arXiv:2602.01470v1 [quant-ph] 1 Feb 2026

系综空间适用哪种非加性积分?

Gabriele Carcassi[1][0000−0002−1071−6251]、
Christine A. Aidala[1][0000−0001−9540−4988]和
Tobias Thrien[1][0009−0005−9232−2617]

密歇根大学，美国密歇根州安娜堡，邮编48109
{carcassi, caidala, thrien}@umich.edu

摘要。 在此前的一项工作中，我们定义了一种非加性测度，可用于表示物理学中的经典态和量子态。我们进一步将这一想法拓展至一般的统计系综空间（即系综空间），使其与Choquet理论相联系。哪种非加性积分适合用于推广期望值的概念，这个问题仍未解决。本文表明，Sugeno积分和Choquet积分并不适用。

关键词： 系综空间 · Choquet理论 · Choquet积分。

1 引言

在先前的工作 [2]中，我们提出了用非加性测度来表示物理理论中的状态，以应对量子力学中概率的非柯尔莫哥洛夫性质 [4, 6–9, 11, 12]。这促使我们研究统计系综的一般理论，它可以作为任何物理理论（包括经典力学和量子力学）的共同基础理论。可以证明，系综空间是拓扑向量空间的有界凸子集，并且每个元素都可以由我们称为分数容量的非加性测度来表示。为了给出一些直观理解，在有限维情形下，这与Choquet理论联系得非常好，因为分数容量正是所有能够表示同一元素的测度的上确界。

何种正确的非加性积分概念能够恢复随机变量的期望值，仍是一个未决问题。在本文中，我们证明两种主要的标准积分，即菅野积分和Choquet积分，并不适用于我们的目的。最终目标是与非加性测度/模糊测度领域的专家交流，以找出何种积分确实适用。

2 Choquet理论与分数容量

为简化问题，我们假设系综空间 $\mathcal{E}$ 是有限维向量空间的一个紧凸子集。如图 1 所示，我们主要研究的两类系综是具有有限样本空间的经典概率测度空间（即一个 $\mathcal{E}$ 维单纯形），以及

量子纯态与混合态空间（即 n 维量子系统的密度矩阵集合）。这一假设有些限制性，因为经典力学是无限维的，但对我们的目的而言已经足够。

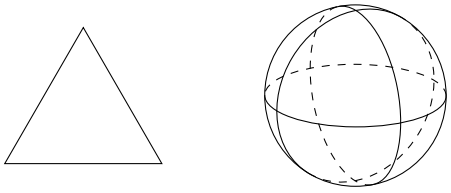

图 1：由三个元素组成的经典离散系综空间（一个三角形）和二维量子系综空间（一个球体）的示例。

给定一个元素 $\mathsf{e} \in \mathcal{E}$，$A \subseteq \mathcal{E}$ 相对于 e 的**分数容量** 定义为

$$\mathrm{fcap}_{\mathsf{e}}(A) = \sup(\{p \in [0,1] \mid \exists\, \mathsf{a} \in A, \mathsf{b} \in \mathcal{E} \text{ s.t. } \mathsf{e} = p\mathsf{a} + \bar{p}\mathsf{b}\}), \tag{1}$$

它返回 e 中能够表示为 A 中元素的凸组合的最大部分。这是一个单调、次可加且从下连续的集合函数；其在 X（即纯系综）上的限制 $\mathrm{fcap}_{\mathsf{e}}|_X$ 唯一确定给定的 e。

请注意，由于我们假设 $\mathcal{E}$ 是紧且凸的，Choquet理论适用。在这种情况下，分数容量就是所有表示 e 的可能概率测度的上确界。值得注意的是，分数容量当且仅当 e 仅由一个概率测度表示时才具有可加性，这意味着$\mathcal{E}$ 是一个单纯形。这为根据容量的可加性来刻画经典概率空间提供了一种简单直观的方法。

3 推广期望

统计变量**统计变量**是一个仿射函数 $F : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$，因为它会为每个系综返回期望值。在经典情形下，由于 $\mathrm{fcap}_{\mathsf{e}}|_X$ 具有可加性，我们只需令

$$E[F \mid \mathsf{e}] = F(\mathsf{e}) = \int_X F(x) d\mathrm{fcap}_{\mathsf{e}}|_X. \tag{2}$$

因此，目标是找到一个非加性积分 $(E)\int_X$，使得

$$E[F \mid \mathsf{e}] = F(\mathsf{e}) = (E)\int_X F(x) d\mathrm{fcap}_{\mathsf{e}}|_X \tag{3}$$

在经典（可加）情形下，它会化为黎曼积分。该积分别只取决于 F 和 $\mathrm{fcap}_{\mathsf{e}}|_X$ 的取值，但由于这些取值唯一地

确定了 F 和 e，因此可以将该积分理解为从 F 和 e 到 F(e) 的映射，而且该映射是良定义的。因此，原则上这个积分应该存在。

4 Sugeno 积分和 Choquet积分的不适用性

由于非加性测度和积分存在不同的概念 [3, 5, 10, 13],，我们的第一步是考察最常见的两种非加性积分——Sugeno 积分和Choquet积分——是否适用。

当容量具有可加性（即为经典情形）时，Sugeno 积分无法还原 Lebesgue 积分，因此很快被排除。Choquet积分可以做到这一点，所以它在经典情形下有效。然而，在量子情形下它并不适用。我们可以通过计算二态量子系统的 Choquet积分来证明这一点，并看到它无法还原相应系综空间中统计变量的期望值。

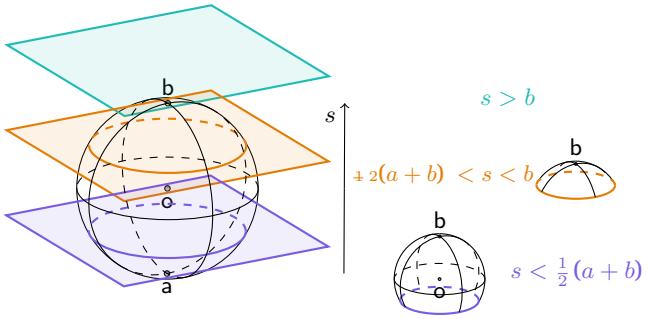

图2：Choquet积分的计算中，统计变量大于 s 的所有纯态的集合 $A(s)$。左侧为带有恒定 s 平面的布洛赫球。右侧从上到下依次为：数值大于最大值（空集）；数值介于目标点 o 与最大值之间；数值低于目标点。

二态量子系统的系综空间 $\mathcal{E}$ 是布洛赫球。纯态，即极点，位于表面 X ，内部点对应于混合态。中心点o是最大混合态。由于o总可以由两个相对点（即两个正交态）的等量混合得到，每个极点单点集的分数容量 ψ 为fcap$_o$($\{\psi\}$) $= \frac{1}{2}$。统计变量 F （即量子可观测量）是系综空间上的仿射函数。这意味着表面上两个相对点a和b（即本征态）将取最小值和最大值 $a = F$(a)与 $b = F$(b)。为简单起见，我们可以把a和b想象为垂直轴的极点，并假设 $0 < a < b$。

Choquet积分定义为

$$(C)\int F d\mathrm{fcap}_{\mathsf{o}} := \int_{-\infty}^{0} \left(\mathrm{fcap}_{\mathsf{o}}(\{x|F(x) \geq s\}) - \mathrm{fcap}_{\mathsf{o}}(X)\right) ds + \int_{0}^{\infty} \mathrm{fcap}_{\mathsf{o}}(\{x|F(x) \geq s\})\, ds. \tag{4}$$

集合 $A(s) = \{x|F(x) \geq s\}$ 对应于 X（球面）上的所有点，这些点的 F 值大于给定的 s。由于 F 是仿射函数，这对应于给定高度以上的点集。因此，计算积分所需做的就是计算底部在所有可能位置被截去的球面的分数容量 $A(s)$。见图 2。

如果 $s \leq \frac{1}{2}F(\mathsf{a}) + \frac{1}{2}F(\mathsf{b})$，我们在中点或更低处切开球面。这意味着 $A(s)$ 将包含两个相对的点。由于 o 可以表示为两个相对点的混合，o 属于 $A(s)$的凸包，因此 $\mathrm{fcap}_{\mathsf{o}}(A(s)) = 1$。反过来，如果 $s > F(\mathsf{b})$，$A(s) = \emptyset$，这意味着 $\mathrm{fcap}_{\mathsf{o}}(A(s)) = 0$。那么，非平凡的情况是 $\frac{1}{2}F(\mathsf{a}) + \frac{1}{2}F(\mathsf{b}) < s \leq F(\mathsf{b})$。

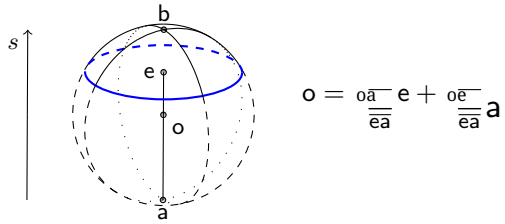

图 3：当 $\frac{1}{2}F(\mathsf{a}) + \frac{1}{2}F(\mathsf{b}) < s \leq F(\mathsf{b})$ 时，$A(s)$ 中含 o 比例最大的元素 e 的几何表示。

在这种情况下，$A(s)$ 的凸包是顶部球冠。我们需要考虑所有可能的凸组合 $\mathsf{o} = p\mathsf{e} + \bar{p}\mathsf{c}$，其中 $\mathsf{e} \in A(s)$ 位于球冠内而 c 不在其中，并找出 p 最大的那个。由于沿同一方向的组合中，当 e 越靠近 o 且 c 越远离时，p 会增大，因此 c 将是下半球上的一个极点，而 e 将位于常数 s 处的圆盘上，即球冠的下侧。还需注意，所有极点到 o 的距离相同，因此，为了最大化 p，我们只需最小化 o 与 e 之间的距离。因此，e 必须是垂直轴与圆盘的交点，而 c 将与 a 重合，如图3所示。系数 p 将由距离 oa 与 ea 之比给出。由于 F 是仿射泛函，我们有

$$\frac{\overline{\mathsf{oa}}}{\overline{\mathsf{ea}}} = \frac{F(\mathsf{o}) - F(\mathsf{a})}{F(\mathsf{e}) - F(\mathsf{a})} = \frac{1}{2}\frac{b-a}{s-a}. \tag{5}$$

回顾一下，如图4所示，我们有

$$\mathrm{fcap}_{\mathsf{o}}(A(s)) = \begin{cases} 1 & \text{if } s \le \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}\frac{b-a}{s-a} & \text{if } \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b < s \le b \\ 0 & \text{if } s > b. \end{cases} \tag{6}$$

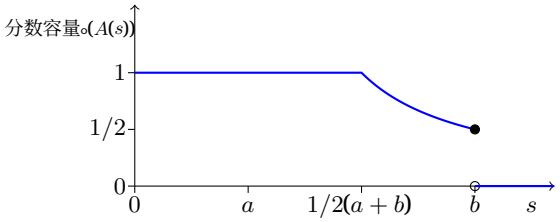

图4：被积函数 $\mathrm{fcap}_{\mathsf{o}}(A(s))$ 关于 s 的函数。

现在我们可以计算该积分

$$\begin{aligned}
(C)\int F d\mathrm{fcap}_{\mathsf{o}} &:= \int_{-\infty}^{0} \left(\mathrm{fcap}_{\mathsf{o}}(A(s)) - \mathrm{fcap}_{\mathsf{o}}(X)\right) ds + \int_{0}^{\infty} \mathrm{fcap}_{\mathsf{o}}(A(s))\, ds \\
&= \int_{-\infty}^{0} (1-1) ds + \int_{0}^{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b} 1 ds + \int_{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b}^{b} \frac{1}{2}\frac{b-a}{s-a} ds + \int_{b}^{\infty} 0 ds \\
&= [s]_{0}^{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b} + \frac{1}{2}(b-a)\left[\ln(s-a)\right]_{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b}^{b} \\
&= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}(b-a)\left[\ln(b-a) - \ln\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - a\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}(b-a)\ln(2)
\end{aligned} \tag{7}$$

注意，由于 o 是球心，$F \equiv \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \neq \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}(b-a)\ln(2)$。这意味着，相对于分数容量的统计变量的 Choquet积分无法恢复期望值。

5 结论

虽然通过纯态上的非加性概率测度来表示系综似乎有充分依据，但相应的非加性积分概念并不对应于最常用的那些。因此，我们欢迎非加性/模糊测度领域的专家给予指导。

致谢。 本文得以完成，得益于约翰·邓普顿基金会62847号资助的支持。它是研究计划物理学假设 [1], 的一部分，该计划旨在找出少数几条物理原理，从而可以严格推导出基本定律。插图由物理学假设提供。我们感谢Alexander Wilce、Vicenç Torra、Zuzana Ontkovičová和Michel Grabisch提供的有益指点和讨论。

利益披露。不存在利益冲突。

参考文献

1. G. Carcassi、C. A. Aidala：《物理学假设》。密歇根大学出版社（2021）。https://doi.org/10 12204707 2 3998 12204707, 10 3998 . /mpub. https://doi.org/ . /mpub. . G. Carcassi、C. A. Aidala：非加性测度在量子概率中的应用？《IPMU2024短篇论文集》，第 3–7 页（2024）。https://doi.org/10 15149423 3 5281. /zenodo. . 3. D. Denneberg：《非加性测度与积分》，第 27 卷。施普林格科学与商业媒体（1994） 4. A. M. Gleason：希尔伯特空间闭子空间上的测度。《数学与力学杂志》**6**(6)，885（1957） 5. M. Grabisch：《决策中的集合函数、博弈与容量》。施普林格国际出版公司，尚（2016）。https://doi.org/10.1007/978-3-319-30690- 2, 2 6 10 1007 978 3 319 30690 https://doi.org/ . / - - - - . 6. H. J. Groenewold：论初等量子力学的原理。施普林格（1946） 7. S. Gudder：量子测度与积分理论。《数学物理学杂志》**50**(12)（2009） 8. J. Hamhalter：量子测度理论，第 134 卷。施普林格多德雷赫特（2003）。https://doi.org/https://doi.org/10 8 9 1007 978 94 017 0119 . / - - - - . 9. J. E. Moyal：作为统计理论的量子力学。载于：《剑桥哲学学会数学论文集》，第 45 卷，第 99–124 页。剑桥大学出版社（1949） 10. E. Pap：非加性测度及相应积分的理论与应用。载于：V. Torra、Y. Narukawa、G. Navarro-Arribas、D. Megías（编）：人工智能决策建模。第 1–10 页。施普林格柏林海德堡，柏林、海德堡（2013） 11. R. D. Sorkin：作为量子测度理论的量子力学。《现代物理快报 A》**9**(33)，3119–3127（1994） 12. K. Svozil：扩展柯尔莫哥洛夫公理，以建立关于语境集合的广义概率论。《熵》**24**(9)，1285（2022） 13. V. Torra、Y. Narukawa、M. Sugeno：《非加性测度：理论与应用》。施普林格国际出版公司，第 1 版（2014）