arXiv:2602.01440v1 [math.AC] 1 Feb 2026

有限长度模的提升系统

BENJAMIN KATZ、NAWAJ KC、KESAVAN MOHANA SUNDARAM、
ANDREW J. SOTO LEVINS 和 RYAN WATSON

Abstract. 本文研究沿诺特局部环之间满射映射提升模的问题，设 $\varphi\colon R \twoheadrightarrow S$。若 $L \otimes_R S \cong M$，则有限生成的 R-模L 是某个 S-模 M的 *naive lift*。我们关注 M 所有朴素提升中的最大深度和维数，分别称为 M 沿 φ的*liftable depth* 和 *liftable dimension*。我们通过本文引入的 *lifting systems* 这一概念来研究这个问题。随后，我们用提升系统给出有限长度模能够提升到正则局部环并实现 Serre 提升的充要条件。

1. Introduction

给定诺特局部环之间的满射 $\varphi\colon R \twoheadrightarrow S$ 以及有限生成的S-模 M，存在有限生成的 R-模 L，使得 $L \otimes_R S \cong M$；例如，我们可以将 M 的表示矩阵提升到 R，并令 L 为其余核。我们称这样的 L 为 M的朴素提升。由于提升表示时存在多种选择，一个 S-模可能有许多彼此不同构的朴素提升。问题在于，给定的 S-模的朴素提升，其深度和维数最大能达到多少。

也就是说，我们考虑 φ 下 S-模 M 的两个不变量，称为可提升深度 和 可提升维数，分别记作 $\operatorname{lift.depth}_\varphi(M)$ 和 $\operatorname{lift.dim}_\varphi(M)$。它们分别定义为 M 的所有朴素提升中的最大深度和最大维数。在本节余下部分，我们假设 S 在 R 上具有有限投射维数，并且 M 是一个有限长度的 S-模。

由 Auslander 的公式 [2, 定理 1。2], 可得

$$\operatorname{lift.depth}_\varphi(M) \leq \operatorname{depth} R - \operatorname{depth} S, \tag{1}$$

并且达到此上界的模可以提升到 R；参见 3.1。也就是说，存在一个有限生成的 R-模 L，使得 $L \otimes_R S \cong M$，且对 $i > 0$，有 $\operatorname{Tor}_i^R(L, S) = 0$。在这种情况下，我们称 M 是可提升到 R 的 S-模。注意，当 M 提升到某个 R-模 L 时，M 的极小自由分解会提升为 L 的极小自由分解。许多研究都探讨过这种提升概念 [3, 6, 8, 10, 13, 14, 19]。

另一方面，要确定可提升维数的统一上界似乎是个更难的问题，至少在如此一般的层面上是这样。

Date：2026年2月3日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类：13C14、13C15、13D22；次分类：13D40、13E15。*Key words and phrases.* 提升系统、可提升深度、可提升维数、有限长度模、可提升性、Serre 可提升性。

猜想中的答案是

$$\operatorname{lift.dim}_{\varphi}(M) \leq \dim R - \dim S, \tag{2}$$

这是 Peskine–Szpiro 一个由来已久的猜想的推论 [19, 第 II 章，0。2]。Serre 维数不等式 [23, 第 V 章，定理3] 证明了当2成立时 R 为正则时，(2) 成立；而新交定理 [20] 则在假设S 也为 Cohen–Macaulay 时证明了这一点。当 R 为超曲面时，Hochster 也证明了这一点 [12]。然而，除了这些情形之外，我们尚不清楚 (2) 是否成立。

根据定义，满足提升 S-模 M 且。维数$\varphi(M)$ 达到这一猜想的上界的，称为*Serre* 可提升到 R；这是一种在 [15, 16]中引入并研究的新型提升。此类模具有一些显著性质：例如，如果有限长度模 M 在 S 上允许提升到某个非分歧正则局部环 R，那么 $\ell_S(M)$ $\geq e(S)$，其中 $e(S)$ 表示 S [16,的 Hilbert–Samuel 重数定理 21]。

经典可提升性与 Serre 可提升性之间的联系在于以下奇特事实：当 R 是正则的，或者我们处于标准分次情形且 M 具有有限投射维数时，如果提升。深度$\varphi(M)$ 在（ 1 ）中达到可能的最大值，那么提升。维数 $\varphi(M)$ 也会在（ 2 ）中达到最大值；也就是说，向正则环的可提升模是 Serre 可提升的 [16, 命题 16] ，在分次情形中同样如此 [15, 定理 2.28]。我们不知道正则性假设或分次假设在多大程度上是必要的；见 [15, 问题 2.212]。但是，确实存在具有有限或无限投射维数的不可提升模，它们允许 Serre 提升 [16, 例 1.7 和 32] 以及第5.1节。

新结果。本文利用有限长度模的提升系统这一概念，建立可提升深度和可提升维数的下界。我们的灵感来自 Auslander–Ding–Solberg 在刻画可提升模沿超曲面满射 [3,定理 1。2]。关键的新思路是以下定义。

定义 A。给定诺特局部环的一个满射 $\varphi\colon R \twoheadrightarrow S = R/\mathfrak{a}$，以及一个有限长度 S-模 M，有限长度 R-模 $\{M_n\}_{n\geq 1}$ 的一个集合称为 M 沿 φ 的提升系统，若 $M_1 = M$, $\mathfrak{a}^n \subseteq \operatorname{ann}_R M_n$，且对于所有 $n \geq 1$都有 $M_{n+1}/\mathfrak{a}^n M_{n+1} \cong M_n$。$R$-模 $L = \varprojlim M_n$ 称为与该系统相关的提升。

这一术语源于这样一个事实：若 R 是 $\mathfrak{a}$-进完备的，且$\{M_n\}_{n\geq 1}$ 是 M 沿 φ 的一个提升系统，其相关提升为 L，则有 $L \otimes_R S \cong M$。也就是说， L 是 S-模 M的一个朴素提升；参见命题 2.1。我们的主要结果给出了 L的深度和维数下界，这些下界由系统中有限长度模所依赖的不变量 $\{M_n\}_{n\geq 1}$决定。

在以下结果中，当我们写作 $\ell_R(R/I_n) \approx n^r$ 时，意指存在次数为 r 的多项式 f 和 g，使得

$$f(n) \leq \ell_R(R/I_n) \leq g(n)$$

对于 $n \gg 0$。

定理 B. 考虑诺特局部环的一个满射 $\varphi\colon R \twoheadrightarrow S = R/\mathfrak{a}$，其中 R 是完备的（关于 $\mathfrak{a}$ 进拓扑），并设 r 和 d 为非负整数。则以下结论成立。

(1) 如果 S 在 R 上具有有限投射维数，那么有限长度的 S-模 M 满足 提升。深度$\varphi(M) \geq r$ 当且仅当 M 具有一个提升系统

$\{M_n\}_{n\geq 1}$ 沿着 φ，使得对所有 $i > \operatorname{pdim}_R S - r$，$\varprojlim_n \operatorname{Tor}_i^R(M_n, S) = 0$。在这种情况下，$L = \varprojlim M_n$ 是一个朴素提升，且深度为 $L \geq r$。*(2)* 有限长度的 S-模 M 满足提升。$\dim_\varphi(M) \geq r$ 当且仅当它具有一个沿着 φ 的提升系统 $\{M_n\}_{n\geq 1}$，使得 $\ell_R(R/I_n) \approx n^d$，其中 $I_n = \operatorname{Fitt}_0^R(M_n)$ 是 M_n 在 R 上的零阶 *Fitting* 理想，且 $d \geq r$。在这种情况下，$L = \varprojlim M_n$ 是一个朴素提升，且维数为 $L \geq r$。此外，如果维数为 $L = r$，那么 $d = r$。

作为该定理的推论，我们刻画了局部环上的有限长度模何时可提升，以及何时可 Serre 提升到正则局部环；见推论 3.3 和推论 4.5。利用本文引入的方法，在第 5 节中，我们构造了有限长度且有限投射维数的不可提升模，它们是 Serre 可提升的；还构造了正常相交的模；分别见定理 5.2和定理 5.4 。

2. Lifting systems

本节中，我们建立提升系统的性质；关于这一方向的主要结果如下。对于有限生成的 R-模，我们用 $\mu_R(-)$表示其最小生成元个数。

命题 2.1. 设 $\varphi\colon R \twoheadrightarrow S = R/\mathfrak{a}$ 是诺特局部环之间的一个满射，其中 R 是 $\mathfrak{a}$-进完备的，并设 M 是有限长度 S-模。假设$\{M_n\}_{n\geq 1}$ 是沿着 $M = M_1$ φ的提升系统，并令 $L = \varprojlim M_n$ 表示该系统对应的提升；见定义 A。则 L 满足以下性质：

(1) 对每个 $n \geq 1$，以及 *(2)* L 是一个有限生成的 R-模，且 $\mu_R(L) = \mu_R(M_n)$ 对每个 $n \geq 1$，并且

$$\operatorname{ann}_R(L) = \bigcap_{n\geq 1} \operatorname{ann}_R(M_n).$$

我们在附录A中证明这个命题。现在我们更明确地描述提升系统中各模的表示矩阵；参见引理 2.3。

2.2. 假设 $\varphi\colon R \twoheadrightarrow S = R/\mathfrak{a}$ 是诺特局部环的一个满射。对每个 $n \geq 1$，令 A_n 表示以 $\mathfrak{a}^n$ 的最小生成元为其元素的行矩阵。对于 $\mu \geq 1$，我们用 $A_n^{\oplus\mu}$ 表示一个大小为 μ、对角线上为 A_n 的对角分块矩阵。

设 $M_1 = M$ 是一个 S-模，其表示矩阵为 ϕ，并假设 $\mu_S(M) = \mu$。等价地，对于某个 $m \geq 0$，ϕ 是一个在 S 上的 $\mu \times m$ 矩阵。滥用记号，我们也将 ϕ 视为 R 上的矩阵，方法是直接提升其元素。以下给出 $M_1 = M$ 作为 R- 模的一个表示。

$$\phi_1 = \left(\begin{array}{c|c} \phi & (A_1)^{\oplus\mu} \end{array} \right)$$

如果 M_2 是一个满足 $M_2/\mathfrak{a}M_2 \cong M_1$的 $R/\mathfrak{a}^2$-模，那么我们可以将 M_2 作为一个 R-模写成如下表示矩阵。

$$\phi_2 = \left(\begin{array}{c|c} \phi + \sigma_1 & (A_2)^{\oplus\mu} \end{array} \right),$$

其中，σ_1 是一个与 ϕ 大小相同的矩阵，其元素要么为零，要么属于 $\mathfrak{a} \setminus \mathfrak{a}^2$。归纳地，在第 n阶段，我们可以将 M_n 的表示矩阵写成

R-模如下

$$\phi_n = \left(\begin{array}{c|c} \phi + \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_i & (A_n)^{\oplus \mu} \end{array} \right),$$

其中，对每个 j， σ_j 是与 ϕ 大小相同的矩阵，其元素要么为零，要么属于 $\mathfrak{a}^j \setminus \mathfrak{a}^{j+1}$。我们将下述内容记为一条引理，以备后用。

引理 2.3. 设 $\varphi\colon R \twoheadrightarrow S = R/\mathfrak{a}$ 是诺特局部环之间的满射。若 M 是具有表示矩阵 ϕ的 S-模，则 M 沿 φ 的提升系统$\{M_n\}_{n\geq 1}$ 满足：

(1) 对每个 $n \geq 1$，下述是 M_n 作为 R-模的表示矩阵

$$\phi_n = \left(\begin{array}{c|c} \phi + \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_j & (A_n)^{\oplus \mu} \end{array} \right),$$

其中 $\mu = \mu_S(M)$，且对每个 $j \geq 1$， σ_j 都是一个与 ϕ大小相同的矩阵，其元素为零或属于 $\mathfrak{a}^j \setminus \mathfrak{a}^{j+1}$。

(2) 若 $\mathfrak{a} = (g_1, \ldots, g_d)$，则对每个 $j \geq 1$，我们可以写成

$$\sigma_j = \sum_{k=1}^{d} \sigma_{j,k} g_k$$

其中 $\sigma_{j,k}$ 是一个与 σ_j 大小相同的矩阵，其每个元素对所有 $j \geq 1$ 和 $1 \leq k \leq d$ 都属于 $\mathfrak{a}^{j-1}$ 。

(3) 下列矩阵

$$\Phi \coloneqq \phi + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j$$

在 $R^{\mathfrak{a}}$ 上定义良好，并且 $L =$余核 $\Phi \cong$极限$\underleftarrow{}\, M_n$。

证明。 本引理前面的讨论表明 (1) 成立。对于 (2)，注意到 σ_j 的每个元素要么为零，要么属于 $\mathfrak{a}^j$，因此我们可以将其中每个元素写成一个和 $\sum_{k=1}^{d} r_i g_i$ ，其中每个 $r_i \in \mathfrak{a}^{j-1}$. 。这足以证明 (2)。

对于 (3)，显然 L 是一个有限生成的 $R^{\mathfrak{a}}$-模，因此 L 是 $\mathfrak{a}$-进完备的。因此，

$$L \cong \varprojlim L/\mathfrak{a}^n L \cong \varprojlim M_n,$$

其中，第一个同构是因为 L 是 $\mathfrak{a}$-进完备的，第二个同构是因为 $L/\mathfrak{a}^n L \cong$ 余核(ϕ_n) $\cong M_n$。 □

下面给出一个显式例子，以展示该引理的结论。

例 2.4. 考虑 $\varphi\colon R \to S = R/\mathfrak{a}$，其中 $R = k[[x, y, z]]$ 且 $\mathfrak{a} = (x^2, y^2)$。设 $M_1 = M$ 为一个 S-模，其表示矩阵如下

$$\phi = \begin{pmatrix} z & y \\ y & z \end{pmatrix}.$$

对于每个 $j \geq 1$，令

$$\sigma_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x^{2j} & 0 \end{pmatrix} \text{ if } j \text{ is even, and } \sigma_j = \begin{pmatrix} 0 & x^{2j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ if } j \text{ is odd.}$$

显然，对于任意 $j \geq 1$， σ_j 的各项要么为零，要么属于 $\mathfrak{a}^j \setminus \mathfrak{a}^{j+1}$。现在，作为一个 R-模， $\phi_n = \begin{pmatrix} \phi + \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_j(A_n)^{\oplus 2} \end{pmatrix}$ 是 M_n 的表示矩阵。将其明确写出，对于所有 $n \geq 3$，当 n 为偶数时， M_n 是以下映射的余核

$$R^{2n+4} \xrightarrow{\left[\begin{array}{cc|cccccc} z & s & x^{2n} & x^{2n-2}y^2 & \cdots & y^{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t & z & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^{2n} & x^{2n-2}y^2 & \cdots & y^{2n} \end{array}\right]} R^2,$$

其中 $s = y + x^2 + x^6 + \cdots + x^{2n-2}$ 和 $t = y + x^4 + x^8 + \cdots + x^{2n-4}$。同样，当 n 为奇数时， M_n 是该映射的余核

$$R^{2n+4} \xrightarrow{\left[\begin{array}{cc|cccccc} z & s & x^{2n} & x^{2n-2}y^2 & \cdots & y^{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t & z & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^{2n} & x^{2n-2}y^2 & \cdots & y^{2n} \end{array}\right]} R^2,$$

其中 $s = y + x^2 + x^6 + \cdots + x^{2n-4}$ 和 $t = y + x^4 + x^8 + \cdots + x^{2n-2}$.。最后，所考虑的提升系统对应的提升是 R-模 L，它同构于下列映射的余核

$$R^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} z & y + \sum_{i=1}^{\infty} x^{4i-2} \\ y + \sum_{i=1}^{\infty} x^{4i} & z \end{bmatrix}} R^2.$$

3. Liftable depth

本节证明定理 B 和推论 3.3。首先回顾 Auslander 的一个公式，以及 Tor 与逆极限可交换的一种情形。对于接下来的两条注记， $\varphi\colon\ R \to S = R/\mathfrak{a}$ 是诺特局部环之间的一个满射。

3.1. 设 M 和 N 是有限生成的 R-模。若 M 在 R 上具有有限投射维数，且 $M \otimes_R N$ 具有有限长度，则 Auslander 深度公式 [2,定理 1。2] 给出

$$\operatorname{depth} N = \operatorname{pdim}_R M - q_R(M, N),$$

其中 $q_R(M,N) = \sup\{i : \operatorname{Tor}_i^R(M,N) \neq 0\}$. 因此，若 S 在 R 上具有有限投射维数，则对任意有限长度 S-模 M，有

$$\operatorname{lift.depth}_{\varphi}(M) \leq \operatorname{pdim}_R S = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth} S,$$

并提升。 深度$\varphi(M) = \operatorname{pdim}_R S$当且仅当 M可提升到 R。

3.2. 设 $\{M_n\}_{n\geq 1}$ 是某个有限长度 S-模 M沿着 φ 的提升系统。于是我们可以考虑由 $\{M_n \otimes_R F\}_{n\geq 1}$组成的 R-复形系统，其中F 是 R-模 S的极小自由分解。由于 M_n 是一个满射映射系统，因此在复形上的诱导映射逐次满射。现在应用 [24, 定理 3.5。8], ，可得

$$\varprojlim \operatorname{Tor}_i^R(M_n, S) \cong \operatorname{Tor}_i^R(\varprojlim M_n, S). \tag{3}$$

这里我们还用到了这样一个事实：对所有的 $i \geq 0$，都有 $\varprojlim^{(1)} \operatorname{Tor}_i^R(M_n, S) = 0$，因为 Tor 群是有限长度模；参见 [24, 命题 3.5.7]。

证明定理 *B*（*1*）。设 L 为 M 的有限生成朴素提升，深度为 $L \geq r$，我们将 Auslander公式应用于 $L \otimes_R S \cong M$ 并观察到

$$\operatorname{pdim}_R S - r \geq q_R(L, S).$$

显然 $\{M_n := L/\mathfrak{a}^n L\}_{n\geq 1}$ 是 M 沿 φ的提升系统，相应提升为$\frown{L}^{\mathfrak{a}}$，即 $\mathfrak{a}$-进意义下 L 的完备化。由于 R 是 $\mathfrak{a}$-进完备的，且由于 L 是一个$\widehat{\ }$有限生成 R-模，由命题2.1（2），我们有 $L^{\mathfrak{a}} \cong L$，从而

$$\varprojlim \operatorname{Tor}_i^R(M_n, S) \cong \operatorname{Tor}_i^R(\varprojlim M_n, S) \cong \operatorname{Tor}_i^R(L, S) = 0$$

对于 $i > q_R(L, S)$，其中第一个同构由 (3) 给出。

反过来，给定一个提升系统 $\{M_n\}_{n\geq 1}$使得 $\lim\leftarrow \operatorname{Tor}_i^R(M_n, S) = 0$对于$i > \operatorname{pdim}_R S - r$，则 $L = \lim_{\leftarrow} M_n$由命题 $L \otimes_R S \cong M$满足 2.1(1)，并且满足深度$L \geq r$因为

$$\operatorname{pdim}_R S - r \geq q_R(L, S) = \operatorname{pdim}_R S - \operatorname{depth} L,$$

其中不等式由假设得到，等式由 Auslander公式3.1得到。此处可以应用 Auslander公式，因为 L 是一个有限生成的 R- 模，由命题 2.1(2) 得到。证明至此完成。□

推论 3.3. 设 $\varphi\colon R \twoheadrightarrow S = R/\mathfrak{a}$ 是诺特局部环的一个满射，其中R 是正则的，且是 $\mathfrak{a}$-进完备的。有限长度的 S-模 M 可提升到 R，当且仅当它存在一个沿着 φ 的提升系统 $\{M_n\}_{n\geq 1}$，使得 $\lim\leftarrow \operatorname{Tor}_1^R(M_n, S) = 0$。

证明。 S-模 M 提升到有限生成的 R-模 L，给出下面的第二个等式

$$\operatorname{pdim}_R S - \operatorname{depth} L = q_R(L, S) = 0,$$

第一个等式则由 Auslander公式得到。 M 的可提升深度至少为深度 L，因此由定理 B(1) 可知存在一个提升系统 $\{M_n\}_{n\geq 1}$ 使得

$$\varprojlim \operatorname{Tor}_i^R(M_n, S) = 0$$

对所有 $i > \operatorname{pdim}_R S - \operatorname{depth} L = 0$。

反过来，令 $L = \lim_{\leftarrow} M_n$ 为与提升系统 $\{M_n\}_{n\geq 1}$相关联的提升。则由假设可得下面的第二个等式

$$\operatorname{Tor}_1^R(L, S) = \operatorname{Tor}_1^R(\varprojlim M_n, S) \cong \varprojlim \operatorname{Tor}_1^R(M_n, S) = 0$$

而且，3给出了该同构。正则局部环上的模是 Tor刚性的，依据[17]，，因此 $q_R(L, S) = 0$。由于我们还有 L 是 M 的一个朴素提升，这是由命题 2.1(1) 得出的， L 是 M □的一个提升

在下面的例子中，我们计算 M 在例 2.4中的提升深度。

例 3.4。 沿用例 2.4中的设定，复形

$$0 \to R^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} z & y + \sum_{i=1}^{\infty} x^{4i-2} \\ y + \sum_{i=1}^{\infty} x^{4i} & z \end{bmatrix}} R^2 \to 0$$

是 L 上的极小自由分解， R。这是因为上方矩阵的行列式是 R中的非零因子，因此 Buchsbaum-Eisenbud无环性准则表明该复形是正合的，参见 [5, 定理 1.4。13]。由 Auslander-Buchsbaum公式可知，深度 $L = 2$ 。现在，(1)给出了下面的第二个不等式

$$2 = \operatorname{depth} L \leq \operatorname{lift.depth}_{\varphi}(M) \leq \operatorname{depth} R - \operatorname{depth} S = 2.$$

4. Liftable dimension

本节中，我们将证明定理B(2)和推论4.5。我们的关键思路是考察提升系统中各个模的零阶 Fitting 理想。

4.1. 关于 Fitting 理想的基本事实，我们参见 [9, 20。2]。回顾一下，若 R 是一个诺特局部环，且 M 是一个有限表示的 R-模，并具有一个表示

$$R^{\beta_1} \xrightarrow{\phi} R^{\beta_0} \to M \to 0,$$

定义 $\mathrm{Fitt}_i^R(M) = I_{\beta_0 - i}(\phi)$，即由矩阵 ϕ 的 $(\beta_0 - i)$-子式生成的理想。注意，对于 R 中的一个理想 I，我们有等式：$\mathrm{Fitt}_0(R/I) = I$。理想 $\mathrm{Fitt}_i^R(M)$ 不依赖于 M 的表示选择，见 [9, 20.4]。此外，对于有限生成的 R-模 M，有

$$\mathrm{ann}_R(M)^{\mu_R(M)} \subseteq \mathrm{Fitt}_0^R(M) \subseteq \mathrm{ann}_R(M),$$

因此 $\mathrm{Supp}_R(M) = \mathrm{V}(\mathrm{ann}_R(M)) = \mathrm{V}(\mathrm{Fitt}_0^R(M))$，见 [9, 命题 207]。

引理 4.2。 设 $R \twoheadrightarrow S = R/\mathfrak{a}$ 是诺特局部环的一个满射。若 L 是一个有限生成的 R-模，并且由 μ 个元素生成，则

$$\mathrm{Fitt}_0^R(L) + \mathfrak{a}^\mu \subseteq \mathrm{Fitt}_0^R(L \otimes_R S) \subseteq \mathrm{Fitt}_0^R(L) + \mathfrak{a}.$$

证明。设 $R^{\beta_1} \xrightarrow{\phi} R^{\beta_0} \to L \to 0$ 是 L的表示矩阵。若$\mathfrak{a} = (a_1、\ldots\ldots、a_n)$，则定义矩阵

$$A = [a_1 I_{\beta_0} \ldots a_n I_{\beta_0}],$$

其中 I_{β_0} 是大小为 β_0的单位矩阵。注意到，$\phi' = (\phi|A)$是 R上的 $L \otimes_R S$ 的表示矩阵。现在容易看出

$$\mathrm{Fitt}_0^R(L \otimes_R S) = \sum_{j=0}^{\mu} \mathfrak{a}^j \,\mathrm{Fitt}_j^R(L).$$

注意到 $\mathrm{Fitt}_\mu^R(L) = R$，断言便显然成立。 □

我们将希尔伯特–塞缪尔理论中的以下基本定理记录为一个引理，以备后用，参见 [18, 第 13]节。

引理 4.3。 设$(R、\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环。若 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{c}$ 是理想，且满足$\sqrt{\mathfrak{b} + \mathfrak{c}} = \mathfrak{m}$，则

$$\ell_R(R/(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}^n)) \approx n^{\dim R/\mathfrak{b}}.$$

定理 *B(2)* 的证明。首先假设存在一个有限生成的 R-模 L，使得 $L \otimes_R S \cong M$ 且 $\dim L \geq r$。那么 $\{M_n\}_{n\geq 1} = \{L/\mathfrak{a}^n L\}_{n\geq 1}$是 M的提升系统。令 $I = \mathrm{Fitt}_0^R(L)$，并令 $I_n = \mathrm{Fitt}_0^R(M_n)$，对所有 $n \geq 1$。根据引理 4.2，对所有 $n \geq 1$，有以下包含关系

$$I + \mathfrak{a}^{n\mu} \subseteq I_n \subseteq I + \mathfrak{a}^n, \tag{4}$$

其中 $\mu = \mu_R(L)$。因此，$\ell_R(R/I_n) \approx n^d$ 对于 $d =$ 维数 $R/I =$ 维数 L 应用引理 4.3可得。

至于逆命题，给定这样一个提升系统 $\{M_n\}_{\geq 1}$，设 L 为其相伴的提升。由命题 2.1，可得 $L \otimes_R R/\mathfrak{a}^n \cong M_n$ 对每个 $n \geq 1$，从而应用引理 4.2，可得包含（4）如上，对每个 $n \geq 1$。利用我们的假设并应用引理 4.3，我们有 $\dim L = \dim R/I = d \geq r$。证毕。 □

注 4.4. 定理 B(2) 的逆命题成立，如果所考虑的提升系统 $\{M_n\}_{\geq 1}$ 满足 $\ell_R(R/J_n) \approx n^r$ 其中 $J_n = \operatorname{ann}_R(M_n)$；这由 4.1 可得。然而，我们不知道正向是否也成立。

推论 4.5。 给定诺特局部环的一个满射 $R \twoheadrightarrow S = R/\mathfrak{a}$，其中 R是 $\mathfrak{a}$-进完备的；如果 R 是正则的，或者 S 是一个完美的 R-模，那么有限长度S-模 M 可以 *Serre* 提升到 R，当且仅当 M 具有一个提升系统 $\{M_n\}_{n\geq 1}$，使得 $\ell_R(R/\operatorname{Fitting}_0^R(M_n)) \approx n^{\dim R - \text{维数}S}$。

证明。 如果 M Serre 提升为一个 R-模 L，那么

$$\dim L = \dim R - \dim S,$$

因此， M的提升维数至少为 dim R –dim S，而根据定理 B(2) 可知 M 具有一个提升系统，并且其 Fitting 理想满足所要求的性质。

反之，假设 M 具有一个提升系统 $\{M_n\}_{n\geq 1}$，使得

$$\ell_R(R/\operatorname{Fitt}_0^R(M_n)) \approx n^{\dim R - \dim S}.$$

我们需要证明 dim L等于 dim R –dim S。当 R为正则时，我们有

$$\dim L \leq \dim R - \dim S \leq \dim L$$

其中第一个不等式由 Serre 维数不等式 [23, 第V章，定理3] 得出，第二个不等式由定理B(2) 取 $d = r = \dim R - \dim S$得出。现在假设 S 是完全的。下列不等式恒成立

$$\operatorname{grade}_R S \leq \operatorname{height} \operatorname{ann}_R(S) \leq \dim R - \dim S \leq \operatorname{pdim}_R S.$$

第三个不等式是 Peskine 与 Szpiro 的交截定理 [11, 19, 20,21], ，并参见 [4, (2.3.3)] 关于前两个。由于 S 是完全的， S 的级与投射维数相等，从而得到下面的等式

$$\dim R - \dim S \leq \dim L \leq \operatorname{pdim}_R S = \dim R - \dim S.$$

第一个不等式由定理B(2) 取 $d = r = \dim R - \dim S$得出，第二个不等式由 Peskine 与 Szpiro 的交截定理得出。□

在下面的例子中，我们利用本节的结果计算 M 的提升维数，见例2.4。

例 4.6. 我们再次回到例 2.4 。例 3.4中的计算 M 可提升至 R，因此根据 [16, 命题 1，2] 我们知道 M 也可 Serre 提升至 R，即提升。 维数$\varphi(M)$ =提升。 深度$\varphi(M) = 2$.

不过，为了说明，我们利用上述定理计算提升。 维数$\varphi(M)$。注意

$$I_n = \operatorname{Fitt}_0^R(M_n) = (z^2 - st) + \mathfrak{a}^n(s,t,z,\mathfrak{a}^n) \subseteq (z^2 - st) + \mathfrak{a}^n,$$

并由此观察到

$$\ell_R(R/I_n) \geq \ell_R\left(\frac{k[[x,y,z]]}{(x^2,y^2)^n + (z^2 - st)}\right) = 2\ell_R\left(\frac{k[[x,y]]}{(x^2,y^2)^n}\right) \approx n^2.$$

因此，

$$2 \leq \operatorname{lift.dim}_\varphi(M) \leq 2,$$

其中，第一个不等式由上述定理得出，第二个不等式则由（2）得出。

5. Applications and examples

本节运用本文介绍的方法，构造有限长度且具有有限投射维数、但可由 Serre 提升的不可提升模的例子，并确定循环模在正则环上正常相交的一个充分条件；分别参见定理 5.2 和定理 5.4 。

5.1. **具有 Serre 提升的不可提升模**。 构造投射维数有限、但并非来自正则环的 Cohen–Macaulay 模，也就是说，不能提升到正则环的模，是一个有趣的问题。在一个二维二次超曲面上，存在一个投射维数有限的不可提升有限长度模，它具有到正则环的 Serre 提升 [16, 例 3。2]。本节中，我们构造一族投射维数有限的不可提升有限长度模，它们定义在任意（Krull）维数且余维至少为二的局部完全交环上，并且具有到正则环的 Serre 提升；参见定理 5.2。

在本小节中，我们始终假设如下设定：设 k 是一个域，且 $R = k[[x_1, ..., x_d, y_1, ..., y_d]]$ 对某个 $d \geq 2$ 成立。考虑理想 $\mathfrak{a} = (g_1, \ldots\ldots, g_d)$ ，其中 $g_i = x_i^d + y_i^d$ 对 $1 \leq i \leq d$ 成立，并令 $S = R/\mathfrak{a}$。设 $\varphi\colon R \to S$ 为商映射。注意， S 是一个维数为 d、余维为 d 的局部完全交环。

序列 $x_1^{d-1}, \ldots, x_d^{d-1}$ 和 $y_1^{d-1}, \ldots, y_d^{d-1}$ 都构成 S 中的极大正则序列。因此，我们有一个定义良好的 S-线性映射

$$\eta\colon (x_1^{d-1}, \ldots, x_d^{d-1}) \to S/(y_1^{d-1}, \ldots, y_d^{d-1}),$$

其中 $\eta(x_i^{d-1}) = -f_i$，且对 $1 \leq i \leq d$， $f_i = \prod_{j \neq i} x_j$ 。为了说明 η 是一个定义良好的 S-线性映射，取 $e_1, \ldots, e_d$ 为 S^d 的一组基。注意，由 $e_i \mapsto -f_i$ 定义的映射 $S^d \to S/(y_1^{d-1}, \ldots, y_d^{d-1})$ 的核包含 Koszul 关系 $x_i^{d-1}e_j - x_j^{d-1}e_i$；又因为 $x_1^{d-1}, \ldots, x_d^{d-1}$ 是一个 S-正则序列，所以 Koszul 关系是 $(x_1^{d-1}, \ldots, x_d^{d-1})$ 上仅有的关系。

令 M 表示由以下推出构造得到的 S-模

$$\begin{array}{ccc} (x_1^{d-1}, \ldots, x_d^{d-1}) & \hookrightarrow & S \\ \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow \\ S/(y_1^{d-1}, \ldots, y_d^{d-1}) & \longrightarrow & M. \end{array}$$

命题 5.1。 M 是一个有限长度且具有有限投射维数的 S-模。此外，以下是 M 作为 S-模的表示矩阵。

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & x_1^{d-1} & \ldots & x_d^{d-1} \\ y_1^{d-1} & \ldots & y_d^{d-1} & f_1 & \ldots & f_d \end{pmatrix}$$

证明。 由其构造可知， M 是以下类别中的一个代表元

$$\operatorname{Ext}_S^1\left(\frac{S}{(x_1^{d-1}, \ldots, x_d^{d-1})}, \frac{S}{(y_1^{d-1}, \ldots, y_d^{d-1})}\right),$$

见 [22, 引理 7。28]。因此，第一个断言成立，因为这些模是 S 中极大正则序列的商模，故具有有限投射维数。关于表示矩阵的断言则由推出构造得出。 □

我们的目标是证明以下结论。

定理 5.2。 考虑 $\varphi\colon R \twoheadrightarrow S$ 以及上文所述的有限长度 S-模 M。

(1) 存在一个提升系统 $\{M_n\}_{n\geq 1}$，沿着 φ，适用于 $M_1 = M$，使得

$$\ell_R(R/\operatorname{Fitt}_0^R(M_n)) \approx n^d.$$

特别地，M *Serre* 提升到 R。

(2) 每个关于 $M_1 = M$ 的提升系统 $\{M_n\}_{n\geq 1}$ 都满足

$$\varprojlim \operatorname{Tor}_1^R(M_n, S) \neq 0.$$

特别地，M 不提升到 R。

在证明定理之前，我们首先需要一个用于定理5.2(2) 的技术引理。下面，我们用 $(N)_j$ 表示矩阵 N的第 j 列 N。

引理 5.3。 考虑 $\varphi\colon R \twoheadrightarrow S$ 以及上述有限长度 S-模 M。设 $\{M_n\}_{n\geq 1}$ 是沿着 φ、关于 M 的提升系统，并按照引理 *2.3* 中的记号，设 ϕ_n 是 M_n 作为 R- 模的表示矩阵，适用于 $n \geq 1$。

令 $h = \prod_{i\leq d-2} x_i \in R$。对于每个 $n \geq 0$，存在

$$m_n = (m_{n,1}, \ldots, m_{n,d}) \in (R^{\oplus 2})^{\oplus d}$$

使得

(1) 以下等式在 $R^{\oplus 2}$上成立

$$\sum_{i=1}^{d} g_i m_{n,i} = -hy_{d-1}(\phi_{n+1})_{d-1} + hy_d(\phi_{n+1})_d + x_d^{d-1}(\phi_{n+1})_{2d-1} - x_{d-1}^{d-1}(\phi_{n+1})_{2d}.$$

(2) $m_{n,\,d-1}, m_{n,\,d} \in \mathfrak{m}^{d-2}R^{\oplus 2} \setminus \mathfrak{m}^{d-1}R^{\oplus 2}$，以及 *(3)* $m_{n+1} - m_n \in \mathfrak{a}^n\,(R^{\oplus 2})^{\oplus d}$。

证明。 根据引理 2.3，对于每个 $j \geq 1$，我们可以写成：

$$\sigma_j = \sum_{k=1}^{d} \sigma_{j,k} g_k \tag{5}$$

其中$\sigma_{j,\,k}$ 是一个矩阵，其每个元素都属于 $\mathfrak{a}^{j-1}$。令$h = \prod_{i\leq d-2} x_i$ 并对每个 $n \geq 1$ 以及 $1 \leq i \leq d$定义：

$$r_{n,i} = -hy_{d-1}(\sigma_{n,i})_{d-1} + hy_d(\sigma_{n,i})_d + x_d^{d-1}(\sigma_{n,i})_{2d-1} - x_{d-1}^{d-1}(\sigma_{n,i})_{2d} \in R^{\oplus 2},$$

并注意到 $r_{n,\,i} \in \mathfrak{a}^{n-1}R^{\oplus 2}$ 由 (5) 可知。令 $m_{0,\,d-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -h \end{pmatrix}$、$m_{0,\,d} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$，并且$m_{0,\,i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 $i \neq d-1,\ d$。现在，让我们为每个 $n \geq 1$ 定义

$$m_{n,i} = m_{0,i} + \sum_{j=1}^{n} r_{j,i}, \text{for } 1 \leq i \leq d.$$

由于 $h \in \mathfrak{m}^{d-2} \setminus \mathfrak{m}^{d-1}$，引理 5.3（2）根据定义成立。根据定义，对于每个 $m_{n+1} = m_n + r_{n+1}$，我们还有 $n \geq 0$，其中

$$r_{n+1} = (r_{n+1,1}, \ldots, r_{n+1,d}) \in \mathfrak{a}^n(R^{\oplus 2})^{\oplus d}.$$

这就证明了引理 5.3(3)。

现在我们对 n 使用归纳法来证明引理 5.3(1)。 $n=0$ 情形对应以下恒等式，可直接验证，其中 $\phi=\phi_1$。

$$g_{d-1}\begin{pmatrix}0\\-h\end{pmatrix}+g_d\begin{pmatrix}0\\h\end{pmatrix}=-hy_{d-1}(\phi)_{d-1}+hy_d(\phi)_d+x_d^{d-1}(\phi)_{2d-1}-x_{d-1}^{d-1}(\phi)_{2d}.$$

现在，对于 $n\geq 1$，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{d}g_im_{n,i}&=\sum_{i=1}^{d}g_im_{n-1,i}+\sum_{i=1}^{d}g_ir_{n,i}\\&=-hy_{d-1}((\phi_n)_{d-1}+(\sigma_n)_{d-1})+hy_d((\phi_n)_d+(\sigma_n)_d)\\&\quad+x_d^{d-1}((\phi_n)_{2d-1}+(\sigma_n)_{2d-1})-x_{d-1}^{d-1}((\phi_n)_{2d}+(\sigma_n)_{2d})\\&=-hy_{d-1}(\phi_{n+1})_{d-1}+hy_d(\phi_{n+1})_d+x_d^{d-1}(\phi_{n+1})_{2d-1}-x_{d-1}^{d-1}(\phi_{n+1})_{2d}.\end{aligned}$$

第一个等式源于 $m_n=m_{n-1}+r_n$ 这一事实，第二个等式由归纳法和 r_n 的定义得出，第三个等式则源于 $\phi_{n+1}=\phi_n+\sigma_n$ 这一事实。□

定理的证明 5.2。 对于（1）和（2），「特别是」部分分别由推论4.5 和推论3.3 得出。

采用引理 2.3 中的记号，并考虑提升系统 $\{M_n\}_{n\geq 1}$其中 $\sigma_j=0$ 对所有 $j\geq 1$。因此，作为一个 R-模，

$$M_n=\operatorname{coker}\begin{pmatrix}0&\dots&0&x_1^{d-1}&\dots&x_d^{d-1}&A_n&0\\y_1^{d-1}&\dots&y_d^{d-1}&f_1&\dots&f_d&0&A_n\end{pmatrix}.$$

显然，$\operatorname{Fitt}_0^R(M_n)\subseteq(x_1,\dots,x_d)+\mathfrak{a}^n$，因此

$$\ell_R(R/\operatorname{Fitt}_0^R(M_n))\geq\ell_R(\overline{R}/\mathfrak{a}^n\overline{R}),$$

其中 $\overline{R}=R/(x_1,\dots,x_d)$ 是一个 d维局部环。因此，当 n 充分大时，$\ell_R(R/\operatorname{Fitt}_0^R(M_n))\geq n^d$；这由标准的希尔伯特 - 塞缪尔理论得出。另一方面，设 L 是与该系统相关的提升，并设 $I=\operatorname{Fitt}_0^R(L)$。根据命题 2.1(1) 和引理 4.2，我们有以下包含关系

$$I+\mathfrak{a}^{n\cdot\mu_R(L)}\subseteq\operatorname{Fitt}_0^R(M_n)\subseteq I+\mathfrak{a}^n$$

对所有 $n\geq 1$，因此 $\ell_R(R/\operatorname{Fitt}_0^R(M_n))\approx n^{\dim R/I}$由引理 4.3得出。由于$R$ 是正则的，Serre 维数不等式蕴含

$$\dim R/I=\dim L\leq\dim R-\dim S=2d-d=d,$$

因此， $\ell_R(R/\operatorname{Fitt}_0^R(M_n))$ 的多项式增长率至多为 n^d，因此我们关于（1）的证明完成。

为证明（2），设 $\{M_n\}_{n\geq 1}$ 是 M 沿 φ的一个提升系统。应用引理 2.3，可得在第 n 阶段，我们可以将M_n 作为一个 R-模的表示矩阵写作如下

$$\phi_n=\left(\begin{array}{c|cc}\phi+\sum_{j=1}^{n-1}\sigma_j&A_n&0\\&0&A_n\end{array}\right),$$

其中，对于每个 $j\geq 1$， σ_j 是一个与 ϕ 大小相同的矩阵，其元素要么为零，要么属于 $\mathfrak{a}^j\setminus\mathfrak{a}^{j+1}$。对于每个 $n\geq 1$，令

$$K_n=\operatorname{Kos}_R(g_1,\dots,g_d)\otimes_R M_n$$

其微分为 ∂_n，其中 $\mathsf{Kos}_R(g_1,\dots,g_d)$ 是关于 $g_1,\dots,g_d$、定义在 R 上的 Koszul复形。对于每个 $n\geq 1$，令 $\eta_n=\mathsf{cl}(m_n)$ 表示 m_n 在 $M_n^{\oplus d}=(K_n)_1$ 中的类。注意到

$$\begin{aligned}\partial_n(\eta_n)&=\sum_{i=1}^d g_i m_{n,i}=\sum_{i=1}^d g_i m_{n-1,i}+\sum_{i=1}^d g_i r_{n,i}\\&=-hy_{d-1}(\phi_n)_{d-1}+hy_d(\phi_n)_d+x_d^{d-1}(\phi_n)_{2d-1}-x_{d-1}^{d-1}(\phi_n)_{2d}+\sum_{i=1}^d g_i r_{n,i}\\&=0+\sum_{i=1}^d g_i r_{n,i}\in\mathfrak{a}^n(R^{\oplus 2})\\&=0,\end{aligned}$$

其中 $r_{n,\ i}$ 是引理 5.3中的面积，其中第一个等式根据K_n的定义，第三个等式根据引理 5.3(1)，第四个等式则是因为该和是 M_n 的表示矩阵各列的线性组合，因此为零。

因此，η_n 在 K_n中定义了一个非零闭链。将其视为矩阵，微分 ∂_n 中唯一的非零元素是 g_i，它们位于 $\mathfrak{m}^d$中，因此结合引理 5.3(2)，可知 η_n 定义了同调中的一个非零元素。因此，

$$0\neq\eta_n\in \mathrm{H}_1(K_n)\cong \mathrm{Tor}_1^R(M_n,S),$$

其中，同构是因为 g_i构成了 R中的一个正则序列，而且 $\mathsf{Kos}_R(g_1,\dots,g_d)$ 在 S上给出 R的一个分解。最后，沿着自然满射，$M_{n+1}\twoheadrightarrow M_{n+1}/\mathfrak{a}^nM_{n+1}=M_n$根据引理 5.3(3)，$\eta_{n+1}\mapsto\eta_n$。这表明

$$0\neq\varprojlim\eta_n\in\varprojlim\mathrm{Tor}_1^R(M_n,S),$$

由此完成定理的证明。 □

5.2. **Serre 可提升循环模**。设 R 是一个局部环，M 和 N 是两个有限生成的 R-模，并且 $\ell_R(M\otimes_R N)<\infty$，称它们正常相交，如果

$$\dim M+\dim N=\dim R.$$

例如，若 R 是一个正则局部环，则总有

$$\dim M+\dim N\leq\dim R,$$

而寻找等式成立的充分条件很有意思。在这方面，我们的方法得到了以下结果。

定理 5.4。设$(R,\mathfrak{m})$ 是一个正则局部环，$\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 是两个满足 $\sqrt{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}=\mathfrak{m}$ 的理想。若 $\mathfrak{a}$ 是一个等重理想，并且对于某个充分大的 n，$\mathfrak{b}$ 不包含 $\mathfrak{a}^n$ 的任何极小生成元，则

$$\dim R/\mathfrak{a}+\dim R/\mathfrak{b}=\dim R.$$

等价地，该定理的结论表明，$R/\mathfrak{b}$ 是有限长度 S-模 $S/\mathfrak{b}S$ 的一个 Serre 提升，其中 $S=R/\mathfrak{a}$。下面给出该定理的证明。首先回顾理想称为等重数的含义，然后证明一个引理。

5.5. 设 R 是一个诺特局部环，且 $\mathfrak{a} \subseteq R$ 是一个理想。 解析扩张度 $\mathfrak{a}$，记作 $\ell(\mathfrak{a})$，衡量 $\mu(\mathfrak{a}^n)$ 随 $n \geq 1$增长的多项式速率，即有 $\mu(\mathfrak{a}^n) \approx n^{\ell(\mathfrak{a})-1}$，见 [5, 定义 4.6。7]。总是有

$$\operatorname{height} \mathfrak{a} \leq \ell(\mathfrak{a}) \leq \dim R,$$

参见 [5, 练习 4.6.13.c], ，当第一个不等式为等式时，我们称 $\mathfrak{a}$ 为等重 理想。

给定一个理想 $\mathfrak{b} \subseteq R$，由 Artin-Rees 引理可得，

$$\operatorname{ar}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}) = \inf\{s \colon \text{for } n \geq s, \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^n = \mathfrak{a}^{n-s}(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^s)\}$$

是一个有限整数。因此， $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^n \subseteq \mathfrak{m}\mathfrak{a}^n$ 对某个 $n \geq \operatorname{ar}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b})$ 成立，等价于条件 $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^n \subseteq \mathfrak{m}\mathfrak{a}^n$ 对所有 $n \gg 0$都成立。

引理 5.6. 设$(R, \mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，设 $\mathfrak{a} \subseteq R$ 是一个理想，使得R 是 $\mathfrak{a}$-进完备的，并考虑满射 $\varphi \colon R \twoheadrightarrow S = R/\mathfrak{a}$。假设 $\mathfrak{b} \subseteq R$是一个理想，且 $\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} = \mathfrak{m}$，并且包含关系

$$\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^n \subseteq \mathfrak{m}\mathfrak{a}^n$$

对某个充分大的 n 成立。令 $I_n = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}^n$，则 $\{R/I_n\}_{n\geq 1}$是 S-模 $S/\mathfrak{b}S$ 沿着 φ 的提升系统，且对于$d \geq \ell(\mathfrak{a})$，有 $\ell_R(R/I_n) \approx n^d$ 。特别地，维数 $R/\mathfrak{b} \geq \ell(\mathfrak{a})$。

证明。 根据定义，集合 $\{R/I_n\}_{n\geq 1}$ 是 S-模 $S/\mathfrak{b}S$ 的提升系统。现在，我们通过计算其最小生成元个数，从下方粗略估计 $n \geq 1$ 的 $\ell_R(I_n/I_{n+1})$。我们断言，对每个 $n \geq 1$，以下同构成立。

$$\frac{I_n/I_{n+1}}{\mathfrak{m}(I_n/I_{n+1})} = \frac{I_n}{\mathfrak{m}I_n + I_{n+1}} \cong \frac{\mathfrak{a}^n}{\mathfrak{m}\mathfrak{a}^n + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^n)}.$$

等式显然。为证明这个同构，注意到由于 $\mathfrak{m}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}$ 且由于$\mathfrak{a}^{n+1} \subseteq \mathfrak{m}\mathfrak{a}^n$，我们有

$$\frac{I_n}{\mathfrak{m}I_n + I_{n+1}} = \frac{\mathfrak{b} + \mathfrak{a}^n}{\mathfrak{m}(\mathfrak{b} + \mathfrak{a}^n) + \mathfrak{b} + \mathfrak{a}^{n+1}} = \frac{\mathfrak{b} + \mathfrak{a}^n}{\mathfrak{b} + \mathfrak{m}\mathfrak{a}^n}.$$

此外，映射

$$\mathfrak{a}^n \twoheadrightarrow \frac{\mathfrak{b} + \mathfrak{a}^n}{\mathfrak{b} + \mathfrak{m}\mathfrak{a}^n}$$

由 $r \mapsto r + \mathfrak{b} + \mathfrak{m}\mathfrak{a}^n$ 定义，是满射，且该映射的核为

$$\mathfrak{a}^n \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{m}\mathfrak{a}^n) = (\mathfrak{a}^n \cap \mathfrak{b}) + \mathfrak{m}\mathfrak{a}^n$$

因为 $\mathfrak{m}\mathfrak{a}^n \subseteq \mathfrak{a}^n$；最后这个等式由模律得出，见 [1, 第 6] 页。这就证明了断言。

现在，由该断言和以下正合序列

$$0 \to \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}^n + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^n)}{\mathfrak{m}\mathfrak{a}^n} \to \frac{\mathfrak{a}^n}{\mathfrak{m}\mathfrak{a}^n} \twoheadrightarrow \frac{\mathfrak{a}^n}{\mathfrak{m}\mathfrak{a}^n + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^n)} \to 0,$$

由此可得

$$\mu_R(I_n/I_{n+1}) = \mu(\mathfrak{a}^n) - \dim_k \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}^n + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^n)}{\mathfrak{m}\mathfrak{a}^n}.$$

由于当 n 足够大时包含 $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^n \subseteq \mathfrak{m}\mathfrak{a}^n$ 成立，我们有

$$\mu_R(I_n/I_{n+1}) = \mu(\mathfrak{a}^n).$$

由下列正合序列

$$0 \to I_n/I_{n+1} \to R/I_{n+1} \to R/I_n \to 0$$

我们看到

$$\ell_R(R/I_{n+1}) - \ell_R(R/I_n) = \ell_R(I_n/I_{n+1}) \geq \mu_R(I_n/I_{n+1}) = \mu(\mathfrak{a}^n) \approx n^{\ell(\mathfrak{a})-1}.$$

这告诉我们 $\ell_R(R/I_n) \geq n^{\ell(\mathfrak{a})}$ 对于 n 足够大。因此， $\ell_R(R/I_n) \approx n^d$ 与$d \geq \ell(\mathfrak{a})$。该系统的相应提升为 $R/\mathfrak{b}$ 因为 R 是 $\mathfrak{a}$-进完备的，因此根据定理 B(2)，$\dim R/\mathfrak{b} \geq \ell(\mathfrak{a})$。只需回忆一下， R/I_n 的零阶 Fitting 理想是 I_n。 □

定理 *5.4* 的证明。 对于任意 $n \geq 1$，条件 $\mathfrak{b}$ 不包含 $\mathfrak{a}^n$ 的任何极小生成元，等价于包含关系 $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^n \subseteq \mathfrak{m}\mathfrak{a}^n$。现在只需注意到我们有

$$\dim R/\mathfrak{b} \geq \ell(\mathfrak{a}) = \operatorname{height} \mathfrak{a} = \dim R - \dim R/\mathfrak{a} \geq \dim R/\mathfrak{b}$$

其中，第一个不等式由引理 5.6得出，第一个等式是因为 $\mathfrak{a}$ 是等重理想，而第二个不等式由 Serre 维数不等式得出。 □

Appendix A. Proof of Proposition 2.1

本节证明命题 2.1。该命题第二部分的证明是对 [3, 定理 12]证明的抽象化。首先回顾 Mittag-Leffler 条件，参见 [7, 定义 3.59]。

A.1. 若模的逆系统 $\{\lambda_{n+1}\colon M_{n+1} \to M_n\}_{n\geq 1}$ 对每个 $n \geq 1$ 都满足以下递降链，则称其满足 Mittag-Leffler 条件

$$\operatorname{im}(\lambda_{n+1}) \supseteq \operatorname{im}(\lambda_{n+1}\lambda_{n+2}) \supseteq \operatorname{im}(\lambda_{n+1}\lambda_{n+2}\lambda_{n+3}) \supseteq \dots$$

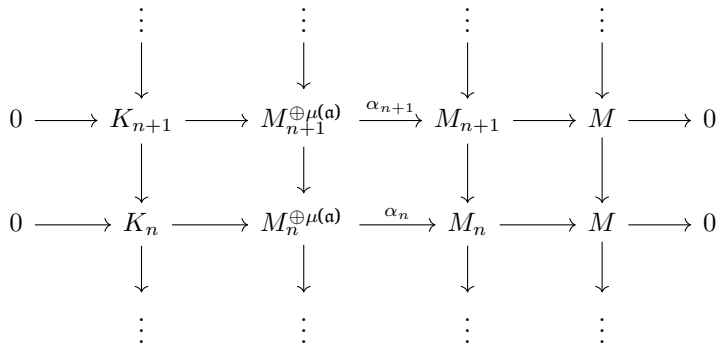
的子模在 M_n 中稳定。显然，由阿廷模构成的系统 $\{\lambda_{n+1}\colon M_{n+1} \to M_n\}_{n\geq 1}$ 以及满足对所有 n 均有 λ_{n+1} 为满射的系统，都满足 Mittag-Leffler 条件。

命题 *2.1*的证明。 下面我们给出 $n = 1$ 的情形的证明。但对每个$n \geq 1$，对 $\mathfrak{a}^n$ 重复同样的证明可知，模 $L_n = \varprojlim_{i\geq n} M_i$满足 $L_n \otimes_R R/\mathfrak{a}^n \cong M_n$。然而，显然 $L \cong L_n$ 对每个 $n \geq 1$，因此我们得到了所需的结论。

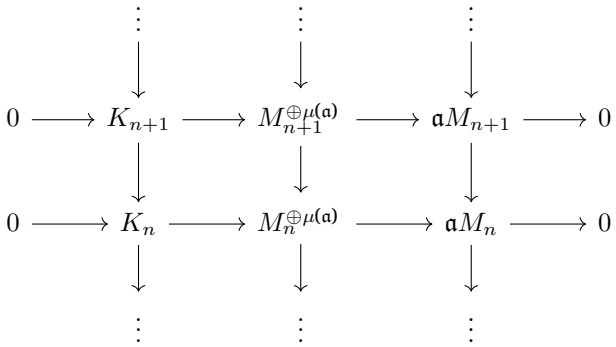
令 $\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_{\mu(\mathfrak{a})})$。考虑映射

$$\alpha_n\colon M_n^{\oplus \mu(\mathfrak{a})} \xrightarrow{[a_1 \cdots a_{\mu(\mathfrak{a})}]} M_n$$

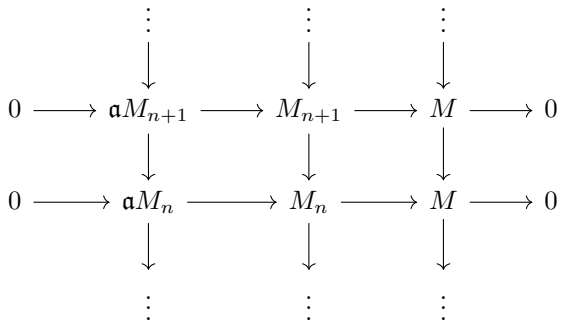
对所有 $n \geq 1$，并令 $K_n = \ker(\alpha_n)$。注意，对所有 $n \geq 1$，$\operatorname{coker}(\alpha_n) = M_n/\mathfrak{a}M_n \cong M$。对于 (1)，考虑下面这个具有正合行的交换图



这个图还会引出另外两个图



and



上面的第二个和第三个图由阿廷模系统组成，因此这些系统满足 Mittag-Leffler 条件。由于这些系统满足 Mittag-Leffler 条件，序列

$$0 \to \varprojlim K_n \to \varprojlim M_n^{\oplus \mu(\mathfrak{a})} \to \varprojlim \mathfrak{a} M_n \to 0$$

and

$$0 \to \varprojlim \mathfrak{a} M_n \to \varprojlim M_n \to \varprojlim M \to 0$$

由 [7, 定理 3.5。19], 可知其为正合，并给出一个四项正合序列

$$0 \to \varprojlim K_n \to \varprojlim M_n^{\oplus \mu(\mathfrak{a})} \xrightarrow{f} \varprojlim M_n \to \varprojlim M \to 0.$$

现在我们断言，映射 f由 $[a_1 \cdots a_{\mu(\mathfrak{a})}]$给出。为此，注意到我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \varprojlim M_n^{\oplus\mu(\mathfrak{a})} & \longrightarrow & \prod M_n^{\oplus\mu(\mathfrak{a})} & \xrightarrow{\Delta^{\oplus}} & \prod M_n^{\oplus\mu(\mathfrak{a})} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \\ 0 & \longrightarrow & \varprojlim M_n & \longrightarrow & \prod M_n & \xrightarrow{\Delta} & \prod M_n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

由 [7, 引理 3.5。14],其中映射 $\Delta^{\oplus}$ 和 Δ 均由 [7, 命题 3.55] 给出，而映射 α则是由 $[a_1 \cdots a_{\mu(\mathfrak{a})}]$给出的映射。由于极限与有限直和可交换， $[a_1 \cdots a_{\mu(\mathfrak{a})}]$ 给出的映射使左侧的方块可交换。由于诱导的极限映射是唯一的（参见 [7, 定理 3.4.5 和定义 3.4。10]），我们必有 f等于由 $[a_1 \cdots a_{\mu(\mathfrak{a})}]$给出的映射，从而证明了这一断言。

该断言意味着 f的像是 $\mathfrak{a}\varprojlim M_n$，从而得到下面的第三个同构

$$M \cong \varprojlim M \cong (\varprojlim M_n)/(\mathrm{im} f) \cong (\varprojlim M_n)/(\mathfrak{a}\varprojlim M_n) \cong L/\mathfrak{a}L \cong L \otimes_R R/\mathfrak{a}.$$

这就完成了 (1) 的证明。

现在证明 (2)。我们首先证明 L 是有限生成的。这里我们紧密遵循 [3, 定理 12]中 (b) 推出 (a) 的第二部分的证明。取一个满射 $\psi\colon\ R^{\oplus t} \to M$ ，并考虑如下具有正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccc} & & R^{\oplus t} & & \\ & \swarrow^{\gamma} & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \\ L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \delta_n} & & \downarrow{\scriptstyle =} & & \\ M_n & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中，映射 γ 的存在性源于 $R^{\oplus t}$ 是投射的，而映射 $L \to M$和 δ_n 是自然投影。将此图与 $R/\mathfrak{a}$ 进行张量运算，得到图

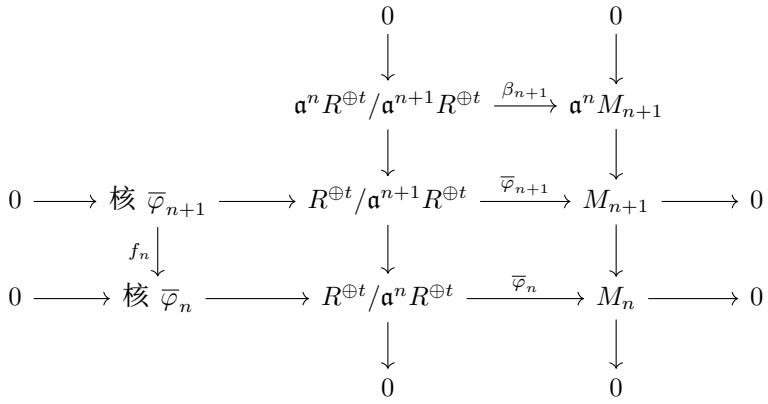
$$\begin{array}{ccccc} & & R^{\oplus t} \otimes_R R/\mathfrak{a} & & \\ & \swarrow & \downarrow & & \\ L \otimes_R R/\mathfrak{a} & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ M_n \otimes_R R/\mathfrak{a} & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

令 C 为 $\delta_n\gamma$的余核。由于 $M_n \otimes_R R/\mathfrak{a} = M$ ，且由于该图交换，我们有

$$\delta_n\gamma \otimes_R R/\mathfrak{a} = \psi \otimes_R R/\mathfrak{a},$$

因此， $\delta_n\gamma\otimes_R R/\mathfrak{a}$的余核为零。由于 $C/\mathfrak{a}C$是 $\delta_n\gamma\otimes_R R/\mathfrak{a}$的余核，$C/\mathfrak{a}C$ 为零，故由中山引理可知 C 为零。这意味着复合映射 $\varphi_n := \delta_n\gamma$ 是满射，因此诱导映射 φ_n:
$R^{\oplus t}/\mathfrak{a}^n R^{\oplus t} \to M_n$

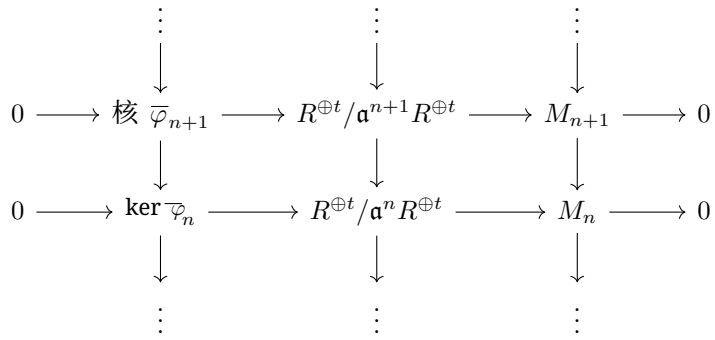
是满射。由此可得一个行与列均正合的交换图



由于 φ_{n+1} 是满射，因此 β_{n+1}也是满射，所以序列

$$0 \to \ker \beta_{n+1} \to \ker \overline{\varphi}_{n+1} \xrightarrow{f_n} \ker \overline{\varphi}_n \to 0$$

由蛇引理可知是正合的。现在我们有一个满射系统



并且由此得到以下正合序列，根据 [7, 定理 3.5。19]因为满射系统满足 Mittag-Leffler 条件

$$0 \to \varprojlim \ker \overline{\varphi}_n \to \varprojlim R^{\oplus t}/\mathfrak{a}^n R^{\oplus t} \to \varprojlim M_n \to 0.$$

由于 R 是 $\mathfrak{a}$-进完备的，且 $R^{\oplus t}$ 是有限生成的 R-模，因此 $R^{\oplus t}$与 $\varprojlim R^{\oplus t}/\mathfrak{a}^n R^{\oplus t}$ 同构。根据定义， $L = \varprojlim M_n$，所以 L 是一个有限生成模的商模。这证明了 L 是有限生成的。

要证明等式 $\mu_R(L) = \mu_R(M)$，注意到根据命题的第一部分， $L \otimes_R S$ 与 M同构，因此我们有 $\mu_R(L) \geq \mu_R(M)$。此外，在上述论证中，我们可以选择 t为 $\mu_R(M)$。由于 L是 $R^{\oplus t}$的商模，这意味着 $\mu_R(L) \leq \mu_R(M)$。

最后，要了解等式为何

$$\operatorname{ann}_R(L) = \bigcap_{i \geq 1} \operatorname{ann}_R(M_n)$$

成立，注意 L 是 $\prod M_n$的一个子模，因此 $\bigcap \operatorname{ann}_R(M_n)$包含于$\operatorname{ann}_R(L)$。对于另一个包含，假设 r 属于$\operatorname{ann}_R(L)$，并设对某个 n， x 属于 M_n。选取 L 中的一个元组$(\ldots, x_2, x_1)$，使得 $x_n = x$。这样的元组存在

因为我们从满射系统出发，且该元组必被 r零化，这意味着对所有 i都有 $rx_i = 0$，因此 r 属于ann$_R(M_n)$。这完成了(2)的证明，从而完成了该命题的证明。□

Acknowledgments

我们感谢 Lars Christensen、Elo´ısa Grifo、Jack Jeffries、Tom Marley 和 Mark Walker，在整个项目期间与他们进行了许多有益的交流。我们也感谢 Xiaoling He 提出了关键的组合思想，这些思想最终发展为引理5.6。

References

1. M. F. Atiyah 与 I. G. Macdonald， *Introduction to commutative algebra*，Addison-Wesley 出版公司，马萨诸塞州雷丁-伦敦-安大略省唐米尔斯，1969 242802 2 . MR . M. Auslander，*Modules over unramified regular local rings*，《伊利诺伊数学杂志》**5**（1961），631–647。MR 179211 3. Maurice Auslander、Songqing Ding 与 Øyvind Solberg， *Liftings and weak liftings of modules*，《代数杂志》**156** 1216471 4 1993 2，273 317（），第 – 期。MR . Luchezar L. Avramov 与 Hans-Bjørn Foxby，*Cohen-Macaulay properties of ring homomor-phisms* **133** 1998 1, 54 95 ，《数学进展》（），第 – 期。MR 5 1492786 ¨ 。Winfried Bruns 与 Jurgen Herzog， *Cohen-Macaulay rings*，修订版，剑桥高等数学研究丛书，第 39 卷，1251956 6 1998 剑桥大学出版社，剑桥，。MR . David A. Buchsbaum 与 David Eisenbud，*Lifting modules and a theorem on finite freeresolutions*，环论（会议论文集，犹他州帕克城，1971），学术出版社，纽约-伦敦，1972，第 63–74 页。MR 340343 7. Lars Winther Christensen、Hans-Bjørn Foxby 与 Henrik Holm，*Derived category methods in commutative algebra* 2024 ，施普林格数学专著，施普林格尚姆，。8. Hailong Dao， *On liftable and weakly liftable modules*，《代数杂志》**318**（2007），第 2 期，723–736。MR 2371969 9. David Eisenbud， *Commutative algebra*，数学研究生教材，第 150 卷，施普林格出版社，纽约，1995，着眼于代数几何。MR 1322960 10. Melvin Hochster，*An obstruction to lifting cyclic modules* **61** 1975 2, ，《太平洋数学杂志》（），第 – 期。MR 11. ， *Topics in the homological theory of modules over commutative rings*，数学~~科学会议~~委员会数学地区会议丛书，第 24 卷，数学科学会议委员会，华盛顿特区；由美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1975，1974年6月24日至28日在内布拉斯加州林肯市内布拉斯加大学举行的 CBMS 地区会议的讲解性讲座。MR 371879 12. ， *The dimension of an intersection in an ambient hypersurface*，代数几何（柏林，海德堡）（Anatoly Libgober 与 Philip Wagreich 编），施普林格柏林海德堡，1981，第 93–106 页。13. David A. Jorgensen， *Existence of unliftable modules*，《美国数学会会刊》**127**（1999），第 6 期，1575–1582。MR 1476141 457 463 412169 14 *Some liftable cyclic modules* **31** 2003 1, 493 504 1969236 。，，《代数通讯》（），第 – 期。MR . Nawaj KC， *Modules of finite projective dimension and singularities*，博士论文，内布拉斯加大学–林肯，2025。16. Nawaj KC 与 Andrew J. Soto Levins，*On ~~liftings~~ of modules of finite projective dimension*，国际数学研究通报 IMRN（2024 4843654 17 24, 14729 14736），第 – 期。MR . Stephen Lichtenbaum， *On the vanishing of* Tor *in regular local rings*，《伊利诺伊数学杂志》**10**（1966 188249 18 220 226），–。MR . Hideyuki Matsumura，*Commutative ring theory*，第二版，剑桥高等数学研究丛书，第 8 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1989，由 M. Reid 译自日文。MR 1011461 19. C. Peskine 与 L. Szpiro，*Dimension projective finie et cohomologie locale. Applications à ,，* Inst. *la démonstration de conjectures de M. Auslander H. Bass et A. Grothendieck* Hautes´Etudes 科学数学出版物（ 1973 42, 47 119 374130 ），第 – 期。MR . Paul Roberts，，巴黎科学院报告 S´辑 I 数学 **304**（1987），第 7 期，177–180。MR 880574 15 16 17 18 19 20 *Le théorème d'intersection*

21. , *Intersection theorems*，交换代数（伯克利，加利福尼亚州，1987），数学科学研究所出版物，第 15 卷，1015532 22 1989，417 436 施普林格，纽约，第 – 页。MR . Joseph J. Rotman, *An introduction to homological algebra*，第二版，Universitext，施普林格，纽约，2009。MR 2455920 23. Jean-Pierre Serre, *Local algebra*，施普林格柏林，海德堡，1965。24. Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*，剑桥高等数学研究丛书，第 38 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1994。MR 1269324

University of Nebraska Lincon, NE 68588. U.S.A.
Email address: bkatz2@huskers.unl.edu*URL*:
https://math.unl.edu/person/ben-katz/

University of Utah, Salt Lake City, UT 84112. U.S.A.
Email address: nawaj.kc@utah.edu*URL*:
https://sites.google.com/view/kcnawaj/home

University of Nebraska Lincon, NE 68588. U.S.A.
Email address: km2@huskers.unl.edu*URL*:
https://kesavan-ms.github.io/

Texas Tech University, TX 79409. U.S.A.*Email address*:
ansotole@ttu.edu*URL*:
https://sites.google.com/view/andrewjsotolevins

University of Nebraska Lincon, NE 68588. U.S.A.
Email address: rwatson9@huskers.unl.edu*URL*:
https://rawatson1997.github.io