arXiv:2602.01484v1 [math.AG] 1 Feb 2026

用单位正方形最优地填充大正方形

RORY MCCLENAGAN

Abstract. 我们证明，可以用单位正方形装填边长为 x 的大正方形，使浪费空间 $W(x) = O(x^{3/5})$。

设 $S(x)$ 表示边长为 x 的正方形，其中 x 足够大。用内部互不相交、边长为单位长度的正方形，尽可能高效地装填 $S(x)$。设 $W(x)$ 表示通过此类装填后， $S(x)$ 中未被覆盖的最小面积。当然，如果 x 是整数，那么 $W(x) = 0$。一般而言，当 x 不是整数时，若以一种直接的方式摆放单位正方形，使其与 $S(x)$ 的边平行，就会产生浪费空间 $W(x) = O(x\{x\})$。这里， $\{x\}$ 是 x 的小数部分；如果它与 0 保持一定距离，浪费空间 $W(x)$ 就会直接变为 $O(x)$。

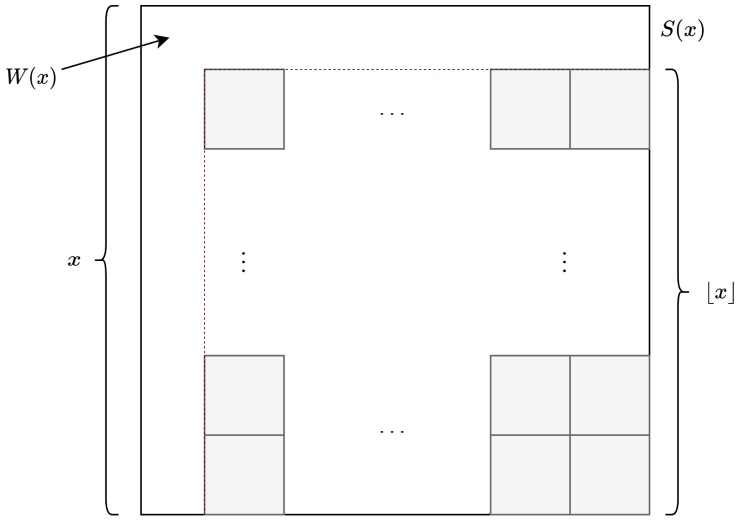

Figure 1. 用单位边长的正方形对 $S(x)$进行的平凡装填。若 $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ 有界且远离 0，则浪费空间 $W(x)$仅为 $O(x)$。

然而，若将正方形以微小倾角装填，浪费空间可以减小。1975年，Paul Erd¨os与Ronald Graham证明了 $W(x) = O(x^{\frac{7}{11}})$（见 [2]）。这引发了关于 $W(x)$恰当增长阶的讨论。我们确实知道，该界至少不可能优于 $O(x^{1/2})$。这一结果归功于1978年的罗斯与沃恩（见 [3]），他们证明了

$$W(x) > 10^{-100}\sqrt{x - \lfloor x \rfloor}.$$

另一方面，根据私人通信（例如，参见 [1]），蒙哥马利将上界改进为 $W(x) = \bar{O}(x^{\frac{3-\sqrt{3}}{2}})$。2009年，Fan Chung 和 Ronald Graham 进一步将其改进为 $W(x) = O(x^{\frac{3+\sqrt{2}}{7}} \log x)$。最近，在2020年，Chung 和 Graham 声称可以将其改进为 $W(x) = O(x^{3/5})$（参见 [1]）。遗憾的是，这一结果存在错误，使得目前已知的最佳界限又回到了 $W(x) = O(x^{\frac{3+\sqrt{2}}{7}} \log x)$。在本文中，我们利用一种新算法证明，Chung 和 Graham 在 [1] 中声称的界限实际上是正确的：

Date：2026年2月3日。

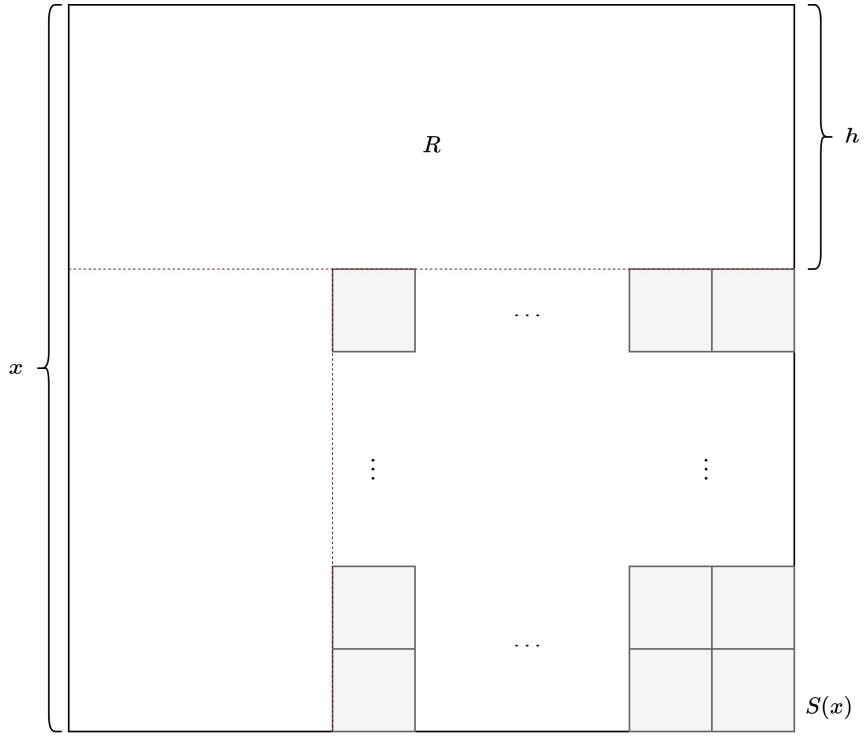

FIGURE 2. 我们首先以平凡方式装填 $S(x)$，但留下两个宽度为 h的矩形。

定理1. 用单位正方形装填正方形 $S(x)$ 时，浪费空间有如下上界：

$$W(x) = O(x^{3/5}).$$

我们将分若干阶段证明定理1。首先，在第1节中，除有限个梯形区域 T 外，我们用单位正方形的“堆叠”装填 $S(x)$的全部。然后，我们使用第2节和第3节中所述的两种不同“子算法”，装填这样一个一般的梯形区域。在第4节中，我们说明如何将它们组合起来，形成 T的装填。随后我们优化参数，并证明由我们的装填所产生的浪费空间为 $O(x^{3/5})$。

致谢。 我们感谢Alia Hamieh博士提出的有益意见以及对本文的校对。

记号。 在本文中，我们将使用标准渐近记号 $X = O(Y)$、$X \ll Y$和 $Y \gg X$ 来表示关系 $X \leq C|Y|$。若改用记号 $X = O_M(Y)$或 $X \ll_M Y$，则相应常数 C 可以依赖于参数 M。若 $X \ll Y$且 $Y \ll X$，我们使用$X \asymp Y$。最后，若 $X/Y \to 0$ 相对于上下文中所定义的某种显式或隐式极限行为成立，我们便使用记号 $X = o(Y)$。

1. 使用单位正方形堆装 S(x)

我们首先以一种简单的方式装填 $S(x)$：从一个角开始，放置边与 $S(x)$ 平行且彼此紧贴的单位正方形，直到唯一未装填的区域是两个宽度为 h 的矩形（见图2）。注意，通过改变这一阶段所装填的正方形数量，我们可以将 h 调整为最接近的 $O(1)$；在证明的最后我们会这样做。

不失一般性，我们只装填其中一个矩形，称其为 R。我们假设 R 的短边（长度为 h）与竖直坐标轴对齐。接着，我们用长度为 n 、略微倾斜且两侧都与 R 相接触的单位正方形近垂直堆叠来装填 R （见

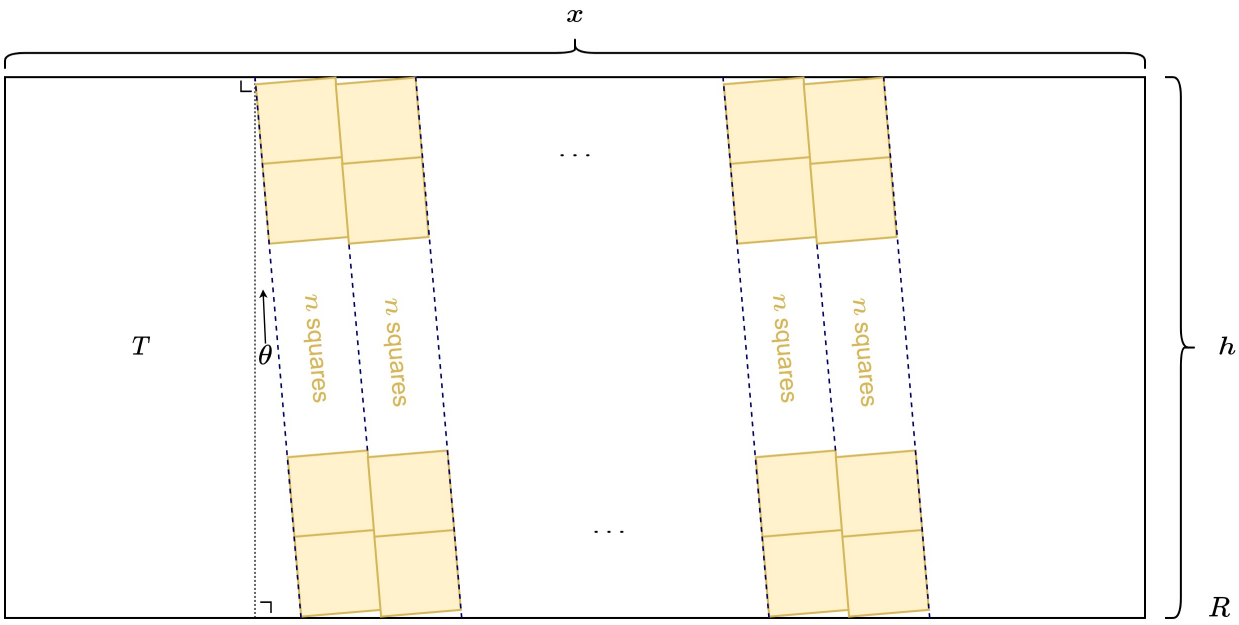

FIGURE 3. 我们用边长为 R by n 的单位正方形平行堆列来填充，使其倾斜角为 θ，且每列都与 R 的顶部和底部相接。我们将由此形成的未填充梯形之一称为 T。

图3）。选择 $n \in \mathbb{Z}^+$，使得 $1 < n - h \ll 1$。若 θ 是这些堆叠的倾斜角，则注意到

$$\sec(\theta) = \frac{n + \tan\theta}{h}.$$

泰勒级数展开可得

$$\theta^2 = \frac{2(n-h)}{h} + O\left(\frac{\theta}{h} + \theta^4\right).$$

因此，

$$\theta \asymp \frac{1}{\sqrt{h}}. \tag{1.1}$$

以这种方式填充所有 R，但两端各留下一条高度为 h 的窄梯形。为方便起见，我们只填充其中一条这样的梯形，称之为 T。请注意，我们可以通过调整此阶段所填充的边长为 n 的堆列数量，将 T 的宽度（即其较短边的宽度）固定为最接近 O 的值（1）；稍后我们将这样做。我们假设 T 的边长为 h 的一侧与竖直坐标轴对齐。我们将其称为 T 的垂直墙。与之相对的一侧称为 T 的倾斜墙。

除了在 T顶部和底部进行简单装填的一部分区域外，我们将把 T 装填到一组近似水平的条带中，每条条带的高度约为 $2\theta^{-1}$。每条这样的条带都将使用两种装填算法进行装填。我们会沿着 T的整个长度复制这种装填方式。在第2节和第3节介绍这两种装填算法时，我们将以抽象方式进行描述，暂不确定它们在 T中的垂直位置，而只将 T的两侧称为垂直墙和倾斜墙。我们将在第4节中正式结合这两种装填算法。

2. 第一种装填算法

设置。首先，放置一叠近水平堆叠 H_0，其倾斜角为 φ，包含 m 个单位正方形，使其左边缘贴着垂直墙，右边缘距离

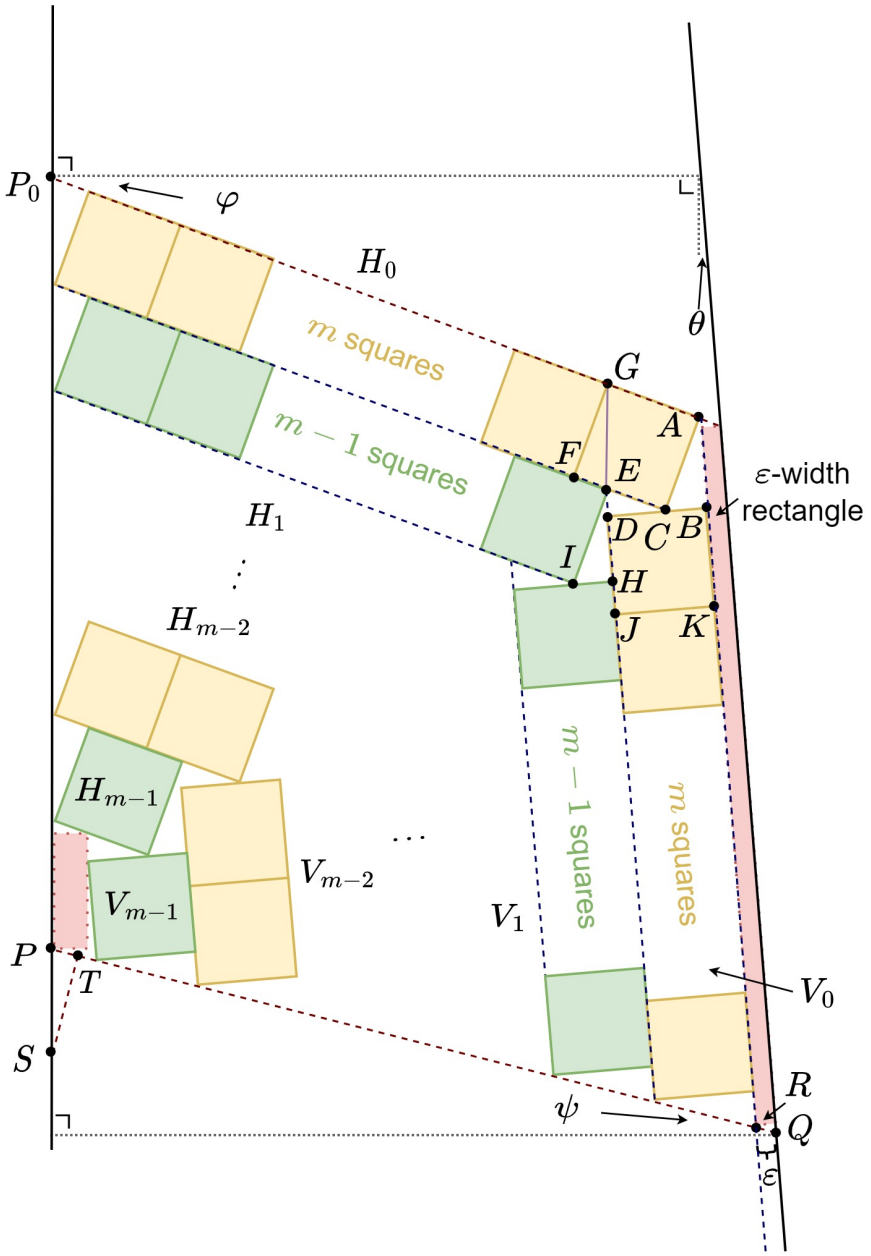

FIGURE 4. 第一种填充算法。

倾斜墙（见图4）。现在沿倾斜墙放置一个宽度为 ε 的小矩形，覆盖第一个装填算法将覆盖的整个垂直区域。该区域不会被装填。放置一叠垂直堆 V_0，倾斜角为 θ，包含 m 个正方形，使其紧贴宽度为 ε 的矩形，并与倾斜墙平行。

接下来，将包含 $m-1$ 个正方形的水平堆叠 H_1 紧贴 H_0 放置，使其接触垂直墙。类似地，将包含 $m-1$ 个正方形的垂直堆 V_1 紧贴 V_0放置，并使其接触 H_1。然后，我们以类似的方式继续放置包含$m-i$个正方形的堆叠 H_i 和 V_i，对于 $i=0$、.....、$m-1$。

如图4所示，标记前两组水平堆叠和垂直堆叠上的点。构造直线GE，注意，按构造方式，它必定是垂直的。我们将以这样的方式固定 φ，使形成的角 $\angle EDC$ 为直角。这意味着有一条直线从 E 延伸到底部

左角，并与 V_0 成 θ角倾斜，就像倾斜墙一样，这样我们就可以迭代地以与 H_0 和 V_0相同的方式，依次堆叠每个后续的 H_i 和 V_i 。

估算 φ。注意到

$$\angle FGE = \varphi, \quad \angle ECD = \varphi + \theta, \quad \text{and} \quad \angle CAB = \varphi + \theta,$$

因此

$$EC = 1 - \tan\varphi \quad \text{and} \quad DC = 1 - \sin(\varphi + \theta). \tag{2.1}$$

因此， $\angle EDC$ 是直角，当且仅当

$$(1 - \tan\varphi)\cos(\varphi + \theta) = 1 - \sin(\varphi + \theta). \tag{2.2}$$

固定 φ 为方程 (2.2) 的解。现在我们想要确定 φ 关于 θ的近似表达式。应用泰勒级数展开可得

$$\left(1 - \varphi + O(\varphi^3)\right)\left(1 - \frac{\varphi^2}{2} - \varphi^2\theta^2 - \frac{\theta^2}{2} + O\left((\varphi+\theta)^4\right)\right) = 1 - \varphi - \theta + O\left((\varphi+\theta)^3\right).$$

合并低阶项可得

$$\theta - \frac{\varphi^2}{2} - \varphi^2\theta^2 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\varphi\theta^2}{2} = O\left((\varphi+\theta)^3\right).$$

这意味着 $\varphi^2 + O(\varphi^3) = 2\theta + O(\theta^2)$。由此可得 $\varphi^2 \asymp \theta$ ，从而可以写成 $\varphi = \sqrt{2\theta + O(\theta^{3/2})}$。泰勒级数展开给出

$$\varphi = \sqrt{2\theta} + O(\theta) \quad \text{and} \quad \theta = \frac{1}{2}\varphi^2 + O(\varphi^3). \tag{2.3}$$

估计 ψ。 现在，我们已经固定了 φ （并用 θ 对其进行了估计），使得图4所示的铺砌布局可行，并且可以针对每个 H_i 和 V_i重复进行。这就自动确定了我们正在装填的这一区域底部所成的角 ψ （见图4）。现在我们要估计这个角。注意到 $\angle HKJ = \psi + \theta$，因此

$$DH = 1 - \tan(\psi + \theta). \tag{2.4}$$

另一方面，由于 IEH 和 ECD 相似，因此

$$ED + DH = \frac{DC}{EC}.$$

由于 $\angle ECD = \varphi + \theta$，我们可以将其重新排列为

$$DH = \cos(\varphi + \theta) - EC\sin(\varphi + \theta).$$

将此结果与 (2.1) 结合可得

$$DH = \cos(\varphi + \theta) - (1 - \tan\varphi)\sin(\varphi + \theta)$$

将此结果与 (2.4) 比较可知， ψ 是下式的唯一解

$$1 - \tan(\psi + \theta) = \cos(\varphi + \theta) - (1 - \tan\varphi)\sin(\varphi + \theta). \tag{2.5}$$

我们可以对该等式两边进行泰勒展开，并利用（2.3）化简误差项：

$$1 - \psi - \theta = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 - (\varphi + \theta) + \varphi^2 + O(\varphi^3 + \psi^3).$$

解得 ψ

$$\psi = \varphi - \frac{1}{2}\varphi^2 + O(\varphi^3 + \psi^3).$$

由此可得 $\psi + O(\psi^3) = \varphi + O(\varphi^2)$，因此 $\psi \asymp \varphi$，从而可以化简误差项。结合这一观察与（2.3），得到

$$\psi = \varphi - \theta + O(\varphi^3). \tag{2.6}$$

因此，与底部相比，我们在所装填区域上部的倾角上大约“损失”了 θ 。

现在，在这个阶段，我们唯一确定的量是 φ；选择它时，我们考虑的是要能够执行第一种填充算法。在第二种填充算法中，我们将从沿长度 PR 装填 $m+1$ 个正方形开始，相较于我们在第一种填充算法开始时装填的 m 个正方形（注意， R 被选为 PQ 上的点，使得从 R—到倾斜墙的距离为 ε）。为此，我们需要选择足够大的 m ，使第一种填充算法占据足够的竖直空间，从而迫使 PR 能沿其装下 $m+1$ 个正方形。

估算 m。我们希望选择 m ，使得 PR 的长度恰好足以容纳一叠以 ψ角倾斜的 $m+1$ 正方形（近水平叠放）。在垂直墙上取点 S，并在PR上取点 T，使得 $ST=1$，且 $\angle PTS$为直角（等价地， $\angle TSP=\psi$）。定义 m为满足 $TR\geq m+1$的最小整数。注意，倾斜墙与垂直墙之间的距离以 $O(\theta)$ 的速率增加。因此，将 m 增加 1 会使 TR 增加 $O(\theta)$。因此，我们对 m 的定义自动给出

$$TR=m+1+O(\theta).$$

需要注意的是，这个对 m （以及长度 TR）的定义与 ε无关，当然， TQ 取决于 ε:

$$TQ=m+1+O(\theta+\varepsilon). \tag{2.7}$$

现在我们要用已知量求出 m 的近似表达式。注意，从垂直墙到 V_{m-1} 左下角的水平距离，与从 F 到 J的水平距离相同，即 $O(\varphi)$。因此，从 P 到 V_{m-1} 左下角的距离也是 $O(\varphi)$，我们有:

$$TR=\frac{m}{\cos(\psi+\theta)}+O(\varphi)$$

然而，我们再次知道， TR 与 $m+1$ 之间的差至多为 $O(\theta)$。因此，

$$\frac{m}{\cos(\psi+\theta)}-m=1+O(\varphi).$$

对左侧进行泰勒展开后，得到 $\frac{1}{2}\psi^2m+O(\psi\theta m)$。因此，应用 (2.6) 和 (2.3) 可得

$$\theta m+O(\varphi^3m)=1+O(\varphi).$$

显然，这意味着 $m\asymp\theta^{-1}$，从而可以简化误差项，得到 m 的近似表达式:

$$m=\theta^{-1}+O(\varphi^{-1}). \tag{2.8}$$

总结。至此，第一装填阶段的分析告一段落。我们观察到两点重要内容。首先，注意到量 φ， ψ 和 m 都仅由 θ决定，是固定的，与 ε无关。其次，注意到已铺排正方形顶部的角 φ 与底部的角 ψ 相差约 θ （见 2.6）。这就是我们不能简单地将第一种填充算法一路迭代到梯形 T底部的原因。事实上，如果我们重置并连续应用第一种填充算法，每次应用都会产生一个高为 $O(m)$、角为 $\varphi-\psi\sim\theta$ 的三角形，其面积为 θ^{-1}。这比刚才描述的算法过程中产生的其他浪费空间的面积大一个数量级。因此，我们必须将这一算法与另一种能够“抵消” θ角度变化的算法配合使用。下一节将介绍具体做法。

3. The Second Packing Algorithm

设置。 第二种填充算法将从第一种填充算法结束的位置底部开始，沿梯形 T向下进行。放置一个与水平线成 ψ角倾斜的水平堆叠 H_0'，使其紧靠 PQ，其中包含 $m+1$ 个正方形，并让其左边缘接触垂直墙，右侧与倾斜墙相距 ε'（见图5）。请注意，上一节中对m 的选择确保了我们有足够的空间。我们将在倾斜墙旁放置一个宽度为 ε' 的小矩形，并且在第二种填充算法中不填充该区域。注意，根据 (2.7)，我们有

$$\varepsilon' \ll \varepsilon + \theta. \tag{3.1}$$

接下来，沿着垂直墙放置一个垂直堆 V_0'，其中有 m'（一个小于 m 的整数，我们稍后会确定）个正方形，使其与 H_0' 接触。选取某个 θ'，使得我们能将另一个包含 m 个正方形的水平堆 H_1' 紧贴着 H_0' 放置，使其同时接触 V_0' 和一面角度为 θ' 的新倾斜墙（我们稍后将证明这种排列是可行的）。按照图5所示，在这些堆上标出各点。

估算 θ'。首先，我们通过确保有足够的空间在 $\theta' = \theta$ 时装入 H_1'，来证明 $\theta' \le \theta$（如果水平堆太大，我们就不得不选择 $\theta' < \theta$）。然而，当且仅当图6所示的距离 d 大于或等于 1 时，这才可行（否则，我们将无法将垂直堆 V_0' 滑入）。但是，由于 $\varphi > \psi$，因此 $d_1 + d_2 > d$。不过很明显，在第一种填充算法中（见图4）， d_1 大于 DC，并且 d_2 大于 CB。因此，
$d > d_1 + d_2 > DB = 1$，这意味着 $\theta' \le \theta$。

现在，我们给出 θ' 与 θ 之间差值的上界。

注意到

$$\angle EAB = \psi + \theta', \quad \angle BCD = \psi, \quad \text{and} \quad \angle GDF = \psi.$$

因此，

$$ED + DB = \tan(\psi + \theta'), \quad 1 + ED = \frac{1}{\cos\psi}, \quad \text{and} \quad DB = \tan\psi.$$

于是，我们可以将 θ' 定义为下式的唯一解:

$$\sec\psi - 1 + \tan\psi = \tan(\psi + \theta'). \tag{3.2}$$

泰勒级数展开给出

$$\theta' = \frac{1}{2}\psi^2 + O(\psi^3).$$

与式 (2.3) 和 (2.6) 比较可得

$$0 \le \theta - \theta' \ll \varphi^3. \tag{3.3}$$

然后，我们可以继续以相同的方式堆叠 $m+1-i$-正方形堆叠 H_i，对于 $i = 0$，1、.....、$m'-1$。类似地，我们将堆叠 $m'-i$-正方形堆叠 V_i，对于 $i = 0$，1、.....、$m'-1$。

估计 φ'。要确定角 φ'，注意到 $\varphi' = \angle JIH$ （见图5）。然而，三角形 CKJ 与三角形 CDB全等，这意味着 $CJ = DB$。此外，三角形 CDB 与三角形 FGD全等，这意味着 $ED = HC$。因此，三角形JIH与三角形 BAE全等，进而意味着 $\varphi' = \psi + \theta'$。由（2.6）和（3.3），这意味着

$$\varphi - \varphi' \ll \varphi^3. \tag{3.4}$$

请注意， φ' 是固定的，与 ε无关。

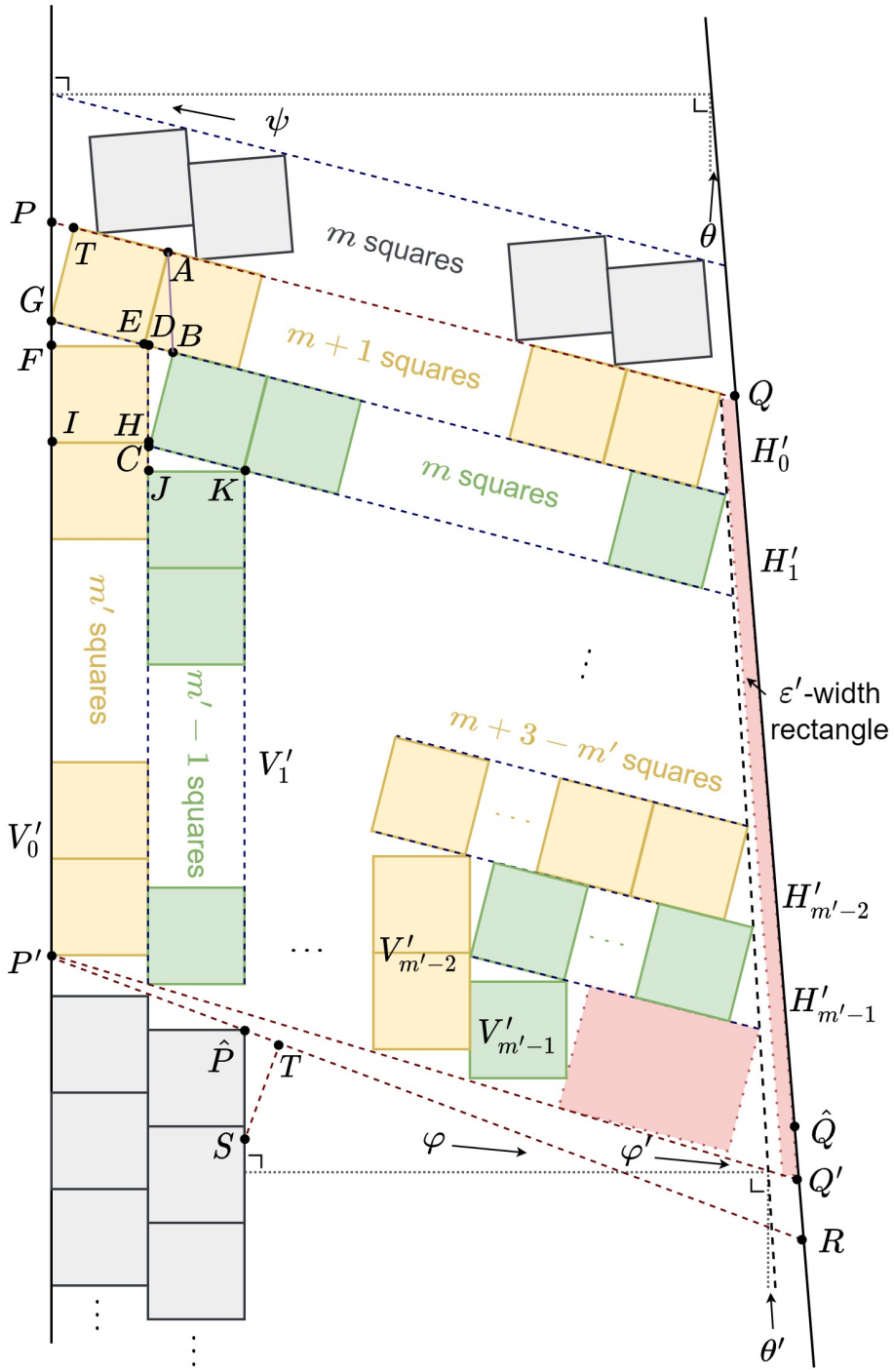

FIGURE 5. 第二种填充算法。

估算 m'。我们希望选择 m'，使得如果以 φ的角度放入一组长度为m 的新水平堆叠，垂直墙边仍恰好有足够的空间容纳两组垂直堆叠。请注意，这些堆叠会一直延伸到梯形 T的底部。这样设置后，我们便能再次应用第一种填充算法。

按照图5底部所示标出这些点。这里我们假设 $\varphi \geq \varphi'$。$\varphi < \varphi'$ 的情形类似。注意，我们选择了位于两个竖直堆叠右侧的点 S，以及 PR 上的点 T，使得 $ST = 1$，且 $\angle PTS$ 是直角（等价地，$\angle TSP = \varphi$）。因此，我们希望选择满足 $TR \geq m$ 的最小整数 m'。当然，我们还将

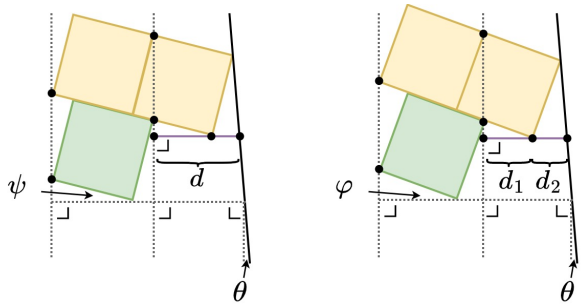

FIGURE 6. 证明 $\theta' < \theta$。

必须证明这样的 m' 存在且小于或等于 m，并且需要给出 m 与 m' 之间差值的界。目前，很容易看出 $m' \asymp m \asymp \theta^{-1}$。

注意， m' 必须依赖于 ε，因为我们试图填补由宽度为ε'的矩形造成的间隙。这一点很重要，因为差值 $TR - m$ 会成为第一种和第二种装填算法下一次迭代的 ε，而我们不希望这些误差在这两种装填算法的每次迭代中累积。

^^令 Q 为倾斜墙上的一点，使得 $P'Q$ 平行于 $\overline{PQ}$（即倾斜角为 ψ）。根据正弦定理，并利用 m'， $m \ll \theta^{-1}$这一事实，可得

$$P'\hat{Q} - PQ = PP' \frac{\sin\theta}{\sin(\pi/2 - \psi - \theta)} = (m' + O(1)) \frac{\sin\theta}{\cos(\psi + \theta)} = m'\theta + O(\theta).$$

再次根据正弦定理，

$$P'R = P'\hat{Q} \left(\frac{\sin(\pi/2 + \theta + \psi)}{\sin(\pi/2 - \theta - \varphi)} \right) = \big(PQ + m'\theta + O(\theta)\big) \left(\frac{\cos(\theta + \psi)}{\cos(\theta + \varphi)} \right)$$

注意，由于根据式（2.6）， $\varphi - \psi = \theta + O$（$\varphi^3$），我们有

$$\frac{\cos(\theta + \psi)}{\cos(\theta + \varphi)} = \frac{\cos(\theta + \varphi)\cos(\theta + O(\varphi^3)) + \sin(\theta + \varphi)\sin(\theta + O(\varphi^3))}{\cos(\theta + \varphi)} = 1 + \theta\varphi + O(\varphi^4).$$

因此，由于 $m' \ll m \ll \varphi^{-2}$ 和 $PQ = m + \varphi + O(\varphi^2 + \varepsilon)$（根据 (2.7)），我们有

$$P'R = \big(m + 1 + \varphi + m'\theta + O(\varphi^2 + \varepsilon)\big)\big(1 + \theta\varphi + O(\varphi^4)\big) = m + 1 + \varphi + m'\theta + \theta\varphi m + O(\varphi^2 + \varepsilon)$$

We then have

$$TR = P'R - 2(1 - \cos\varphi) - \sin(\varphi) = m + m'\theta + \theta\varphi m - 1 + O(\varphi^2 + \varepsilon). \tag{3.5}$$

现在注意，只要 $\varepsilon \ll \varphi^2$，总能找到一个 $m' \le m$，使得 $TR \ge m$，因为取 $m' = m$ 会使 $TR \sim m + \varphi$（大于 m），所以这样的 m' 必然存在。我们在此处隐含地使用了这样一个事实：我们总能将 TR 固定为最接近的 θ（倾斜墙的斜率）。我们可以用下列方程概括这些观察结果

$$0 \le TR - m \ll \theta, \tag{3.6}$$

注意，渐近式与 ε无关。将其代入 (3.5)，并再次假设 $\varepsilon = O(\theta)$，可得

$$\theta m' + \theta\varphi m - 1 = O(\theta).$$

这使我们能够求解 m'：

$$m' = \theta^{-1} + O(\varphi m).$$

将此结果与（2.8）结合，得到

$$m - m' \ll \varphi^{-1}. \tag{3.7}$$

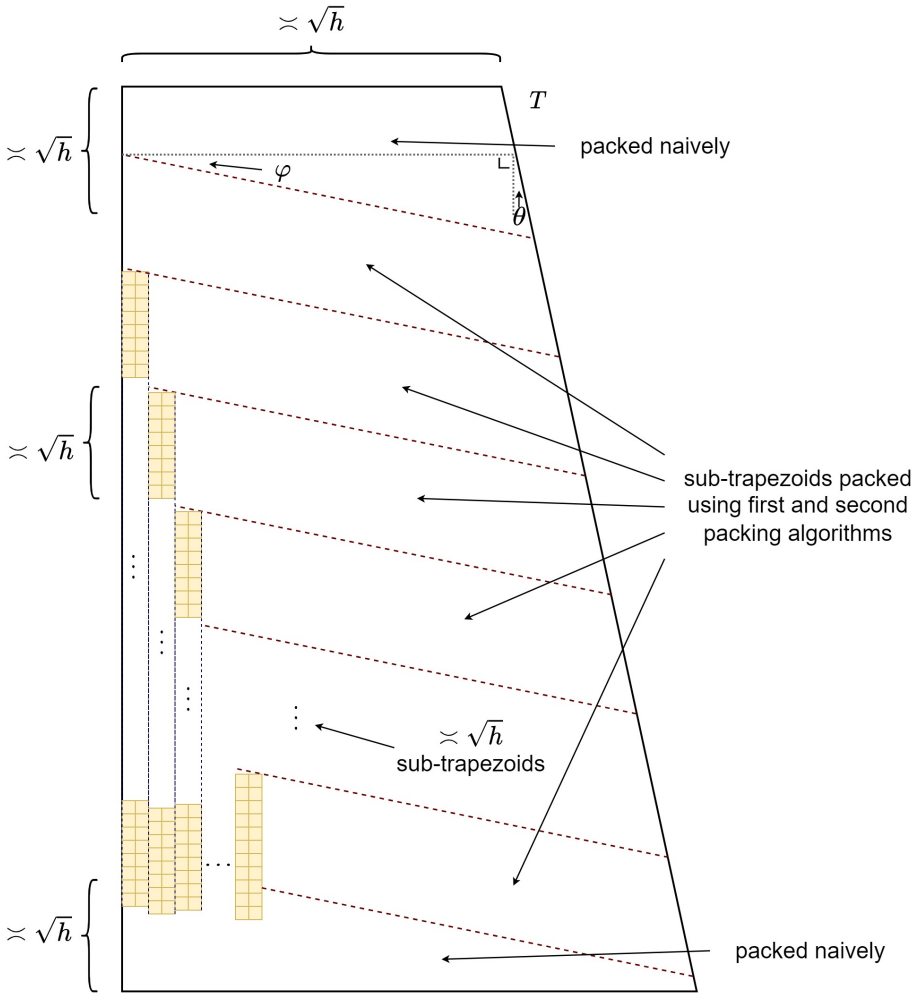

FIGURE 7. 装填梯形 T。

总结。 我们现在已经提出了两种装填算法。连续应用这两种算法时，第二种装填算法的结束部分就是启动第一种装填算法的设置。请注意，在这一迭代过程中，唯一会变化的参数是 m'，因为它取决于 ε。

4. PROOF OF THEOREM 1

装填 T。 现在，我们可以应用这两种装填算法，完成定理1的证明。回想一下，我们尚未确定梯形 T 的宽度。现在， T 的倾斜墙以角度 $\theta \asymp h^{-1/2}$ 倾斜（见 (1.1)）。注意，采用这一选择的 θ 后，必有 m， $m' \asymp h^{1/2}$，以及 φ， ψ， $\varphi' \asymp h^{-1/4}$。现在，我们确定 T 上边的宽度，使得第一个长度为 m、以 φ 角倾斜的水平堆叠位于 T 顶部的 $O(\sqrt{h})$ 范围内，由此可知 T 的宽度为 $\sqrt{h}$ 量级（见图7）。

为了装填 T，我们将两种装填算法前后相继地应用，在 T 顶部装填一个高度约为 $2\theta^{-1} \asymp \sqrt{h}$的“子梯形”。注意，我们对 ε 的首次选择可以为0。随后，我们沿整个垂直墙装填两个垂直堆叠。我们重复这一过程，逐一装填每个子梯形，直到除 T 底部一个高度至多为 $O(\sqrt{h})$的区域外，其余部分均已装填完毕（见图7）。注意，在每个阶段，我们使用相同的 φ, ψ, φ' 和 m，但

对 $\varepsilon, \varepsilon'$ 和 m' 的选择会在装填算法的每次迭代中发生变化。不过，借助(3.6)，我们始终可以确保 $\varepsilon \ll \theta$。注意，_为了装填全部 T，我们总共需要将该算法应用 $\asymp \sqrt{h}$ 次。

估算浪费空间。我们先计算第一种和第二种装填算法各进行一次迭代所产生的浪费空间。注意，浪费空间中的所有矩形面积都至多为 $O(\frac{1}{\sqrt{\theta}})$。为此，首先注意到，根据 (3.7)，图5中的 H'_{m-1} 长度至多为 $O(\varphi^{-1})$。其次，注意到我们总能令 $\varepsilon \ll \theta$，因此也能令 $\varepsilon' \ll \theta$ （见 (3.6) 和 (3.1)）。

接下来，注意有两个大狭长三角形，其边长为 $O(\theta^{-1})$，角分别为 $\theta - \theta'$ 和 $\varphi - \varphi'$（见图5）。因此，根据 (3.3) 和 (3.4)，这些三角形的面积为 $\ll \frac{1}{\sqrt{\theta}}$。此外， $P'Q'$ 与宽度为 $\ll \varphi^{-1}$ 的矩形之间还有一条狭长的小缝隙。其角显然不超过 φ，因此面积为 $O(\frac{1}{\sqrt{\theta}})$。

最后请注意，通过两种装填算法生成了长度为 $\ll \theta^{-1}$ $O(1)$ 的三角形，且它们的角均为 $\ll \sqrt{\theta}$，这意味着它们的总贡献为 $\ll \frac{1}{\sqrt{\theta}}$。

因此，这两个装填阶段产生的浪费空间总量为 $\ll \frac{1}{\sqrt{\theta}} \ll h^{1/4}$。由于我们应用这些装填算法 $\asymp \sqrt{h}$ 次，装填子梯形区域所产生的浪费空间总量为 $O(h^{3/4})$。我们以简单方式装填 T 顶部和底部的区域，额外产生了 $O(h^{1/2})$ 的浪费空间（见图7）。因此，装填 T 所产生的浪费空间总量为 $O(h^{3/4})$。

现在，图3中以角度 θ 倾斜的 $O(x)$ 个垂直堆所产生的浪费空间为 $O(x\theta)$，这意味着我们的浪费空间总量有如下界限：

$$W(x) \ll \frac{x}{\sqrt{h}} + h^{3/4}.$$

令两个项相等，得到 $h \sim x^{4/5}$ 的一种取值，从而得到所需结果。

References

[1] Fan Chung 和 Ronald Graham, *Efficient packings of unit squares in a large square*, 《离散与计算几何》**64** (202010)。[2] Paul Erd¨os 和 Ronald Graham, *On packing squares with equal squares*, 《组合论杂志》**19** (1975), 119–123。[3] K. Roth 和 R. Vaughan, *Inefficiency in packing squares with unit squares.*, 《组合论杂志A辑》**24** (197803), 170–186。

Department of Mathematics and Statistics, University of Northern British Columbia, Prince George, BC V2N4Z9, Canada