arXiv:2602.01457v1 [math.OC] 1 Feb 2026

最小动态扩展的动态搜索

Rollen S. D'Souza *

*电子邮箱：*research@rollends.ca.*

摘要： 确定能使非线性控制系统实现反馈线性化的动态预补偿器，是一项颇具挑战的问题。研究者已对这一问题——动态反馈线性化——展开探索，并提出了动态预补偿器的存在性条件和构造性过程。总的来说，这些方法仍然要么计算成本高昂，要么适用范围受限。本文将这一挑战视为问题本身固有的特性，并将该问题看作范畴上的搜索问题。动态规划可应用于此；当范畴被限制为有限范畴时，经典搜索算法能够找到最小动态扩展。另一种方法是采用一种以反馈线性化系统为目标的启发式方法，从无限多个扩展中进行选择。这种表述为搜索动态预补偿器提供了独特的鸟瞰视角。</output>

关键词： 动态反馈线性化；动态扩展；微分平坦；动态规划。

*2020*年数学主题分类：93C10, 93B27, 93C35

1. 引言

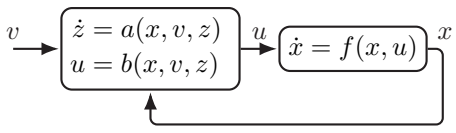
判断一个非线性控制系统是否

$$\dot{x} = f(x, u),$$

能够转化为 Brunovský 正规形的线性控制系统，

$$\dot{\xi} = A\,\xi + B\,\nu,$$

通过状态（$\xi = \phi(x)$）和反馈变换（$\nu = \beta(x,\ u)$）来实现，这一问题几十年来已广为人知（Isidori，1995年）。具有这种变换的非线性控制系统称为（静态）反馈线性化系统。Hunt等人（1982年）以及 Jakubczyk和 Respondek（1980年）分别独立提出了非线性控制系统实现反馈线性化的充要条件。不幸的是，反馈线性化系统的类别很小。即使是简单且实用的控制系统——例如对非完整车辆建模的系统——也无法实现反馈线性化。这推动了如今对动态反馈线性化系统和（微分）平坦系统的广泛研究。动态反馈线性化系统是指在适当的动态预补偿下，



是反馈线性化的（Charlet等人，1989年）。平坦系统与之类似，它们要求原始系统（x, u）与某一输出及其有限个导数的动力学之间存在等价性（Lévine，2009年）。Lévine（2007年）证明了平坦系统与动态反馈可线性化系统之间的等价性。自Guay 等人（1997年）的工作以来，系统可动态反馈线性化的条件已为人所知，但如何高效地找到所需的预补偿器仍是一个未决问题。通过限制于双输入系统，Gstöttner等人（2023年）展示了一种构造平坦输出的方法。即便在这种情况下，平坦性条件也很复杂，这表明一般的平坦性条件在计算上是复杂的。如果对于多输入的动态反馈可线性化性问题不存在计算上合理的方法，那会怎样?

既然接受了这种可能性，不妨借鉴计算机科学中的做法：通过启发式方法，让计算成本高昂的搜索变得切实可行。为实现某种目的而搜索微分几何对象并非新鲜事。É. Cartan 曾利用延拓，成功地使微分系统达到可积（Malgrange，2017；Bryant 等，1991）。类似地，在非线性控制系统中加入作为输入导数的状态，可能使系统成为反馈线性化系统。这一过程称为动态扩展，与延拓相类似。当一系列动态扩展使系统成为反馈线性化系统时，原系统便是动态反馈线性化的。反之则未必成立（Nicolau 等，2025）。通过一系列一次延拓实现动态反馈线性化的系统属于 LSOP 类。通过一次延拓逐步构造预补偿器是一种常见做法，已有多种算法被提出，用于求得动态预补偿器（Battilotti 和 Califano，2004，2008；Lévine，2025；Nicolau 等，2025）。

在这一宽泛的思路下，动态反馈线性化被视为一个搜索问题。我们能否搜索动态

*本项目未获任何机构或基金资助或赞助。本文已提交至国际自动控制联合会，等待可能的发表。

扩展空间，并逐步构建出实现反馈线性化所需的最小动态扩展？本文以一种便于高效寻找最小动态扩展的方式来表述这个问题，但将范围限定在 LSOP 类的一个子类中。第3节通过对动态扩展步骤进行形式化刻画，明确界定了这个子类。随后，第4节转而讨论动态规划及其在数学范畴中的应用。所规定的系统子类构成一个范畴，其中的箭头恰好是与动态扩展相关的投影。动态搜索会剪去范畴中的非最优箭头，从而得到一个枚举原系统所有最优箭头的范畴。如果至少有一个箭头来自反馈线性化系统，那么该系统就是动态反馈线性化的。第5节将这些部分按上述方式整合起来，并通过简单示例部分展示了这一方法。

2. 符号

若 $x \in \mathbb{R}^n$, x^i 表示第 i 个分量。给定映射 $F:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, 映射 $F^i:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 表示第 i 个分量函数。一个 n 维流形 M $\subset \mathbb{R}^n$ 可通过坐标图 (U; ($x^1, \ldots,$ x^n $\subseteq$ x^1 … x^n)) 在局部描述，其中 U M 是一个开子集，而 , , 是坐标。令 $p \in$ U $\subseteq$ M。点 p 处的切空间 T$_p$M 由在点 $p.$ 与流形相切的向量张成。它可以在 M 上纤维化，形成切丛 TM。点 p 处的余切空间 T$_p^*$ M 由余向量（1-形式） $dx_p^1, \ldots, dx_p^n$ 张成：T$_p$M $\to \mathbb{R}.$。余切空间也可以纤维化在一起，形成余切丛 T*M。余切丛的光滑截面集合记作 Γ(T*M)，其元素 $\omega \in$ Γ(T*M) 正是 M 上的光滑一形式。对于 $k > 1$，点 p 处的 k-形式空间记作 Λ^kT$_p^*$M。光滑 k-形式的构造方式与光滑一形式相同。它们合起来构成 M 上所有光滑形式的集合

Γ Λ * . β (T $\in$ Γ Λ^k * , $d\beta \in$ Γ Λ^{k+1} * .

M)。给定 (T M)，外微分为 (T M)。若 $\alpha \in$ Γ(Λ$^\ell$T*M)，则 $\alpha \wedge \beta \in$ Γ(Λ$^{k+\ell}$T*M) 称为它们的楔积。给定 $\beta^1, \ldots, \beta^k \in$ Γ(T* M)，可在光滑形式的（楔积）代数上生成一个理想 I，记作 hβ^1, . . . , β^ki $\subseteq$ Γ(ΛT*M)。若对所有 $\omega \in$I 都有 $d\omega \in$ I，则理想 I 称为微分闭。形式 ω 沿向量场 $f \in$ Γ(TM) 的李导数为 L$_f\,\omega$ ，其重复作用记作 L$_f^k\,\omega$.

3. 动态扩展的几何

要刻画需要搜索的系统类别，必须对动态扩展给出形式化定义。非线性控制系统被视为一个外微分系统（即一个微分约束系统）（Guay 等人，1997年；D'Souza 和 Nielsen，2023年）。因此，动态扩展被视为通过李导数引入约束。

3.1 反馈线性化理论

令 $x \in$ X $= \mathbb{R}^n$ 为状态向量，包含 n 个状态； $u \in$U= $\mathbb{R}^m$ 为控制输入向量，包含 m 个输入。假设 x 的动力学由以下非线性控制系统支配，

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1}$$

其中 f: X $\times$U $\to$TX 是光滑的。等价地，该系统可视为扩展流形 M $= \mathbb{R} \times$ X $\times$ U 上的外微分系统 $\mathcal{I}^{(0)} \subseteq$Γ(Λ T*M)，由一组光滑一形式生成，

$$\mathcal{I}^{(0)} := \langle dx^1 - f^1(x,u)\,dt, \ldots, dx^n - f^n(x,u)\,dt \rangle. \tag{2}$$

对 (M,$\mathcal{I}^{(0)}$) 称为非线性控制系统。与任意非线性控制系统相关联的是导出旗标，

$$\mathcal{I}^{(0)} \supseteq \mathcal{I}^{(1)} \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{I}^{(n)} = \mathcal{I}^{(n+1)},$$

其定义如下递归公式，

$$\mathcal{I}^{(k)} = \{\omega : d\omega \in \mathcal{I}^{(k-1)}\}, \quad k \geq 1.$$

导出旗标——以其增广形式$\langle \mathcal{I}^{(k)},\ dt\rangle$——用于识别输入如何驱动状态的光滑函数。回想一下，寻找一种反馈变换，使系统动力学 (1) 线性化，等价于寻找输出函数 h :X $\to \mathbb{R}^m$ ，使其具有一种称为向量相对阶的特殊性质；Isidori（1995年）赞同这一观点。下面给出（向量）相对阶的对偶形式定义。

定义*1*。（向量相对阶）。如果在点$x_0 \in$X 处，状态的光滑函数 h =(h^1,…,h^ρ) : X $\to \mathbb{R}^\rho$ 在某个开邻域上满足**向量相对阶** (κ^1,…, κ^ρ) ≥ 0，则称其在该点具有向量相对阶 x_0,

$$\mathcal{L}_f^j\, dh^i \wedge dx^1 \wedge \cdots dx^n = 0, \qquad 1 \leq i \leq \rho, 0 \leq j < \kappa^i,$$

并且在 x_0,

$$(\mathcal{L}_f^{\kappa^1}\, dh^1)_{x_0} \wedge \cdots \wedge (\mathcal{L}_f^{\kappa^\rho}\, dh^\rho)_{x_0} \wedge dx^1_{x_0} \wedge \cdots \wedge dx^n_{x_0} \neq 0.$$

如果 κ^1 =，则称其具有一**致的** 向量相对阶 $\cdots = \kappa^\rho$.

根据定义1，当且仅当 h 输出的相对阶为零

$$dh_{x_0} \wedge dx^1_{x_0} \wedge \cdots \wedge dx^n_{x_0} \neq 0.$$

这一非标准概念可用于定义动态扩展：任何动态扩展都与某个相对阶为零的输出相关联。

导出旗标用于识别那些能产生（向量）相对阶的输出函数。一致向量相对阶为 κ 的输出必须位于理想$\langle \mathcal{I}^{(\kappa-1)}, dt\rangle$之中，但不位于理想$\langle \mathcal{I}^{(\kappa)}, dt\rangle$. 由于判定非线性控制系统(2)是否反馈线性化等价于寻找具有适当相对阶的输出，导出旗标结构决定一个系统是否反馈线性化便不足为奇。反馈线性化的标准对偶条件——假定所有对象均正则——即为对合条件，

$$\langle \mathcal{I}^{(k)}, dt\rangle \subseteq \langle \mathcal{I}^{(k)}, dt\rangle^{(\infty)}, \quad 0 \leq k \leq n, \tag{Inv}$$

以及可控性条件，

$$\langle \mathcal{I}^{(n)}, dt\rangle = \langle dt\rangle. \tag{Con}$$

本文中的所有系统均假设满足可控性条件（Con），因为这是实现动态反馈线性化的必要条件。我们旨在通过动态扩展解决对合条件（Inv）不成立的问题。

3.2 正则零动态叶状结构

对于每个输出 $h:\mathrm{M}\to\mathbb{R}^{\rho}$，我们都可以关联一个零动态流形 Z，它是输出为零时最大的受控不变集。它刻画了输出被置零时系统的动力学。当输出 h 具有（正）向量相对阶κ时，零动态流形具有简单的结构，其中 $\mathrm{Z}=\{x\in\mathrm{X}:\ h(x)=\cdots=\mathcal{L}_f^{\kappa^\rho-1}h(x)=0\}$。所有具有相对阶的输出都会确定一个零动态流形，但并非所有零动态流形都由具有相对阶的输出确定。因此，D'Souza 和 Nielsen（2023）提出了"正则零动态流形"的概念。我们不再强调单个流形，而是考虑由光滑函数的水平集所确定的流形族。光滑函数 $h:\mathrm{U}\to\mathbb{R}^{\rho}$ 在正则点x_0 附近的水平集构成一个 $(n-\rho)$维叶状结构：它是 U 中一组互不相交的 $(n-\rho)$维浸入子流形（叶）的并集，这些子流形覆盖整个空间，并且存在一个坐标系，使它们呈"平坦"状（Lee，2012，第 501 页）。与 D'Souza 和 Nielsen（2023）一样，这些光滑函数必须具有向量相对阶。由此定义了正则零动态叶状结构。

定义 *2.*（正则零动态叶状结构）。如果存在一个状态光滑函数 $h:\mathrm{X}\to\mathbb{R}^{\rho}$，其向量相对阶为 κ，且其水平集是该叶状结构的叶片，则称叶状结构 $\mathcal{Z}$ 为**（类型为 (ρ,κ) 的）正则零动态叶状结构**。

根据具有相对阶的输出来定义正则零动态叶状结构是直接明了的。另一方面，我们如何知道任意叶状结构都是由具有相对阶的输出生成的?

给定任意叶状结构$\mathcal{Z}$，我们可以构造微分理想，

$$\mathfrak{I}(\mathcal{Z}):=\{\omega\in\Gamma(\Lambda\mathrm{T}^*\mathrm{M}):\ \omega|_{\mathrm{N}}=0,\forall\mathrm{N}\in\mathcal{Z}\}.$$

对于任意微分理想$\mathcal{K}$，可以利用 Frobenius 定理构造生成该理想的叶状结构 $\mathfrak{F}(\mathcal{K})$（Bryant 等，1991）。显然，$\mathfrak{F}(\mathfrak{I}(\mathcal{Z}))=\mathcal{Z}$ 且$\mathfrak{I}(\mathfrak{F}(\mathcal{K}))=\mathcal{K}$。给定任意两个叶状结构 $\mathcal{Z}_1$ 和$\mathcal{Z}_2$，，定义它们的交运算如下：

$$\mathcal{Z}_1\wedge\mathcal{Z}_2:=\mathfrak{F}\left(\mathfrak{I}(\mathcal{Z}_1)+\mathfrak{I}(\mathcal{Z}_2)\right).\tag{3}$$

当交$\mathcal{Z}_1\wedge\mathcal{Z}_2$ 是正则零动态叶状结构时，$\mathcal{Z}_1\wedge\mathcal{Z}_2$ 是同时将 $\mathcal{Z}_1$ 和$\mathcal{Z}_2$. 的叶片划分为叶状结构的最大正则零动态叶状结构。交运算可以诱导出一个偏序。定义二元关系，

$$\mathcal{Z}_1\le\mathcal{Z}_2\quad\text{iff}\quad\mathcal{Z}_1\wedge\mathcal{Z}_2=\mathcal{Z}_1.$$

显然，如果 $\mathcal{Z}_1\le\mathcal{Z}_2$，那么 $\dim\mathcal{Z}_1\le\dim\mathcal{Z}_2$.

将 $\mathfrak{Z}(\mathcal{K})$ 定义为最大的叶状结构，其叶片在动力学 $f:\mathrm{X}\times\mathrm{U}\to\mathrm{TX}$ 作用下保持不变，该动力学属于非线性控制系统 $\mathcal{I}^{(0)}$. 形式化地，

$$\mathcal{L}_f\left[\mathfrak{I}(\mathfrak{Z}(\mathcal{K}))\cap\langle\mathcal{I}^{(0)},dt\rangle\right]\subseteq\mathfrak{I}(\mathfrak{Z}(\mathcal{K})).\tag{4}$$

这是一项受控不变性要求。当 $\mathcal{K}$ 是微分闭的时，$\mathfrak{Z}(\mathcal{K})$ 通过沿着 f 对精确生成元反复计算李导数，直至收敛来求得。

给定一个叶状结构 $\mathcal{Z}$，理想 $\mathfrak{I}(\mathcal{Z})$ 用于确定 $\mathcal{Z}$ 是否为正则零动态叶状结构。

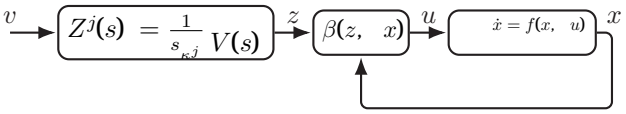


图 1. 通过输出预补偿的系统，其输出由长度为 κ^j. 的积分器链扩展

询问 $\mathcal{Z}$ 是否为正则零动态叶状结构，大致等价于要求 $\mathcal{Z}$ 的每个叶都具有横向反馈线性化性质。对 D'Souza 和 Nielsen（2023）提出的算法进行小幅修改后，可以生成定义正则零动态叶状结构的输出。

命题 *3.* 若 $\mathrm{V}\subseteq\mathrm{M}$ 上的 d 维叶状结构 $\mathcal{Z}$ 满足以下条件，则称其在 $(\mathrm{M},\mathcal{I}^{(0)})$ 上、于$p_0=(t_0,\ u_0,\ x_0)\in\mathrm{U}$ 处是（类型为 $(\rho,\ \kappa)$ 的）正则零动态叶状结构：

(i) $\mathcal{Z}=\mathfrak{Z}(\mathfrak{I}(\mathcal{Z}))$，(ii) 对每个 $0\le k\le d,\ \langle\mathcal{I}^{(k)},\ dt\rangle\cap\mathfrak{I}(\mathcal{Z})$ 均为简单、有限且非退化生成，(iii) 对每个 $0\le k\le d,\ \langle\mathcal{I}^{(k)},\ dt\rangle\cap\mathfrak{I}(\mathcal{Z})$ 均为微分闭，并且 (iv) $\langle\mathcal{I}^{(n-d)},\ dt\rangle\cap\mathfrak{I}(\mathcal{Z})=\langle dt\rangle$。

证明。见附录 A

命题 3 的证明给出了一种算法，可计算出在 x_0 处具有适当向量相对阶的输出，其水平集与叶状结构$\mathcal{Z}$ 的叶片重合。现在，我们可以在正则零动态叶状结构、其微分理想以及用于生成它们的具有向量相对阶的输出之间进行转换，而不失一般性。

3.3 沿正则零动态叶状结构进行扩展

正则零动态叶状结构提供了足够的信息，可用于定义动态扩展的概念。给定一个类型为 (ρ^0,κ) 的正则零动态叶状结构，我们可以构造一个输出 $h:\mathrm{M}\to\mathbb{R}^{\rho^0}$，使其具有向量相对阶 κ。该输出定义了一个通道，通向 ρ^0 个输入。该通道的动态扩展不是纯延拓：h 的导数由输入和状态的函数驱动。记作 $h=(h^1,\ldots,h^{\rho_0})$，并对每个 $1\le j\le\rho_0$，通过如下设置定义虚拟输入，

$$\mathcal{L}_f^{\kappa_j}h^j=\alpha(x,u)=:v^j.$$

对输入 v^j 进行延拓构成了输出 $h.$ 的动态扩展。这类扩展如图1所示。分量 α^j 的动力学——其右逆 $u=\beta(x,z)$ 即为初步反馈 —— 具有 Brunovský 标准形。这个概念由扩展系统体现：一种（提升后的）正则非线性控制系统，它以恰当的方式投影到一个（基础）正则非线性控制系统上。

定义 *4.*（扩展系统）。设 $(\mathrm{M}_1,\mathcal{I}_1^{(0)})$ 是一个正则非线性控制系统（具有时间 t，输入 u 和状态 x），并设 $(\mathrm{M}_2,\mathcal{I}_2^{(0)})$ 是另一个正则非线性控制系统（具有时间 t，输入 v 和状态y）。如果存在一个光滑浸没$\pi:\mathrm{M}_2\to\mathrm{M}_1$，其形式为.....，则系统 $(\mathrm{M}_2,\mathcal{I}_2^{(0)})$ 是系统 $(\mathrm{M}_1,\mathcal{I}_1^{(0)})$ 的**扩展系统**

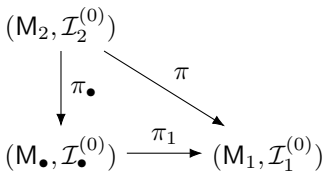
$$(t,u,x)=\pi(t,v,y)=(t,\beta(v,y),\phi(y))$$

并且满足，

(i) $\pi^*\mathcal{I}_1^{(0)} \subseteq \mathcal{I}_2^{(0)}$，且 (ii) 在 $(\mathrm{M}_1, \mathcal{I}_1^{(0)})$ 上存在一个正则零动态叶状结构 $\mathcal{Z}_1$，使得$\langle \pi^*\Gamma(\Lambda \mathrm{T}^*\mathrm{M}_1)\ \mathfrak{I}(\mathcal{Z}_2)\ dt\rangle = \Gamma(\Lambda \mathrm{T}^*\mathrm{M}_2)$，其中 $\mathcal{Z}_2 = \mathfrak{Z}(\pi^*\mathfrak{I}(\mathcal{Z}_1))$ 是 $(\mathrm{M}_2, \mathcal{I}_2^{(0)})$ 上的正则零动态叶状结构。

第一个条件 (i) 确保基系统的动力学包含在提升系统 $\mathcal{I}_2^{(0)}$ 中（定义在 M_2. 上）。定义的关键在于条件 (ii)，它要求存在一个用于构造动态扩展的输出：该输出、它沿基系统动力学的李导数，以及其虚拟输入的导数共同“覆盖”新增状态。尽管这一类比通过纯延拓得到的预补偿器类别限制更少，但它仍保留了一项关键性质。

定理*5.* 若 $(\mathrm{M}_2, \mathcal{I}_2^{(0)})$ 是 $(\mathrm{M}_1, \mathcal{I}_1^{(0)})$ 的扩展系统，且 $\dim \mathrm{M}_2 - \dim \mathrm{M}_1 \geq 2$，则存在一个正则非线性控制系统 $(\mathrm{M}_\bullet, \mathcal{I}_\bullet^{(0)})$，使得下面的扩展系统图交换。



证明. 由于 $(\mathrm{M}_2, \mathcal{I}_2^{(0)})$ 是 $(\mathrm{M}_1, \mathcal{I}_1^{(0)})$ 的扩展系统，在 M_1 上存在类型为 $(\rho,\ \kappa)$ 的正则零动态叶状结构 $\mathcal{Z}_1$，其中 $\mathfrak{Z}(\pi^*\mathfrak{I}(\mathcal{Z}_1))$ 产生新的状态。还存在输出 $h : \mathrm{M}_1 \to \mathbb{R}^\rho$，其在 M_1 上具有向量相对阶 κ，且其水平集是 $\mathcal{Z}_1$. 的叶片。必然地，输出 $\pi^*h : \mathrm{M}_2 \to \mathbb{R}^\rho$ 在 M_2. 上给出向量相对阶 $\geq \kappa$。这一差值至少必须为二。选取输出的至少一个分量 h^j，其相对阶为 κ^j，其中 π^*h^j 具有更大的相对阶 $k > \kappa^j$. 。定义 $\mathrm{M}_\bullet \coloneqq \mathrm{M}_1 \times \mathbb{R}$，并在记号滥用的意义下令

$$\mathcal{I}_\bullet^{(0)} \coloneqq \langle \mathcal{I}_1(0), \mathcal{L}_f^{\kappa^j}\, dh^j - q\, dt\rangle,$$

其中我们引入了一个新的输入变量 q.

投影映射 π_1 通过选取一个出现在任意 输入u^i 中的非奇异项来确定，该项出现在$\mathcal{L}_f^{\kappa^j}\, dh^j$. 中。不失一般性，选取 u^1 并令

$$\pi_1 : (t, q, u^2, \ldots, u^m, x, \mathcal{L}_f^{\kappa^j}\, dh^j) \mapsto (t, u^1, \ldots, u^m, x).$$

为构造 $\pi_\bullet : \mathrm{M}_2 \to \mathrm{M}_\bullet$，我们注意到$\mathcal{L}_f^{\kappa^j}\, dh^j$ 是 M_1 的状态和输入的函数，因此可以将其拉回到 M_2 上，以定义 $\pi_\bullet$. 的一部分。$\mathrm{M}_\bullet$ 上其余来自 M_1 的状态 x 也可以类似地覆盖。只需证明 q 可以写成 M_2. 上的光滑函数。然而，这必然成立，因为 h^j 在 M_2 上的相对阶为 k，且其相对阶至少大于或等于 $\pi_1^* h^j$. 的相对阶。因此，$\pi_\bullet$ 存在且光滑。□

定理5的一个推论是，任何通过扩展系统得到的反馈线性化系统都可以通过一系列单步动态扩展实现反馈线性化。因此，原系统属于Nicolau等人（2025）所定义的LSOP类。扩展系统的叶状结构是为反馈线性化系统寻找所需动态扩展的“自然”选择。然而，事先并不知道这一自然选择是什么！需要通过搜索来找到它。

4. 范畴上的动态规划

Bellman（1954）通过将动态规划应用于决策理论、最优控制理论和数学规划，引入了动态规划。这种方法建立在一个关键原则之上：最优性原理。本节将把这一广为人知的原理重新表述为范畴语言。

原则 *6.*（最优性原理）。最优策略具有这样的性质：无论初始状态和初始决策是什么，剩余决策都必须构成针对初始决策所导致状态的最优策略。

4.1 最优箭头

范畴 $\mathcal{X}$ 由一组对象 $\mathrm{Obj}_\mathcal{X}$ 和一组箭头 $\mathrm{Arr}_\mathcal{X}$ 定义，这些箭头以对象为起点和终点。箭头必须能够复合，且复合必须满足结合律。恒等箭头将一个对象映射到其自身。复合箭头是由其他非恒等箭头复合而成的箭头。原始箭头不是复合箭头。固定对象 $a, b \in \mathcal{X}$. 介于 a 和 b 之间的箭头集合记作 $\hom(a, b)$，介于a 和 b 之间的原始箭头集合记作 $\mathrm{prim}(a, b)$。

令$\mathcal{X}$ 中的对象表示优化问题的状态，$\mathcal{X}$ 中的箭头表示这些状态之间的转移。损失函数 $L : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ 定义在该范畴上，为范畴中的每个箭头赋予一个数值，并且必须为恒等箭头赋予零成本。范畴 $\mathcal{X}$ 及其损失 L 共同构成一个优化空间，使我们能够考虑以下问题。

问题 *7.*（最优箭头）。令 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{X}$，并固定$b \in \mathcal{X}$。若可能，求一个对象 $a \in \mathcal{G}$ 以及一个箭头$h^* \in \hom(a, b)$，使其满足：

$$L(h^*) = \min_{\substack{a \in \mathcal{G} \\ h \in \hom(a,b)}} L(h).$$

在这个问题中，目标是在目标范畴 $\mathcal{G}$ 中找到对象 a，使它到我们固定对象b. 的箭头最小。即使 $\hom(a, b)$ 非空，最优箭头 h^* 也可能不存在：最小值可能未定义。为简单起见，假设只要箭头集合 $\hom(a, b)$ 非空，最小值就总是存在。在此假设下，最优性的概念是定义良好的。

定义 *8.* 固定 $a, b \in \mathcal{X}$。若箭头 $f : a \to b$ 在 a 与 b. 之间的所有箭头$g \in \hom(a, b)$中使损失函数 L 最小，则称其为**最优**。简而言之，

$$L(f) = \min_{g \in \hom(a,b)} L(g).$$

否则，该箭头称为**非最优**。

将从 a 到 $b \in \mathcal{X}$ 的所有最优箭头记作 $\mathrm{opt}_L(a,\ b)$。动态规划算法逐步求解——

步求解对象 a 在范畴中的问题 opt(a, b)，直到达到目标。原则 6 可以重述为：最优箭头是由最优箭头后合成而成的。

原则 *9.*（最优性原理）。固定 $a, b \in \mathcal{X}$.若 $f \in \text{opt}(a,b)$ 是一个可分解为 $f = h \circ g$ 的复合最优 箭头，其中 $g \in \text{hom}(a,c)$ $h \in \text{hom}(c,b)$ 且 $c \in \mathcal{X}$, 那么 $h \in \text{opt}(c,b)$ 就是一个最优箭头。

定理 10 中通过逻辑推演消除了复合箭头的特殊情形。

定理 *10.* 原则 9 等价于如下命题：若 $h \in \text{Arr}_{\mathcal{X}}$ 是非最优的，那么对于某个箭头 $g \in \text{Arr}_{\mathcal{X}}$，所有形如 $h \circ g$ 的箭头都是非最优的。

定理 10 表明，原则 9 是一种不要求唯一性的剪枝方法：构造更大的最优箭头时，剔除非最优箭头。

4.2 动态规划

原则 9 给出了动态规划方程的一种初步表述，

$$\min_{f \in \text{hom}(a,b)} L(f) = \min_{\substack{c \in \mathcal{X} \\ g \in \text{hom}(a,c) \\ h^* \in \text{opt}(c,b)}} L(h^* \circ g). \tag{5}$$

动态规划方程（5）表明，对象 a 和 $b \in \mathcal{X}$ 之间的最优损失，可以通过对由最优箭头组成、通向目标 b. 的箭头进行最小化来求得。动态规划方程通常所对应的递归关系，在（5）中并不明显。将最小化分为通向目标的基本操作和其余箭头两部分，即可得到一种体现动态规划递归性质的表述：

$$\min_{f \in \text{hom}(a,b)} L(f) = \min\{\min_{f_p \in \text{prim}(a,b)} L(f_p), \min_{\substack{c \in \mathcal{X} \setminus \{a,b\} \\ g \in \text{hom}(a,c) \\ h^* \in \text{opt}(c,b)}} L(h^* \circ g)\}. \tag{6}$$

式（6）中出现了两个子问题：在中间对象上进行的“较小”最小化问题，以及对基本“捷径”进行的最小化。这就是条件优化原则（Sniedovich，1992）。

到目前为止，我们一直假设该原则成立。事实证明，在一个合理的假设下，该原则确实成立。回想一下，$L : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ 是一个函子 [1]，当且仅当 $L(h \circ g) = L(h) + L(g)$。损失的函子性是一个自然的假设：一个动作的损失等于其更基本动作的损失之和。

定理 *11.* 如果损失函数 $L : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ 是一个函子，那么原理 9 成立。

证明。固定 $c, b \in \mathcal{X}$。设 $h \notin \text{opt}(c, b)$ 是一个非最优箭头。如果存在一个最优箭头，取 $h^* \in \text{opt}(c, b)$。设 $a \in \mathcal{X}$ 是任意对象，并考虑任意箭头 $g \in \text{hom}a, c$. 验证，

$$L(h \circ g) = L(h) + L(g) > L(h^*) + L(g) = L(h^* \circ g),$$

并得出结论：任何在复合后接上 h 的箭头都不是最优的。我们对所有箭头都进行了这一论证（存在最优箭头时），从而证明了定理 10。原则 9 随之成立。□

[1] 赋予 $\mathbb{R}$ 加法范畴结构。

假设损失函数 L 是一个函子。结合所有复合箭头都可以分解为原始箭头这一假设，（6）可简化为：

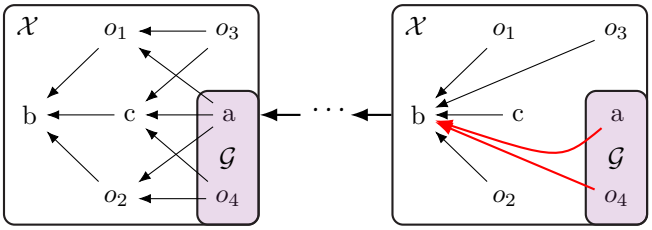
$$\min_{f \in \text{hom}(a,b)} L(f) = \min_{\substack{c \in \mathcal{X} \setminus \{a,b\} \\ g \in \text{prim}(a,c) \\ h^* \in \text{opt}(c,b)}} L(g) + L(h^*) \tag{7}$$

将最优代价 $\min_{f \in \text{hom}(a,b)} L(f)$ 记为 $J_L^*(a, b)$，动态规划方程 (7) 变为函数方程，

$$J_L^*(a,b) = \min_{\substack{c \in \mathcal{X} \setminus \{a,b\} \\ g \in \text{prim}(a,c)}} L(g) + J_L^*(c,b). \tag{8}$$

动态规划算法利用这一表达式，逐步构建从 a 到 b 的最优箭头，并使用从中间对象 c.到 b 的中间最优代价

动态规划算法会生成一系列通过函子与原范畴相关联的子范畴。每一步中，算法都会剪除终止于活动对象的非最优箭头，并利用其余箭头的复合构建最优箭头。当目标范畴 $\mathcal{G}$ 中至少有一个对象，且所有其他箭头相对于从目标出发的箭头都已被证明为非最优时，过程便会终止。对于到任意给定对象的箭头数量有限的情况，求解最短路径问题的搜索算法——例如 Dijkstra 算法（Sniedovich，2006）或 A* （Hart 等，1968；Martelli 和 Montanari，1975）——均适用 [2]。



动态规划可以加入一个到达代价启发式 $H : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ 它为对象赋予一个代价，对到达该对象的最优代价设定一个下界。只要启发式在目标范畴 $\mathcal{G}$ 中的所有对象上均为零，在其他对象上均为正，它就不会改变最优箭头。启发式对算法的影响通过启发式调整损失函数体现，

$$L_H(a,b) \coloneqq L(a,b) - H(a) + H(b).$$

如果 L 具有函子性，该损失函数也具有函子性。范畴必须限制为仅包含启发式值不增加的那些箭头，即 $-H(a) + H(b) \geq 0$. 原则 9 仍然成立。当到任意给定对象的箭头数量有限时，采用启发式调整损失函数的最短路径算法会受到启发式的引导。

正则非线性控制系统的范畴不是有限的：指向某个系统的态射数量是无限的。通过限制可以使指向任意给定系统的态射数量变为有限，例如 Lévine（2025）仅考虑纯延拓的情形。Dijkstra 算法或 A*apply 在此情况下均可直接应用，从而在受限的扩展类中得到一个最小动态扩展。

[2] 这些算法假设损失函数具有函子性，因此通常不适用于任何满足原则 9 的范畴。

Guay 等人（1997年）计算出的界使该算法成为有限算法。

5. 通过动态搜索实现的最小动态扩展

固定一个基底正则非线性控制系统 $(\mathsf{M}_0,\mathcal{I}_0^{(0)})$。令 $\mathcal{X}$ 表示由正则非线性控制系统 $(\mathsf{M},\mathcal{I}) \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{X}}$ 组成的子范畴，这些系统均为 $(\mathsf{M}_0,\mathcal{I}_0^{(0)})$的扩展系统。该范畴的态射是定义 *4* 中的淹没*Arr*。该范畴的原始箭头恰好是沿类型为 $(1,\kappa)$ 的正则零动态叶状结构所作的单重动态扩展；长度为 κ 的单个通道恰好延长一次至 $\kappa+1$。任何其他扩展都可通过交运算复合得到。根据定理5，所有复合箭头都能分解为原始箭头，而这些原始箭头本身也是 $(\mathsf{M}_0,\mathcal{I}_0^{(0)})$ 的扩展系统。令目标范畴 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{X}$ 由满足反馈线性化条件 (Inv) 和 (Con) 的扩展系统组成。

到反馈线性化系统的最小动态扩展旨在按维数寻找最小动态预补偿器。定义损失函数，

$$L(\pi:\mathsf{M}_2\to\mathsf{M}_1):\mathcal{X}\to\mathbb{R},\pi\mapsto\dim\mathsf{M}_2-\dim\mathsf{M}_1,$$

对于任意箭头 $\pi\in\mathrm{Arr}_{\mathcal{X}}$，介于系统 $(\mathsf{M}_1,\mathcal{I}_1)$, 与其扩展系统 $(\mathsf{M}_2,\mathcal{I}_2)$. 损失函数度量由动态扩展引起的系统阶数变化。显然，$L(\pi)=1$ 对原始箭头成立，而对恒等箭头为零。损失函数是函子性的。由定理 11 可知原则 9 成立。对反馈线性化系统的动态扩展的搜索可通过递归应用 (8) 来进行。为加速搜索，我们引入到达代价启发式。

5.1 主导可积性缺陷启发式

尽管我们无法计算非线性控制系统 $(\mathsf{M},\mathcal{I}^{(0)})$ 与“最近的”反馈线性化非线性控制系统之间的损失函数，我们仍可定义一个可容许启发式，为损失函数给出最佳情形下界。为构造该启发式，我们需要一种度量，用以衡量一个理想距离对合有多远。

定义 *12*。（可积性缺陷）。设$\mathcal{I} \subseteq \Gamma(\Lambda T^*\mathsf{M})$为一个理想。**可积性缺陷** defect($\mathcal{I}$)定义为 defect($\mathcal{I}$) :=维数($\mathcal{I}/\mathcal{I}^{(1)}$)。

defect($\langle\mathcal{I}^{(k)},dt\rangle$）衡量在外微分下未能闭合的形式空间的维数，因此构成可积性条件的一种障碍。这启发了一种启发式方法。

定义 *13*。（主导可积性缺陷）。
设 $(\mathsf{M},\mathcal{I}^{(0)})$ 为一个正则非线性控制系统。**主导可积性缺陷** lid($\mathsf{M},\mathcal{I}^{(0)}$) 按以下方式定义。找到使 $\langle\mathcal{I}^{(k^\star)}\ dt\rangle$ 不满足可积性的最小指标 $k^\star\geq 0$ 。如果所有理想都可积，则令 $k^\star=0.$ 。定义 lid($\mathsf{M},\mathcal{I}^{(0)}$) :=defect($\langle\mathcal{I}^{(k^\star)}\,dt\rangle$)。

对于反馈线性化系统，lid(·) 为零（且仅为零），这是因为 (Inv)。对于动态反馈线性化系统，lid(·) 给出了使系统达到线性化所需的动态扩展数量的最佳情况下界。

寻找一个使 lid(·) 最小的扩张颇为棘手，因为当某个理想 k, 达到可积性时，缺陷可能会在理想 $k+1$. 中激增。尽管如此，在固定理想中消除缺陷通常仍能使主导缺陷最小化。设 $k^\star>0$ 为 lid($\mathsf{M},\mathcal{I}^{(0)}$) 的指标。令 $\sigma\in\langle\mathcal{I}^{k^\star},\ dt\rangle$ 为由缺陷理想的所有生成元作楔积得到的形式。该理想不满足 (Inv)，即$\langle\mathcal{I}^{k^\star},\ dt\rangle \not\subseteq \langle\mathcal{I}^{k^\star},\ dt\rangle^{(\infty)}$，并且我们可以识别生成元，

$$\frac{\langle\mathcal{I}^{k^\star},dt\rangle}{\langle\mathcal{I}^{k^\star},dt\rangle^{(1)}}=\left\langle[\omega^1],\dots,[\omega^r]\right\rangle.$$

必然地 $d\omega^i\wedge\sigma\neq 0.$ 找出满足以下条件的最小集合 $V=\{dv^1,\dots,dv^\ell\}$，

$$\begin{aligned}\min_{V\subseteq\langle\mathcal{I}^{(k^\star-1)},dt\rangle}\quad & \ell\\ \text{s.t.}\quad & \sigma\wedge dv^1\wedge\cdots\wedge dv^\ell\neq 0\\ & d\omega^1\wedge\sigma\wedge dv^1\wedge\cdots\wedge dv^\ell=0\\ & \vdots\\ & d\omega^r\wedge\sigma\wedge dv^1\wedge\cdots\wedge dv^\ell=0\end{aligned}$$

集合 V 包含前述理想中数量最少的恰当形式（由 (Inv) 可积）；若将其延拓至有缺陷的理想中，便可使该理想 ω^i 微分闭。这个问题与击中集问题相似。求解此问题可确定一致向量相对阶为 $k^\star$ 的输出 v^i，这些输出经过一步动态扩展后，可使理想 $\langle\mathcal{I}^{k^\star},dt\rangle$ 成为对合。

可根据启发式 H 对上述损失函数 L 进行调整：=lid 利用此优化问题提供的信息，得到函子性损失函数 L_H，从而引导最小动态扩展的搜索，以解决 (Inv)。请记住，只需将范畴中的态射限制为不会使启发式 变差 的动态扩展：受限范畴包含既不改善也不加重缺陷的扩展，尽管搜索算法倾向于选择有所改善的扩展。下面来看几个简单的例子，看看该启发式如何发挥作用。

5.2 示例

以下示例由 Maple（2025）中执行的符号计算提供支持。工作表可在（D’Souza，2026）公开获取，同时附有一个自定义 `Maple`软件包，用于在有限情形下执行动态搜索。

一阶动态预补偿器 定义流形 $\mathsf{M}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^6$，其输入向量为 $u\in\mathbb{R}^4$，状态为 $(x,y,\theta,z,w,\beta)\in\mathbb{R}^6.$ 令 $\alpha=\theta+\beta$与 $\gamma=\alpha+z$。考虑非线性控制系统，

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{(0)}=\langle & dx-u^1\cos(\gamma)dt,dy-u^1\sin(\gamma)dt,d\theta-u^2dt,\\ & dz-u^3e^{u^4}\cos(\alpha)dt,dw-u^3e^{u^4}\sin(\alpha)dt,d\beta-u^4e^{u^3}dt\rangle.\end{aligned}$$

该系统不可反馈线性化。此外，不存在通过纯延拓得到的四阶动态预补偿器，能使其成为反馈线性化系统。存在一个五阶动态预补偿器：将 u^2 延拓一次，并将(u^3,u^4)延拓两次

各。我们现在证明，存在一个一阶动态预补偿器，可使该系统进入对合。

针对该问题，首次应用启发式调整的动态规划方程时，需要在通向 (M,$\mathcal{I}^{(0)}$) 的最优原始箭头中进行选择。启发式调整损失函数为

$$L(\pi_1) = 1 - \mathrm{lid}(\mathsf{M}_2, \mathcal{I}_2^{(0)}) + \mathrm{lid}(\mathsf{M}, \mathcal{I}^{(0)}). \tag{9}$$

原始箭头的损失函数通过选择一个维数仅多一维、但能降低主导可积性缺陷的非线性控制系统来最小化。在此情况下，首要缺陷出现在 $\langle \mathcal{I}^{(1)}, dt\rangle$ 处，其中商$\langle \mathcal{I}^{(1)}, dt\rangle$ 由形式生成，且$\langle \mathcal{I}^{(1)}, dt\rangle^{(1)}$

$$dx - \cot(\gamma)dy, dz - \cot(\alpha)dw.$$

lid(M,$\mathcal{I}^{(0)}$) $= 2$. 我们要寻找一个恰当一形式，通过一步动态扩展将其纳入该理想，从而消除缺陷。将$\langle \mathcal{I}^{(0)}, dt\rangle$ 中的恰当形式 dh 延拓至$\langle \mathcal{I}^{(1)}, dt\rangle$ （原先并不存在于其中），需要对一个虚拟输入进行一次扩展；等价地，这就是沿输出 h. 所诱导的正则零动态叶状结构进行扩展。恰当一形式 $d\gamma \in \langle \mathcal{I}^{(0)}, dt\rangle$是一个这样的候选。根据定义1，确定 γ 的相对阶为一。沿其正则零动态叶状结构执行一步动态扩展，以生成新的微分约束，

$$\begin{aligned} d\,\mathcal{L}_f\,\gamma - \mathcal{L}_f^2\,\gamma dt = &-u^3 e^{u^4}\sin\alpha d\alpha + du^2 \\ &+ (u^4 e^{u^3} + e^{u^4}\cos\alpha) du^3 \\ &+ (e^{u^3} + u^3 e^{u^4}\cos\alpha) du^4 \\ &- q dt, \end{aligned} \tag{10}$$

一个虚拟输入可以替代 u^2，并将其延拓以形成新的输入 $q.$。这定义了一个具有附加坐标 q 和约束 (10) 的新流形。这个扩展系统满足反馈线性化条件 (Inv) 和 (Con)。动态规划算法会终止，因为任何其他延拓的代价都必然更高。

二阶动态预补偿器 考虑前一个非线性控制系统的一种变体，

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{(0)} = \langle &dx - u^1\cos(\theta + z)dt, dy - u^1\sin(\theta + z)dt, d\theta - u^2 dt, \\ &dz - u^3 e^{u^4}\cos(\beta)dt, dw - u^3 e^{u^4}\sin(\beta)dt, d\beta - u^4 e^{u^3} dt\rangle. \end{aligned}$$

即使通过纯延拓得到五阶动态预补偿器，也无法形成反馈线性化系统。事实上，要实现可积性，需要二阶动态预补偿器。

同样适用启发式调整损失函数 (9)，但与前一个例子不同，可积性缺陷无法通过一步延拓完全消除。阻碍可积性的形式为:

$$dx - \cot(\theta + z)dy, dz - \cot\beta dw,$$

属于理想 $\langle \mathcal{I}^{(1)},\ dt\rangle$。这些形式看起来与前一个例子相似，但对于这些形式，必须从每个理想中选取一个恰当微分，

$$\langle dx, dy, d\theta + dz\rangle, \langle d\beta, dz, dw\rangle,$$

分别。这些理想没有共同的恰当一形式。要使该理想成为对合，任何动态扩展都必须包含两个步骤。我们可以先沿着 z 进行扩展，然后再添加沿着 θ 的扩展，从而形成沿着

由输出 ($\theta + z$, z) 所诱导的正则零动态叶状结构。这些扩展得到一个反馈线性化系统。动态规划算法在此终止。

6. 结论

面对动态反馈线性化不可避免的计算瓶颈，我们提出了一种动态搜索方法，用于寻找能够使系统进入对合状态的动态扩展。该方法基于正则零动态流形的结构，刻画了非线性控制系统的一个优化范畴。通过施加限制，可以使搜索变为有限搜索；否则，可采用启发式方法引导搜索，选择那些可能源自反馈线性化系统的态射。该表述引出了若干有趣的问题。是否存在一种对态射构造等价类的方法，从而使一般情况下的搜索变为有限搜索？如果不存在，能否确定最优启发式，并通过函数方程系统地生成一系列线性偏微分方程？本文提出的方法也适用于其他有趣问题，例如寻找一种最小动态扩展，将零动态流形转化为正则零动态流形（“动态”横向反馈线性化）。此外，还可以修改损失函数，以编码对动态预补偿器的设计约束。

参考文献

Battilotti, S. 和 Califano, C.（2004）。动态反馈线性化的一个构造性条件。《系统与控制快报》，52(5)，329–338。Battilotti, S. 和 Califano, C.（2008）。动态反馈线性化的几何方法。载于 A. Astolfi 和 L. Marconi（编），非线性控制系统的分析与设计，397–411。Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡。Bellman, R.E.（1954）。动态规划理论的一些应用。兰德公司，圣莫尼卡，加利福尼亚州。Bryant, R.L.、Chern, S.S.、Gardner, R.B.、Goldschmidt, H.L. 和 Griffiths, P.A.（1991）。外微分系统，数学科学研究所出版物第18卷。Springer New York，纽约，纽约州。Charlet, B.、Lévine, J. 和 Marino, R.（1989）。论动态反馈线性化。《系统与控制快报》，13(2)，143–151。D'Souza, R.S.（2026）。 deds/examples/deds-conference在 main • rollends/deds。网址： https://github.com/rollends/deds/tree/main/examples/deds-conference。D'Souza, R.S. 和 Nielsen, C.（2023）。局部横向反馈线性化算法。《*SIAM*控制与优化杂志》，61(3)，1248–1272。Gstöttner, C.、Kolar, B. 和 Schöberl, M.（2023）。双输入系统通过二维内生动态反馈实现可线性化的充要条件。《国际控制杂志》，96(3)，800–821。Guay, M.、Mclellan, P.J. 和 Bacon, D.W.（1997）。控制仿射非线性系统动态反馈线性化的一个条件——

仿射非线性系统。《国际控制杂志》，68(1)，87–106。Hart, P.E.、Nilsson, N.J. 和 Raphael, B.（1968）。启发式确定最小代价路径的形式基础。*IEEE*系统科学与控制论汇刊，4(2)，100–107。doi:10.1109/TSSC.1968.300136。Hunt, L.R.、Su, R. 和 Meyer, G.（1982）。多输入非线性系统的设计。载于数学进展，第27卷，268–298。Birkhäuser Boston，密歇根理工大学。Isidori, A.（1995）。非线性控制系统。通信与控制工程。施普林格伦敦，伦敦。Jakubczyk, B. 和 Respondek, W.（1980）。论控制系统的线性化。波兰科学院通报，28(9–10)，517–522。Lee, J.M.（2012）。光滑流形导论，数学研究生教材第218卷。Springer New York，纽约，纽约州。Lévine, J.（2007）。论微分平坦与动态反馈可线性化性之间的等价性。*IFAC*论文集，40(20)，338–343。Lévine, J.（2009）。非线性系统的分析与控制：基于平坦性的方法。Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡。Lévine, J.（2025）。通过纯延拓实现微分平坦：充要条件。优化理论通讯，2025(1)。Malgrange, B.（2017）。关于Cartan等价问题。图卢兹科学学院年刊：数学，26(5)，1087–1136。Maple（2025）。Maplesoft（Waterloo Maple公司的一个部门）。Martelli, A. 和 Montanari, U.（1975）。从动态规划到具有函数代价的搜索算法。载于国际人工智能联合会议（美国），345–350。Nicolau, F.、Respondek, W. 和 Li, S.（2025）。通过连续的一次延拓实现双输入控制系统的动态反馈线性化。富兰克林学会会刊，362(13)，107780。Sniedovich, M.（1992）。动态规划。纯粹与应用数学第154卷。Marcel Dekker，纽约，纽约州，第1版。Sniedovich, M.（2006）。重新审视Dijkstra 算法：动态规划关联。控制与控制论，35(3)，599–620。

附录 A. 命题 3 的证明

证明。 首先由条件 (iv) 推出， $\mathfrak{I}(\mathcal{Z})$ 的任意 第一积分都可以变为与时间无关。此外，利用条件 (ii) 和 (iii)，可推出所有理想$\langle \mathcal{I}^{(k)}, dt\rangle \cap \mathfrak{I}(\mathcal{Z})$ 均由有限个恰当的光滑一形式生成，即光滑函数的微分。定义可控性指标，

$$\rho^0 \coloneqq \dim(\mathfrak{I}(\mathcal{Z})) - \dim(\langle \mathcal{I}^{(0)}, dt\rangle \cap \mathfrak{I}(\mathcal{Z})),$$
$$\rho^i \coloneqq \dim\left(\frac{\langle \mathcal{I}^{(i-1)}, dt\rangle \cap \mathfrak{I}(\mathcal{Z})}{\langle \mathcal{I}^{(i)}, dt\rangle \cap \mathfrak{I}(\mathcal{Z})}\right), \quad 1 \le i \le n,$$

以及克罗内克指标，

$$\kappa^i \coloneqq \|\{j : \rho_j \ge i\}\| - 1.$$

由于纳入了相对阶为零的输出，因此该偏移量并非标准值。这些指标因正则性条件 (ii) 而定义良好。

为证明$\mathcal{Z}$ 是类型为 (ρ^0, κ) 的正则零动态叶状结构，其中 $\kappa \coloneqq (\kappa^1, \dots, \kappa^{\rho^0})$, 我们必须找到向量相对阶为 κ 的输出$h : M \to \mathbb{R}^{\rho^0}$，其水平集与$\mathcal{Z}$的叶片. 重合。确定输出的算法与 D'Souza 和 Nielsen（2023）中的算法完全相同，只需作相应调整。我们在此简要概述这一方法。

从导出程度最高的理想到最低的理想，可以识别出相对阶由高到低的输出，其变化出现在 ρ^i. 从$\langle \mathcal{I}^{(\kappa^1-1)} dt\rangle$, 开始，积分微分闭理想$\langle \mathcal{I}^{(\kappa^1-1)} dt\rangle \cap \mathfrak{I}(\mathcal{Z})$，以找到一个

具有一致向量相对阶的 ρ^{κ^1} 输出 $h^1_1, \dots, h^{\rho^{\kappa_1}}$计算正则零动态叶状结构

$$\mathcal{Z}^{\kappa^1} = \mathfrak{Z}(\langle dh^1, \dots, dh^{\rho^{\kappa^1}}\rangle).$$

逆向推导，找到下一个导出程度最高的理想 j其中 $\rho^j \neq \rho^{\kappa^1}$. 其索引为 ρ^{κ^2}. 对理想 $\langle \mathcal{I}_{(\rho^{\kappa^2}-1)} dt\rangle \cap \mathfrak{I}(\mathcal{Z})$ 进行积分，并调整精确生成元，使其呈现如下形式，

$$\langle dh^1, \dots, \mathcal{L}_f^{\kappa^1-\rho^{\kappa^2}} dh^{\rho^{\kappa^1}}, dq^1, \dots, dq^{\rho^{\kappa^2}-\rho^{\kappa^1}}\rangle.$$

这里将生成元拆分，使其中尽可能多的生成元位于 $\mathfrak{I}(\mathcal{Z}^{\kappa^1})$ 中，其余为新的生成元 dq^i. 这只有在条件 (i)（即 (4)）成立时才可能；该条件意味着，在导出旗标中找到的精确生成元 dh^i 的重复李导数以及 $\mathfrak{I}(\mathcal{Z}^{\kappa^1})$ 均仍属于 $\mathfrak{I}(\mathcal{Z}^{\kappa^1}) \subseteq \mathfrak{I}(\mathcal{Z})$。其余生成元 dq^i 可积分得到具有一致向量相对阶 κ^2 的输出——它们不属于导出程度更高的理想——并且与现有输出分量 dh^i. 一同构成向量相对阶。因此，我们定义新的正则零动态叶状结构，

$$\mathcal{Z}^{\rho^{\kappa^2}} \coloneqq \mathcal{Z}^{\kappa^1} \wedge \mathfrak{Z}(\langle dq^1, \dots, dq^{\rho^{\kappa^2}-\rho^{\kappa^1}}\rangle).$$

重复这一系列步骤会生成一个递减的正则零动态叶状结构序列，

$$\mathcal{Z}^{\kappa^1} \ge \cdots \ge \mathcal{Z}^1,$$

直到我们到达索引 0。在此索引处，如果 $\rho^0 \neq \rho^1$，则存在 $\rho^0 - \rho^1$ 个相对阶为零的输出。这些输出可以通过重复相同的一系列步骤来识别，不同之处在于直接针对正则零动态叶状结构 $\mathcal{Z}$, 调整 $\mathfrak{I}(\mathcal{Z})$ 的生成元$\mathcal{Z}^0$，而该叶状结构必须根据维数计数论证以及所使用的所有生成元均来自 $\mathfrak{I}(\mathcal{Z})$。因此，$\mathcal{Z}$ 是一个正则零动态叶状结构。□