Laver Ultrafilters

Silvan Horvath

数学系，苏黎世联邦理工学院，ETH Z¨urich，8092 Z¨urich，瑞士
silvan.horvath@math.ethz.ch

¨Tan
Ozalp
数学系，圣母大学，圣母镇，印第安纳州 46556，美国 aozalp@nd.edu

arXiv:2602.01478v1 [math.LO] 1 Feb 2026

摘要。我们引入了拉弗超滤子，即其所对应的 Laver 强迫具有拉弗性质的超滤子 $\mathcal{U}$。我们给出了这类超滤子的简单组合刻画，从而能够分析它们在若干经过深入研究的组合类中的位置，包括 P-点、快速超滤子，以及 Baumgartner 的 $\mathcal{I}$-超滤子框架中产生的超滤子。特别地，我们证明了拉弗超滤子类真包含快速 P-点类，并且真包含于遗传快速超滤子类和零测超滤子类。最后，我们研究了拉弗超滤子的（泛型）存在性，并建立了其泛型存在数的界。特别地，我们证明了这样一种情形是一致的：P-点不存在，而拉弗超滤子泛型存在。

关键词和短语：Laver 强迫、拉弗性质、超滤子、马丁公理、P 点、快速、泛型存在性、连续统的基数不变量、适当强迫、可数支撑迭代。

2020 年数学主题分类: 03E0503E1703E35

1 引言与预备知识

Laver 强迫起源于 Richard Laver 关于 Borel 猜想的一致性以及迭代强迫技术发展的开创性工作 [15]。此后，它已成为研究实数直线的集合论的基本工具。

Laver 强迫的关键特征之一是拉弗性质。这一性质之所以重要，是因为它对强迫所添加的实数提供了一定程度的控制——最显著的是，它阻止添加 Cohen 实数和随机实数。此外，拉弗性质在适当迫使概念的可数支撑迭代下得以保持。

Definition 1.1. 一个强迫概念 $\mathbb{P}$ 具有拉弗性质，如果以下条件成立：
假设 f 是 ω^ω 中某个元素的 $\mathbb{P}$-名，使得存在 $g \in \omega^\omega$ 满足 $\lrcorner \Vdash_{\mathbb{P}} \underset{\sim}{f} < g$。于是，$\mathbb{P}$ 强迫：在基模型中存在某个 $S \in \prod_{n\in\omega}[g(n)]^{\leq n+1}$，使得对每个 $n \in \omega$ 都有 $f(n) \in S(n)$。[1]

[1]这里的界 $n+1$ 在某种程度上是任意的，也就是说，它可以替换为任意无界的 $h : \omega \to \omega \setminus \{0\}$。所需的论证与事实 2.2 的证明类似。

Laver 强迫的一个重要变体 $\mathbb{L}$ 是通过考虑其相对于 ω上的超滤子 $\mathcal{U}$ 的相对化而得到的，记为 $\mathbb{L}_{\mathcal{U}}$。

Definition 1.2. $\mathbb{L}_{\mathcal{U}}$ 是由树 $T \subseteq \omega^{<\omega}$ 组成的强迫概念，满足对每个$s \in T$，若 $s \supseteq$ ，则 stem(T)，

$$\mathrm{succ}_T(s) := \{n \in \omega : s^\frown n \in T\} \in \mathcal{U},$$

按反向包含关系排序。

在此阶段，自然会问：对于哪些超滤子 $\mathcal{U}$ ，强迫概念 $\mathbb{L}_{\mathcal{U}}$ 具有拉弗性质。本文的主要目标是研究这类超滤子，我们称之为拉弗超滤子。

对于密切相关的（相对化）马蒂亚斯强迫 $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$，也会产生类似的问题，因为它的非相对化变体同样具有拉弗性质，而且当 $\mathcal{U}$ 是拉姆齐超滤子[2]时， $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$ 和 $\mathbb{L}_{\mathcal{U}}$ 在强迫意义下等价。在这种情形下，众所周知， $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$ 保留拉弗性质，当且仅当 $\mathcal{U}$ 实际上是拉姆齐超滤子。相比之下，关于 $\mathbb{L}_{\mathcal{U}}$对应问题的已知结果要少得多。已有研究包括B-laszczyk和Shelah的结果 [5]： 他们证明， $\mathbb{L}_{\mathcal{U}}$ 不添加科恩实数，当且仅当 $\mathcal{U}$ 是一个处处稀疏超滤子（定义见下文）。最近，Nieto-de la Rosa、Guzm´an和Ramos-Garc´ıa [17] 独立探索了一个密切相关的研究方向：在其他结果中，他们用Kat˘etov序刻画了使强迫概念$\mathbb{L}_{\mathcal{I}^+}$ 具有拉弗性质的 ω 上的理想 $\mathcal{I}$ 。他们的一项结果指出，存在一个 P-点 $\mathcal{U}$ 使得 $\mathbb{L}_{\mathcal{U}}$ 既不添加科恩实数，也不具有拉弗性质，这一结论与连续统假设相容。根据命题3.2和3.3，这种现象恰好发生在 P-点 $\mathcal{U}$ 并非快速超滤子的情形。

现在让我们回顾一些研究较为充分的超滤子组合类。

Definition 1.3. 设 $\mathcal{U}$ 是 ω上的超滤子。

(i) $\mathcal{U}$称为 P-点，如果对每个由 $\mathcal{U}$ 中元素构成的序列 $\langle x_n : n \in \omega\rangle$，都存在 $x \in \mathcal{U}$，使得 $\forall n \in \omega : x \subseteq^* x_n$。(ii) 如果对每个严格递增的 $f \in \omega^\omega$，都存在 $x \in \mathcal{U}$，使得$\forall n \in \omega : |x \cap f(n)| \leq n$，则称 $\mathcal{U}$ 为快速的。(iii) 设 $\mathcal{I}$ 是某个集合 X 的子集所构成的一个集合族，且 $\mathcal{I}$ 对取子集封闭并包含所有单元素集。
Baumgartner [4] 引入了以下概念：如果超滤子 $\mathcal{U}$ 定义在 ω 上，且对每个 $F : \omega \to X$，都存在某个 $x \in \mathcal{U}$ 使得 $F[x] \in \mathcal{I}$，则称它为一个 $\mathcal{I}$-超滤子。

[2]如果 ω 上的超滤子 $\mathcal{U}$ 包含拉姆齐定理关于二元组的见证集，则称其为拉姆齐或选择性超滤子。

Baumgartner 研究了定义在 $X = 2^\omega$ 上、对应各种此类集合族 $\mathcal{I}$ 的 $\mathcal{I}$-超滤子。例子包括离散集、散布集、闭包测度为零的集合以及无处稠密集[3]。相应的 $\mathcal{I}$-超滤子分别称为离散超滤子、散布超滤子、零测度超滤子和无处稠密超滤子。注意，所有这些超滤子类都包含 P-点。

除了定义 2.1 和定理 2.8 中给出的拉弗超滤子的简单组合刻画外，我们还将把拉弗超滤子刻画为某一类理想 $\mathcal{I}$ 在 2^ω上的 $\mathcal{I}$-超滤子。稍后我们将利用这样一个事实：等价地，也可以在可数子空间 $X = \mathbb{Q} \subseteq 2^\omega$ 上考察这些理想；该子空间由最终恒为零的二进制序列组成，这与 Brendle [6], 、Barney [2],以及 Brendle-Fla˘skov´a [7]关于 $\mathcal{I}$-超滤子的研究相一致。

根据前文提到的 B-laszczyk 和 Shelah [5], 的结果，拉弗超滤子必定处处稀疏。我们证明，它们实际上具有更强的性质：它们是零测超滤子。事实上，对于每个所谓的 *Yorioka* 理想 $\mathcal{Y}_f$，拉弗超滤子都是 $\mathcal{Y}_f^0$-超滤子，其中 $\mathcal{Y}_f^0$由 2^ω 的闭包属于 $\mathcal{Y}_f$ 的那些子集构成。Yorioka 理想是强零测度理想 $\mathcal{SN}$ 的近似，也就是说$\mathcal{SN} := \bigcap_{f\in\omega^\omega} \mathcal{Y}_f$。

一个自然的问题是：Laver 超滤子是否是理想 $\mathcal{I}$ 的 $\mathcal{I}$-超滤子，其中该理想由闭包为强零测的集合组成。不过请注意，一个闭集具有强零测性，当且仅当它是可数的，因此上述理想实际上仅由闭包为可数集的集合组成。相应的 $\mathcal{I}$-超滤子称为 可数闭超滤子，此前 Barney [2] 和 Brendle [6]已对其进行研究。我们证明，MA的一个片段蕴含着一个$\mathcal{U}$ 非散布的 Laver 超滤子的存在性，这尤其意味着 $\mathcal{U}$ 不是可数闭的。读者可参阅 [7] 中的图2，了解各种 $\mathcal{I}$-超滤子类之间可证明的包含关系示意图。

最后，我们将考察 Laver 超滤子的（泛型）存在性。如果一个超滤子类$\mathcal{C}$ 满足：每个基数严格小于 $\mathfrak{c}$的滤子基都可以扩展为该类中的一个超滤子 $\mathcal{C}$（参见 Canjar [8]），则称其为泛型存在。超滤子类的泛型存在性通常比单纯的存在性表现得更好，其原因是，这种存在性通常源于直接的递归构造，而这类构造由连续统的基数特征之间的某些（不）等式所促成。我们证明特征 $\mathfrak{ge}$(Laver)的上下界，该特征旨在刻画 Laver 超滤子的泛型存在性。更具体地说，我们证明 cov($\mathcal{M}$)，non($\mathcal{NA}$) $\leq_{\mathfrak{ge}}$(Laver) $\leq$ non($\mathcal{SN}$)，max{non($\mathcal{E}$) $\mathfrak{d}$}。[4]

此外，我们考察了集合论的各种标准模型中拉弗超滤子的存在性。特别是，我们关注 P- 点的存在性与 Laver 超滤子的存在性之间的关系。根据命题 3.2，Laver 超滤子

[3]读者可参阅 Baumgartner 的论文，了解这一框架的详细内容和精确定义。[4]这些基数特征将在第 4 节中定义。

在不存在快速超滤子的模型中并不存在，例如 Laver 模型、Mathias 模型或米勒模型。在这些模型中，P-点都泛型地存在。[5] 我们证明，Silver 模型中不存在 Laver 超滤子；Chodounsk´y 和 Guzm´an [11] 已证明该模型不包含 P-点。另一方面，我们证明，不存在 P-点而 Laver 超滤子泛型地存在也是相容的。

本文结构如下。

- 在第 §2 节中，我们给出拉弗超滤子的纯组合定义，并得到若干种等价刻画。随后我们证明，这些定义确实刻画了这样一类超滤子：与之相关的 Laver 强迫具有拉弗性质。

- 在第 §3 节中，我们介绍拉弗超滤子的若干性质，例如在超滤子和下的闭包，并建立它们与其他研究充分的超滤子类之间的联系。在 MA(σ-linked) 下，我们构造一个非散布的拉弗超滤子。

- 在最后的第 §4 节中，我们研究拉弗超滤子的（泛型）存在性，定义其泛型存在数 $\mathfrak{ge}$(Laver)，并证明这一基数特征的上界和下界。我们考察拉弗超滤子在若干知名 ZFC 模型中的存在性，并构造一个没有 P-点、但拉弗超滤子泛型存在的模型。最后，我们提出一些开放问题。

记号与术语

我们使用标准的集合论记号。对于集合 A 和基数 κ，$[A]^\kappa$ 表示 A 的基数为 κ 的子集所组成的集合，而 A^κ 表示从 κ 到 A 的函数所组成的集合。在某些情况下，若上下文清楚，我们会用 2^k 表示 $|2^k|$。我们用 seq$^{<\omega}$(ω) 表示自然数的有限严格递增序列所组成的集合。集合 $\mathbb{Q}$ 由满足 $\exists n \forall m \geq n$ 的那些 $x \in 2^\omega$ 构成：$x(m) = 0$。$X = 2^\omega$ 上或其子空间 $X = \mathbb{Q}$ 上的拓扑基由以下集合给出：$[s] := \{x \in X : x|_{|s|} = s\}$，其中 $s \in 2^{<\omega}$。

树 是一个非空集合 T，由有限序列组成，且在取初始段的运算下封闭。按照惯例，stem(T) 表示 T 中与 T 的每个元素都相容 的最长元素，其中 $s, t \in T$ 相容是指其中一个延伸另一个。对于 $s \in T$,$T|_s := \{t \in T : s$ 和 t 相容$\}$。

如果 $\mathcal{I}$ 是集合 X上的一个理想，那么 $\mathcal{I}^+ = \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{I}$。我们所说的超滤子，始终指非主超滤子。

[5]在每个满足 $\mathfrak{c} \leq \omega_2$ 的模型中，要么存在快速超滤子，要么泛型地存在 P-点。这是 Canjar [8] 和 Ketonen [13] 的结果所推得的。

2 Laver 超滤子的刻画

我们将首先从纯组合的角度定义拉弗超滤子。定理 2.8 表明，这一定义确实刻画了 $\mathbb{L}_{\mathcal{U}}$ 的拉弗性质。

Definition 2.1. 设 $\mathcal{U}$ 是 ω上的一个超滤子。若满足以下条件，我们称 $\mathcal{U}$ 为 *Laver* 超滤子：对于每个序列 $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$，其中每个 $\mathcal{P}_n$ 都是将ω 划分为有限多个集合的一个划分，都存在 $x \in \mathcal{U}$，使得对于所有 $n \in \omega$，x 与 $\mathcal{P}_n$中至多 $n+1$ 个元素有非空交集。

与拉弗性质的定义类似，上述界 $n+1$ 可以替换为任意非递减无界函数 $h(n)+1$。

Fact 2.2. 设 $\mathcal{U}$ 是一个超滤子，且 h_0 和 h_1 是从 ω 到 ω的两个非递减无界函数。假设对于任意由ω的有限划分组成的序列 $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$，都存在 $x \in \mathcal{U}$，使得 x 与每个 $\mathcal{P}_n$中的至多 $h_0(n)+1$ 个元素相交。那么，对于任意如上所述的 $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$，都存在 $y \in \mathcal{U}$，使得 y 与每个 $\mathcal{P}_n$中的至多 $h_1(n)+1$个元素相交。

证明。对于每个 $n \in \omega$，令 $k_n \geq n$ 满足 $\forall m \geq k_n : h_1(m) > h_0(n)$。令$\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$ 为 ω的有限划分序列。不失一般性，我们可以假设每个 $\mathcal{P}_{n+1}$ 都细化 $\mathcal{P}_n$。

对每个 $i \in \omega$定义 $\mathcal{P}'_i := \mathcal{P}_{k_{i+1}}$。根据假设，存在 $x \in \mathcal{U}$ 使得 x 与每个 $\mathcal{P}'_i$中的至多 $h_0(i)+1$ 元素相交。令 y 为 x 与$\mathcal{P}_{k_0}$ 中唯一落在 $\mathcal{U}$内的元素的交集。因此，对于任意 $n \leq k_0$，y 恰好与$\mathcal{P}_n$中的一个元素相交。若 $n > k_0$，则存在唯一的 $i \in \omega$ 使得 $n \in [k_i, k_{i+1})$。由于 $n \geq k_i$，$h_1(n) > h_0(i)$，因此 y 与 $\mathcal{P}'_i = \mathcal{P}_{k_{i+1}}$中的至多 $h_1(n)$个元素相交。由于 $\mathcal{P}_n$ 比 $\mathcal{P}_{k_{i+1}}$更粗，y 与 $\mathcal{P}_n$中的至多 $h_1(n)$个元素相交。⊣

接下来，我们给出拉弗超滤子的一种替代表征，这将使我们能够把它们置于 Baumgartner 的 $\mathcal{I}$-超滤子框架中。

Definition 2.3. 对于 $A \subseteq 2^\omega$ 和 $n \in \omega$，定义

$$\mathrm{level}_A(n) := |\{f|_n : f \in A\}|.$$

Lemma 2.4. $\mathcal{U}$ 是拉弗超滤子，当且仅当对于任意 $F : \omega \to 2^\omega$ 以及任意非递减的无界 $f : \omega \to \omega$，都存在 $x \in \mathcal{U}$ 使得

$$\forall n \in \omega : \mathrm{level}_{F[x]}(n) \leq f(n)+1.$$

证明。假设 $\mathcal{U}$ 是一个 Laver 超滤子，且 F，f 与引理的陈述中所述相同。对每个 $n \in \omega$，令 $\mathcal{P}_n := \{P_s : s \in 2^n\}$，其中 $P_s = \{i \in \omega : F(i)|_n = s\}$。根据事实 2.2，存在 $x \in \mathcal{U}$，使得 x 与每个 $\mathcal{P}_n$ 中至多 $f(n)$ 个 $+1$ 元素相交，即 $\mathrm{level}^{F[x]}(n) \leq f(n)+1$。

为验证反方向，任取 $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$ ，使其为ω的一个有限划分序列。不失一般性，我们可以假设每个 $\mathcal{P}_n$ 的基数都是某个 $k_n > 0$ 的 2^{k_n} 。将 $\mathcal{P}_n$ 枚举为

$$\mathcal{P}_n = \{P_n^s : s \in 2^{k_n}\},$$

For $i, n \in \omega$，令 $s_n^i \in 2^{k_n}$ 使得 $i \in P_n^{s_n^i}$。定义 $F\colon\ \omega \to 2^\omega$，方法是设定

$$F(i) := (s_0^i)^\frown (s_1^i)^\frown (s_2^i)^\frown ...,$$

并且令 $f\colon\ \omega \to \omega$ 由 $f|_{[0,k_0]} \equiv 0$ 给出，且对每个 $n > 0$

$$f|_{(\sum_{n'<n} k_{n'},\, \sum_{n'\leq n} k_{n'}]} \equiv n.$$

现在，任何满足 $\forall n \in \omega\colon$ 层$_{F[x]}(\sum_{n'\leq n} k_{n'}) \leq f(\sum_{n'\leq n} k_{n'}) + 1 = n+1$的 $x \in \mathcal{U}$至多与 $\mathcal{P}_n$的 $n+1$ 个元素相交。⊣

引理 2.4 使我们能够用 2^ω上的理想来刻画拉弗超滤子。

Definition 2.5. 记

$$\mathcal{H}\colon = \{f \in \omega^\omega\colon\ f \text{是非递减、无界的，并且 } \forall n \in \omega\colon\ f(n) \leq n\}.$$

对于每个 $f \in \mathcal{H}$，定义

$$\mathcal{I}_f := \{A \subseteq 2^\omega : \forall d > 0 : \mathrm{level}_A \leq^* \frac{1}{d} f\}.$$

不难验证，每个这样的 $\mathcal{I}_f$ 都是一个理想。

Proposition 2.6. $\mathcal{U}$ 是 Laver，当且仅当对于每个 $f \in \mathcal{H}$，$\mathcal{U}$ 都是一个 $\mathcal{I}_f$-超滤子。

证明。 若 $\mathcal{U}$ 是 Laver 且 $f \in \mathcal{H}$，则对某个非递减、无界的 $g \in \omega^\omega$ 应用引理 2.4，其中 $\forall d > 0\colon\ g + 1 \leq^* \frac{1}{d} f$，可得 $\mathcal{U}$ 是一个 $\mathcal{I}_f$-超滤子。
反方向由引理 2.4 直接推出，因为若 f 在某个 $m \in \omega$ 以上支配层 $_{F[x]}$，则 $f+1$ 在处处支配层 $_{F[x\cap F^{-1}([s])]}$，其中 $s \in 2^m$ 满足 $F^{-1}([s]) \in \mathcal{U}$。⊣

如引言中所述，在引理 2.4 和命题 2.6 中，我们都可以将注意力限制在函数 $F : \omega \to \mathbb{Q}$ 上，并考虑定义在 $\mathbb{Q}$ 上而非 2^ω 上的理想 $\mathcal{I}_f$。我们将在第 4 节讨论这一点；这将简化一些证明。

接下来，我们证明 Laver 超滤子名副其实：它们恰好是那些 $\mathcal{U}$ forwhich $\mathbb{L}_\mathcal{U}$ 具有拉弗性质的超滤子。回顾以下事实。

Fact 2.7（参见 Judah 和 Shelah [12, 定理 1.7]）。令 $\mathcal{U}$ 为任意超滤子。强迫概念 $\mathbb{L}_\mathcal{U}$ 具有纯决策性质，即对于强迫语言中的任意句子 ψ，存在一个 $T' \leq_{\mathbb{L}_\mathcal{U}} T$，使得 stem($T'$) =stem($T$)，并且满足 $T' \Vdash_{\mathbb{L}_\mathcal{U}} \psi$ 或 $T' \Vdash_{\mathbb{L}_\mathcal{U}} \neg\psi$。

THEOREM 2.8. $\mathbb{L}_{\mathcal{U}}$ 具有拉弗性质，当且仅当 $\mathcal{U}$ 是一个 Laver 超滤子。

证明。 首先假设 $\mathcal{U}$ 是 Laver。令 f 为一个 $\mathbb{L}_{\mathcal{U}}$名称，表示 ω^ω的一个元素；令 $g \in \omega^\omega$ $\sim$满足 $\mathbb{L}_{\mathcal{U}} \Vdash \forall n \in \omega\colon\ f(n) < g(n)$，并令 $T \in \mathbb{L}_{\mathcal{U}}$。我们将证明存在$\sim$某个 $T' \leq_{\mathbb{L}_{\mathcal{U}}} T$ 以及一个函数 $c\colon\ \omega \to [\omega]^{<\omega}$，使得 $\forall n \in \omega\colon\ |c(n)| \leq n^3 \wedge T' \Vdash_{\mathbb{L}_{\mathcal{U}}} f(n) \in c(n)$。$\sim$

不失一般性，假设 $\mathrm{stem}(T) = \emptyset$。根据纯决策性质，我们可以将 T 缩小，使得

$$\forall s \in T : T|_s \text{ decides } \underset{\sim}{f}(n) \text{ for each } n \leq |s|.$$

通过归纳法，对每个 $s \in T$，我们定义：

(i) 一个序列 $\langle \mathcal{P}^n_s\colon\ n \in \omega \rangle$，由 ω 划分成有限多个部分，

(ii) 一个递减序列 $\langle A^n_s\colon\ n \in \omega \rangle$，其元素取自 $\mathcal{U}$，且每个 A^n_s 都是 $\mathcal{P}^n_s$中的一个元素。

(iii) 如果 $|s| \leq n$，那么存在某个 $a^n_s \in g(n)$。

对于每个 $s \in T$，令 $A^0_s := \mathrm{succ}_T(s)$，并令 $\mathcal{P}^0_s$为 ω 到 A^0_s 及其补集的划分。此外，令 $a^0_\emptyset \in g(0)$ 满足 $T \Vdash_{\mathbb{L}_{\mathcal{U}}} \underset{\sim}{f}(n) = a^0_\emptyset$。在第 $(n+1)$ 步，定义

(i) 对于每个满足 $|s| \geq n+1$ 的 $s \in T$： $A^{n+1}_s := A^n_s$ 且 $\mathcal{P}^{n+1}_s := \mathcal{P}^n_s$。

(ii) 对于每个满足 $|s| = n+1$ 的 $s \in T$，令 $a^{n+1}_s \in g(n+1)$ 满足 $T|_s \Vdash_{\mathbb{L}_{\mathcal{U}}} f(n+1) = \sim a^{n+1}_s$。

(iii) 现在，对于每个满足 $|t| = n$ 的 $t \in T$，令

$$\mathcal{Q}^{n+1}_t := \{\{m \in \mathrm{succ}_T(t) : a^{n+1}_{t^\frown m} = a\} : a \in g(n+1)\} \cup \{\omega \setminus \mathrm{succ}_T(t)\}.$$

并令 $\mathcal{P}^{n+1}_t$ 是 $\mathcal{Q}^{n+1}_t$ 和 $\mathcal{P}^n_t$ 的细化。令 $\mathcal{P}^{n+1}_t$ 中唯一落在 $\mathcal{U}$ 中的元素为 $A^{n+1}_t \in \mathcal{U}$，并令 $a \in g(n+1)$ 满足 $\forall m \in A^{n+1}_t\colon\ a^{n+1}_{t^\frown m} = a$。设 $a^{n+1}_t := a$，并继续向下进行这一构造。

令 $\varphi : \mathrm{seq}^{<\omega}(\omega) \to \omega$ 为一个双射。对每个 $s \in T$，令 $B_s \in \mathcal{U}$ 由定义 2.1 针对序列 $\langle \mathcal{P}^{\varphi(s)+n}_s\colon\ n \in \omega \rangle$ 给出。
令 $T' \leq_{\mathbb{L}_{\mathcal{U}}} T$ 满足 $\forall s \in T' : \mathrm{succ}_{T'}(s) = B_s$。此外，对每个 $n \in \omega$，定义 $c(n) := \{a^n_s : s \in T' \wedge |s| = n\}$。显然， $T' \Vdash_{\mathbb{L}_{\mathcal{U}}} \forall n \in \omega\colon\ f(n) \in c(n)$。$\sim$
CLAIM 2.9. $\forall n \in \omega : |c(n)| \leq n^3$。

证明。对于每个 $k \leq n$，定义 $c_k(n) := \{a^n_s\colon\ s \in T' \wedge |s| = k\}$，使得 $c(n) = c_n(n)$。令 $s \in T'$ with $|s| = k$，并注意以下几点：
若 $\varphi(s) \geq n$，则 $\mathcal{P}^n_s$比 $\mathcal{P}^{\varphi(n)+0}_s$更粗，因此 $B_s \subseteq A^n_s$。于是，对每个 $m \in B_s = \mathrm{succ}_{T'}(s)$，都有 $a^n_{s^\frown m} = a^n_s$。
若 $\varphi(s) < n$，我们知道 B_s 至多与 $\mathcal{P}^n_s$中的 $n+1$ 个元素相交，其中一个是A^n_s。因此，在所有 $m \in \mathrm{succ}_{T'}(s)$中，$a^n_{s^\frown m}$取得值 a^n_s，且至多取得其他 n 个值。这种情况至多发生 n 次，因为至多有 n 个序列 s 满足$\varphi(s) < n$。

由此可知，$c_{k+1}(n)$是 $c_k(n)$与某个大小至多为 n^2的集合的并。因此，$|c_n(n)| \leq n^3$。⊣

反过来，假设 $\mathcal{U}$ 不是 Laver。根据事实 2.2，存在一个序列$\langle \mathcal{P}_n\colon\ n \in \omega\rangle$ 是 ω 的有限划分，满足

$$\forall x \in \mathcal{U}\ \forall m \in \omega\ \exists n \geq m : \text{“}x \text{ meets at least } |2^n| \text{ elements of } \mathcal{P}_n.\text{”}$$

写出 $\mathcal{P}_n = \{P^i_n\colon\ \ i \in k_n\}$。我们用 $\mathbb{1}$ 表示 $\mathbb{L}_\mathcal{U}$ 的最大元。再次令 $\varphi\colon \mathrm{seq}^{<\omega}(\omega) \to \omega$ 为一个双射，并定义 f 为一个 $\mathbb{L}_\mathcal{U}$-名称，表示 $\omega^{\omega\widetilde{\ }}$ 中的一个元素，使得

$$\forall s \in \mathbb{1} : \mathbb{1}|_s \Vdash \forall n \leq |s| : \underset{\sim}{f}(n) = \varphi(\sigma(s|_n)),$$

其中 $\sigma(t) \in \omega^{|t|}$ 定义为

$$\sigma(t)(m) = l \text{ for the unique } l \in k_{|t|-m-1} \text{ with } t(m) \in P^l_{|t|-m-1}.$$

注意，对于每个 $n \in \omega$ 以及每个满足 $|t| = n$ 的 $t \in \mathbb{1}$，$\sigma(t)$ 都是有限集 $\prod_{m\in n} k_{n-m-1}$ 的一个元素，因此 $\underset{\sim}{f}$ 有界。
为了证明 f 构成了 $\mathbb{L}_\mathcal{U}$ 不满足拉弗性质的一个反例，假设由 $\sim$ 矛盾可知，存在一个函数 $c\colon\ \omega \to [\omega]^{<\omega}$，满足 $\forall n \in \omega\colon\ |c(n)| \leq n+1$，并且存在某个 $T \in \mathbb{L}_\mathcal{U}$ 使得

$$T \Vdash \forall n \in \omega : \underset{\sim}{f}(n) \in c(n).$$

令 $s := \mathrm{stem}(T)$，并令 $i \in \omega$ 足够大，使得

(i) $2^i - i > |s| + 2$

(ii) $\mathrm{succ}_T(s)$ 与 $\mathcal{P}_i$ 中至少 2^i 个元素相交。

对于每个 $j \in 2^i$，选择某个 $a_j \in \mathrm{succ}_T(s)$，使得不同的 a_j 分别属于 $\mathcal{P}_i$ 的不同元素。此外，对于每个 $j \in 2^i$，令 $t_j \in T|_s$ 成为带有 $|t_j| = |s| + i + 1$ 的 $s^\frown a_j$ 的扩展。

现在，每个 $T|_{t_j}$ 都扩展了 $T|_s$，并且

$$T|_{t_j} \Vdash \underset{\sim}{f}(|s|+i+1) = \varphi(\sigma(t_j)),$$

其中 $\sigma(t_j)(|s|) = l_j$ 对于唯一的 $l_j \in k_i$，使得 $t_j(|s|) = a_j \in P_i^{l_j}$。由于对于不同的 j，这些l_j 彼此不同，因此 $T|_{t_j}$ 以 2^i 种不同方式决定 $\underset{\sim}{f}(|s|+i+1)$。因此，由于 $2^i > |s|+i+2 \geq |c(|s|+i+1)|$，必定存在某个 $j \in 2^i$，使得 $T|_{t_j} \Vdash f(|s|+i+1) \notin c(|s|+i+1)$。⊣

3 Laver 超滤子的性质

本节将建立 Laver 超滤子的若干结构性质。我们还将其与其他研究充分的超滤子类联系起来，并在假设 MA(σ-linked) 的条件下，构造一个非散逸拉维超滤子。

回顾一下，超滤子 $\mathcal{V}$ 在 Rudin-Keisler 序中低于超滤子 $\mathcal{U}$，记作 $\mathcal{V} \leq_{\mathrm{RK}} U$，如果存在某个 $f \in \omega^\omega$ 使得 $\forall x \in \mathcal{V}$: $f^{-1}(x) \in \mathcal{U}$。注意以下事实。

FACT 3.1. 如果 $\mathcal{U}$ 是 Laver 超滤子且 $\mathcal{V} \leq_{\mathrm{RK}} \mathcal{U}$，那么 $\mathcal{V}$ 是 Laver 超滤子。

PROPOSITION 3.2. 如果 $\mathcal{U}$ 是 Laver 超滤子，那么 $\mathcal{U}$ 是遗传快速的；也就是说，如果 $\mathcal{V}$ 是一个满足 $\mathcal{V} \leq_{\mathrm{RK}} \mathcal{U}$ 的超滤子，那么 $\mathcal{V}$ 是快速的。

证明。对于一个严格递增的 $f \in \omega^\omega$，考虑序列 $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$，它由 ω 的有限划分构成，其中

$$\mathcal{P}_n = \{\{i\} : i < f(n)\} \cup \{\omega \setminus f(n)\}.$$

由于根据事实 3.1，成为 Laver 超滤子的性质在 Rudin-Keisler 序下向下封闭，因此结论成立。⊣

注意，Brendle 与 Fla˘skov´a [7, 定理2.8] 在假定 MA（可数）的条件下，构造了一个并非处处稀疏的遗传快速超滤子。[6] 因此，由于拉弗超滤子是处处稀疏的，命题 3.2 中的蕴含关系不可逆。如果我们进一步假定该遗传快速超滤子是一个 P-点，那么我们确实得到一个 Laver 超滤子。[7]

PROPOSITION 3.3. 每个快速 P-点都是 Laver 超滤子。

[6]事实上，所讨论的超滤子是一个遗传 Q-点。[7]注意，一个快速 P-点 $\mathcal{U}$ 自动是遗传快速的，因为每个 Rudin-Keisler 约化$f \in \omega^\omega$ 在 $\mathcal{U}$ 的某个元素上都是有限对一的。

证明。设 $\mathcal{U}$ 是一个快速 P-点，并考虑 $\langle \mathcal{P}_n$ 的任意序列 $n \in \omega\rangle$，其中每个都是 ω 的有限划分。记 $\mathcal{P}_n \cap \mathcal{U}$ 中唯一的元素为 $u(n)$。由于 $\mathcal{U}$ 是一个 P- 点，序列 $\langle u(n) : n \in \omega\rangle$ 在 $\mathcal{U}$中有一个伪交 x；又由于 $\mathcal{U}$ 是快速的，我们可以假设 $\forall n \in \omega : |x \setminus u(n)| \leq n$。因此，除了 $u(n)$之外，x 至多与 $\mathcal{P}_n$的 n个其他元素相交。⊣

给定超滤子 $\mathcal{U}$和 $\mathcal{V}_i, i \in \omega$，回顾一下，$\omega\times\omega$ 上的超滤子 $\mathcal{U}-\sum_{i\in\omega}\mathcal{V}_i$ 由满足以下条件的那些 $x \subseteq \omega \times \omega$ 组成

$$\{i \in \omega : \{j \in \omega : \langle i, j\rangle \in x\} \in \mathcal{V}_i\} \in \mathcal{U}.$$

或者，$\mathcal{U} - \sum_{i\in\omega}\mathcal{V}_i$ 是拓扑空间 $\beta\omega \setminus \omega$中序列 $\langle \mathcal{V}_i$ 的 $\mathcal{U}$-极限：$i \in \omega\rangle$。

Proposition 3.4. 如果 $\mathcal{U}$和 $\mathcal{V}_i$ 对于 $i \in \omega$ 是拉弗超滤子，那么 $\mathcal{U} - \sum_{i\in\omega}\mathcal{V}_i$ 也是一个拉弗超滤子。

证明。设 $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega\rangle$ 是 $\omega \times \omega$的有限划分序列。根据事实 2.2，只需找到某个 $X \in \mathcal{U} - \sum_{i\in\omega}\mathcal{V}_i$，使得对每个 $n \in \omega$，X 与 $\mathcal{P}_n$中的至多 $(n + 1)^2$ 个元素相交。我们可以假设 $\mathcal{P}_{n+1}$ 细化 $\mathcal{P}_n$。
如果 $A \subseteq \omega \times \omega$和 $i \in \omega$，记 $A^{(i)} := \{j \in \omega : \langle i, j\rangle \in A\}$。对于 i，$n \in \omega$，令 $\mathcal{P}_n^{(i)}$ 为划分 $\{P^{(i)} : P \in \mathcal{P}_n\}$。此外，令 $Q_n(i)$为 $\mathcal{P}_n$ 中满足$Q_n(i)^{(i)} \in \mathcal{V}_i$的唯一元素。定义划分

$$\mathcal{Q}_n := \{\{i \in \omega : Q_n(i) = P\} : P \in \mathcal{P}_n\}.$$

对于每个 $i \in \omega$，令 $y_i \in \mathcal{V}_i$ 满足：对于每个 $n \in \omega$，y_i 至多与 $\mathcal{P}_{n+i}^{(i)}$中的 $n + 1$ 个元素相交。令 $x \in \mathcal{U}$ 满足 x 至多与 $\mathcal{Q}_n$中的 $n + 1$ 个元素相交。考虑集合

$$X := \{\langle i, j\rangle : i \in x \wedge j \in y_i\} \in \mathcal{U} - \sum_{i\in\omega}\mathcal{V}_i.$$

固定 $n \in \omega$并考虑分解 $X = X_{<n} \cup X_{\geq n}$，其中 $X_{<n} := X \cap (n \times \omega)$ 且 $X_{\geq n} := X \cap ((\omega \setminus n) \times \omega)$。注意，$X_{<n}$ 至多与 $\mathcal{P}_n$中的 $n \cdot (n + 1)$ 个元素相交。此外，对于每个 $i \geq n$，$X_{\geq n}^{(i)} = y_i$ 至多与 $\mathcal{P}_n^{(i)}$中的一个元素相交，因此 $X_{\geq n}^{(i)} \subseteq Q_n(i)^{(i)}$。因此，由于 x 至多与 $\mathcal{Q}_n$中的 $n + 1$ 个元素相交，$X_{\geq n}$至多与 $\mathcal{P}_n$中的 $n + 1$ 个元素相交。由此可知，X 至多与

$$n \cdot (n + 1) + (n + 1) = (n + 1)^2$$

$\mathcal{P}_n$ 的元素。⊣

Corollary 3.5. 如果存在一个 Laver 超滤子，那么就存在一个不是 P-点的 Laver 超滤子。

证明。给定一个 Laver 超滤子 $\mathcal{U}$，根据前一个命题，超滤子 $\mathcal{U} - \sum_{n\in\omega}\mathcal{U} = \mathcal{U}\times\mathcal{U}$ 是一个 Laver 超滤子。容易看出，两个超滤子的乘积永远不是 P-点。⊣

虽然 Laver 超滤子不能是 P-点，但它们仍具有一些类似 P-点的性质。更具体地说，正如引言中所提到的，它们是零测超滤子。我们需要以下由 Yorioka [21] 给出的定义。

Definition 3.6. 对于 $\sigma\in(2^{<\omega})^\omega$，定义 $[\sigma]_\infty := \bigcap_{n\in\omega}\bigcup_{m\geq n}[\sigma(m)]$ 和 $\mathrm{ht}_\sigma(i) := |\sigma(i)|$，其中每个 $i\in\omega$ 均如此。对于 $f,\ g\in\omega^\omega$，定义 $f\ll g :\iff \forall k\in\omega:\ f\circ \mathrm{pw}_k \leq^* g$，其中 $\mathrm{pw}_k:\omega\to\omega,\ i\mapsto i^k$。最后，对于递增的 $f\in\omega^\omega$，定义 *Yorioka* 理想

$$\mathcal{Y}_f := \{X\subseteq 2^\omega : \exists\sigma\in(2^{<\omega})^\omega : X\subseteq[\sigma]_\infty \wedge f\ll \mathrm{ht}_\sigma\}.$$

Yorioka [21] 已证明，对于每个严格递增的 $f\in\omega^\omega$，$\mathcal{Y}_f$ 是一个 σ-理想，$\mathcal{Y}_f$ 由零测集构成，而 $\bigcap_{f\in\omega^\omega}\mathcal{Y}_f$ 正是由 2^ω 的强零测子集组成的理想 $\mathcal{SN}$。

Lemma 3.7. 对于每个严格递增的 $f\in\omega^\omega$，都存在 $g\in\mathcal{H}$，使得 $\mathcal{I}_g\subseteq\mathcal{Y}_f$.

证明。设 $f^*\in\omega^\omega$ 递增，且是族 $\{f\circ\mathrm{pw}_k:\ k\in\omega\}$ 的一个 $\leq^*$-上界。对每个 $i\in\omega$，定义 $h_i := f^*(i(i+3))$。令 $g\in\omega^\omega$ 为

$$g|_{[h_i,h_{i+1})} :\equiv i \ \text{ and } \ g|_{[0,h_0)} :\equiv 0.$$

现在，给定 $X\in\mathcal{I}_g$，令 $\sigma_X\in(2^{<\omega})^\omega$ 枚举族 $\bigcup_{i\in\omega}\{x|_{h_i} : x\in X\}$，使得 $\mathrm{ht}(\sigma_X)$ 非递减。

存在 $m\in\omega$，使得 $j\geq m \implies$ 层$_X(h_j)\leq g(h_j)+1 = j+1$。因此，对每个 $i\geq m$,

$$\begin{aligned}
|\bigcup_{j\leq i}\{x|_{h_j} : x\in X\}| &= \sum_{j\leq i}\mathrm{level}_X(h_j)\\
&\leq m(m+1) + \sum_{m\leq j\leq i}(j+1)\\
&= \frac{m(m+1)}{2} + \frac{i(i+3)}{2} + 1 = \frac{i(i+3)}{2} + M,
\end{aligned}$$

其中 $M\in\omega$ 是一个常数。因此，若 $n,\ i\in\omega$ 满足 $\mathrm{ht}_{\sigma_X}(n) = h_i < f^*(n)$，则 $n < i(i+3)/2 + M$，故 $f^*(i(i+3)/2+M) > h_i = f^*(i(i+3))$，从而 $i(i+3)/2+M > i(i+3)$，这仅对有限多个 i 成立。由此可得 $\mathrm{ht}_{\sigma_X}\geq^* f^*$。⊣

记$\mathcal{Y}_f^0$ 为由以下子集组成的理想：它们在 $\mathcal{Y}_f$中的闭包包含于 2^ω 。由于每个$\mathcal{I}_g$ 在闭包运算下都是闭的，我们得到以下推论。

COROLLARY 3.8. 如果 $\mathcal{U}$ 是一个 Laver 超滤子，那么对于每个 Yorioka 理想 $\mathcal{Y}_f$， $\mathcal{U}$ 都是一个 $\mathcal{Y}_f^0$-超滤子。特别地， $\mathcal{U}$ 是零测度的（因而处处稀疏）。

正如引言中所讨论的，可数闭超滤子自然地强化了对每个 $\mathcal{Y}_f$ 而言成为 $\mathcal{Y}_f^0$-超滤子的性质。我们的下一个结果表明，MA(σ-链)蕴含存在一个 Laver 超滤子 $\mathcal{U}$ ，它不是散布超滤子，也就是说，它不是关于 2^ω 的散布子集理想 $\mathcal{I}$ 的$\mathcal{I}$-超滤子。散布超滤子类包含可数闭超滤子，以及离散超滤子和 σ-紧超滤子。因此可知，推论 3.8 刻画了 Laver 超滤子类与 Baumgartner [4],Barney [2], 和 Brendle [6]研究的 2^ω 上关于理想 $\mathcal{I}$ 的其他 $\mathcal{I}$-超滤子类之间所有的 ZFC 包含关系。

上述超滤子 $\mathcal{U}$ 的构造核心包含在下面的引理中。我们将在可数集 $\mathbb{Q} \subseteq 2^\omega$ 上构造 $\mathcal{U}$ 。

LEMMA 3.9（MA(σ-linked)）。假设 $\mathcal{X} \subseteq [\mathbb{Q}]^\omega, |\mathcal{X}| < \mathfrak{c}$是一个非散布集族，且对有限交封闭。设 $F:\ \mathbb{Q} \to 2^\omega$ 和 $f \in \omega^\omega$ 递减且无界。存在 $A \in [\mathbb{Q}]^\omega$，使得层 $_{F[A]} \leq f+1$和 $A \cap X$对每个 $X \in \mathcal{X}$都是非散布的。

证明。注意一个众所周知的事实：对每个 $A \subseteq 2^\omega$，都存在唯一分解$A = d(A) \cup (A \setminus d(A))$，其中 $d(A)$是自身稠密的，而 $A \setminus d(A)$是散布的。对于$X \in \mathcal{X}, s \in 2^{<\omega}$，记

$$C_{X,s} := \mathrm{cl}\left(d(X \cap F^{-1}([s]))\right),$$

也就是说，$C_{X,s}$ 是 2^ω 中 $X \cap F^{-1}([s])$的自身稠密部分的闭包（可能为空）。

我们将反复用到以下断言。

CLAIM 3.10. 假设 $X \in \mathcal{X}$、 $s \in 2^{<\omega}$ 和 $a \in C_{X,\ s}$。对于每个 $n \geq |s|$，都存在 $t \in 2^n$、 $t \supseteq s$，使得 $a \in C_{X,\ t}$。

证明。 由于 $a \in C_{X,\ s} = \mathrm{cl}\,(d(X \cap F^{-1}([s])))$，对于每个 $m \in \omega$，都存在某个 $b_m \in d(X \cap F^{-1}([s]))$，使得 $b_m|_m = a|_m$。 由于 $X \cap F^{-1}([s]) \cap [b_m|_m]$是非散布的，有限划分中存在一个元素

$$\{F^{-1}([t]) \cap X \cap F^{-1}([s]) \cap [b_m|_m] : t \in 2^n\}$$

是非散布的。设 $t = t_m$ 满足此情形。根据鸽巢原理，
存在某个 $t \in 2^n$，使得对于无穷多个 m， $t_m = t$ 成立。这就是所需的 t。 ⊣

现在我们可以定义偏序 $\mathbb{P}$，并在其上使用 MA(σ-linked)。令 $\mathbb{P}$由条件 $p = \langle A_p, \mathcal{X}_p, n_p, S_p\rangle$组成，其中

$$A_p \in [\mathbb{Q}]^{<\omega}, \mathcal{X}_p \in [\mathcal{X}]^{<\omega}, n_p \in \omega \text{ and } S_p \in [2^{n_p}]^{<\omega},$$

满足

(i) $f(n_p) > 2 \cdot |A_p| \cdot |\mathcal{X}_p| \cdot |\mathcal{S}_p| + |A_p| + 3$,

(ii) 存在 $s \in S_p$，使得对于每个 $X \in \mathcal{X}$，$d(X \cap F^{-1}([s])) \neq \emptyset$，

(iii) $A_p \subseteq \bigcup_{s \in S_p} F^{-1}([s])$,

(iv) S_p 具有大小为 $\leq f+1$ 的层，即 $\forall n \leq n_p :\ |\{s|_n :\ s \in S_p\}| \leq f(n) + 1$。

令 $p \leq q$ 当且仅当 $A_p \supseteq A_q$、$\mathcal{X}_p \supseteq \mathcal{X}_q$、$n_p \geq n_q$、$\forall s \in S_p \exists t \in S_q :\ s \supseteq t$，并且

$$(\dagger)\ \forall a \in A_q \forall X \in \mathcal{X}_q \forall s \in S_q : a \in X \cap C_{X,s} \implies \exists t \in S_p : a \in X \cap C_{X,t}.$$

Claim 3.11. 如果 $q,\ q' \in \mathbb{P}$ 满足 $A_q = A_{q'}$、$n_q = n_{q'}$ 和 $S_q = S_{q'}$，那么 q 与 q' 相容，因此 $\mathbb{P}$ 是 σ-相联的。

证明。定义 $\mathcal{X}_p :\ = \mathcal{X}_q \cup \mathcal{X}_{q'},\ A_p :\ = A_q = A_{q'}$，令 $n_p \geq n_q = n_{q'}$ 满足

$$f(n_p) > 2 \cdot |A_p| \cdot |\mathcal{X}_p| \cdot f(n_q) + |A_p| + 3,$$

并记为 $S := S_q = S_{q'}$。

对于每个 $\langle a,\ X,\ s\rangle \in A_p \times \mathcal{X}_p \times S$，选取 $t(a,\ X,\ s) \in 2^{n_p}, t(a,\ X,\ s) \supseteq s$ 使得，

$$\text{if } a \in X \cap C_{X,s}, \text{ then } a \in X \cap C_{X,t(a,X,s)}.$$

由命题 3.10 可知这是可能的。

此外，对于由 (ii) 给出的 $s_0 \in S$，令 $t_0 \in 2^{n_p}, t_0 \supseteq s_0$ 满足 (ii) 对 t_0成立。这是可能的，因为划分 $\{F^{-1}([t]) : t \in 2^{n_p} \cap [s_0]\}$ 中必有一个元素与每个 $X \in \mathcal{X}$的交都是非散布的，其中 $\mathcal{X}$对有限交封闭。定义

$$S_p := \{t(a, X, s) : \langle a, X, s\rangle \in A_p \times \mathcal{X}_p \times S\} \cup \{a|_{n_p} : a \in A_p\} \cup \{t_0\}.$$

不失一般性，假设 $|\mathcal{X}_q| \geq |\mathcal{X}_{q'}|$。注意

$$\begin{aligned} |S_p| &\leq |A_p| \cdot (|\mathcal{X}_q| + |\mathcal{X}_{q'}|) \cdot |S| + |A_p| + 1 \\ &\leq 2 \cdot |A_q| \cdot |\mathcal{X}_q| \cdot |S_q| + |A_q| + 1 \\ &< f(n_q) = f(n_{q'}) \end{aligned} .$$

由此可知，上述 n_p 的选择足够大，满足 (i)，并且 S_p 的层大小为 $\leq f+1$。因此，$p := \langle A_p,\ \mathcal{X}_p,\ n_p,\ S_p\rangle$ 确实是一个 $\mathbb{P}$-条件，并且它同时扩展 q 和 q'。$\dashv$

我们要证明，如果 $G \subseteq \mathbb{P}$ 是某个开稠密集族 $\mathcal{D}$ 的 $\mathcal{D}$-泛型滤子，那么 $A_G := \bigcup\{A_p :\ p \in G\}$ 就是所需的。注意，由 (i) 和 (iii) 可知，对每个 $p \in \mathbb{P}$，层 $_{F[A_p]} \leq f+1$ 都成立，因此对于任意滤子 G，层 $_{F[A_G]} \leq f+1$ 都成立。

对于每个 $X \in \mathcal{X}$，定义

$$D_X := \{p \in \mathbb{P} : X \in \mathcal{X}_p \wedge \exists s \in S_p : A_p \cap X \cap C_{X,s} \neq \emptyset\}.$$

Claim 3。12. D_X 是开稠密的。

证明。 注意，根据 $\mathbb{P}$, D_X 的序关系中的条件 (†)， D_X 是开集。为证明它是稠密的，假设 $q \notin D_X$。定义 $\mathcal{X}_p := \mathcal{X}_q \cup \{X\}$，并取满足 $f(n_p) > 2\cdot(|A_q|+1)\cdot(|\mathcal{X}_q|+1)\cdot f(n_q)+(|A_q|+1)+3$ 的 $n_p \geq n_q$。取满足 $d(X\cap F^{-1}([s_0])) \neq \emptyset$ 的 $s_0 \in S_q$，这由 (ii) 保证。选取某个 $a^* \in d(X\cap F^{-1}([s_0]))$。特别地，由于 $a^* \in C_{X,\ s_0}$，根据命题 3.10，我们可找到某些 $t^* \in 2^{n_p}$, $t^* \supseteq s_0$，使得 $a^* \in C_{X,\ t^*}$。此外，我们可以找到某个延伸 s_0 的$t_0 \in 2^{n_p}$，使得 (ii) 对 t_0 成立。

最后，按照命题 3.11 的证明，为每个 $\langle a, X, s\rangle \in A_q \times \mathcal{X}_q \times S_q$选取 $t(a, X, s) \in 2^{n_p}$，并定义

$$A_p := A_q \cup \{a^*\},$$
$$S_p := \{t(a, X, s) : \langle a, X, s\rangle \in A_q \times \mathcal{X}_q \times S_q\} \cup \{a|_{n_p} : a \in A_p\} \cup \{t_0, t^*\}.$$

注意，$|S_p| \leq |A_q|\cdot|\mathcal{X}_q|\cdot|S_q|+|A_q|+1+2 < f(n_q)$，因此 n_p足够大，可以满足 (i)，且 $|S_p|$ 的各层大小为 $\leq f + 1$。于是， $p := \langle A_p, \mathcal{X}_p, n_p, S_p\rangle \in D_X$ 以及 $p \leq q$。⊣

最后，对每个 $a \in \mathbb{Q}$, $X \in \mathcal{X}$ 定义集合

$$E_{a,X} := \{p \in \mathbb{P} : X \in \mathcal{X}_p \wedge \exists s \in S_p : a \in A_p \cap X \cap C_{X,s}\},$$

并对 $k \in \omega$定义

$$D_{a,X,k} := \{q \in \mathbb{P} : q \text{ is incompatible with every } p \in E_{a,X}, \text{ or}$$
$$X \in \mathcal{X}_q \wedge \exists t \in S_q \exists a' \in A_q \cap X \cap C_{X,t} : a'|_k = a|_k \wedge a' \neq a\}.$$

Claim 3。13. $D_{a,X,k}$ 是开稠密的。

证明。 再次由（†）可知，$D_{a,\ X,\ k}$ 是开集。为验证稠密性，假设$q \notin D_{a,\ X,\ k}$。特别地， q 与某个$p_0 \in E_{a,\ X}$相容。令 $q \geq p \leq p_0$。由此可得$X \in X_p$，并且根据（†），存在某个 $t \in S_p$ 使得$a \in A_p \cap X \cap C_{X,\ t}$。令$a' \in d(X \cap F^{-1}([t]))$满足 $a'|_k = a|_k$和 $a \neq a'$。按照命题 3.12 的证明定义 $A_{\bar{p}} = A_p \cup \{a'\}$、 $\mathcal{X}_{\bar{p}} = \mathcal{X}_p$和 $n_{\bar{p}}$， $S_{\bar{p}}$。⊣

现在，假设 G 对于每个 D_X 和每个$D_{a,\ X,\ k}$都是泛型的。我们断言，对于每个 $X \in \mathcal{X}$，集合

$$d_X := \{a \in \mathbb{Q} : G \cap E_{a,X} \neq \emptyset\},$$

它是 $A_G \cap X$的子集，且非空并且自身稠密。显然， d_X 非空，因为 G 与 D_X相交。为证明其自身稠密，设 $a \in d_X$ 和 $k \in \omega$。存在$p \in G\cap E_{a,\ X}$ 以及$q \in G\cap D_{a,\ X,\ k}$。由于 G 是有向的， p 和 q 相容，因此

$$X \in \mathcal{X}_q \wedge \exists t \in S_q \exists a' \in A_q \cap X \cap C_{X,t} : a'|_k = a|_k \wedge a' \neq a.$$

因此，$q \in E_{a',\ X}$ 所以 $a' \in d_X$。 ⊣

Theorem 3.14（MA(σ-linked)）。存在一个非散逸拉维超滤子。

证明。 通过超限递归，遍历所有满足 $F\colon \mathbb{Q} \to 2^\omega$且 $f \in {}^\omega\omega$ 非递减并无界的配对 $\langle F, f\rangle$。在每个阶段，利用引理 3.9，为配对 $\langle F,\ f\rangle$添加一个引理 2.4 的见证 $A \in [\mathbb{Q}]^\omega$。最后，将所得滤子扩张为一个超滤子，同时避开与先前构造的滤子中的某个元素有非散布交集的集合。⊣

4 存在性与泛型存在性

在最后这一节中，我们将证明关于拉弗超滤子的（泛型）存在性的结果。特别是，我们将证明其泛型存在数的下界和上界，考察拉弗超滤子是否存在于各种经典的 *Mathias*、*Laver*、*Miller*、*Silver* 和*Sacks* 模型中，并得到一个其中不存在 P-点、但拉弗超滤子泛型存在的模型。在本节中，*Cohen* 模型 指的是在满足连续统假设的模型中添加 $\kappa \geq \omega_2$多个科恩实数后得到的模型；随机模型 则指通过类似方式添加随机实数得到的模型。*Mathias*、*Laver*、*Miller*、*Silver* 和*Sacks* 模型 是指在满足连续统假设的模型上，使用可数支撑将相应的适当强迫概念迭代 ω_2次得到的模型。

回顾一下，如果每个大小严格小于 $\mathfrak{c}$ 的滤子基都能扩张为该类中的一个超滤子 $\mathcal{C}$，那么一类超滤子 $\mathcal{C}$ 就是泛型存在的。Brendle 和 Fla˘skov´a [7] 在研究各种可数集 X 上的高理想 $\mathcal{I}$ 的 $\mathcal{I}$-超滤子的泛型存在性时，引入了以下关键基数不变量。

Definition 4.1 ([7])。

$$\mathfrak{ge}(\mathcal{I}) = \min\{|\mathcal{F}|\colon\ \mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}^+ \text{ 是一个滤子基，且 } \forall I \in \mathcal{I}\ \exists F \in \mathcal{F}(|I \cap F| < \omega)\}.$$

由于我们在空间 2^ω 上定义了理想 $\mathcal{I}_f$，因此我们首先证明，将 $\mathcal{I}_f$ 限制到 $\mathbb{Q}$ 后，得到的刻画与拉弗超滤子的等价刻画相同。
对于互异的 $x, y \in 2^\omega$，记 $\mathrm{split}(x, y) := \min\{n \in \omega\colon\ x(n) \neq y(n)\}$。

Lemma 4.2. 设 $X \subseteq 2^\omega$ 为可数集。存在一个单射 $\varphi_X : X \to \mathbb{Q}$，使得$\forall x \neq y \in X$: $\mathrm{split}(\varphi_X(x), \varphi_X(y)) = \mathrm{split}(x,\ y)$。

由此可得

Lemma 4.3. 设 $f \in \omega^\omega$ 为非递减且无界。以下条件等价:

(i) 对任意 $F\colon \omega \to 2^\omega$，存在 $x \in \mathcal{U}$ 使得层$_{F[x]} \leq f + 1$。

(ii) 对任意 $G\colon\ \omega \to \mathbb{Q}$，存在 $y \in \mathcal{U}$ 使得层$_{G[y]} \leq f + 1$。

证明。 显然 (i) 蕴含 (ii)。对于相反方向，考虑函数$\varphi_{F[\omega]} \circ F\colon\ \omega \to \mathbb{Q}$。⊣

引理 *4.2* 的证明。 我们将 φ_X 记作 φ。设 $\{x_i : i \in \omega\}$ 是 X的一个枚举。定义 $\varphi(x_0)$ 为全零序列。固定 $i \in \omega \setminus \{0\}$，并假设通过归纳法，已为每个 $j < i$定义了$\varphi(x_j)$，使得对所有不同的 $j, j' < i$，都有：$\mathrm{split}(\varphi(x_j)\ \varphi(x_{j'})) = \mathrm{split}(x_j, x_{j'})$。令 $n_i := \max\{\mathrm{split}(x_j, x_i) :\ j < i\}$，并令 $j_{\max} < i$ 满足此最大值在 $j_{\max}$处取得。定义

$$\varphi(x_i)|_{n_i} := \varphi(x_{j_{\max}})|_{n_i},\ \varphi(x_i)(n_i) := 1 \text{ and else}, \varphi(x_i)(m) := 0.$$

留给读者验证这个 φ 确实可行。 ⊣

因此，本文其余部分我们将假设每个 $\mathcal{I}_f$ 都是可数集 $\mathbb{Q}$上的一个理想。

Definition 4.4. 回忆一下，$\mathcal{H} \subseteq \omega^\omega$ 表示所有非递减且无界、满足 $f \leq^* \mathrm{id}_\omega$的函数所构成的集合。定义

$$\mathfrak{ge}(\mathrm{Laver}) := \min\{\mathfrak{ge}(\mathcal{I}_f) : f \in \mathcal{H}\}.$$

以下是 [7]中观察 3.1的对应版本。

Fact 4.5. 以下各项等价：

(i) $\mathfrak{ge}(\mathrm{Laver}) = \mathfrak{c}$,

(ii) Laver 超滤子的泛型存在性。

由于 $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ i s 是可数偏序集的 Martin 数，不难看出 tha t

Proposition 4.6. $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{ge}(\mathrm{Laver})$。

证明。 令 $f \in \mathcal{H}$，并假设 $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{Q}]^\omega$ 是基数为 $< \mathrm{cov}(\mathcal{M})$的滤子基。令$g_f \in \omega^\omega$ 满足 $g_f(0) = 0$ 且严格递增，并使得 $\forall i \in \omega\ \forall n \in [g_f(i)\ g_f(i+1))\colon f(n) \geq n$。令 $\eta \in 2^\omega$ 满足：对于任意 $n \in \omega$，$[\eta|_n] \cap \mathbb{Q}$ 将 F扩展为滤子基。对于$x \in \mathbb{Q} \setminus \{\eta\}$，定义 $\mathrm{split}(x) \in \omega$ 为唯一的 $i \in \omega$，使得 $\mathrm{split}(x,\ \eta) \in [g(i)\ g(i+1))$。考虑可数偏序集

$$\mathbb{P} := \{X \in [\mathbb{Q} \setminus \{\eta\}]^{<\omega} : \forall x \neq y \in X : \mathrm{split}(x) > 0 \wedge \mathrm{split}(x) \neq \mathrm{split}(y))\},$$

按包含关系排序。显然，选择 $\mathbb{P}$ 的开稠密集会产生一个将 $\mathcal{F}$ 延伸至层 $_A \leq f + 1$ 的 $A \in [\mathbb{Q} \setminus \{\eta\}]^\omega$。⊣

现在我们将为 $\mathfrak{ge}$(Laver) 找到一个额外的下界。回顾一下，如果对于所有 $N \in \mathcal{N}$，$X \subseteq 2^\omega$ 都满足 $X+N \in \mathcal{N}$，那么就称 $X \subseteq 2^\omega$ 是零可加的，其中 $\mathcal{N}$ 表示 2^ω 的零测集理想。特征数 non($\mathcal{NA}$) 定义为 2^ω 的一个非零可加子集的最小基数。回想 Pawlikowski 关于 non($\mathcal{NA}$) 与斜线的刻画，我们现在引入 [9] 中的一些记号：

Definition 4.7. 对于非空集合的序列 $b = \langle b(n) : n \in \omega\rangle$ 与 $h \in \omega^\omega$，令

$$\prod b := \prod_{n\in\omega} b(n), \text{ and } \mathcal{S}(b,h) := \prod_{n\in\omega} [b(n)]^{\leq h(n)}.$$

对于 $x \in \prod b$ 与 $S \in \mathcal{S}(b,\ h)$，记 $x \in^* S$ 当且仅当对除有限多个$n \in \omega$之外的所有情形，$x(n) \in S(n)$。最后，定义

$$\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,h} := \min\{|F| : F \subseteq \prod b \wedge \neg\exists S \in \mathcal{S}(b,h)\ \forall x \in F : x \in^* S\}.$$

Pawlikowski 的刻画及其来自 [9] 的轻微修改指出：

Lemma 4.8（[18], 引理 2.2； [9], 引理 3.9）。对于任何发散到无穷的 $h \in \omega^\omega$，

$$\mathrm{non}(\mathcal{NA}) = \min\{\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,h} : b \in \omega^\omega\}.$$

Proposition 4.9. non($\mathcal{NA}$) $\leq \mathfrak{ge}$(Laver)。

证明。设 $f \in \mathcal{H}$，并假设 $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{Q}]^\omega$ 是基数为 $<$ non($\mathcal{NA}$) 的滤子基。只需找到某个层为 $_A \leq f+1$ 的 $A \subseteq \mathbb{Q}$，使得 A 与 $\mathcal{F}$ 的每个成员都有非空交，因为我们可以假设 $\mathcal{F}$ 包含 $\mathbb{Q}$ 的余有限子集。

固定一个非递减、无界的 $g \in \omega^\omega$，使得 $\forall n \in \omega :\ g(n)(g(n)+1) \leq f(n)$。令 $\eta \in 2^\omega$ 满足：对于每个 $n \in \omega$，$[\eta|_n] \cap \mathbb{Q}$ 将 $\mathcal{F}$ 扩展为一个滤子基。对于每个 $X \in \mathcal{F}$ 和 $k \in \omega$，选取 $y^X_k \in X$，使得对于每个满足 $g(n) \leq k$ 的 $n \in \omega$，都有 $y^X_k|_n = \eta|_n$，并定义

$$y^X(n) := \{y^X_k|_n : k \in \omega\}.$$

由于对于每个 $k \geq g(n)$ 都有 $y^X_k|_n = \eta|_n$，所以 $y^X(n)$ 的大小至多为 $g(n)+1$。

对每个 $n \in \omega$，定义 $b(n) := [2^n]^{\leq g(n)+1}$。因此，对每个 $X \in \mathcal{F}$，都有 $y^X \in \prod b$。

由于$|\mathcal{F}| < \mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{b,\ g}$，我们找到 $S \in \mathcal{S}(b,\ g)$，使得对于每个 $X \in \mathcal{F}$ 都有 $y^X \in^* S$。定义

$$A := \{x \in \mathbb{Q} : \exists n_0 \in \omega : x|_{n_0} = \eta|_{n_0} \wedge \forall n > n_0 : x|_n \in \bigcup S(n)\}).$$

由于 $|S(n)| \leq g(n)$，我们有 $|\bigcup S(n)| \leq g(n)(g(n)+1) \leq f(n)$，因此 A的各层大小为 $\leq f+1$。接下来只需检查 A 与每个 $X \in \mathcal{F}$的交集非空。

令 $n_0 \in \omega$ 使得 $\forall n > n_0 :\ y^X(n) \in S(n)$。由于 $y^X_{g(n_0)}|_{n_0} = \eta|_{n_0}$ 且 $\forall n > n_0 :\ y^X_{g(n_0)}|_n \in y^X(n) \subseteq \bigcup S(n)$，我们看到 $y^X_{g(n_0)} \in A \cap X$。⊣

考察上界时，我们先注意到， $\mathfrak{ge}$(Laver) 显然不超过零测超滤子的泛型存在数，因为每个 $\mathcal{I}_f$都由闭包为零测度的集合构成。借鉴 Brendle 和 Flaˇskovˊ的工作，我们用 mz 表示闭包为零测度的集合所构成的理想，并用 $\mathcal{E}$ 表示由 mz 生成的 σ-理想。此外，按照惯例， $\mathfrak{d}=\min\{|\mathcal{F}|:\ \forall g\in\omega^\omega\ \exists f\in\mathcal{F}:\ g\leq^* f\}$。Brendle [6] 证明了以下结果

Fact 4.10 ([6], D 定理). $\mathfrak{ge}(\mathrm{mz})=\max\{\mathrm{non}(\mathcal{E}),\mathfrak{d}\}$.

由此可得

Fact 4.11. $\mathfrak{ge}(\mathrm{Laver})\leq\max\{\mathrm{non}(\mathcal{E}),\mathfrak{d}\}$.

回顾一下， $\mathcal{SN}$ 表示 2^ω的强零测子集所构成的理想，而 non($\mathcal{SN}$) 是一个非强零测集合的最小基数。Miller [16] 将 non($\mathcal{SN}$)刻画为满足以下条件的有界族的最小基数：对于所有 $g\in\omega^\omega$，都存在 $f\in\mathcal{D}$，使得集合 $\{n\in\omega:\ g(n)=f(n)\}$ 是有限的。利用与 Canjar [8]的引理 10 以及 Brendle 和 Flaˇskovˊ的命题 3.18 类似的论证， [7]，我们将得到 $\mathfrak{ge}$(Laver) $\leq$ non($\mathcal{SN}$)。下文中，我们将 $\mathbb{Q}$ 与集合 $2^{<\omega}$等同。

Proposition 4.12. $\mathfrak{ge}$(Laver) $\leq$ non($\mathcal{SN}$)。

证明。设 $\kappa<\mathfrak{ge}$(Laver) 是一个基数，且 $h\in\omega^\omega$。设 $\mathcal{D}\subseteq\prod h$ 是一个大小为 κ 的族。我们将找到某个 $u\in\prod h$，使得集合 $\{n\in\omega:\ h(n)=f(n)\}$ 对每个$f\in\mathcal{D}$都是无限的，这表明 $\kappa<$ non($\mathcal{SN}$)。

将 ω 划分为区间 I_n，每个区间的大小为 n^2；再将每个 I_n 划分为区间 J_i^n,$i<n$，每个区间的大小为 n。固定一个严格递增序列 $\langle k_n:\ n\in\omega\rangle$，使得$\forall n\in\omega:\ 2^{k_n}\geq|\prod_{i\in I_n}h(i)|$，并令 $\varphi_n:\prod_{i\in I_n}h(i)\to 2^{k_n}$ 为一个单射。

对每个 $f\in\mathcal{D}$，定义

$$A_f=\{\varphi_n(t)\in 2^{k_n}:n\in\omega\wedge\ t\in\mathrm{dom}(\varphi_n)\wedge\ \exists j<n\ (t|_{J_j^n}=f|_{J_j^n})\}.$$

注意，族 $\mathcal{F}=\{A_f:\ f\in\mathcal{D}\}$ 是一个基数为 κ 的滤子基。找一个非递减无界函数 $g\in\omega^\omega$，使得对所有 $n>0$ 都有 $g(k_0)=0$ 且 $g(k_n)=n-1$。由于 $\kappa<\mathfrak{ge}$（Laver），我们找到 $A\in[\mathbb{Q}]^\omega$，其各层的大小为 $\leq g+1$，使得$\mathcal{F}\cup\{A\}$ 仍然生成一个滤子。

对每个 $n\in\omega$，将 $A\cap 2^{k_n}$ 列为 $\{s_i^{k_n}:\ i<n\}$（允许重复）。定义 $u\in\prod h$，使得对所有 $j<n$， u 在 J_j^n 的第 i 个元素上与 $\varphi_n^{-1}(s_i^{k_n})$ 一致（若 $s_i^{k_n}\notin\mathrm{ran}(\varphi_n)$，则任意定义 $\varphi_n^{-1}(s_i^{k_n})$）。我们断言，对每个 $f\in\mathcal{D}$，存在无穷多个 k，使得 $u(k)=f(k)$。

确实，令 $f\in\mathcal{D}$并找到 $\varphi_n(t)\in A_f\cap A$，其中 $n\in\omega$且 $t\in\prod_{i\in I_n}h(i)$。设 $\varphi_n(t)$是我们的 $A\cap 2^{k_n}$列表中的第 i 个元素。于是，根据定义，对于每个 $j<n$， u在 J_j^n的第 i 个成员上与 t一致。由于对于某个 $j<n$有 $t|_{J_j^n}=f|_{J_j^n}$，可知 u在区间 I_n内的某一点上与 f一致。由于 $A_f\cap A$是无限的，证毕。⊣

请注意，只需稍微改写前面的证明，便可看出，快速超滤子的泛型存在性实际上蕴含 $\mathrm{non}(\mathcal{SN}) = \mathfrak{c}$。这是因为我们只要求上述集合 A 与每个有限集 $\prod_{i\in I_n} h(i)$ 的交集至多包含 n 个点。如果滤子基 $\mathcal{F}$ 可以扩张为快速超滤子，那么显然可以得到这样的A。

结合命题 4.6、4.9 和 4.12，以及事实 4.11，我们得到

Corollary 4.13。

$$\mathrm{cov}(\mathcal{M}), \mathrm{non}(\mathcal{NA}) \leq \mathfrak{ge}(\mathrm{Laver}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{SN}), \max\{\mathrm{non}(\mathcal{E}), \mathfrak{d}\}.$$

由于 Mathias 模型、Laver 模型和 Miller 模型中都不存在快速滤子，因此这些模型中也不存在 Laver 超滤子。稍后我们将看到，Silver 模型中也不存在 Laver 超滤子。对于其余经典模型中的三个，我们有如下结论：

Corollary 4.14. Laver 超滤子在 Cohen 模型中泛型存在，而在随机模型和 Sacks 模型中泛型不存在[8]。

证明。 由于在 Cohen 模型中 $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$，而在随机模型和 Sacks 模型中 $\mathrm{non}(\mathcal{SN}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{N}) = \omega_1$。⊣

Remark. 在继续讨论下一个结果之前，我们先指出，推论 4.13 中的所有不等式都不是紧的：

(i) Cardona、Mejía 与 Rivera-Madrid [10, D 定理和定理 E）] 构造了若干模型，其中 $\mathrm{non}(\mathcal{NA}) < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ 成立，因此 $\mathrm{non}(\mathcal{NA}) \leq \mathfrak{ge}$(Laver) 是相容的。(ii) 在下文定理 4.19 所给出的（无 P-点）+（拉弗超滤子的泛型存在性）模型中，我们有 $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) < \mathrm{non}(\mathcal{NA}) = \mathfrak{ge}(\mathrm{Laver}) = \mathfrak{c}$。[9](iii) 在本节其余部分，我们将看到 Silver 模型中不存在拉弗超滤子。同一论证可加以改编，以表明在连续统假设的模型上，经由长度为 ω_2 的下有界-2^n *Silver* 强迫 迭代所得到的模型中不存在拉弗超滤子。然而，有界 Silver 强迫会使基模型实数成为强零测；因此，该模型中 $\mathfrak{ge}(\mathrm{Laver}) < \mathrm{non}(\mathcal{SN}) = \mathfrak{c}$ 成立（例如，关于该强迫的定义以及这一事实的证明，见 [3] 中的 7.4.C）。(iv) 由于马蒂亚斯模型中不存在拉弗超滤子，它满足 $\mathfrak{ge}(\mathrm{Laver}) < \mathrm{non}(\mathcal{E}) = \mathfrak{d} = \mathfrak{c}$（例如，见 [3] 中的引理 7.4.2）。

[8]不过请注意，它们确实存在于 Sacks 模型中，因为拉姆齐超滤子存在于其中。[9]当然，仅仅将这些基数特征区分开来，并不意味着 P-点不存在，因为定理 4.19 中用于强迫非（$\mathcal{NA}$）$= \mathfrak{c}$ 的偏序是 ω^ω-bounding。

结果表明，一个与 Chodounsk´y 和 Guzm´an [11]的论证极为相似的论证表明，Silver 模型中不存在拉弗超滤子。我们将在下文概述该论证，感兴趣的读者可以在 [11] 中找到完整的证明。

我们用 $\mathbb{SI}$ 表示 Silver 强迫，它由部分函数 $p\colon \mathrm{dom}(p) \to 2$ 组成，其中 $\mathrm{dom}(p) \subseteq \omega$ 为余可数集，并按包含关系排序。回忆一下，Silver 强迫是 proper 的，且具有 萨克斯性质；如果一个强迫概念具有拉弗性质且不会添加无界实数，就称它具有萨克斯性质。下文将借用 [11] 的记号。

THEOREM 4.15. 假设 $\mathbf{V} \vDash$ 满足连续统假设，并令 $\mathbb{P}_{\omega_2} = \langle \mathbb{P}_\alpha, \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\beta \colon \alpha \leq \omega_2, \beta < \omega_2 \rangle$ 为 Silver 强迫的可数支撑迭代，其中对所有 $\alpha < \omega_2$ 都有 $\mathbb{P}_\alpha \Vdash \mathbb{Q}_\alpha = \underset{\sim}{\mathbb{SI}}$。令 $\sim G \subseteq \mathbb{P}_{\omega_2}$ 为泛型。那么 $\mathbf{V}[G]$ 中不存在 Laver 超滤子。

根据 Shelah 的著名定理（例如参见 [20] 第 VI 章），Silver 强迫的任意可数支撑迭代也具有萨克斯性质。此外，根据经典论证，对于任意超滤子 $\mathcal{U} \in \mathbf{V}[G]$，都存在平稳多个具有不可数共尾性的 $\alpha < \omega_2$，使得 $\mathcal{U} \cap \mathbf{V}[G_\alpha] \in \mathbf{V}[G_\alpha]$ 是一个超滤子，其中 G_α 是对应于 $\mathbb{P}_\alpha$ 的泛型。因此，要证明定理 4.15，只需证明接下来的命题；不过，先回顾一下 [11] 中的一些定义。

DEFINITION 4.16. (i) 对于可能是部分函数的 $p\colon \omega \to 2$ and $n \in \omega$，定义$I_n(p) = \{k \in \omega \colon |k \cap p^{-1}(1)| = n\}$ and $\mathcal{I}(p) = \{I_n(p) \colon n \in \omega\}$，即相应的区间划分。对于这类（部分）函数 p，$\mathrm{dom}(p)$ 表示 p的定义域，而$\mathrm{cod}(p)$ 表示p在 ω中的定义域的补集。

(ii) 对于正整数 n，$\equiv_n$ 表示模 n 同余，$-_n$ 表示模 n减法。对于 $m \in \omega$ 和 $A \subseteq \omega$，$m \in_n A$ 表示 A 包含一个与 m 模 n同余的自然数。

(iii) 对于 $n \in \omega$，$k(n) \in \omega$ 表示满足以下条件的最小自然数 k：对于每个$C \in [k]^{n^2}$，都存在 $s \in k$ 使得 $C \cap (C -_k \{s\}) = \varnothing$。

(iv) 如下定义 $v, m \in \omega^\omega$。$v(0) = 0$ 和 $m(0) = k(2)$。假设 $v(n-1)$ 和 $m(n-1)$ 已定义，则令 $v(n) = \sum_{i<n} m(i)$，且 $m(n) = k((n+1)(v(n)+2))$。

PROPOSITION 4.17. 假设 $\mathcal{U}$ 是一个超滤子，且 $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$ 是一个具有萨克斯性质的强迫偏序集的 $\mathbb{SI}$-名称。那么，在任何 $(\mathbb{SI} * \underset{\sim}{\mathbb{R}})$-泛型扩张中，都不能将 $\mathcal{U}$ 扩展为 Laver 超滤子。

证明。我们将使用定义 2.1 中对拉弗超滤子的第一种刻画。在泛型扩张中，令 $s\colon \omega \to 2$ 表示西尔弗泛型实数，并对$n \in \omega$ 和 $i < m(n)$，定义

$$\mathcal{D}_i^n = \bigcup \{I_j(s) : j \equiv_{m(n)} i\},$$

以及 $\mathcal{D}^n = \{\mathcal{D}^n_i : \ i < m(n)\}$。我们断言，划分序列 $\{\mathcal{D}^n : \ n \in \omega\}$ 证明了在由 $\mathcal{U}$ 扩展的任意超滤子在由 $\mathbb{SI} * \mathbb{R}$ 生成的泛型扩张中不具有 Laverness。只需证明以下命题。

Claim 4.18. 假设存在一个 $(\mathbb{SI} * \mathbb{R})$-名称 $\underset{\sim}{Z}$，表示 ω 的一个子集；一个名称 $\underset{\sim}{h}$，表示满足对所有 $n \in \omega$ 均有 $\underset{\sim}{h}(n) \in [m(n)]^n$ 的函数；以及一个条件 $\langle p, \ q\rangle \in \mathbb{PS} * \mathbb{R}$ 使得

$$\langle p, \underset{\sim}{q}\rangle \Vdash (\forall n)(\forall i < m(n))(\underset{\sim}{Z} \cap \mathcal{D}^n_i \neq \varnothing \Rightarrow i \in \underset{\sim}{h}(n)).$$

那么存在某个 $U \in \mathcal{U}$ 和 $\langle p', \ q\rangle \leq \langle p, \ q\rangle$，使得 $\langle p', \ q\rangle \Vdash U \cap \underset{\sim}{Z} = \varnothing$.

命题证明。假设 $\underset{\sim}{Z}$, $\underset{\sim}{h}$, $\langle p, \ q\rangle$ 如陈述所述。根据萨克斯性质，我们可以假设存在一个函数 P，它在基模型中的 ω 上定义，并且满足$\forall n \in \omega : \ P(n) \in [m(n)]^{n^2}$，且

$$\langle p, \underset{\sim}{q}\rangle \Vdash (\forall n)(\forall i < m(n))(\underset{\sim}{Z} \cap \mathcal{D}^n_i \neq \varnothing \Rightarrow i \in P(n)).$$

选取一个区间划分 $\mathcal{J} = \{J_i : \ i \in \omega\}$，使得对所有 $n \in \omega$ 和 $j \in 2$，都有 $|J_{2n+j} \cap \mathrm{cod}(p)| > m(n)$。不失一般性，假设 $W = \bigcup_{n\in\omega} J_{2n+1} \in \mathcal{U}$。
设 $p_1 \leq p$ 是一个扩展，使得对所有 $n \in \omega$，都有 $J_{2n+1} \subseteq \mathrm{dom}(p_1)$，且对所有 n，都有 $|\mathrm{cod}(p) \cap J_{2n}| = m(n)$。注意，对每个 $n \in \omega$，都有 $|\mathrm{cod}(p_1) \cap \min(J_{2n})| = v(n)$。令$C_n = P(n)^{-m(n)}(v(n) + 2)$，则对每个 $n \in \omega$，都有 $|C_n| \leq n^2 \cdot (v(n) + 2)$。最后，令$H_n = J_{2n+1} \cap \bigcup\{I_j(p_1) : \ j \in_{m(n)} C_n\}$ 对所有 $n \in \omega$ 成立。和 [11], 中一样，我们现在将证明分为两种情况。这里只给出第一种情况；另一种情况的论证，读者可参阅 [11] 中命题 5 的证明。

情况 1。假设 $U = \bigcup\{J_{2n+1} \setminus H_n : \ n \in \omega\} \in \mathcal{U}$。求 $p_2 \leq p_1$ 使得

(i) $p_2^{-1}(1) = p_1^{-1}(1)$,

(ii) $|\mathrm{cod}(p_2) \cap J_{2n}| = 1$ 对所有 $n \in \omega$成立。

但是,

(i) $\mathcal{I}(p_2) = \mathcal{I}(p_1)$, (ii) $|\mathrm{cod}(p_2) \cap \min(J_{2n+1})| = n + 1$, (iii) 若 $I_j(p_2) \subseteq J_{2n+1}$, 则 $I_j(p_2) \subseteq \mathrm{dom}(p_2)$。

由此可知，在由 $\mathbb{SI} * \mathbb{R}$ 生成的泛型扩张中，对于满足 $I_j(p_2) = I_{j+i}(s)$ 的唯一 $i \leq n+1$，若 $\underset{\sim}{Z} \cap I_{j+i}(s) \neq \varnothing$，则 $j \in_{m(n)} C_n$。因此，$\langle p_2, \ \underset{\sim}{q}\rangle \Vdash \underset{\sim}{Z} \subseteq (\bigcup_{n\in\omega} H_n) \cup (\bigcup_{n\in\omega} J_{2n})$。由于 $U \cap ((\bigcup_{n\in\omega} H_n) \cup (\bigcup_{n\in\omega} J_{2n})) = \varnothing$，情况至此结束。

情形 2. 这是 $\bigcup_n H_n \in \mathcal{U}$ 的情形，我们请读者参阅 [11] 中的相应情形。⊣

至此，命题 4.17 的证明完成。 ⊣

注意，Silver 模型包含 Q-点，因而包含快速超滤子。由此可见，快速超滤子的存在并不蕴含 Laver 超滤子的存在。
最后，我们证明：在 Laver 超滤子泛型存在的同时，不存在 P-点是一致的。根据命题 4.9，只需找到一个不存在 P-点，且满足 $\mathrm{non}(\mathcal{NA}) = \mathfrak{c}$ 的模型。

THEOREM 4.19. 在 Laver 超滤子泛型存在的同时，不存在 P-点是一致的。

为了证明这一点，我们将在长度为 ω_2 的可数支撑迭代中交错使用两个相当著名的强迫概念；这两者最初都由 Shelah 引入。因此，在开始定理 4.19 的证明之前，我们先在下面两个引理中回顾这两个强迫概念：

LEMMA 4.20（Shelah [20], 第 VI 章）。设 $\mathcal{U}$ 是一个 P-点。存在一个基数为 $\mathfrak{c}$ 的适当强迫概念 $\mathbb{Q}(\mathcal{U})$，具有以下性质：

(i) $\mathbb{Q}(\mathcal{U})$ 是 ω^ω-有界的（即它不会添加无界实数），并且

(ii) 对任意一个 $\mathbb{Q}(\mathcal{U})$-名称 $\dot{\mathbb{R}}$，若其对应的强迫概念满足 $\mathbb{Q}(\mathcal{U}) \Vdash$ "$\dot{\mathbb{R}}$ 是 ω^ω-bounding"，则有 $\mathbb{Q}(\mathcal{U}) * \dot{\mathbb{R}} \Vdash$ "$\mathcal{U}$ 不能扩展为一个 P-点"。

LEMMA 4.21（Shelah [19],另见 [1] 和 [14]，其中的表示略有不同）。令 $b \in \omega^\omega$，并设 $h(n) := n + 1$。存在一个适当的、ω^ω-bounding 强迫概念 $\mathbb{Q}_b$，其基数为 $\mathfrak{c}$，使得

$$\mathbb{Q}_b \Vdash \exists S \in \mathcal{S}(b,h)\ \forall x \in \left(\prod b\right)^{\mathbf{V}} : x \in^* S. \tag{$*$}$$

证明。令 $b \in \omega^\omega$。不妨设 b 严格递增。设 $\mathbb{T}_b = \bigcup_{n\in\omega} \prod_{k<n} [b(k)]^{k+1}$。对于 $k,\ m \in \omega$，若集合 $A \subseteq [b(k)]^{k+1}$ m-大，则称其为大集：对于任意大小为 $\leq m$ 的 $x \subseteq b(k)$，都存在$a \in A$ 使得 $x \subseteq a$。若对于每个茎（T）$\subseteq t \in T$，$\mathrm{succ}_T(t)$ 都是m-大集，则称完美子树 $T \subseteq \mathbb{T}_b$ 为一个 m-树 。
我们定义偏序 $\mathbb{Q}_b$，其元素是完美子树 $T \subseteq \mathbb{T}_b$，并且对任意$m \in \omega$，存在 $n \in \omega$满足：$t \in T \wedge |t| \geq n \implies \mathrm{succ}_T(t)$ 是 m-大。我们按包含关系排列 $\mathbb{Q}_b$。利用以下观察，不难验证 $\mathbb{Q}_b$ 是适当的且具有 ω^ω-支配性（参见例如 [1]的引理 3.12）：

OBSERVATION. 若 $m > 0$、$n \in b(k)$ 且 $A \subseteq [b(k)]^{k+1}$ 是 $(m+1)$-大的，则 $\{a \in A :\ n \in a\}$ 是 m-大的。

为完成该证明，我们证明由 $\mathbb{Q}_b$ 引入的泛型逍遥 $\underset{\sim}{S} \in \mathcal{S}(b,h)$，即穿过 $\mathbb{T}_b$ 的泛型分支，满足 $(*)$。
为此，设 $x \in \prod b$ 为基模型中的一个实数，并设 $T \in \mathbb{Q}_b$ 为一个条件。令 $s_0 =$ 茎(T) 与 $|s_0| = n_0$。必要时加以扩展后，我们可以假定 T 是一棵 2-树。利用前述观察，我们可以归纳地定义 $T' \leq T$，使得

(i) $T' \in \mathbb{Q}_b$，(ii) 茎$(T') = s_0$ 且 T' 是一棵 1-树，
(iii) 对所有 $s_0 \subseteq s \in T'$ 与 $n_0 \leq n \in \mathrm{dom}(s)$：$x(n) \in s($
$n)$。

由此可得 $T' \Vdash \forall n \geq n_0 : \quad x(n) \in \underset{\sim}{S}(n)$。 ⊣

利用这些事实，我们现在完成定理 4.19 的证明。

定理 *4.19* 的证明。 我们从一个满足 $\mathbf{V} \models \mathfrak{c} = \omega_1 \wedge 2^{\omega_1} = \omega_2 \wedge \diamondsuit_{\{\alpha<\omega_2 \,:\, \mathrm{cf}(\alpha)=\omega_1\}}$ 的基模型出发。利用标准记账技巧，我们如下定义 $\langle \mathbb{P}_\alpha, \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\beta : \alpha \leq \omega_2, \beta < \omega_2 \rangle$，即长度为 ω_2 的真且 ω^ω-有界强迫概念的可数支撑迭代。在共尾性不可数的阶段 $\alpha < \omega_2$，若菱形序列确实在 α 处编码了这样一个名称，则令 $\underset{\sim}{\mathcal{U}}_\alpha$ 为由 $\diamondsuit_{\{\alpha<\omega_2 \,:\, \mathrm{cf}(\alpha)=\omega_1\}}$ 序列所编码的某个 P-点的$\mathbb{P}_\alpha$-名称。否则，令 $\underset{\sim}{\mathcal{U}}_\alpha$ 为任意 P-点的一个名称（这是可能的，因为在由 $\mathbb{P}_\alpha$ 得到的扩展中连续统假设成立）。然后我们定义 $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\alpha$ 为 $\mathbb{Q}(\underset{\sim}{\mathcal{U}}_\alpha)$ 的一个 $\mathbb{P}_\alpha$-名称。
对于其他阶段，同样利用标准记账技巧，我们在基模型中找到一个枚举 $\langle \underset{\sim}{b}_\alpha : \alpha \in \{\alpha < \omega_2 : \mathrm{cf}(\alpha) \neq \omega_1\} \rangle$，使得每个 $\underset{\sim}{b}_\alpha$ 都是 ω^ω中某个函数的 $\mathbb{P}_\alpha$-名称，并且每个这样的 $\mathbb{P}_{\omega_2}$-名称都会在该序列中共尾地出现。然后，在阶段 $\alpha \in \{\alpha < \omega_2 : \mathrm{cf}(\alpha) \neq \omega_1\}$，我们将 $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\alpha$ 定义为 $\mathbb{Q}_{\underset{\sim}{b}_\alpha}$的一个 $\mathbb{P}_\alpha$-名称。因此，根据前两个引理和引理 4.8，在由 $\mathbb{P}_{\omega_2}$得到的泛型扩张中不存在 P-点，但 $\mathrm{non}(\mathcal{NA}) = \mathfrak{c} = \omega_2$ 成立。因此，根据命题 4.9，Laver超滤子在该扩张中泛型存在。⊣

开放问题

本文最后列出一些尚未解决的问题。

Problem 1. MA 是否蕴含存在一个遗传快速的可数闭超滤子，而它不是 Laver 超滤子?

Problem 2. 是否存在一致的情形，使得 $\max\{\mathrm{non}(\mathcal{NA}), \mathrm{cov}(\mathcal{M})\} < \mathfrak{ge}$(Laver)?

读者或许已经注意到，尽管我们证明了随机模型中不存在泛型的拉弗超滤子，但我们无法确定它们在随机模型中是否存在。

Problem 3. 随机模型中是否存在拉弗超滤子?

参考文献

[1] Uri Abraham. 适当强迫。载于《集合论手册》，第333–394页。Springer, 2009年。[2] Christopher Barney. 自然数上的超滤子。《符号逻辑杂志》，68(3):764–784，2003年。[3] Tomek Bartoszy´nski 和 Haim Judah. 集合论。A K Peters, Ltd.，马萨诸塞州韦尔斯利，1995年。关于实数直线的结构。[4] James E. Baumgartner. ω上的超滤子。《符号逻辑杂志》，60(2):624–639，1995年。[5] Aleksander B-laszczyk 和 Saharon Shelah. 完备布尔代数的正则子代数。《符号逻辑杂志》，66(2):792–800，2001年。[6] J¨org Brendle. 在 P-点与处处稀疏超滤子之间。《以色列数学杂志》，113:205–230，1999年。[7] J¨org Brendle 和 Jana Fla˘skov´a. 自然数上超滤子的泛型存在性。Fundamenta Mathematicae, 236(3):201–245，2017年。[8] R. Michael Canjar. 关于特殊超滤子的泛型存在性。《美国数学会会刊》，110(1):233–241，1990年。[9] Miguel A. Cardona 和 Diego A. Mej´ıa. 关于 Yorioka 理想的基数特征。MLQ。《数学逻辑季刊》，65(2):170–199，2019年。[10] Miguel Antonio Cardona、Diego Alejandro Mej´ıa 和 Ismael Rivera-Madrid. 零可加理想与瘦可加理想的一致性数。《符号逻辑杂志》，第1–37页，2025年。[11] David Chodounsk´y 和 Osvaldo Guzm´an. Silver 扩张中不存在 P 点。《以色列数学杂志》，232(2):759–773，2019年。[12] Haim I. Judah 和 Saharon Shelah. 实数的 Δ^1_2 集。Ann. Pure Appl. Logic, 42(3):207–223，1989年。[13] Jussi Ketonen. 关于整数 Stone-˘Cech 紧化中 P 点的存在性。Fundamenta Mathematicae，92(2):91–94，1976年。[14] Claude Laflamme. 消除小滤子。《美国数学会会刊》，114(2):535–544，1992年。[15] Richard Laver. 关于 Borel 猜想的一致性。《数学学报》，137(3-4):151–169, 1976年。

[16] Arnold W. Miller. 测度与范畴的一些性质。《美国数学会汇刊》，266(1):93–114，1981年。[17] Francisco Santiago Nieto-de la Rosa、Osvaldo Guzm´an 和 Ramos-Garc´ıa Ulises Ariet. 与通过 Katˇetov 序表达的余理想相关的 Laver 强迫性质。arXiv:2601.09061，(2026年)。[18] Janusz Pawlikowski. 测度与范畴传递基的幂。《美国数学会会刊》，93(4):719–729，1985年。[19] Saharon Shelah. 差异万岁。I. 可数模型超幂的非同构。载于《连续统集合论（加利福尼亚州伯克利，1989年）》，数学科学研究所出版物第26卷，第357–405页。Springer，纽约，1992年。[20] Saharon Shelah.《适当与不适当强迫》。数理逻辑展望。施普林格出版社，柏林，第二版，1998年。[21] Teruyuki Yorioka. 强零测度理想的共尾性。《符号逻辑杂志》，67(4):1373–1384，2002年。