi_w(s), \phi_w(t)),$$

并且，在 (2.2) 条件下，

$$K_\infty(s,t) = K(s,t) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{w \in \mathcal{W}_n} D(\phi_w(s), \phi_w(t)),$$

在 X 的每个有限子集上，按格拉姆矩阵意义收敛。

证明。 公式 L^n 可对 n进行归纳法得到：当 $n = 0$ 时结论显然；而 $n \to n+1$时，通过展开 $L^{n+1}J = L(L^n J)$ 并将所得各项按长度为 $n+1$的词重新分组即可。关于 K_n 和 D_n 的恒等式可由 $K_n = L^n K$ 和 $D_n = L^n D$ 推出。有限展开和无限展开则是将这些公式代入（2.4）–（2.5）所得的恒等式。 □

现在我们给出一个具体例子，以说明上述完整设定，包括严格次不变性、有限性假设（2.2）以及非平凡的缺陷塔。该例基于 m叉树上的词动力学，其中 ϕ_i 由前缀给出。选择核，使得 L不变性在显式主控函数这一层面成立，同时缺陷按几何级数式衰减，从而得到 K_∞ 的闭式。

例 2.5。 固定一个整数 $m \geq 2$，并令

$$X := \mathcal{W} := \bigcup_{n \geq 0} \{1,\dots,m\}^n$$

为 $\{1,\dots,m\}$ 上所有有限词的集合，包括空词 $\emptyset$。对于$w \in \mathcal{W}$，用 $|w|$ 表示词长。定义映射 $\phi_i : X \to X$，通过添加前缀：

$$\phi_i(w) := iw, \qquad 1 \leq i \leq m.$$

定义两个正定核 J_0，$J_1 : X \times X \to \mathbb{C}$，其定义如下：

$$J_0(u,v) := m^{-|u|}\delta_{u,v}, \qquad J_1(u,v) := m^{-(|u|+|v|)/2}.$$

于是， J_0 是正定的（对角且具有非负元素），J_1 也是正定的（秩一），因为 $J_1(u,\ v) = f(u)f(v)$，其中 $f(w) = m^{-|w|/2}$。此外，二者都具有 L-不变性：

$$LJ_0 = J_0, \qquad LJ_1 = J_1.$$

事实上，对于 $s,\ t\in X$,

$$(LJ_0)(s,t)=\sum_{i=1}^{m}m^{-|is|}\delta_{is,it}=\sum_{i=1}^{m}m^{-(|s|+1)}\delta_{s,t}=J_0(s,t),$$

and

$$(LJ_1)(s,t)=\sum_{i=1}^{m}m^{-(|is|+|it|)/2}=\sum_{i=1}^{m}m^{-(|s|+|t|)/2-1}=J_1(s,t).$$

固定参数 $0<r<1$、$0<c<1$和 $\eta>0$。定义对角正定核 E 为

$$E(u,v):=cr^{|u|}m^{-|u|}\delta_{u,v}.$$

于是 $LE=rE$，因为对于 $s\in X$,

$$(LE)(s,s)=\sum_{i=1}^{m}E(is,is)=\sum_{i=1}^{m}cr^{|is|}m^{-|is|}=rcr^{|s|}m^{-|s|}=rE(s,s).$$

现在令

$$J:=J_0+\eta J_1,\qquad K:=J-E.$$

由于 J_0-E 是对角且具有非负元素（因为 $0<c<1$），并且 $\eta J_1\geq 0$，因此 K 是正定的。此外，K 不是对角的，因为 J_1 会产生非对角项：对于 $u\neq v$，有 $K(u,\ v)=\eta m^{-(|u|+|v|)/2}\neq 0$。

最后，次不变性不等式（2.1）成立：

$$LK=LJ-LE=J-rE\geq J-E=K,$$

且缺陷核为

$$D:=LK-K=E-LE=(1-r)E\neq 0,$$

它是正定的。迭代满足

$$K_n=L^nK=L^nJ-L^nE=J-r^nE,$$

因此 $K_n\uparrow J$ 逐点成立，且

$$K_\infty=J.$$

此外，缺陷塔确实是非平凡的：

$$D_n=K_{n+1}-K_n=r^n(1-r)E\neq 0\qquad(n\geq 0).$$

对角有限性条件 (2.2) 成立，因为对每个 $s\in X$,

$$\sup_{n\geq 0}K_n(s,s)\leq J(s,s)=m^{-|s|}+\eta m^{-|s|}<\infty.$$

注记 2.6. 在例2.5中，令 $\eta=0$ 即可去掉秩一项 J_1，并得到一个对角例子（其中 K 是对角的，且 $K_\infty=J_0$）。因此，非对角参数 $\eta>0$ 可视为对角模型的一种受控“相关性”扰动，同时保持次不变动力学和有限性条件（2.2）。

3. 对角动力学

有限性假设 (2.2) 和不变完备化的存在性由塔的对角增长所支配。在本节中，我们提取对角数据 $u_n(s) = K_n(s,s)$，并证明它在诱导的分支计数算子 P 作用于函数 $u_{n+1} = Pu_n$ 时如何演化。这样，对角有界性便归结为有根 ϕ-树上的纯组合问题。我们将包络$h_\infty(s) = \sup_{n\geq 0} u_n(s)$ 确定为 u_0 的最小 P-调和上界，引入正向不变有限性区域 X_{fin}，并借助李雅普诺夫超调和函数和分支计数估计，推导出可用于判断 $h_\infty(s)$ 是有限还是无限的判据。

我们从

$$u_0(s) := K(s,s) \in [0,\infty],$$

开始，并在非负函数 u 上定义正算子 $P\colon X \to [0,\infty]$，其定义为

$$(Pu)(s) := \sum_{i=1}^{m} u(\phi_i(s)).$$

回顾一下，对于一个词 $w = i_1 \cdots i_n \in \mathcal{W}$，我们令

$$\phi_w := \phi_{i_1} \circ \cdots \circ \phi_{i_n},$$

并且我们有 $K_{n+1} = LK_n$，因此 $K_n = L^n K$。令

$$u_n(s) := K_n(s,s).$$

引理 3.1。对于每个 $n \geq 0$和 $s \in X$，$u_{n+1}(s) = (Pu_n)(s)$，因此 $u_n = P^n u_0$。等价地，

$$u_n(s) = \sum_{|w|=n} u_0(\phi_w(s)). \tag{3.1}$$

证明。根据定义，

$$\begin{aligned} u_{n+1}(s) &= K_{n+1}(s,s) = (LK_n)(s,s) \\ &= \sum_{i=1}^{m} K_n(\phi_i(s),\phi_i(s)) = \sum_{i=1}^{m} u_n(\phi_i(s)) = (Pu_n)(s). \end{aligned}$$

迭代可得 $u_n = P^n u_0$，展开 P^n 可得到 ϕ-树公式（3.1）。 □

一个直接推论是，（2.2）完全是由 ϕ-驱动的增长条件（定理3.2），即它等价于

$$\sup_{n\geq 0} (P^n u_0)(s) < \infty, \quad \forall s \in X. \tag{3.2}$$

这已经使映射 ϕ_i 变得清晰可见：它并非抽象地“关于 L”，而是关于有根 ϕ-树 $w \mapsto \phi_w(s)$ 的组合结构，以及对角权重 $u_0(s) = K(s,s)$ 如何沿着该树衰减。

定理 3.2。令

$$h_\infty(s) := \sup_{n\geq 0} u_n(s) = \sup_{n\geq 0} (P^n u_0)(s) \in [0,\infty].$$

则以下结论成立：

(1) h_∞ 是 u_0 的最小 P-调和上主函数，具体而言：若$h:\ X \to [0,\infty]$ 满足

$$h \geq u_0, \qquad Ph = h,$$

则 $h \geq h_\infty$。
(2) 设

$$X_{\text{fin}} := \{s \in X:\ h_\infty(s) < \infty\}, \qquad X_{\text{inf}} := X \setminus X_{\text{fin}}.$$

则 X_{fin} 对于映射 ϕ_i是正向不变的：如果 $s \in X_{\text{fin}}$，则 $\phi_i(s) \in X_{\text{fin}}$ 对每个 i 均成立。等价地，如果 $\phi_i(s) \in X_{\text{inf}}$ 对某个 i成立，则 $s \in X_{\text{inf}}$。(3) 有限性假设（2.2）当且仅当 $X_{\text{fin}} = X$ 时成立。

证明。取定 h，使得 $h \geq u_0$且 $Ph = h$。于是对于所有 $n \geq 0$，我们有 $P^n h = h$。此外，由于 P为正，$h \geq u_0$推出对于所有 n都有 $P^n h \geq P^n u_0 = u_n$。因此，对于每个 n都有$h \geq u_n$，从而

$$h \geq \sup_{n\geq 0} u_n = h_\infty.$$

这证明了（1）中的极小性结论。注意，由于 $LK \geq K$，核$K_{n+1} - K_n$是正定的，因此对于每个 s，$u_{n+1}(s) - u_n(s) = (K_{n+1} - K_n)(s,s) \geq 0$。于是 $u_n(s) \uparrow h_\infty(s)$ 逐点成立，并且由于 m 是有限的，我们可以在 P的定义和式中取极限：对于每个 $s \in X$，

$$\begin{aligned}(Ph_\infty)(s) &= \sum_{i=1}^{m} h_\infty(\phi_i(s)) = \sum_{i=1}^{m} \lim_{n\to\infty} u_n(\phi_i(s)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} u_n(\phi_i(s)) = \lim_{n\to\infty} u_{n+1}(s) = h_\infty(s).\end{aligned}$$

特别地，h_∞ 本身是 P-调和的。

对于 (2)，假设 $h_\infty(s) < \infty$。则对所有 n，都有 $u_{n+1}(s) = \sum_i u_n(\phi_i(s)) \leq h_\infty(s)$。由于每一项均非负，对于每个固定的 i，对所有 n都有 $u_n(\phi_i(s)) \leq u_{n+1}sh_\infty(s)$，因此 $h_\infty(\phi_i(s)) < \infty$。这就是向前不变性。

最后，(3) 直接由定义得到：2.2是$\sup_n u_n(s)$的逐点有限性，即 $X_{\text{fin}} = X$。 □

注 3.3。对角增长二分性决定了定理 2.1 中的不变完备化在哪些地方是真正有限的。如果 $s \in X_{\text{inf}}$，那么 $u_n(s) = K_n(s,s) \to \infty$，因此塔的对角在 s处发散，有限性假设 (2.2) 在那里失效。另一方面，在 X_{fin} 上有 $\sup_n K_n(s,s) < \infty$，并且定理 2.1(1) 中的格拉姆矩阵论证可应用于每个有限子集 $F \subset X_{\text{fin}}$，从而得到在 $X_{\text{fin}} \times X_{\text{fin}}$ 上定义良好的极限核 K_∞，且 $K_\infty \geq K$ 和 $LK_\infty = K_\infty$ 限制于 X_{fin}。因此，第 2 节可以被视为在向前不变区域 X_{fin}上运行，而本节则提供动力学判据，以确定何时$X_{\text{fin}} = X$。

一个有用的概念性观点是，该定理已经给出了由 ϕ-树驱动的精确“势论”刻画：当且仅当对角数据 $u_0(s) = K(s,s)$ 位于分支算子 P 的某个调和函数之下时，对角增长才是有限的。

一旦获得直接以映射 ϕ_i 表述的具体充分条件，上述抽象刻画便具有了可操作性。下面的判据

（推论3.4）给出了 ϕ_i 明确的条件：要求存在一个“李雅普诺夫函数” r，使其沿 ϕ-分支的增长（平均而言）不为正。

推论 3.4。 假设存在函数 $r:\ X \to (0,\infty)$ 以及常数$C<\infty$，使得

$$u_0 \le Cr, \qquad Pr \le r.$$

那么 $h_\infty(s) < \infty$ 对所有 s均成立，因此 (3.2) 成立。

证明。 我们用归纳法证明，对所有 n， $u_n \le Cr$ 均成立。对于 $n=0$，这就是 $u_0 \le Cr$。若$u_n \le Cr$，则

$$u_{n+1} = Pu_n \le CPr \le Cr.$$

因此，对所有 n， $u_n(s) \le Cr(s)$，所以 $h_\infty(s) \le Cr(s) < \infty$。 □

下一个结果（推论 3.5）给出了一种互补的“非衰减”机制：如果存在一个区域，使得其中的对角核质量 $u_0(s) = K(s,s)$ 有正的下界，并且 ϕ-树沿着指数多的分支到达该区域，那么对角增长必定发散。

推论 3.5. 固定 $s \in X$。假设存在一个子集 $Y \subset X$、常数 $\varepsilon > 0, \rho > 1$，以及一个无限序列 $n_k \to \infty$，使得

$$u_0(y) \ge \varepsilon \text{ for all } y \in Y, \qquad \#\{w:\ |w| = n_k,\ \phi_w(s) \in Y\} \ \ge\ \rho^{n_k} \text{ for all } k.$$

那么 $h_\infty(s) = \infty$，因此 $s \in X_{\inf}$。

证明。 由 ϕ-树展开，

$$\begin{aligned} u_{n_k}(s) &= \sum_{|w|=n_k} u_0(\phi_w(s)) \\ &\ge \sum_{\substack{|w|=n_k \\ \phi_w(s)\in Y}} u_0(\phi_w(s)) \ge \varepsilon\, \#\{w : |w| = n_k,\ \phi_w(s) \in Y\} \ge \varepsilon \rho^{n_k}. \end{aligned}$$

因此 $u_{n_k}(s) \to \infty$，所以 $h_\infty(s) = \infty$。 □

现在，我们完全用 ϕ-树的层级集合计数来刻画对角增长。

定理 3.6. 固定 $s \in X$。对于每个 $\theta > 0$ 和 $n \ge 0$，定义

$$N_n(s,\theta) := \#\{w : |w| = n, u_0(\phi_w(s)) \ge \theta\},$$

其中 $u_0(s) = K(s,s)$ 且 $\phi_w = \phi_{i_1} \circ \cdots \circ \phi_{i_n}$ 对于一个词 $w = i_1 \cdots i_n \in \mathcal{W}$。那么：
(1) 对于每个 $n \ge 0$，

$$u_n(s) = \int_0^\infty N_n(s,\theta)\, d\theta. \tag{3.3}$$

(2) 因此，

$$h_\infty(s) = \sup_{n\ge 0} u_n(s) \le \int_0^\infty \left(\sup_{n\ge 0} N_n(s,\theta) \right) d\theta. \tag{3.4}$$

(3) 特别是：
(a) 如果存在 $\theta_0 > 0$ 使得$\sup_{n\ge 0} N_n(s,\theta_0) = \infty$，则 $h_\infty(s) = \infty$，因此 $s \in X_{\inf}$。

(b) 如果

$$\int_0^\infty \left(\sup_{n\geq 0} N_n(s,\theta)\right) d\theta < \infty, \tag{3.5}$$

于是 $h_\infty(s) < \infty$，因此 $s \in X_{\text{fin}}$ 从而 (3.2) 在 s处成立。

证明。取 $s \in X$ 和 $n \geq 0$。由引理 3.1，

$$u_n(s) = \sum_{|w|=n} u_0(\phi_w(s)).$$

对于每个 $a \in [0,\infty)$，都有恒等式

$$a = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{a\geq\theta\}} d\theta.$$

将 $a = u_0(\phi_w(s))$ 代入此式，并对 $|w| = n$ 求和，得到

$$\begin{aligned} u_n(s) &= \sum_{|w|=n} \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{u_0(\phi_w(s))\geq\theta\}} d\theta \\ &= \int_0^\infty \left(\sum_{|w|=n} \mathbf{1}_{\{u_0(\phi_w(s))\geq\theta\}}\right) d\theta = \int_0^\infty N_n(s,\theta)\, d\theta, \end{aligned}$$

由于非负性，我们交换求和与积分。这就证明了 (3.3)。

对于（3.4），注意到对每个 n，

$$\int_0^\infty N_n(s,\theta)\, d\theta \leq \int_0^\infty \left(\sup_{k\geq 0} N_k(s,\theta)\right) d\theta.$$

对 n取上确界即可得到（3.4）。

对于（3），若 $\sup_n N_n(s,\theta_0) = \infty$，则对任意 n，利用 $\theta \mapsto N_n(s,\theta)$ 单调不增这一性质，

$$\begin{aligned} u_n(s) &= \int_0^\infty N_n(s,\theta)\, d\theta \\ &\geq \int_0^{\theta_0} N_n(s,\theta)\, d\theta \geq \int_0^{\theta_0} N_n(s,\theta_0)\, d\theta = \theta_0 N_n(s,\theta_0), \end{aligned}$$

因此 $\sup_n u_n(s) = \infty$，即 $h_\infty(s) = \infty$。（3.5）中的有限性条件蕴含$h_\infty(s) < \infty$，由（3.4）可知，因此 $s \in X_{\text{fin}}$。□

注 3.7。推论 3.4 和 3.5 可通过以下方式得到：在固定水平集 $N_n(s,\theta)$ 上从下方估计（非衰减机制），并从上方以一个 $\{u_0 \geq \theta\}$ -次调和李雅普诺夫函数支配 u_0，-subharmonic Lyapunov function (the decay mechanism), which in turn forces uniform control of the integrand in (3.4)。

接下来的估计说明了为什么本节的对角判据已经能够用于控制完整的不变完备化：一旦对角尾部 $h_\infty - u_N$足够小，整个核尾部 $K_\infty - K_N$ 在有限集上便一致地足够小。

定理 3.8。固定 $N \geq 0$。在 X_{fin} 定理 K_∞ *2.1* 中的极限核是良定义的，而尾核

$$R_N(s,t) := K_\infty(s,t) - K_N(s,t), \qquad s,t \in X_{\text{fin}},$$

是正定的。此外，对于所有 s、$t \in X_{\text{fin}}$，有

$$|K_\infty(s,t) - K_N(s,t)|^2 \leq (K_\infty(s,s) - K_N(s,s))(K_\infty(t,t) - K_N(t,t)). \tag{3.6}$$

等价地，在 X_{fin} 上记 $u_N(s) = K_N(s,s)$ 和 $h_\infty(s) = K_\infty(s,s)$，

$$|K_\infty(s,t) - K_N(s,t)| \le \sqrt{(h_\infty(s) - u_N(s))(h_\infty(t) - u_N(t))}. \tag{3.7}$$

证明。取一个有限子集 $F = \{x_1, \dots, x_r\} \subset X_{\mathrm{fin}}$。由于 $x_a \in X_{\mathrm{fin}}$，对角序列 $K_n(x_a, x_a)$ 在 n中有界，因此定理 2.1(1) 中的格拉姆矩阵论证适用于 F，并给出极限矩阵

$$G_\infty := \lim_{n\to\infty} [K_n(x_a, x_b)]_{a,b}.$$

特别地，K_∞ 在 $F \times F$ 上存在，且格拉姆矩阵满足

$$[K_N(x_a, x_b)]_{a,b} \le [K_\infty(x_a, x_b)]_{a,b}$$

在厄米矩阵的序关系下（因为 $\{K_n\}$ 是递增的）。因此，对每个 N，差矩阵

$$[R_N(x_a, x_b)]_{a,b} = [K_\infty(x_a, x_b) - K_N(x_a, x_b)]_{a,b}$$

是半正定的。由于这对每个有限子集 $F \subset X_{\mathrm{fin}}$都成立，因此可得$R_N \in \mathcal{K}(X_{\mathrm{fin}})$。

令 $\mathcal{H}_{R_N}$为 R_N的再生核希尔伯特空间。对于 s，$t \in X_{\mathrm{fin}}$，再生性质给出

$$R_N(s,t) = \langle (R_N)_s, (R_N)_t \rangle_{\mathcal{H}_{R_N}}.$$

因此，由柯西-施瓦茨不等式，

$$|R_N(s,t)|^2 \le \|(R_N)_s\|^2_{\mathcal{H}_{R_N}} \|(R_N)_t\|^2_{\mathcal{H}_{R_N}} = R_N(s,s)\, R_N(t,t),$$

对于任意正定核 $\|J_s\|^2_{\mathcal{H}_J} = J(s,s)$，使用 J。代入 $R_N = K_\infty - K_N$可得（3.6），而（3.7）只是将 $R_N(s,s) = h_\infty(s) - u_N(s)$后得到的相同不等式。□

使用定理 3.8 的一种便捷方法是通过缺陷塔来界定对角尾部 $h_\infty - u_N$。

推论 3.9。设 $d_n(s) := D_n(s,s)$ 且 $d_0(s) = D(s,s)$。则在 X_{fin} 上，对每个 $N \ge 0$，都有

$$h_\infty(s) - u_N(s) = \sum_{n \ge N} d_n(s). \tag{3.8}$$

特别地，假设存在函数 $r : X \to (0,\infty)$、常数 $C < \infty$ 和$\beta \in (0,1)$，使得

$$d_0 \le Cr, \qquad Pr \le \beta r.$$

那么，对每个 $N \ge 0$ 和 s、$t \in X_{\mathrm{fin}}$，

$$|K_\infty(s,t) - K_N(s,t)| \le \frac{C}{1-\beta} \beta^N \sqrt{r(s)\, r(t)}. \tag{3.9}$$

证明。由于 $K_\infty = K + \sum_{n\ge 0} D_n$ 在 X_{fin} 上的格拉姆矩阵意义（见定理 2.1），取对角线可得

$$h_\infty(s) - u_N(s) = K_\infty(s,s) - K_N(s,s) = \sum_{n \ge N} D_n(s,s) = \sum_{n \ge N} d_n(s),$$

即3.8）。接下来注意到 $d_n(s) = D_n(s,s) = (L^n D)(s,s)$，因此根据引理 3.1 中的相同对角线计算，可得

$$d_{n+1} = P d_n, \qquad d_n = P^n d_0.$$

因此， $d_0 \le Cr$ 和 $Pr \le \beta r$ 可归纳地推出

$$d_n = P^n d_0 \le CP^n r \le C\beta^n r.$$

因此

$$h_\infty(s) - u_N(s) = \sum_{n\ge N} d_n(s) \le \sum_{n\ge N} C\beta^n r(s) = \frac{C}{1-\beta}\beta^N r(s).$$

结合这一对角尾部估计与定理 3.8 可得（3.9）。 □

4. 高斯缺陷鞅

定理 2.1 将不变完备化 K_∞ 规范地分解为初始核 K 和缺陷核 D_n。本节将这一分解转化为概率对象：一个高斯过程，其各层截断构成鞅，且其可预测二次变差就是缺陷塔。这为压缩算子 A提供了一个具体的拉东-尼科迪姆解释。

定理 4.1。 假设第2节的设定成立，并定义

$$\mathcal{E} := \mathcal{H}_K \oplus \bigoplus_{n\ge 0} \mathcal{H}_{D_n}, \qquad v(s) := K_s \oplus \bigoplus_{n\ge 0} (D_n)_s \in \mathcal{E}, \qquad A := P_0^* P_0 \in B(\mathcal{E})$$

如定理 2.1(3) 中所述。设 $(G_0, G_1, G_2, \dots)$ 是一列相互独立的中心复高斯希尔伯特空间向量，且满足

$$G_0 \in \mathcal{H}_K, \qquad G_{n+1} \in \mathcal{H}_{D_n} \quad (n \ge 0),$$

每个向量都经过归一化，使得对于相应希尔伯特空间中的所有 f, g ，

$$\mathbb{E}\left[\overline{\langle f, G\rangle}\,\langle g, G\rangle\right] = \langle f, g\rangle.$$

对于 $N \ge 0$ ，定义截断随机场

$$X_N(s) := \langle K_s, G_0\rangle_{\mathcal{H}_K} + \sum_{n=0}^{N-1} \langle (D_n)_s, G_{n+1}\rangle_{\mathcal{H}_{D_n}}, \qquad s \in X,$$

约定当 $N = 0$ 时，该和为0 。令 $\mathcal{F}_N$ 为由$(G_0, G_1, \dots, G_N)$生成的 σ-代数。则有以下结论。

(1) 对于每个 $N \ge 0$ 以及所有 $s, t \in X$，

$$\mathbb{E}\left[\overline{X_N(s)} X_N(t)\right] = K_N(s,t).$$

特别地，$s\in X$ 的每个有限维分布$(X_N(s))$都是中心复高斯，其协方差核为 K_N。

(2) 对每个固定的 $s \in X$，序列$(X_N(s))^{N\ge 0}$ 是L^2中的一个$(\mathcal{F}_N)$-鞅，具有正交增量

$$X_{N+1}(s) - X_N(s) = \langle (D_N)_s, G_{N+1}\rangle_{\mathcal{H}_{D_N}}.$$

此外，对所有 s、 $t \in X$，

$$\mathbb{E}\left[\overline{(X_{N+1}(s) - X_N(s))}\,(X_{N+1}(t) - X_N(t)) \;\middle|\; \mathcal{F}_N\right] = D_N(s,t),$$

因此，鞅的可预测二次变差就是缺陷塔。

(3) 固定一个有限子集 $F=\{x_1,\dots,x_r\}\subset X$。那么 $(X_N(x_a))_{a=1}^r$ 在 L^2 中（且几乎处处）收敛，当且仅当 $N\to\infty$ 时格拉姆矩阵 $[K_N(x_a,x_b)]_{a,b}$ 一致有界；等价地，当且仅当极限格拉姆矩阵

$$G_\infty:=\lim_{N\to\infty}[K_N(x_a,x_b)]_{a,b}$$

如同定理2.1**(1)**的格拉姆矩阵论证中那样存在。在该情形下，极限

$$X_\infty(x_a):=\lim_{N\to\infty}X_N(x_a)$$

是中心复高斯的，并且满足

$$\mathbb{E}\left[\overline{X_\infty(x_a)}X_\infty(x_b)\right]=K_\infty(x_a,x_b)\qquad(1\le a,b\le r).$$

(4) 设 $G:=G_0\oplus\bigoplus_{n\ge0}G_{n+1}\in\mathcal{E}$，并在 X 上定义两个随机场，其定义为

$$Z(s):=\langle v(s),G\rangle_{\mathcal{E}},\qquad Y(s):=\left\langle v(s),A^{1/2}G\right\rangle_{\mathcal{E}}.$$

则 Z 是协方差为 K_∞的中心复高斯，而 Y 是协方差为 K的中心复高斯，即

$$\mathbb{E}\left[\overline{Z(s)}Z(t)\right]=K_\infty(s,t),\qquad\mathbb{E}\left[\overline{Y(s)}Y(t)\right]=K(s,t).$$

因此，A 是高斯协方差压缩意义下的拉东-尼科迪姆压缩算子。

证明。**(1)** 固定 N 和 $s,\ t\in X$。不同层级上的高斯向量相互独立，因此

$$\mathbb{E}\left[\overline{X_N(s)}X_N(t)\right]=\mathbb{E}\left[\overline{\langle K_s,G_0\rangle}\langle K_t,G_0\rangle\right]+\sum_{n=0}^{N-1}\mathbb{E}\left[\overline{\langle(D_n)_s,G_{n+1}\rangle}\langle(D_n)_t,G_{n+1}\rangle\right].$$

根据每个高斯向量的归一化以及再生核希尔伯特空间恒等式 $\langle J_s,\ J_t\rangle_{\mathcal{H}_J}=J(s,\ t)$，第一项等于 $K(s,\ t)$，而求和中的第 n 项等于 $D_n(s,\ t)$。因此

$$\mathbb{E}\left[\overline{X_N(s)}X_N(t)\right]=K(s,t)+\sum_{n=0}^{N-1}D_n(s,t)=K_N(s,t)$$

由（2.4）得证。这就证明了（1）。

(2) 固定 $s\in X$。由于 $X_N(s)$ 仅取决于 $(G_0,\ \dots\dots,\ G_N)$，因此它是 $\mathcal{F}_N$-可测的。此外，

$$X_{N+1}(s)=X_N(s)+\langle(D_N)_s,G_{N+1}\rangle.$$

由于 G_{N+1} 与 $\mathcal{F}_N$ 独立且均值为零，

$$\mathbb{E}[X_{N+1}(s)\mid\mathcal{F}_N]=X_N(s)+\mathbb{E}[\langle(D_N)_s,G_{N+1}\rangle]=X_N(s),$$

因此 $(X_N(s))$ 是一个鞅。增量正交性由不同层级之间的独立性推出。对于条件协方差恒等式，再次利用独立性和归一化，

$$\mathbb{E}\left[\overline{\langle(D_N)_s,G_{N+1}\rangle}\langle(D_N)_t,G_{N+1}\rangle\ \middle|\ \mathcal{F}_N\right]=\langle(D_N)_s,(D_N)_t\rangle_{\mathcal{H}_{D_N}}=D_N(s,t),$$

这就是所声称的可预测二次变差恒等式。

(3) 固定 $F=\{x_1,\dots,x_r\}$。根据 **(1)**，中心化高斯向量 $(X_N(x_a))_{a=1}^r$ 的协方差矩阵是格拉姆矩阵 $G_N=[K_N(x_a,\ x_b)]_{a,\ b}$。序列

在 L^2 中收敛（等价地，在 L^2 中为柯西序列）当且仅当 $\sup_N \|G_N\| < \infty$，这等价于极限格拉姆矩阵 G_∞ 存在，如定理 2.1(1) 的格拉姆矩阵论证所示。在这种情况下，极限必为协方差为 G_∞ 的中心化高斯分布，因此对应于 K_∞ 在 $F \times F$ 上。

(4) 随机向量 $G \in \mathcal{E}$ 是中心化高斯，其在 $\mathcal{E}$ 上的协方差为恒等协方差，含义与上文相同。因此，对于 $Z(s) = \langle v(s)\ G \rangle$,

$$\mathbb{E}\left[\overline{Z(s)} Z(t)\right] = \langle v(s), v(t) \rangle_{\mathcal{E}} = K_\infty(s,t)$$

根据定理 2.1(3)。同样，由于 $A^{1/2}$ 是压缩,

$$\mathbb{E}\left[\overline{Y(s)} Y(t)\right] = \langle v(s), Av(t) \rangle_{\mathcal{E}} = K(s,t),$$

再次根据定理 2.1(3)。证明至此完成。 □

注 4.2. 该定理是对缺陷塔的一种概率解释： X_N是第 N 层的部分能量，而 D_N 是第 N个增量的条件协方差。特别地，在每个有限子集 $F \subset X$ 上，不变完备化 K_∞ 的收敛等价于该鞅的 L^2-有界性，因此有限性假设（2.2）是以对角线形式表达的鞅有界性条件。

5. 边界模型与Doob变换

我们现在明确此前讨论中隐含的树/路径空间图景，并得到附属于极小调和优函数 h_∞ （来自第3节）的典范路径测度。要点在于，对角调和对象 h_∞ 在边界Ω上产生一族自然的马尔可夫测度，而这些测度将 L的迭代（经典范归一化后）组织为边界平均。

在本节中，我们始终假定第2–4节的既定假设成立，并记

$$h := h_\infty$$

为极小的 P-调和优函数，其所优的对象为 $u_0(s) = K(s,s)$ （在第3节中构造）。我们回顾， h 是 P-调和的，即

$$h(s) = \sum_{i=1}^{m} h(\varphi_i(s)),$$

并且 $h(s) \in (0, \infty)$ 恰好在集合 X_{fin} 上成立，该集合上的对角增长有限。下文我们在

$$X_{\mathrm{fin}}^{+} := \{s \in X_{\mathrm{fin}} : h(s) > 0\},$$

其中 K_∞ 由有限集格拉姆矩阵的极限定义。

Let

$$\Omega := \{1, \ldots, m\}^{\mathbb{N}}$$

表示路径空间，并赋予由柱集生成的乘积 σ-代数 $\mathcal{F}$ 。对于有限词 $w = i_1 \cdots i_n \in \{1, \ldots, m\}^n$，我们记作

$$[w] := \{\omega \in \Omega : \omega_1 \cdots \omega_n = w\}.$$

我们还将长度为n的前缀记作 $\omega|n=\omega_1\cdots\omega_n$。对于 $s\in X$和 $w=i_1\cdots i_n$，我们沿用通常的复合记号

$$\varphi_w=\varphi_{i_1}\circ\cdots\circ\varphi_{i_n},\qquad \varphi_\emptyset=\mathrm{id}_X,$$

我们还定义逆向复合

$$\check{\varphi}_w:=\varphi_{i_n}\circ\cdots\circ\varphi_{i_1},\qquad \check{\varphi}_\emptyset=\mathrm{id}_X.$$

随后，我们定义沿 ω 的分支点如下

$$s_n(\omega):=\check{\varphi}_{\omega|n}(s),\qquad n\geq 0.$$

调和函数 h在 X_{fin}上定义了典范转移概率。对于$s\in X^+{}_{\mathrm{fin}}$，令

$$p_i(s):=\frac{h(\varphi_i(s))}{h(s)},\qquad i=1,\ldots,m.$$

于是，根据 h的 P-调和性，对于每个 $s\in X^+{}_{\mathrm{fin}}$，有 $p_i(s)\geq 0$ 以及 $\sum_{i=1}^m p_i(s)=1$。

命题 5.1。对于每个 $s\in X^+{}_{\mathrm{fin}}$，存在 $\Omega(\Omega\ \mathcal{F})$ 上的唯一概率测度 μ_s，使得对于每个词 $w=i_1\cdots i_n$，

$$\mu_s([w])=\frac{h(\check{\varphi}_w(s))}{h(s)}=\prod_{k=1}^n p_{i_k}\left(\check{\varphi}_{i_1\cdots i_{k-1}}(s)\right). \tag{5.1}$$

此外，若 $\mathcal{F}_n$ 表示由长度为 n 的柱集生成的 σ-代数，那么在μ_s 下，过程 $(s_n(\omega))_{n\geq 0}$ 是一个齐次马尔可夫链，其转移为

$$\mu_s(s_{n+1}=\varphi_i(x)\mid s_n=x)=p_i(x),\qquad x\in X_{\mathrm{fin}}^+. \tag{5.2}$$

等价地，对于每个定义在 $X^+{}_{\mathrm{fin}}$ 上的有界函数 f 以及每个 $n\geq 0$，

$$\mathbb{E}_{\mu_s}[f(s_{n+1})\mid\mathcal{F}_n]=\sum_{i=1}^m p_i(s_n)\,f(\varphi_i(s_n)). \tag{5.3}$$

证明。在柱集上定义一个集合函数如下

$$\mu_s([w]):=\frac{h(\check{\varphi}_w(s))}{h(s)}.$$

一致性由调和性推出：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m\mu_s([wi])&=\sum_{i=1}^m\frac{h(\check{\varphi}_{wi}(s))}{h(s)}\\&=\frac{\sum_{i=1}^m h(\varphi_i(\check{\varphi}_w(s)))}{h(s)}=\frac{h(\check{\varphi}_w(s))}{h(s)}=\mu_s([w]).\end{aligned}$$

因此 μ_s 通过柯尔莫哥洛夫扩张定义了 $(\Omega\ \mathcal{F})$ 上的唯一概率测度。乘积公式（5.1）如下成立：

$$\frac{h(\check{\varphi}_w(s))}{h(s)}=\prod_{k=1}^n\frac{h(\check{\varphi}_{i_1\cdots i_k}(s))}{h(\check{\varphi}_{i_1\cdots i_{k-1}}(s))}=\prod_{k=1}^n p_{i_k}\left(\check{\varphi}_{i_1\cdots i_{k-1}}(s)\right).$$

马尔可夫性质可由柱集规范直接得出。事实上，对 $\mathcal{F}_n$ 进行条件化，就是对前缀 $\omega|n$进行条件化，因而也是对当前状态$s_n=\check{}\varphi_{\omega|n}(s)$进行条件化，而 ω_{n+1} 的条件分布由 $p_i(s_n)$给出，即（5.2）。恒等式（5.3）是该转移规则的标准改写。□

单独分离由测度 μ_s所诱导的函数上的Doob 变换平均算子是方便的。对 X^+ fin上的有界 f，定义

$$(Qf)(s) := \sum_{i=1}^{m} p_i(s) f(\varphi_i(s)) = \frac{1}{h(s)} \sum_{i=1}^{m} h(\varphi_i(s)) f(\varphi_i(s)). \tag{5.4}$$

那么， Q 是作用于 X^+ 有限上的函数的马尔可夫算子，并且通过规范因子 h与原始分支算子 P 相互交织。

引理 5.2. 对于 X^+ 有限上的每个有界 f，

$$P(hf) = h(Qf).$$

因此，对于每个 $n \geq 0$,

$$P^n(hf) = h(Q^n f), \qquad Q^n f(s) = \mathbb{E}_{\mu_s}[f(s_n)].$$

证明。 根据定义（利用（5.4））,

$$P(hf)(s) = \sum_{i=1}^{m} h(\varphi_i(s)) f(\varphi_i(s)) = h(s)(Qf)(s).$$

迭代可得 $P^n(hf) = h(Q^n f)$。公式 $Q^n f(s) = \mathbb{E}_{\mu_s}[f(s_n)]$是命题 5.1中的标准马尔可夫链恒等式。□

现在我们转向核。下一个对象是利用 h 对核进行的自然归一化，以及对 L 的相应变换。给定定义在 X^+ 有限$\times$ X^+ 有限 上的核 J，我们将其 h-归一化定义为

$$J^{(h)}(s,t) := \frac{J(s,t)}{h(s)h(t)}.$$

~接下来，我们定义作用于核的算子 L:

$$(\widetilde{L}G)(s,t) := \sum_{i=1}^{m} p_i(s) p_i(t) G(\varphi_i(s), \varphi_i(t)). \tag{5.5}$$

这个算子是 Q 在核层面的类比，只是两个变量中使用了同一个符号 i，这反映了 L 在 s 和t中同步分支这一事实。

命题 5.3。 对于定义在 X^+ 有限$\times$ X^+ 有限上的任意核 J,

$$(LJ)^{(h)} = \widetilde{L}(J^{(h)}).$$

特别地，对于核塔 $K_n = L^n K$,

$$K_n^{(h)} = \widetilde{L}^n(K^{(h)}), \qquad n \geq 0,$$

并且若 K_∞ 是 L-不变的，则 $K_\infty^{(h)}$ 是 $\widetilde{L}$-不变的。

证明。 直接计算:

$$\begin{aligned}(LJ)^{(h)}(s,t) &= \frac{\sum_{i=1}^{m} J(\varphi_i(s), \varphi_i(t))}{h(s)h(t)} \\ &= \sum_{i=1}^{m} p_i(s) p_i(t) \frac{J(\varphi_i(s), \varphi_i(t))}{h(\varphi_i(s)) h(\varphi_i(t))}.\end{aligned}$$

最后一个表达式为 $(\widetilde{L}(J^{(h)}))(s,t)$; 参见（5.5）。迭代得到 $K_n^{(h)} = \widetilde{L}^n\left(K^{(h)}\right)$，且不变性通过相同的交织传递。□

~算子 L 可通过 Doob 测度 μ_s 得到显式的边界展开。对于一个词 $w = i_1 \cdots i_n$，我们定义

$$p_w(s) := \mu_s([w]) = \frac{h(\check{\varphi}_w(s))}{h(s)}.$$

那么，对于每个固定的 n，$p_w(s) \geq 0$ 且 $\sum_{|w|=n} p_w(s) = 1$。

引理 5.4. 对于定义在 X^+ 有限× X^+ 有限 上的任意核 G，以及任意 $n \geq 0$,

$$(\widetilde{L}^n G)(s,t) = \sum_{|w|=n} p_w(s)\, p_w(t)\, G(\check{\varphi}_w(s), \check{\varphi}_w(t)).$$

等价地，若 $\mathcal{F}_n$ 表示 Ω 上长度为 n 的柱集 σ-代数，则 Ω 上由柱集上的下式定义的有限测度

$$\nu_{s,t}^{(n)}([w]) := p_w(s)\, p_w(t)$$

满足

$$(\widetilde{L}^n G)(s,t) = \int_\Omega G\left(\check{\varphi}_{\omega|n}(s), \check{\varphi}_{\omega|n}(t)\right) d\nu_{s,t}^{(n)}(\omega),$$

其中被积函数是 $\mathcal{F}_n$-可测的。

证明。 通过对 n 使用归纳法即可证明该恒等式。 $n = 1$ 的情形就是 L 的定义，因为 $p_i(s) = p_{(i)}(s)$。假设该恒等式在第 n 级成立，再次应用 L：

$$(\widetilde{L}^{n+1} G)(s,t) = \sum_{i=1}^{m} p_i(s)\, p_i(t)\, (\widetilde{L}^n G)(\varphi_i(s), \varphi_i(t)).$$

在 $\varphi_i(s)$ $\varphi_i(t)$ 处代入归纳假设，得到

$$(\widetilde{L}^{n+1} G)(s,t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{|w|=n} p_i(s)\, p_w(\varphi_i(s))\, p_i(t)\, p_w(\varphi_i(t))\, G(\check{\varphi}_{wi}(s), \check{\varphi}_{wi}(t)).$$

利用乘法规则 $p_{wi}(s) = p_w(\varphi_i(s))\, p_i(s)$，可将系数识别为 $p_{wi}(s)\, p_{wi}(t)$，从而得到所述的长度为 $n+1$ 的词上的求和。积分形式只是对同一柱集展开的改写。□

接下来，我们将这一边界展开与第2节中的缺陷分解联系起来。回顾缺陷核

$$D_n := K_{n+1} - K_n, \qquad n \geq 0,$$

它们由核塔的单调性可知是正定的。写作 $D_0 = LK - K$，则有 $D_n = L^n D_0$ 因此，由命题 5.3,

$$D_n^{(h)} = \widetilde{L}^n(D_0^{(h)}).$$

因此，引理5.4 给出了每个归一化缺陷核的显式边界展开：

$$D_n^{(h)}(s,t) = \sum_{|w|=n} p_w(s)\, p_w(t)\, D_0^{(h)}(\check{\varphi}_w(s), \check{\varphi}_w(t)).$$

对 n 求和，并利用第 $K_\infty = K + \sum_{n\geq 0} D_n$ 节中的望远镜恒等式2，我们得到归一化不变完备化的边界组织表示：

$$K_\infty^{(h)}(s,t) = K^{(h)}(s,t) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|w|=n} p_w(s)\, p_w(t)\, D_0^{(h)}(\check{\varphi}_w(s), \check{\varphi}_w(t)), \qquad s,t \in X^+ \text{结束}.$$

这个公式完全是确定性的，并且已经展现了按词长划分的边界过滤。现在，我们将通过一个希尔伯特空间实现来表示同一展开，将其视为一个 L^2 边界格拉姆核；这是第2节中直和缺陷实现的边界类比。

定理5.5。 设 $H_{D_0^{(h)}}$ 为X^+ 上归一化缺陷核 $D_0^{(h)}$ 的再生核希尔伯特空间。定义一个希尔伯特空间

$$H_\partial := \ell^2(\mathbb{N}_0) \otimes L^2(\Omega, \nu) \otimes H_{D_0^{(h)}},$$

其中， ν 是Ω上的任意概率测度，且每个柱集的测度均为正（例如伯努利测度）。对于每个 $s \in X^+{}_{\text{fin}}$ ，按照以下规则定义 $\Psi(s) \in H_\partial$ ：其(n,ω)纤维等于

$$\Psi(s)(n,\omega) = \frac{p_{\omega|n}(s)}{\sqrt{\nu([\omega|n])}} (D_0^{(h)})_{\check{\varphi}_{\omega|n}(s)} \in H_{D_0^{(h)}}, \qquad n \geq 0,$$

其中，$(D_0^{(h)})_x$ 表示 $H_{D_0^{(h)}}$ 中位于 x 处的核截面。那么，对所有 $s,t \in X^+{}_{\text{fin}}$，

$$\langle \Psi(s), \Psi(t) \rangle_{H_\partial} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(h)}(s,t).$$

因此，

$$K_\infty^{(h)}(s,t) = K^{(h)}(s,t) + \langle \Psi(s), \Psi(t) \rangle_{H_\partial}.$$

证明。 固定 $s,t \in X^+{}_{\text{fin}}$。根据构造以及 $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ 中的正交性，

$$\langle \Psi(s), \Psi(t) \rangle_{H_\partial} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega \langle \Psi(s)(n,\omega), \Psi(t)(n,\omega) \rangle_{H_{D_0^{(h)}}} d\nu(\omega).$$

固定 n 时，被积函数在满足 $|w| = n$ 的柱集 $[w]$ 上为常数，而在这样的柱集上，我们有 $\omega|n = w$。利用 $\left\langle (D_0^{(h)})_x, (D_0^{(h)})_y \right\rangle = D_0^{(h)}(x,y)$，得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega \langle \Psi(s)(n,\omega), \Psi(t)(n,\omega) \rangle d\nu(\omega) &= \sum_{|w|=n} \frac{p_w(s)\, p_w(t)}{\nu([w])} D_0^{(h)}(\check{\varphi}_w(s), \check{\varphi}_w(t))\, \nu([w]) \\ &= \sum_{|w|=n} p_w(s)\, p_w(t)\, D_0^{(h)}(\check{\varphi}_w(s), \check{\varphi}_w(t)).\end{aligned}$$

由引理 5.4 应用于 $G = D_0^{(h)}$，右侧等于 $\left(\widetilde{L}^n D_0^{(h)}\right)(s,t) = D_n^{(h)}(s,t)$。对 n 求和，得到

$$\langle \Psi(s), \Psi(t) \rangle_{H_\partial} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(h)}(s,t).$$

最后， $K_\infty^{(h)} = K^{(h)} + \sum_{n\geq 0} D_n^{(h)}$是第2节望远镜恒等式的规范化形式，由此得到所声称的表示。□

注5.6。映射 $s \mapsto \Psi(s)$ 生成一个边界指标特征族，该族由单步缺陷 D_0 沿树传播而构成，其权重由 Doob路径测度决定。因子 $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ 按词长记录边界过滤，而各层之间的正交性与第2节的缺陷分解相符。特别是，上述边界表示在参考柱正测度 ν 于Ω上的选择意义下是规范的，并且与第4 节的高斯模型相容，因为它给出了一个显式的边界特征空间，其格拉姆核就是累积缺陷 $\sum_{n\ge 0} D_n^{(h)}$。

此处我们不考虑沿 $\omega \mapsto s_n(\omega)$ 的边界极限，但路径测度 μ_s 和边界特征映射 Ψ 为此类细化问题提供了便利的平台，包括鞅和边界紧化问题，以及通过沿 Ω 逐层改变缺陷贡献来构造其他 L-不变核。

参考文献

[AM02] Jim Agler 和 John E. McCarthy，Pick插值与希尔伯特函数空间，Graduate Studies in Mathematics，第44卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2002年。MR 1882259[Aro50] N. Aronszajn，再生核理论，美国数学会会刊 68 (1950)，337–404。MR 51437[Arv98] William Arveson， C^*-代数的子代数。III. 多变量算子理论，Acta Mathematica 181 (1998)，第2期，159–228。MR 1668582[BCR84] Christian Berg、Jens Peter Reus Christensen 和 Paul Ressel，半群上的调和分析，Graduate Texts in Mathematics，第100卷，施普林格出版社，纽约，1984，正定函数及相关函数理论。MR 747302[BCZ24] Daniela Bertacchi、Elisabetta Candellero 和 Fabio Zucca，分枝随机游走的Martin边界与渐近行为，Electronic Journal of Probability 29 (2024)，论文编号138，27页。MR 4798615[BJ22] Sergey Bezuglyi 和 Palle E. T. Jorgensen，通过Bratteli图和路径空间测度研究图上的调和分析，Dissertationes Mathematicae 574 (2022)，74页。MR 4388381[BJ24] , 广义Bratteli图上的IFS测度，《分形几何与动力系统的最新进展》，Contemporary Mathematics，第797卷，美国数学会，[ ], [2024] 2024, 123 145 4730766 普罗维登斯，罗得岛州，[86] © 页码 – 。MR BS V. P. Belavkin 和 P. Staszewski，完全正映射的Radon-Nikodým定理，Reports on Mathematical Physics 24 (1986)，第1期，49–55。MR 932932[BTA04] Alain Berlinet 和 Christine Thomas-Agnan，概率与统计中的再生核希尔伯特空间，Kluwer Academic Publishers，波士顿，马萨诸塞州，2004，由 Persi Diaconis 作序。MR 2239907[DHMT24] Benjamin Dufée、Bérenger Hug、Étienne Mémin 和 Gilles Tissot，再生核希尔伯特空间族中的集合预报，Physics D 459 134044，24 2024 4682643 ( )，论文编号 . MR [Ful23] Adam H. Fuller，行等距算子的 Słociński-Wold分解，Canadian Mathematical Bulletin 66 (2023)，第3期，780–790。MR 4651635[KSM20] Stefan Klus、Ingmar Schuster 和 Krikamol Muandet，再生核希尔伯特空间中传递算子的特征分解，Journal of Nonlinear Science 30 1，283 2020 315 4054854 ( )，第 – 期。MR [Lif12] Mikhail Lifshits，高斯过程讲义，SpringerBriefs in Mathematics，施普林格，海德堡，2012。MR 3024389[LP16] Russell Lyons 和 Yuval Peres，树与网络上的概率，Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics，第42卷，剑桥大学出版社，纽约，2016。MR 3616205[Pau02] Vern Paulsen，完全有界映射与算子代数，Cambridge Studies in Advanced Mathematics，第78卷，剑桥大学出版社，剑桥，2002。MR 1976867

[PR16] Vern I. Paulsen 和 Mrinal Raghupathi，再生核希尔伯特空间理论导论，Cambridge Studies in Advanced Mathematics，第152卷，剑桥大学出版社，剑桥，2016 3526117 。MR PW Massimo A. [19] Picardello 和 Wolfgang Woess，树上 λ-调和函数与多重调和函数的边界表示，Potential Anal. **51** (2019)，第4期，541–561。MR 4031266[PW20] ，树上 λ-调和函数的多重边界表示，《图与流形上的分析与几何》，London Math. Soc. Lecture Note Ser.，第 461， 2020， 95 125 4412972 卷，剑 [06] 桥大学出版社，剑桥，页码 – 。MR RW Carl Edward Rasmussen 和 Christopher K. I. Williams，用于机器学习的高斯过程，自适应计算与机器学习，麻省理工学院出版社，剑桥，马萨诸塞州，2006。MR 2514435[SNFBK10] Béla Sz.-Nagy、Ciprian Foias、Hari Bercovici 和 László Kérchy，希尔伯特空间上算子的调和分析，增订版，Universitext，施普林格，纽约，2010。MR 2760647[Soa94] Paolo M. Soardi，无限网络上的势理论，数学讲义，第1590卷，施普林格出版社，柏林，1994。MR 1324344[SS16] Saburou Saitoh 和 Yoshihiro Sawano，再生核理论及其应用，数学进展，第44卷，施普林格，新加坡，2016。MR 3560890[SZ08] Adam Skalski 和 Joachim Zacharias，乘积系统表示的 *Wold*分解 C^*-对应，Internat. J. Math.**19** (2008)，第4期，455–479。MR 2416726[Tia25] James Tian，随机矩阵系综的核拉东-尼科迪姆导数，arXiv.2509.20496 (2025)。[Tok20] Yuki Tokushige，随机树边界上的跳跃过程，Stochastic Process. Appl.**130** (2020)，第2期，584–604。MR 4046511[Woe09] Wolfgang Woess，可数马尔可夫链，欧洲数学学会数学教材，欧洲数学会 (EMS)，苏黎世，2009，生成函数、边界理论、树上的随机游走。MR 2548569

《数学评论》，美国密歇根州安娜堡市 W. William St 535 号，210 室，邮编 48103电子邮件地址：james.ftian@gmail.com