arXiv:2602.01467v1 [math.NA] 1 Feb 2026

超越泰勒：基于散度的函数展开及其在数值积分中的应用

Junping Wang *

摘要。 本文提出一种新的函数展开框架，将经典思想拓展到泰勒级数之外。与基于局部多项式逼近的传统泰勒展开不同，所提出的方法源于精确的微分恒等式，这些恒等式通过多项式权重因子将函数与其导数联系起来。该表述借助基于散度的关系来表示光滑函数，从而将各阶导数与按系统方式缩放的多项式系数联系起来。该框架为构造高阶数值求积公式提供了自然基础，尤其适用于多维区域。通过利用散度结构，并借助散度定理，体积分被系统地转化为边界积分，从而将积分区域从 n维体递归地降维至其$(n-1)$维面片，并最终降至其顶点。

本文进一步通过引入复数平移技巧来提高该框架的精度。研究表明，将展开中心置于复平面上特定的单位根处，可以消去低阶误差项，从而以最少的函数求值得到高阶实值求积公式。此外，本文对曲面积分所需的仿射变换进行了严格的几何分析，并推导了法向量与曲面测度变换的显式公式。所提出的方法为任意平面多胞体提供了一种稳健、系统且计算高效的替代方案，可取代基于剖分的求积。

关键词。 泰勒展开、积分表示、数值求积、数值积分。

AMS主题分类。 主要分类 41A58, 41A60, 41A55

1. 引言。 多维区域上的数值积分是计算科学的基石，对有限元方法、弱Galerkin方法、间断Galerkin格式以及计算机图形学中的惯性属性计算至关重要。尽管高斯求积在超立方体和单纯形上的精度最优，但对一般多胞体进行积分仍然计算量大。标准方法通常依赖剖分——将多胞体分解为若干互不相交的单纯形（三角形或四面体）。然而，对于Voronoi剖分、界面重构或多面体有限元中出现的复杂几何形状，这种子结构划分可能产生瘦长单元，降低数值稳定性并显著增加计算成本。

为避免体网格剖分带来的困难，基于降维的方法日益受到重视。借助散度定理（或斯托克斯定理），体积分可以转化为边界积分，并递归地降低问题维度，直至达到顶点。这种策略已以多种形式得到研究，尤其是Mirtich [3] 用于质量属性计算，以及Lasserre [2] 用于齐次函数。最近，这一技术的变体已被用于计算任意多胞体上的多项式积分[5, 1, 4]。

本文提出一种基于

*美国国家科学基金会数学与物理科学部，弗吉尼亚州亚历山德里亚，邮编 22314（jwang@nsf.gov）。Wang 在美国国家科学基金会任职期间，其研究部分得到了 NSF IR/D 项目的资助。然而，本材料中表达的任何观点、发现、结论或建议均属于作者本人，并不一定反映美国国家科学基金会的观点。

新型函数展开的数值积分统一框架。与通过逐点导数表示函数的经典泰勒级数不同，我们的展开是通过递归散度恒等式推导而来的。这种结构自然地将被积函数改写为散度形式项的和，从而无需临时进行代数运算即可直接应用散度定理。

我们的贡献有三方面。首先，我们推导出一种通用函数展开$\mathbb{R}^n$，可将光滑函数表示为一系列散度项。这由此导出一种递归积分算法，该算法完全基于多胞体的边界数据进行运算，彻底避免了内部离散化。

其次，我们提出一种方法，通过将展开中心扩展到复平面来提高这些求积公式的精度。对于一维情形，我们证明，基于单位根选取复数平移，可以构造只需极少函数求值次数的高阶积分公式。例如，我们通过一种复数平移的类梯形公式，推导出一个对三次多项式精确的实值求积公式。

第三，我们对曲面积分所需的仿射变换进行了严格的几何分析。虽然将参考单元映射到物理面是标准做法，但法向量和曲面测度的变换往往只是凭启发式方法处理。我们建立了参考构形与物理构形之间曲面测度和法向量的精确关系式，从而确保该方法的实现具有坚实的数学基础。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍一维情形中的基本函数展开，第 3 节展示如何利用复数平移技术提高求积精度。第 4 节通过基于散度的递归，将这一展开推广到 n 维欧几里得空间。第 5 节详细说明如何将这一展开限制到平坦曲面，并推导仿射变换定律。第 6 节展示基于散度的函数展开在多维区域数值积分中的应用。最后，第 7 节和第 8 节分别给出平行六面体体积及法向量变换的严格证明，以验证所提框架在几何上的一致性。

2. 一维情形：函数展开。设 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ 是一个光滑函数。对于任意整数 $k \geqslant 0$，下列恒等式成立：

$$(k+1)x^k f^{(k)} = (x^{k+1} f^{(k)})' - x^{k+1} f^{(k+1)}. \tag{2.1}$$

重新排列各项后，可得等价形式：

$$x^k f^{(k)} = \frac{1}{k+1}(x^{k+1} f^{(k)})' - \frac{1}{k+1} x^{k+1} f^{(k+1)}. \tag{2.2}$$

对 $k = 0$、1、2、.....反复应用 (2.2)，可得到一个函数展开

f 的:

$$
\begin{aligned}
f &= (xf)' - xf' \\
&= (xf)' - \frac{1}{2!}(x^2 f')' + \frac{1}{2!}x^2 f'' \\
&= (xf)' - \frac{1}{2!}(x^2 f')' + \frac{1}{3!}(x^3 f'')' - \frac{1}{3!}x^3 f''' \\
&= (xf)' - \frac{1}{2!}(x^2 f')' + \frac{1}{3!}(x^3 f'')' - \frac{1}{4!}(x^4 f''')' + \frac{1}{4!}x^4 f'''' \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\big(x^{k+1} f^{(k)}(x)\big)' + \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!} x^{m+1} f^{(m+1)}(x).
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

结果可总结如下。

THEOREM 2.1. 设 $m \geqslant 0$ 为整数，且 $f \in C^{m+1}(\mathbb{R})$。则

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\Big(x^{k+1} f^{(k)}(x)\Big)' + \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!} x^{m+1} f^{(m+1)}(x). \tag{2.4}
$$

此外，若 $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$，则有无穷展开

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\Big(x^{k+1} f^{(k)}(x)\Big)', \tag{2.5}
$$

前提是该级数收敛。

接下来，对于任意固定点 x_0（实数或复数），在（2.1）中用 $x - x_0$ 替换 x，可得

$$
(k+1)(x-x_0)^k f^{(k)} = \big((x-x_0)^{k+1} f^{(k)}\big)' - (x-x_0)^{k+1} f^{(k+1)}.
$$

因此，我们有

$$
(x-x_0)^k f^{(k)} = \frac{1}{k+1}\big((x-x_0)^{k+1} f^{(k)}\big)' - \frac{1}{k+1}(x-x_0)^{k+1} f^{(k+1)}, \tag{2.6}
$$

由此得到如下推广结果。

THEOREM 2.2. 设 $m \geqslant 0$ 为整数，且 x_0 为给定的实数或复数。若 $f \in C^{m+1}(\mathbb{R})$，则

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\Big((x-x_0)^{k+1} f^{(k)}(x)\Big)' + \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1} f^{(m+1)}(x). \tag{2.7}
$$

此外，对于 $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$，下列级数展开成立:

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\Big((x-x_0)^{k+1} f^{(k)}(x)\Big)', \tag{2.8}
$$

只要它收敛。

3. 一维数值积分。 本节中，我们利用展开式 (2.7)–(2.8) 推导若干一维数值积分公式。这些公式主要用于说明，因为通过对 x_0 和截断方式作不同选择，还可以从该展开式得到许多其他数值积分方案。

对于给定区间 $[a,b]$，在 $[a,b]$ 上对展开式 (2.8) 积分，得到

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\Big((b-x_0)^{k+1} f^{(k)}(b) - (a-x_0)^{k+1} f^{(k)}(a)\Big). \tag{3.1}$$

取该级数的前 $m+1$ 项，可得积分的近似值 :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_{m+1} := \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\Big((b-x_0)^{k+1} f^{(k)}(b) - (a-x_0)^{k+1} f^{(k)}(a)\Big). \tag{3.2}$$

由恒等式 (2.7)，相应的余项为

$$R_{m+1} = \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}\int_a^b (x-x_0)^{m+1} f^{(m+1)}(x)\,dx. \tag{3.3}$$

令 $x_0 = b$，公式 (3.1) 化简为

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(a), \tag{3.4}$$

这与在 $x=a$ 附近使用标准泰勒展开所得的结果一致。相应的近似值为

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{m} \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(a), \tag{3.5}$$

余项为

$$R_{m+1} = \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}\int_a^b (x-b)^{m+1} f^{(m+1)}(x)\,dx. \tag{3.6}$$

类似地，选择 $x_0 = a$ 可得到关于右端点的展开：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (b-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(b), \tag{3.7}$$

其近似为

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k (b-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(b), \tag{3.8}$$

和余项

$$R_{m+1} = \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}\int_a^b (x-a)^{m+1} f^{(m+1)}(x)\,dx. \tag{3.9}$$

为了推导出一个仅涉及中点 $c = \frac{1}{2}(a+b)$ 处函数值的数值积分公式，可以将 (3.8) 应用于子积分 $\int_a^c f(x)\,dx$，并将 (3.5) 应用于 $\int_c^b f(x)\,dx$，然后合并两者的结果。此处探索的细节留给读者。

或者，选取中点 $x_0 = \frac{1}{2}(a+b)$ 可得

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \frac{(b-a)^{k+1}}{2^{k+1}} \Big[f^{(k)}(b) + (-1)^k f^{(k)}(a) \Big], \tag{3.10}$$

其近似为

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \frac{(b-a)^{k+1}}{2^{k+1}} \Big[f^{(k)}(b) + (-1)^k f^{(k)}(a) \Big], \tag{3.11}$$

且余项为

$$R_{m+1} = \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^{m+1} f^{(m+1)}(x)\,dx. \tag{3.12}$$

仅保留（3.11）中的第一项可得梯形法则：

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2} \big(f(a) + f(b) \big),$$

其余项由（3.12）取 $m = 0$ 得到，为

$$R_1 = -\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) f'(x)\,dx,$$

对于任意线性函数 f，该余项均为零。

取（3.11）的前三项可得到一个高阶逼近：

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx \approx{}& \frac{b-a}{2} \big(f(a) + f(b) \big) - \frac{(b-a)^2}{8} \big(f'(b) - f'(a) \big) \\ &+ \frac{(b-a)^3}{48} \big(f''(b) + f''(a) \big), \end{aligned} \tag{3.13}$$

其余项由（3.12）令 $m = 2$ 得到，为

$$R_3 = -\frac{1}{3!} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^3 f'''(x)\,dx. \tag{3.14}$$

对于所有三次多项式 f，该余项均为零；因此，公式（3.13）对三次函数是精确的。

若只保留前两项，则逼近变为

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2} \big(f(a) + f(b) \big) - \frac{(b-a)^2}{8} \big(f'(b) - f'(a) \big), \tag{3.15}$$

其余项为

$$R_2 = \frac{1}{2!} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 f''(x)\,dx. \tag{3.16}$$

余项 R_2 对线性函数为零，但通常对二次多项式不为零；因此，两项逼近 (3.15) 仅对线性函数保持精确。

3.1. 通过复移位提高精度。能否在仍然只使用展开式前两项的情况下提高 (3.15) 的精度——理想情况下使其对二次多项式也精确？在一维情形下，通过对展开点 x_0引入非对称复数平移，答案是肯定的。核心思路是选择一个复数 x_0，使得对于所有二次多项式，余项 (3.3) 中 $m=2$ 的贡献都为零。满足这一条件时，

$$(b-x_0)^3=(a-x_0)^3 \implies b-x_0=\omega_3(a-x_0),$$

其中 ω_3 表示一个非平凡三次单位根（即 $\omega_3^3=1$ 且 $\omega_3\neq 1$）。

求解 x_0 可得:

$$x_0=\frac{b-\omega_3 a}{1-\omega_3},\quad b-x_0=\frac{\omega_3(b-a)}{\omega_3-1},\quad a-x_0=\frac{b-a}{\omega_3-1}.$$

将此 x_0 代入两项公式，得到一个复值近似 :

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{\omega_3-1}\big(\omega_3 f(b)-f(a)\big)-\frac{(b-a)^2}{2(\omega_3-1)^2}\big(\omega_3^2 f'(b)-f'(a)\big). \tag{3.17}$$

取实部可得到一个实值高阶积分规则，该规则对所有二次多项式都是精确的。

为计算 $\frac{\omega_3}{\omega_3-1}$的实部，注意到:——

$$\frac{\omega_3}{\omega_3-1}=\frac{\omega_3(\bar\omega_3-1)}{(\omega_3-1)(\bar\omega_3-1)}=\frac{1-\omega_3}{2(1-\Re(\omega_3))}. \tag{3.18}$$

因此，$\Re\big(\frac{\omega_3}{\omega_3-1}\big)=\frac{1}{2}$。由此可得:

$$\Re\left(\frac{1}{\omega_3-1}\right)=\Re\left(\frac{\omega_3}{\omega_3-1}\right)-1=-\frac{1}{2}. \tag{3.19}$$

对于导数项，我们使用恒等式

$$\frac{\omega_3^2}{(\omega_3-1)^2}-\frac{1}{(\omega_3-1)^2}=\frac{\omega_3+1}{\omega_3-1}=\frac{\omega_3}{\omega_3-1}+\frac{1}{\omega_3-1},$$

由此可得 $\Re\big(\frac{\omega_3^2}{\omega_3-1()^2}\big)=\Re\big(\frac{1}{(\omega_3-1)^2}\big)$。令 $A=1-\Re(\omega_3)$，由 (3.18) 可得 $\frac{\omega_3}{\omega_3-1}=\frac{1-\omega_3}{2A}$。注意，$\Re((1-\omega_3)^2)=-2A\Re(\omega_3)$。因此:

$$\Re\left(\frac{\omega_3^2}{(\omega_3-1)^2}\right)=\frac{1}{4A^2}\Re\big((1-\omega_3)^2\big)=\frac{-\Re(\omega_3)}{2(1-\Re(\omega_3))}.$$

对于 $\omega_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，我们得到 $\Re\big(\frac{\omega_3^2}{(\omega_3-1)^2}\big)=\frac{1}{6}$。所得实值求积公式为:

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{2}\big(f(b)+f(a)\big)-\frac{(b-a)^2}{12}\big(f'(b)-f'(a)\big), \tag{3.20}$$

该公式对所有二次多项式均精确。此方法通过引入导数信息并利用复对称性优化展开，对梯形法则进行了推广。

3.2. 通过复数平移得到的四项公式。 复数平移方法可以扩展到包含任意偶数项的公式。对于四项公式，我们选择 x_0 ，使得所有次数为 4 的多项式的余项均为零:

$$R_4 = \frac{1}{4!}\int_a^b (x-x_0)^4 f^{(4)}(x)\,dx = 0. \tag{3.21}$$

当 $(b-x_0)^5 = (a-x_0)^5$, 时，该条件成立，因此 $b-x_0 = \omega_5(a-x_0)$，其中 $\omega_5 \neq 1$ 是一个五次单位根。求解 x_0 得 $x_0 = \frac{b-\omega_5 a}{1-\omega_5}$。定义 $\gamma_5 = \frac{\omega_5}{\omega_5 - 1}$ （ ω_5 的 M¨obius 变换），则有:

$$b - x_0 = \gamma_5(b-a), \quad a - x_0 = (\gamma_5 - 1)(b-a).$$

由于 M¨obius 变换将单位圆映射到垂直线 $\Re(z) = \frac{1}{2}$，因此可得 $1-\gamma_5 = \bar{\gamma}_5$，进而得到，对于任意整数 k， $\Re((1-\gamma_5)^k) = \Re(\gamma_5^k)$。

所得实值积分公式对次数为 4 的多项式精确，形式如下:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \approx{}& \frac{b-a}{2}\big(f(b)+f(a)\big) - \frac{(b-a)^2\Re(\gamma_5^2)}{2!}\big(f'(b)-f'(a)\big)\\ &+ \frac{(b-a)^3\Re(\gamma_5^3)}{3!}\big(f''(b)+f''(a)\big)\\ &- \frac{(b-a)^4\Re(\gamma_5^4)}{4!}\big(f'''(b)-f'''(a)\big).\end{aligned} \tag{3.22}$$

表3.1列出了不同 ω_5 取值下 γ_5^m 的实部。

TABLE 3.1
Real parts of γ_5^m for nontrivial 5th roots of unity

Term	$\omega_5 = e^{\pm\frac{4\pi i}{5}}$	$\omega_5 = e^{\pm\frac{2\pi i}{5}}$
$\Re(\gamma_5)$	$1/2$	$1/2$
$\Re(\gamma_5^2)$	$\frac{\sqrt{5}}{10}$	$-\frac{\sqrt{5}}{10}$
$\Re(\gamma_5^3)$	$\frac{3\sqrt{5}-5}{20}$	$-\frac{5+3\sqrt{5}}{20}$
$\Re(\gamma_5^4)$	$\frac{\sqrt{5}-2}{10}$	$-\frac{\sqrt{5}+2}{10}$

4. n 维函数展开。 本节中，我们考虑定义在欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 上的函数，其中 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ 表示$\mathbb{R}^n$中的一个点。设 $f = f(\mathbf{x})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个光滑函数。对于任意整数 $k \geq 0$，我们引入以下记号表示 k阶方向导数:

$$\nabla^k f : \mathbf{x}^k := \sum_{1\leq j_r \leq n} x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_k}\partial^k_{j_1,j_2,\ldots,j_k} f. \tag{4.1}$$

为简洁起见，后续推导中将省略多重指标求和符号。

THEOREM 4.1. 对于任意 $k \geq 0$ 和$\mathbf{z}_0 \in \mathbb{C}^n$，以下恒等式成立:

$$(\mathbf{x}-\mathbf{z}_0)\cdot\nabla\big(\nabla^k f : (\mathbf{x}-\mathbf{z}_0)^k\big) = k\nabla^k f : (\mathbf{x}-\mathbf{z}_0)^k + \nabla^{k+1} f : (\mathbf{x}-\mathbf{z}_0)^{k+1}. \tag{4.2}$$

证明。不失一般性，我们证明$\mathbf{z}_0 = 0$的情形。根据梯度算子和乘积法则的定义，我们有:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}\cdot\nabla(\nabla^k f:\mathbf{x}^k)\\
=&\sum_{j_{k+1}=1}^{n} x_{j_{k+1}}\partial_{j_{k+1}}(\nabla^k f:\mathbf{x}^k)\\
=&x_{j_1}\dots x_{j_{k+1}}\partial^{k+1}_{j_1,\dots,j_{k+1}}f+\sum_{j_{k+1}=1}^{n} x_{j_{k+1}}\sum_{m=1}^{k} x_{j_1}\dots\delta_{j_m,j_{k+1}}\dots x_{j_k}\partial^{k}_{j_1,\dots,j_k}f\\
=&x_{j_1}\dots x_{j_{k+1}}\partial^{k+1}_{j_1,\dots,j_{k+1}}f+kx_{j_1}\dots x_{j_k}\partial^{k}_{j_1,\dots,j_k}f\\
=&k\nabla^k f:\mathbf{x}^k+\nabla^{k+1}f:\mathbf{x}^{k+1}.
\end{aligned}$$

□

接下来，我们考虑向量值函数$\mathbf{x}(\nabla^k f:\mathbf{x}^k)$的散度。利用恒等式 $\nabla\cdot(\mathbf{u}\phi) = \phi\nabla\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\phi$以及公式（4.2），可得:

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\mathbf{x}\nabla^k f:\mathbf{x}^k) &= (\nabla\cdot\mathbf{x})\nabla^k f:\mathbf{x}^k+\mathbf{x}\cdot\nabla(\nabla^k f:\mathbf{x}^k)\\
&= n\nabla^k f:\mathbf{x}^k+k\nabla^k f:\mathbf{x}^k+\nabla^{k+1}f:\mathbf{x}^{k+1}\\
&= (n+k)\nabla^k f:\mathbf{x}^k+\nabla^{k+1}f:\mathbf{x}^{k+1}.
\end{aligned}$$

THEOREM 4.2. 对于任意 $k\geq 0$ 和$\mathbf{z}_0\in\mathbb{C}^n$，递归展开恒等式为:

$$\nabla^k f:(\mathbf{x}-\mathbf{z}_0)^k = \frac{1}{n+k}\nabla\cdot\big((\mathbf{x}-\mathbf{z}_0)\nabla^k f:(\mathbf{x}-\mathbf{z}_0)^k\big)-\frac{1}{n+k}\nabla^{k+1}f:(\mathbf{x}-\mathbf{z}_0)^{k+1}. \tag{4.3}$$

反复应用（4.3）可得到以下函数展开（以$\mathbf{z}_0 = 0$为例）：

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{n}\nabla\cdot(\mathbf{x}f)-\frac{1}{n}\nabla f:\mathbf{x}\\
&= \frac{1}{n}\nabla\cdot(\mathbf{x}f)-\frac{1}{n(n+1)}\nabla\cdot(\mathbf{x}\nabla f:\mathbf{x})+\frac{1}{n(n+1)}\nabla^2 f:\mathbf{x}^2\\
&= (n-1)!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(n+k)!}\nabla\cdot\big(\mathbf{x}\nabla^k f:\mathbf{x}^k\big).
\end{aligned}$$

一般结果总结如下:

THEOREM 4.3. 令 $f\in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$ 且$\mathbf{z}_0\in\mathbb{C}^n$。则:

$$\begin{aligned}
\frac{f(\mathbf{x})}{(n-1)!} =&\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{(n+k)!}\nabla\cdot\big((\mathbf{x}-\mathbf{z}_0)\nabla^k f:(\mathbf{x}-\mathbf{z}_0)^k\big)\\
&+\frac{(-1)^{m+1}}{(n+m)!}\nabla^{m+1}f:(\mathbf{x}-\mathbf{z}_0)^{m+1}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

若 $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$，则无穷级数展开

$$\frac{f(\mathbf{x})}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(n+k)!}\nabla\cdot\big((\mathbf{x}-\mathbf{z}_0)\nabla^k f:(\mathbf{x}-\mathbf{z}_0)^k\big) \tag{4.5}$$

在级数收敛的前提下成立。

定理 4.3 中的展开可视为经典泰勒展开的一种散度形式替代。标准泰勒公式通过在固定点 $\mathbf{z}$ 处求得的逐点导数来表示 $f(\mathbf{x})_0$, ，而这种展开则将导数重新分配为散度项。这种结构对于涉及分部积分的应用尤其有利，例如弱形式和有限元分析，因为首项可以通过散度定理直接转化为边界积分。

5. 平坦曲面上的函数展开。设 Σ 是 $\mathbb{R}^n$中的一个 m维平坦曲面，其中 $m \leqslant n$。本节旨在利用曲面散度算子，将级数展开（4.4）—（4.5）推广到定义在 Σ 上的函数。

为便于说明，图 5.1 展示了三维空间中的一个二维曲面 Σ 。尽管 $\boldsymbol{x}_0 \in \Sigma$ 可以是平坦曲面上的任意一点，但通常选择 $\boldsymbol{x}_0$ 作为 Σ的重心（或中心）更为有利。

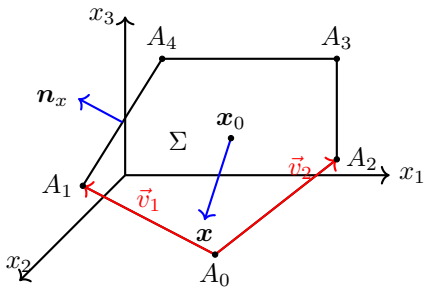

FIG. 5.1。 *Depiction of a flat face* $\Sigma \subset \partial T$.

对于任意点 $\boldsymbol{x} \in \Sigma$，从 $\boldsymbol{x}_0$ 到 $\boldsymbol{x}$ 的向量可以表示为包含 Σ的超平面的基向量的线性组合。具体而言，设

$$\vec{v}_1 = A_1 - A_0, \quad \vec{v}_2 = A_2 - A_0.$$

则存在列向量 $\boldsymbol{s} = (s_1, \ s_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ ，使得

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 = s_1\vec{v}_1 + s_2\vec{v}_2 = A\boldsymbol{s}, \quad \boldsymbol{s} \in \Sigma_s \subset \mathbb{R}^2, \tag{5.1}$$

其中 $A = [\vec{v}_1, \vec{v}_2]$。(5.1)中的映射定义了从二维参考域 Σ_s 到平坦面 Σ的仿射变换:

$$\boldsymbol{s} \to F(\boldsymbol{s}) := \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{s}, \quad \boldsymbol{s} \in \Sigma_s. \tag{5.2}$$

请注意，在图 5.1 的示例中， A 是一个 3×2 矩阵。

为了推广到 m维曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$，仿射映射 (5.2) 可自然地扩展为包含一个 $n \times m$ 矩阵 $A = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m] = \{a_{ij}\}_{n\times m}$和一个参考域 $\Sigma_s \subset \mathbb{R}^m$。

设 $\phi = \phi(\boldsymbol{x})$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑函数。将其限制到 Σ 上，便得到一个曲面函数。现在，我们利用曲面散度算子推导该函数的局部展开。通过仿射映射 (5.2)， ϕ 在 Σ_s 上诱导出相应的函数:

$$\tilde{\phi}(\boldsymbol{s}) := \phi(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{s})) = \phi(\boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{s}), \quad \boldsymbol{s} \in \Sigma_s. \tag{5.3}$$

~ 接下来计算 $\nabla_s \cdot (\phi \boldsymbol{s})$。根据链式法则，有

$$\partial_{s_j} \tilde{\phi} = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} \phi \frac{\partial x_i}{\partial s_j} = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} \phi \, a_{ij} = \vec{v}_j \cdot \nabla_x \phi. \tag{5.4}$$

因此，可得

$$\begin{aligned} \nabla_s \cdot (\boldsymbol{s}\tilde{\phi}) &= \sum_{j=1}^{m} \partial_{s_j} (s_j \tilde{\phi}) \\ &= m\tilde{\phi} + \sum_{j=1}^{m} s_j \partial_{s_j} \tilde{\phi} \\ &= m\tilde{\phi} + \sum_{j=1}^{m} s_j (\vec{v}_j \cdot \nabla_x \phi) \\ &= m\tilde{\phi} + (A\boldsymbol{s})^\top \nabla_x \phi \\ &= m\tilde{\phi} + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^\top \nabla_x \phi \\ &= m\tilde{\phi} + \nabla_x \phi : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0). \end{aligned} \tag{5.5}$$

为进一步展开项 $\nabla_x \phi : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$，我们将式 (4.2) 中的 ϕ 替换为 $\nabla_x \phi : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$，从而得到

$$\nabla_s \cdot (\boldsymbol{s} \nabla_x \phi : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)) = m \nabla_x \phi : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + \nabla_x (\nabla_x \phi : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)) : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0). \tag{5.6}$$

接下来，我们计算项 $\nabla_x (\nabla_x \phi : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)) : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$。由于微分是关于 $\boldsymbol{x}$在 $\mathbb{R}^n$ 中进行的，根据式 (4.2)（其中 $\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{x}_0$ 和 $m = 1$），可得

$$\nabla_x (\nabla_x \phi : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)) : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = \nabla_x^2 \phi : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^2 + \nabla_x \phi : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0).$$

将此关系代入式 (5.6) 可得

$$\nabla_s \cdot (\boldsymbol{s} \nabla_x \phi : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)) = (m+1) \nabla_x \phi : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + \nabla_x^2 \phi : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^2. \tag{5.7}$$

LEMMA 5.1. 对于任意整数 $k \geqslant 0$，恒等式 (5.5) 可作如下高阶扩展：

$$\nabla_s \cdot (\boldsymbol{s} \nabla_x^k \phi : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^k) = m \nabla_x^k \phi : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^k + \nabla_x (\nabla_x^k \phi : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^k) : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0). \tag{5.8}$$

结合 (5.8) 与定理 *4.1* 中的恒等式，可得

$$\nabla_s \cdot (\boldsymbol{s} \nabla_x^k \phi : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^k) = (k+m) \nabla_x^k \phi : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^k + \nabla_x^{k+1} \phi : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^{k+1}. \tag{5.9}$$

~ 通过递归应用(5.9)，可以得到曲面函数 ϕ在平坦曲面 Σ上的展开。

THEOREM 5.2. 设 $\tilde{\phi}$ 是通过仿射映射 (5.3)定义在 m维曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ 上的光滑曲面函数。那么，对于任意整数 $\ell \geqslant 0$，以下恒等式成立：

$$\frac{\tilde{\phi}(\boldsymbol{s})}{(m-1)!} = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(-1)^k}{(k+m)!} \nabla_s \cdot (\boldsymbol{s} \nabla_x^k \phi : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^k) + \frac{(-1)^{\ell+1}}{(\ell+m)!} \nabla_x^{\ell+1} \phi : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^{\ell+1}. \tag{5.10}$$

此外，如果 $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$，那么

$$\frac{\tilde{\phi}(\boldsymbol{s})}{(m-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+m)!} \nabla_s \cdot (\boldsymbol{s} \nabla_x^k \phi : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^k), \tag{5.11}$$

前提是该级数收敛。

定理 5.2 给出了将光滑函数 ϕ 限制到平坦的 m 维曲面 Σ 上时的基于曲面的泛函展开。它将 ϕ 表示为反复作用曲面散度算子的结果，其中算子作用于由 ϕ 及其空间导数组成的组合项。从概念上说，这一结果是定理 4.3 中欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 内函数展开的曲面类比。在这里，空间导数和 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_0)$ 的幂分别由曲面散度和 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$ 取代，从而自然地遵循 Σ 的几何特性。每一项依次刻画 ϕ 沿曲面方向的更高阶变化，为构造高阶曲面近似和积分恒等式提供了系统框架。

6. 多维区域中的数值积分。 设 T 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 n 维多胞体。对 T 上的展开式 (4.5) 积分，并逐项应用散度定理，可得：

$$\begin{aligned} \int_T \frac{f(\boldsymbol{x})}{(n-1)!}\, dT &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(n+k)!} \int_T \nabla \cdot \left((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_0) \nabla^k f : (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_0)^k \right)\, dT \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(n+k)!} \int_{\partial T} \left(\nabla^k f : (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_0)^k \right) (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_0) \cdot \boldsymbol{n}\, dS, \end{aligned} \tag{6.1}$$

其中，$\boldsymbol{n}$ 表示边界 ∂T 上的单位外法向量。

在级数 (6.1) 中保留前 $m+1$ 项，得到积分的如下近似：

$$\int_T \frac{f(\boldsymbol{x})}{(n-1)!}\, dT \approx I_{m+1} := \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(n+k)!} \int_{\partial T} \left(\nabla^k f : (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_0)^k \right) (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_0) \cdot \boldsymbol{n}\, dS. \tag{6.2}$$

根据恒等式 (4.4)，相应的余项（或截断误差）为：

$$R_{m+1} = \frac{(-1)^{m+1}}{(n+m)!} \int_T \nabla^{m+1} f : (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_0)^{m+1}\, dT. \tag{6.3}$$

当 (6.2) 中的 $m = 0$ 时，可得到最低阶近似：

$$\int_T f(\boldsymbol{x})\, dT \approx I_1 := \frac{1}{n} \int_{\partial T} f(\boldsymbol{x}) \left[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_0) \cdot \boldsymbol{n} \right]\, dS, \tag{6.4}$$

相应的余项为：

$$E_1 = -\frac{1}{n} \int_T \nabla f \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_0)\, dT. \tag{6.5}$$

对于边界 ∂T 由有限个平坦面 $\{F_i\}_{i=1}^F$ 构成的多胞体，每个面都具有恒定的外向单位法向量 $\boldsymbol{n}_i$，且 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_0) \cdot \boldsymbol{n}_i$ 的值恒定，其在 (6.2) 中的曲面积分可简化为：

$$\int_{\partial T} \left(\nabla^k f : (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_0)^k \right) (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_0) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \sum_{i=1}^{F} (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{z}_0) \cdot \boldsymbol{n}_i \int_{F_i} \nabla^k f : (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_0)^k\, dS, \tag{6.6}$$

其中，$\boldsymbol{x}_i \in F_i$ 是面上的任意一点。

6.1. 体积计算。多面体 T 的体积（或 n维测度），记作 $|T|$，可通过在公式 (6.4) 中令 $f(\boldsymbol{x}) = 1$ 精确计算。由于 f 为常数，$\nabla f = \mathbf{0}$，且余项 E_1 消失。因此，体积为：

$$|T| = \int_T 1 \, dT = \frac{1}{n} \int_{\partial T} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0) \cdot \boldsymbol{n} \, dS. \tag{6.7}$$

将 (6.6) 应用于 (6.7) 中的曲面积分，其中 $k = 0$，得到：

$$|T| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{F} (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{z}_0) \cdot \boldsymbol{n}_i |F_i|, \tag{6.8}$$

其中，$\boldsymbol{x}_i \in F_i$ 是面上的任意一点，$|F_i|$ 是面 F_i 的 $(n-1)$ 维测度。若选择 $\boldsymbol{z}_0$ 使其位于包含一个或多个面的超平面上，则求和中的相应项为零，从而进一步简化计算。

6.2. 质心计算。多胞体 T 的质心（或形心）$\bar{\boldsymbol{x}}_T$ 定义为：

$$\bar{\boldsymbol{x}}_T = \frac{1}{|T|} \int_T \boldsymbol{x} \, dT. \tag{6.9}$$

为计算坐标函数 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ 的积分，我们注意到 $\nabla \boldsymbol{x} = \mathbb{I}$，其中 $\mathbb{I}$ 是 $n \times n$ 恒等张量。将 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ 代入恒等式 (6.4)，并考虑余项 (6.5)，得到：

$$\int_T \boldsymbol{x} \, dT = \frac{1}{n} \int_{\partial T} \boldsymbol{x} \left[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0) \cdot \boldsymbol{n} \right] \, dS - \frac{1}{n} \int_T \mathbb{I} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0) \, dT. \tag{6.10}$$

展开余项（最后一个积分），得到：

$$\int_T \boldsymbol{x} \, dT = \frac{1}{n} \int_{\partial T} \boldsymbol{x} \left[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0) \cdot \boldsymbol{n} \right] \, dS - \frac{1}{n} \int_T \boldsymbol{x} \, dT + \frac{1}{n} \int_T \boldsymbol{z}_0 \, dT. \tag{6.11}$$

重新整理各项，并注意到 $\int_T \boldsymbol{z}_0 \, dT = \boldsymbol{z}_0 |T|$，我们得到如下

g

形心的边界积分公式：

$$\bar{\boldsymbol{x}}_T = \frac{1}{(n+1)|T|} \left(\int_{\partial T} \boldsymbol{x} \left[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0) \cdot \boldsymbol{n} \right] \, dS + \boldsymbol{z}_0 |T| \right). \tag{6.12}$$

令 $\boldsymbol{z}_0 = \mathbf{0}$，可简化为：

$$\bar{\boldsymbol{x}}_T = \frac{1}{(n+1)|T|} \int_{\partial T} \boldsymbol{x} (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n}) \, dS. \tag{6.13}$$

注意到，标量积 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n}$ 在每个平坦面 F_i上都是常数。因此，我们可以将其从每个面的积分中提出：

$$\bar{\boldsymbol{x}}_T = \frac{1}{(n+1)|T|} \sum_{i=1}^{F} (\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{n}_i) \int_{F_i} \boldsymbol{x} \, dS, \tag{6.14}$$

其中， $\boldsymbol{x}_i$ 是 F_i上的任意一点。设 $\boldsymbol{x}_{F_i}$ 为面 $F_i \subset \partial T$的重心，其定义满足 $\int_{F_i} \boldsymbol{x}\, dS = |F_i|\boldsymbol{x}_{F_i}$。于是，质心公式可写为：

$$\bar{\boldsymbol{x}}_T = \frac{1}{(n+1)|T|} \sum_{i=1}^{F} (\boldsymbol{x}_{F_i} \cdot \boldsymbol{n}_i) \boldsymbol{x}_{F_i} |F_i|. \tag{6.15}$$

该公式仅通过 $(n-1)$ 维边界数据即可确定 n 维质心，这与前几节提出的降维策略一致。

6.3. 多项式积分。当 $f(\boldsymbol{x})$ 为多项式时，数值积分公式 (6.2) 尤为强大。设 $f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0)^\alpha$ 为一个次数为 $|\alpha|$ 的多元单项式。根据欧拉齐次函数定理，我们注意到 $\nabla f \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0) = |\alpha| f(\boldsymbol{x})$。将其代入 (6.4) 中的 I_1，并计入余项 (6.5)，可得：

$$\int_T (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0)^\alpha \, dT = \frac{1}{n} \int_{\partial T} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0)^\alpha \left[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0) \cdot \boldsymbol{n} \right] \, dS - \frac{|\alpha|}{n} \int_T (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0)^\alpha \, dT. \tag{6.16}$$

将体积分项移至等式左侧，得到：

$$\int_T (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0)^\alpha \, dT = \frac{1}{n + |\alpha|} \int_{\partial T} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0)^\alpha \left[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0) \cdot \boldsymbol{n} \right] \, dS.$$

同样，注意到 $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0) \cdot \boldsymbol{n}$ 在每个面 F_i上均为常数，因此有：

$$\int_T (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0)^\alpha \, dT = \frac{1}{n + |\alpha|} \sum_{i=1}^{F} \left[(\boldsymbol{x}_{F_i} - \boldsymbol{z}_0) \cdot \boldsymbol{n}_i \right] \int_{F_i} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0)^\alpha \, dS. \tag{6.17}$$

这一恒等式表明，次数为 $|\alpha|$的多项式的体积分可化为同次数边界积分之和。递归应用这一结果，对 n维多胞体 T 上的积分最终可化为在各顶点（0 维边界）处求值。

6.4. 高维递归梯形法则。利用 (6.4) 中的最低阶近似 I_1，我们可以推导出一种系统的数值求积方法。注意，对于任意线性函数 f，若将 $\boldsymbol{z}_0$选为多胞体 T的形心 $\bar{\boldsymbol{x}}_T$，则 (6.5) 中的余项 E_1 为零。因此，最低阶近似 I_1 更适合表示为：

$$\int_T f(\boldsymbol{x}) \, dT \approx J_1 := \frac{1}{n} \int_{\partial T} f(\boldsymbol{x}) \left[(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}_T) \cdot \boldsymbol{n} \right] \, dS, \tag{6.18}$$

其对应的余项为：

$$E_1 = -\frac{1}{n} \int_T \nabla f \cdot (\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}_T) \, dT. \tag{6.19}$$

使用每个面重心处的函数值 $F_i \subset \partial T$ 近似边界积分 $\boldsymbol{x}_{F_i}$ 可得：

$$\int_T f(\boldsymbol{x}) \, dT \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{F} |F_i| f(\boldsymbol{x}_{F_i}) [(\boldsymbol{x}_{F_i} - \bar{\boldsymbol{x}}_T) \cdot \boldsymbol{n}_i]. \tag{6.20}$$

这种公式可解释为多维梯形求积公式。

为提高精度，可以应用式 (6.2) 中的高阶项。T he 多胞体上的一般 k 阶梯形法则框架包括：

1. 将边界 ∂T 分解为 $(n-1)$ 维面片。 2. 对每个面片应用基于曲面的泛函展开 (5.10)。 3. 递归降低维数，直到将底层积分表示为 m 维面 $(0 \le m < n)$ 的几何质心处函数值（及导数）的加权和。

这种方法自然地遵循多面体几何，并避免对区域 T 进行复杂的内部三角剖分（例如四面体剖分）。

6.5. 平坦曲面上的积分。 通过对每个平坦曲面 F_i 应用泛函展开 (5.10)，可以进一步简化式 (6.6) 中的曲面积分 F_i 。

考虑一个一般的 m 维平坦曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$（其中 $m \le n$），并令 $\tilde{\phi}$ 是通过仿射映射 (5.3) 定义在 Σ 上的光滑曲面函数。例如，在 (6.6) 的语境中，函数 ϕ 对应于 $\phi = \nabla^k f\colon (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_0)^k$ 在曲面 F_i 上的限制。

任取给定的参考点 $\boldsymbol{x}_0 \in \Sigma$。对等式两边在参考域 Σ_s 上积分，得到：

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_s} \frac{\tilde{\phi}(\boldsymbol{s})}{(m-1)!}\, d\Sigma_s &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+m)!} \int_{\Sigma_s} \nabla_s \cdot \left(\boldsymbol{s} \nabla_x^k \phi : (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^k\right)\, d\Sigma_s \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+m)!} \int_{\partial\Sigma_s} \left(\nabla_x^k \phi : (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^k\right) \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{n}_s \, d(\partial\Sigma_s),\end{aligned} \tag{6.21}$$

其中，$\boldsymbol{n}_s$ 表示 $\partial\Sigma_s$上的单位外法向量。

公式 (6.21) 直接由曲面散度定理得到，该定理将 Σ_s 上的曲面散度积分转化为 $\partial\Sigma_s$上的边界积分。这一变换将 ϕ 的曲面积分表示为一系列边界贡献项，其中涉及张量导数 $\nabla_x^k \phi$ 和几何矩 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^k$。这种表示通常能简化计算，特别是在边界$\partial\Sigma_s$ 具有简单几何结构时，例如多边形或多面体情形。本小节余下部分将致力于简化以下边界积分：

$$\int_{\partial\Sigma_s} \left(\nabla_x^k \phi : (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^k\right) \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{n}_s \, d(\partial\Sigma_s).$$

回顾从 Σ_s 到 Σ 的仿射映射：

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 = A\boldsymbol{s} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{s} = (A^\top A)^{-1} A^\top (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0), \tag{6.22}$$

将其代入 (6.21) 得：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(m-1)!} \int_{\Sigma_s} \tilde{\phi}(\boldsymbol{s})\, d\Sigma_s \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+m)!} \int_{\partial\Sigma_s} \left(\nabla_x^k \phi : (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^k\right) (A^\top A)^{-1} A^\top (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{n}_s \, d(\partial\Sigma_s).\end{aligned} \tag{6.23}$$

为简化记号，我们只保留级数的第一项或前两项：

$$\int_{\Sigma_s} \tilde{\phi}(\boldsymbol{s})\, d\Sigma_s = \frac{(m-1)!}{m!} \int_{\partial\Sigma_s} \phi \left[(A^\top A)^{-1} A^\top (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{n}_s\right]\, d(\partial\Sigma_s) + \cdots \tag{6.24}$$

现在，我们将式 (6.24) 中的积分映射回 Σ。利用仿射变换 (6.22) 和变量替换公式，可得：

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma}\phi\,d\Sigma &= \frac{1}{m}\frac{|\Sigma|}{|\Sigma_s|}\int_{\partial\Sigma}\phi\left[(A^{\top}A)^{-1}A^{\top}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{n}_s\right]\frac{|\partial\Sigma_s|}{|\partial\Sigma|}\,d(\partial\Sigma)+\cdots\\ &= \frac{1}{m}\frac{|\Sigma|}{|\Sigma_s|}\int_{\partial\Sigma}\phi\left[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\left(A(A^{\top}A)^{-1}\boldsymbol{n}_s\right)\right]\frac{|\partial\Sigma_s|}{|\partial\Sigma|}\,d(\partial\Sigma)+\cdots\end{aligned}\tag{6.25}$$

THEOREM 6.1. 令 Σ 为 Σ_s 在由 A定义的仿射映射下的像。以下几何恒等式成立：

$$\frac{|\Sigma|}{|\Sigma_s|}=\sqrt{\det(A^{\top}A)},\tag{6.26}$$

并且在 $\partial\Sigma$的每个平坦部分上，向量

$$\boldsymbol{n}_x = A(A^{\top}A)^{-1}\boldsymbol{n}_s\frac{|\partial\Sigma_s|}{|\partial\Sigma|}\frac{|\Sigma|}{|\Sigma_s|}\tag{6.27}$$

是一个单位向量，在 Σ上 $\partial\Sigma$ 处指向外法向（见图 *5.1*）。

将结果（6.27）代入展开式（6.25）后，积分可化简为：（6.28）

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma}\frac{\phi}{(m-1)!}\,d\Sigma = \frac{1}{m!}&\int_{\partial\Sigma}\phi\left[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{n}_x\right]\,d(\partial\Sigma)\\ &-\frac{1}{(m+1)!}\int_{\partial\Sigma}\left(\nabla_x\phi:(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\right)\left[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{n}_x\right]\,d(\partial\Sigma)\\ &+\frac{1}{(m+2)!}\int_{\partial\Sigma}\left(\nabla_x^2\phi:(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^2\right)\left[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{n}_x\right]\,d(\partial\Sigma)+\cdots\end{aligned}$$

注意，标量$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{n}_x$ 在$\partial\Sigma$的每个平坦部分上保持不变。

展开式（6.28）为构造曲面积分的数值求积公式奠定了理论基础。这类公式可以通过对 $\partial\Sigma$的每个平坦面进行数值积分来构造，也可以递归地将积分化简为 $\partial\Sigma$的边界，依此类推。对于在高维空间中构造的问题，后一种策略尤其有效。更多分析细节和实现方面的内容将在其他地方报告。

7. m**维平行多面体的体积**。设 $n\geq m\geq 1$。给定 m线性无关向量

$$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_m\in\mathbb{R}^n,$$

以及基点（顶点）$\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^n$，由这些向量生成的 m维平行多面体定义如下：

$$P_m := \left\{\mathbf{x}_0+\sum_{i=1}^{m}s_i\mathbf{v}_i:\ 0\leq s_i\leq 1,\ \forall i=1,\ldots,m\right\}.\tag{7.1}$$

从几何上看，点$\mathbf{x}_0$ 是 P_m的一个顶点，而向量 $\{\mathbf{v}_i\}$ 表示从$\mathbf{x}_0$出发的棱。 P_m 的形状是一个位于以下仿射子空间中的 m维“盒子”：

$$\mathbf{x}_0+\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_m\}.$$

THEOREM 7.1. 设 P_m 为由(7.1)定义的 m维平行多面体，并设

$$A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m]$$

设为列向量由生成向量组成的 $n\times m$ 矩阵。那么， m维体积为：

$$\mathrm{Vol}_m(P_m) = \sqrt{\det(A^\top A)}.$$

因此，恒等式(6.26) 成立。

证明。不失一般性，假设$\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$。令 $\mathbb{V}_m =$为$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$}张成的空间，并令 $\mathbb{V}_m^\perp$ 为其在 $\mathbb{R}^n$中的正交补。选取$\mathbb{V}_m^\perp$的一组正交归一基，记为 $\{\mathbf{v}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$。

使用完整的向量组构造一个辅助的 n维平行多面体 P_n ：

$$P_n := \left\{ \sum_{i=1}^n s_i \mathbf{v}_i : \ 0 \le s_i \le 1, \ \forall i = 1, \dots, n \right\}. \tag{7.2}$$

由于附加向量 $\{\mathbf{v}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$ 是正交归一的，且与 $\mathbb{V}_m$正交，因此它们在正交方向上的长度均为单位长度。因此：

$$\mathrm{Vol}_n(P_n) = \mathrm{Vol}_m(P_m). \tag{7.3}$$

~令 $A = [A, \mathbf{v}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_n]$ 为表示从单位超立方体 $[0,1]^n$ 到 P_n的线性映射的 $n \times n$ 矩阵。体积由行列式给出：

$$\mathrm{Vol}_n(P_n) = |\det(\tilde{A})| = \sqrt{\det(\tilde{A}^\top \tilde{A})}. \tag{7.4}$$

显式计算乘积 $\tilde{A}^\top \tilde{A}$ ：

$$\tilde{A}^\top \tilde{A} = \begin{bmatrix} A^\top \\ [\mathbf{v}_{m+1} \dots \mathbf{v}_n]^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & [\mathbf{v}_{m+1} \dots \mathbf{v}_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^\top A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-m} \end{bmatrix}.$$

由此可得 $\det(\tilde{A}^\top \tilde{A}) = \det(A^\top A) \cdot \det(I_{n-m}) = \det(A^\top A)$。结合 (7.3) 和 (7.4)，证明得证。 □

8. 法向量的变换。设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ 是一个由仿射映射 $F\colon \Sigma_s \to \Sigma$ 定义的 m 维多胞体：

$$\mathbf{x} = F(\mathbf{s}) = \mathbf{x}_0 + \sum_{j=1}^m s_j \mathbf{v}_j, \quad \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_m) \in \Sigma_s,$$

其中， $\Sigma_s \subset \mathbb{R}^m$ 是参数空间 $\mathbb{R}^m$ 中的一个正多胞体。

本节的目标是验证几何恒等式 (6.27)。具体而言，我们证明该向量

$$\mathbf{n}_x = A(A^\top A)^{-1} \mathbf{n}_s \frac{|\partial \Sigma_s|}{|\partial \Sigma|} \frac{|\Sigma|}{|\Sigma_s|} \tag{8.1}$$

是 $\partial\Sigma$ 在 Σ 的仿射子空间中的单位外法向量。利用体积公式 (6.26)，可将其改写为：

$$\mathbf{n}_x = \alpha A(A^\top A)^{-1}\mathbf{n}_s, \quad \text{where } \alpha = \frac{|\partial\Sigma_s|}{|\partial\Sigma|}\sqrt{\det(A^\top A)}. \tag{8.2}$$

LEMMA 8.1. 在边界 $\partial\Sigma$ 上，式 (8.2) 中定义的向量 $\mathbf{n}_x$ 是 Σ 的外法向量。

证明。由于 $\mathbf{n}_x$ 位于 A 的列空间中，因此它也位于平坦曲面 Σ 的切空间中。我们需要检验它是否与边界 $\partial\Sigma$ 正交。

设 $\mathbf{n}_s$ 是 $\mathbf{s}^* \in \partial\Sigma_s$ 处的单位外法向量，并设 $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_0 + A\mathbf{s}^*$。对于与 $\mathbf{x}^*$ 位于同一平坦面上的任意点 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + A\mathbf{s} \in \partial\Sigma$，其点积为：

$$(\mathbf{n}_x, \mathbf{x} - \mathbf{x}^*) = \alpha\left(A(A^\top A)^{-1}\mathbf{n}_s\right) \cdot (A(\mathbf{s} - \mathbf{s}^*)).$$

利用性质 $(\mathbf{u}\ A\mathbf{v}) = (A^\top\mathbf{u}, \mathbf{v})$，可得：

$$(\mathbf{n}_x, \mathbf{x} - \mathbf{x}^*) = \alpha\left((A^\top A)^{-1}\mathbf{n}_s\right)^\top (A^\top A)(\mathbf{s} - \mathbf{s}^*) = \alpha\mathbf{n}_s \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{s}^*) = 0,$$

因为 $\mathbf{n}_s \perp (\mathbf{s} - \mathbf{s}^*)$。因此，$\mathbf{n}_x$ 与边界正交。此外，对于内部点 $\mathbf{s}_{\text{in}}$，有 $\mathbf{n}_s \cdot (\mathbf{s}_{\text{in}} - \mathbf{s}^*) \leq 0$，这意味着 $(\mathbf{n}_x, \mathbf{x}_{\text{in}} - \mathbf{x}^*) = \alpha(\mathbf{n}_s, \mathbf{s}_{\text{in}} - \mathbf{s}^*) \leq 0$。因此，$\mathbf{n}_x$ 指向外侧。□

为确保$\mathbf{n}_x$ 是单位向量（即，$\|\mathbf{n}_x\|^2 = 1$），缩放因子必须满足：

$$\frac{|\partial\Sigma|^2}{|\partial\Sigma_s|^2} = \det(A^\top A)\left((A^\top A)^{-1}\mathbf{n}_s, \mathbf{n}_s\right). \tag{8.3}$$

利用恒等式 $\det(M)M^{-1} = \text{Cof}(M)^\top$ 以及 $A^\top A$的对称性，这等价于：

$$\frac{|\partial\Sigma|^2}{|\partial\Sigma_s|^2} = \left(\text{Cof}(A^\top A)\mathbf{n}_s, \mathbf{n}_s\right). \tag{8.4}$$

THEOREM 8.2. 恒等式(8.3)（等价地，(8.4)）对多胞体的任意平坦面均成立。

证明。设 $\sigma_s \subset \partial\Sigma_s$ 是参数空间边界上的一个平坦面，并设 $\sigma \subset \partial\Sigma$ 是其在 $\mathbb{R}^n$中的对应像。选取一个固定点$\mathbf{s}_\sigma \in \sigma_s$。

我们为 $\mathbb{R}^m$ 构造一个特定的基，以简化行列式计算。首先，为平坦面 σ_s的切空间选取一个标准正交基：

$$\{\boldsymbol{\phi}_1, \ldots, \boldsymbol{\phi}_{m-1}\}.$$

我们引入一个特定的向量 $\boldsymbol{\phi}_m$ 来扩充这一组向量，其定义为：

$$\boldsymbol{\phi}_m = \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{n}_s^\top\boldsymbol{\beta}}, \quad \text{where } \boldsymbol{\beta} = (A^\top A)^{-1}\mathbf{n}_s.$$

注意，由于 $\mathbf{n}_s$ 是面 σ_s的单位法向量，因此它与所有切向量 $\boldsymbol{\phi}_1, \ldots, \boldsymbol{\phi}_{m-1}$正交。我们可以沿此法向方向分解 $\boldsymbol{\phi}_m$：

$$\boldsymbol{\phi}_m = \mathbf{n}_s + \boldsymbol{\beta}_\tau, \quad \text{where } \boldsymbol{\beta}_\tau \in \text{span}\{\boldsymbol{\phi}_1, \ldots, \boldsymbol{\phi}_{m-1}\}. \tag{8.5}$$

$\mathbf{n}_s$ 的系数恰好为 1，因为 $\mathbf{n}_s^\top \boldsymbol{\phi}_m = (\mathbf{n}_s^\top \boldsymbol{\beta})/(\mathbf{n}_s^\top \boldsymbol{\beta}) = 1$。因此，平方范数为：

$$\|\boldsymbol{\phi}_m\|^2 = \|\mathbf{n}_s\|^2 + \|\boldsymbol{\beta}_\tau\|^2 = 1 + \|\boldsymbol{\beta}_\tau\|^2. \tag{8.6}$$

现在，令 B 为 $m \times m$ 换基矩阵：

$$B = [B_{m-1}, \boldsymbol{\phi}_m], \quad \text{where } B_{m-1} = [\boldsymbol{\phi}_1, \ldots, \boldsymbol{\phi}_{m-1}].$$

~仿射映射 $\mathbf{s} \mapsto \mathbf{s}_\sigma + B$~$\mathbf{s}$ 将多胞体 Σ_s 变换为另一个多胞体 Σ_s,~并相应地将 $\sigma_s \subset \partial\Sigma_s$ 映射到 $\tilde{\sigma}_s \subset \partial\Sigma_s$。对于任意 $\mathbf{s} \in \sigma_s$，向量 $\mathbf{s} - \mathbf{s}_\sigma$ 与平坦面 σ_s相切，因此 $\mathbf{s} - \mathbf{s}_\sigma = \sum_{j=1}^{m-1} t_j \boldsymbol{\phi}_j$。由此可得 $|\sigma_s| = |\tilde{\sigma}_s|$；也就是说，该映射保持面 σ_s的（$m-1$）维测度。

现在，我们通过分析 $B^\top B$来计算 B 的行列式：

$$B^\top B = \begin{bmatrix} B_{m-1}^\top \\ \boldsymbol{\phi}_m^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{m-1} & \boldsymbol{\phi}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m-1} & B_{m-1}^\top \boldsymbol{\phi}_m \\ \boldsymbol{\phi}_m^\top B_{m-1} & \|\boldsymbol{\phi}_m\|^2 \end{bmatrix}. \tag{8.7}$$

为了将该矩阵对角化，我们引入下三角消元矩阵 L：

$$L = \begin{bmatrix} I_{m-1} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\phi}_m^\top B_{m-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

将 L 乘以 $B^\top B$，通过行变换消去左下块：

$$L(B^\top B) = \begin{bmatrix} I_{m-1} & B_{m-1}^\top \boldsymbol{\phi}_m \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\phi}_m^\top B_{m-1} B_{m-1}^\top \boldsymbol{\phi}_m + \|\boldsymbol{\phi}_m\|^2 \end{bmatrix}.$$

我们化简右下角的标量项。利用分解 (8.5)，可得 $B_{m-1}^\top \boldsymbol{\phi}_m = B_{m-1}^\top (\mathbf{n}_s + \boldsymbol{\beta}_\tau) = B_{m-1}^\top \boldsymbol{\beta}_\tau$。由于 $\boldsymbol{\beta}_\tau$属于 B_{m-1} 的列所张成的空间，且 B_{m-1} 的列是正交归一的，因此投影保持长度不变：

$$\boldsymbol{\phi}_m^\top B_{m-1} B_{m-1}^\top \boldsymbol{\phi}_m = \|B_{m-1}^\top \boldsymbol{\beta}_\tau\|^2 = \|\boldsymbol{\beta}_\tau\|^2.$$

将此结果和 (8.6) 代入矩阵表达式：

$$-\|\boldsymbol{\beta}_\tau\|^2 + (1 + \|\boldsymbol{\beta}_\tau\|^2) = 1.$$

因此，该矩阵化简为对角线上为 1 的上三角形式：

$$L(B^\top B) = \begin{bmatrix} I_{m-1} & B_{m-1}^\top \boldsymbol{\phi}_m \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} =: U.$$

由于 $\det(L) = 1$ 且 $\det(U) = 1$，我们得出 $\det(B^\top B) = 1$，因此$|\det(B)| = 1$。

最后，A考虑组合变换矩阵 $\tilde{A}$，利用行列式的乘积法则：

$$\det(\tilde{A}^\top \tilde{A}) = \det(B^\top A^\top A B) = \det(A^\top A) |\det(B)|^2 = \det(A^\top A).$$

~或者，我们可以使用列分块将 A 写为：

$$\tilde{A} = [A B_{m-1},\ A\boldsymbol{\phi}_m] = [Q,\ A\boldsymbol{\phi}_m].$$

这里， $Q = AB_{m-1}$ 是将参数面 σ_s 映射到物理面σ 的矩阵。因此，$\det(Q^\top Q)$ 表示面积之比的平方：

$$\frac{|\sigma|^2}{|\sigma_s|^2} = \det(Q^\top Q).$$

计算 $\tilde{A}^\top \tilde{A}$ 关于 Q 的表达式：

$$\tilde{A}^\top \tilde{A} = \begin{bmatrix} Q^\top Q & 0 \\ 0 & (A\boldsymbol{\phi}_m)^\top (A\boldsymbol{\phi}_m) \end{bmatrix}.$$

根据我们对 $\boldsymbol{\phi}_m$ 的选择，最后一列 $A\boldsymbol{\phi}_m$ 与 Q 的各列（即 Σ的切向量）正交。这种分块对角结构意味着：

$$\det(\tilde{A}^\top \tilde{A}) = \det(Q^\top Q) \cdot (\boldsymbol{\phi}_m^\top A^\top A \boldsymbol{\phi}_m).$$

代入 $\boldsymbol{\phi}_m = \frac{(A^\top A)^{-1}\mathbf{n}_s}{\mathbf{n}_s^\top (A^\top A)^{-1}\mathbf{n}_s}$ 后，标量项可简化为：

$$\boldsymbol{\phi}_m^\top A^\top A \boldsymbol{\phi}_m = \frac{1}{\mathbf{n}_s^\top (A^\top A)^{-1}\mathbf{n}_s}.$$

令 $\det(\tilde{A}^\top \tilde{A})$ 的两个表达式相等：

$$\det(A^\top A) = \det(Q^\top Q) \frac{1}{\mathbf{n}_s^\top (A^\top A)^{-1}\mathbf{n}_s}.$$

整理后解出面积比 $\det(Q^\top Q)$，得到所需结果：

$$\frac{|\sigma|^2}{|\sigma_s|^2} = \det(A^\top A)\left(\mathbf{n}_s^\top (A^\top A)^{-1}\mathbf{n}_s\right),$$

由此得到（8.3）。定理证明完毕。 □

我们通过图 5.1 所示的平坦面 Σ 来说明式 (8.4) 的有效性。考虑 Σ 的边界上的线段 A_1A_4，其端点为

$$A_1 = \boldsymbol{x}_0 + \mathbf{v}_1 s_{11} + \mathbf{v}_2 s_{12}, \quad A_4 = \boldsymbol{x}_0 + \mathbf{v}_1 s_{21} + \mathbf{v}_2 s_{22}.$$

由此可得

$$A_4 - A_1 = \mathbf{v}_1 s_1^* + \mathbf{v}_2 s_2^*,\ s_1^* = s_{21} - s_{11},\ s_2^* = s_{22} - s_{12}.$$

$\boldsymbol{s}$ 空间中对应的边 A_1A_4 的单位法向量 $\boldsymbol{n}_s$ 为

$$\boldsymbol{n}_s = (s_2^*, -s_1^*)^\top / \sqrt{(s_1^*)^2 + (s_2^*)^2}.$$

在边 A_1A_4 上，容易得到

$$\begin{aligned} \frac{|\partial\Sigma|^2}{|\partial\Sigma_s|^2} =& \frac{\|A_4 - A_1\|^2}{(s_1^*)^2 + (s_2^*)^2} \\ =& \frac{\|\mathbf{v}_1\|^2 (s_1^*)^2 + 2 s_1^* s_2^* \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 (s_2^*)^2}{(s_1^*)^2 + (s_2^*)^2} \\ =& (\mathrm{Cof}(A^\top A)\boldsymbol{n}_s, \boldsymbol{n}_s), \end{aligned} \tag{8.8}$$

从而在这一特殊情形下验证了(8.4)。

参考文献

[1] Eric B Chin和N Sukumar。在多胞体与曲面立体上对多项式进行积分的高效方法。 *Computer Aided Geometric Design*，82:101914，2020年。[2] Jean B Lasserre。凸多胞体上的积分。 *Proceedings of the American Mathematical Society* 126 8 2433 2441, 1998 ，( ): – 。[3] Brian Mirtich。多面体质量属性的快速精确计算。 *Journal of Graphics Tools* 1 2 31 ，( ): –50，1996年。

[4] Alvise Sommariva和Marco Vianello。基于格林积分公式的多边形上的乘积高斯求积。 *BIT Numerical Mathematics*，47(2):441–453，2007年。[5] R Sudhakar和Wolfgang A Wall。任意凸/凹体积的求积方案以及富集单位分解方法中弱形式的积分。 *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 258 39 54, 2013 ，: – 。