arXiv:2602.01488v1 [math.NT] 1 Feb 2026

# 极值数与多参数数论几何

DAMIEN ROY

谨以此文纪念数学家、哲学家 *Bertrand Russell*，感谢他为和平所作的努力。

Abstract. 我们在多参数数论几何的框架下，研究一类极值实数 $\xi$ 所对应的形如 $(1, \xi, \xi^2)$ 的点的加权同时有理逼近。

## 1. Introduction

固定一个整数 $n \geq 2$。对于每个 $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 以及每个 $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$，我们用 $\mathcal{C}_A(\mathbf{q})$ 表示由满足下述条件的点组成的平行六面体：$\mathbb{R}^n \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$|a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n| \leq \exp(-q_i) \quad \text{for } i = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

对于每个 $j = 1, \ldots, n$，我们也用 $L_{A,j}(\mathbf{q})$ 表示其相对于 $\mathbb{Z}^n$ 的第 $j$ 个极小值的对数，即满足以下乘积 $e^t\mathcal{C}_A(\mathbf{q})$ 的最小 $t \in \mathbb{R}$：

$$|a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n| \leq \exp(t - q_i) \quad (1 \leq i \leq n)$$

至少包含 $j$ 个 $\mathbb{Z}^n$ 中线性无关的点 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$。映射

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_A : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{q} &\longmapsto (L_{A,1}(\mathbf{q}), L_{A,2}(\mathbf{q}), \ldots, L_{A,n}(\mathbf{q})). \end{aligned}$$

携带着关于矩阵 $A$ 的丢番图逼近的大量信息，而在对 $\mathbb{R}^n$ 上的 $\mathbf{L}_A$ 进行有界误差估计时，损失的信息很少。

数的几何对 $\mathbf{L}_A$ 的各分量施加了约束，如单参数情形中的 [11, 12, 13] 以及一般情形中的 [2] 所示。例如，由于 $\mathcal{C}_A(\mathbf{q})$ 的体积对数为 $-(q_1 + \cdots + q_n) + \mathcal{O}_A(1)$，闵可夫斯基第二凸体定理给出

$$L_{A,1}(\mathbf{q}) + \cdots + L_{A,n}(\mathbf{q}) = q_1 + \cdots + q_n + \mathcal{O}_A(1), \tag{1.2}$$

其中，$\mathcal{O}_A(1)$ 表示一个关于$\mathbf{q}$ 的函数，其绝对值有一个仅取决于 $A$的常数上界。主要的未解问题是：对于给定的 $n \geq 3$，这一条件及其他类似条件是否足以刻画所有映射$\mathbf{L}_A$ 的集合，其中 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$，模去从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的有界函数加法群（参见 [9]）。即使仅刻画映射$\mathbf{L}_A$，模去函数$\mathbf{f}$：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的加法群，其中 $\|\mathbf{f}(\mathbf{q})\|/\|\mathbf{q}\| \to 0$，也

2020年 数学主题分类。主要分类 11J13；次要分类 11J82。关键词与短语。难以逼近的数、丢番图逼近指数、极值实数、 $n$-系统、参数数的几何、同时有理逼近、加权逼近。

$\|\mathbf{q}\| \to \infty$，例如采用最大范数，也有助于研究与丢番图逼近指数谱相关的问题。本文不讨论这个问题。我们的目标是估计一种特定类型矩阵 $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$对应的映射$\mathbf{L}_A$。

我们首先将范围限制为以下形式的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \xi_1 & -1 & 0 \\ \xi_2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

附属于点 $\boldsymbol{\xi} = (1, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3$。为方便起见，我们采用如下记号。对于每个 $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$，令 $\mathcal{C}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q}) = \mathcal{C}_A(0, q_1, q_2)$；对于每个 $j = 1, 2, 3$，令$L_{\boldsymbol{\xi},\, j}(\mathbf{q}) = L_{A,\, j}(0, q_1, q_2)$，也就是说，它是满足以下不等式的最小 $t \in \mathbb{R}$

$$|x_0| \le \exp(t), \quad |x_0\xi_1 - x_1| \le \exp(t - q_1), \quad |x_0\xi_2 - x_2| \le \exp(t - q_2) \tag{1.3}$$

使其至少有 $j$ 个线性无关解 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2)$ 属于 $\mathbb{Z}^3$。最后，我们定义

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{q} &\longmapsto (L_{\boldsymbol{\xi},1}(\mathbf{q}), L_{\boldsymbol{\xi},2}(\mathbf{q}), L_{\boldsymbol{\xi},3}(\mathbf{q})). \end{aligned} \tag{1.4}$$

这一过程中没有丢失任何信息，因为我们可以利用以下关系从 $\mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}$ 恢复 $\mathbf{L}_A$

$$L_{A,j}(q_0, q_1, q_2) = q_0 + L_{\boldsymbol{\xi},j}(q_1 - q_0, q_2 - q_0) \quad (1 \le j \le 3)$$

对于任意 $(q_0, q_1, q_2) \in \mathbb{R}^3$。此外，估计 (1.2) 变为

$$L_{\boldsymbol{\xi},1}(\mathbf{q}) + L_{\boldsymbol{\xi},2}(\mathbf{q}) + L_{\boldsymbol{\xi},3}(\mathbf{q}) = q_1 + q_2 + \mathcal{O}_{\boldsymbol{\xi}}(1) \tag{1.5}$$

对于每个$\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$。至于映射$\mathbf{L}_A$，其中 $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$，我们可以尝试刻画所有满足 $\boldsymbol{\xi} = (1, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3$ 的映射$\mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}$的集合，模去 $\mathbb{R}^2$上的有界函数。在下一节中，我们将证明，在临界扇形之外，这很容易做到

$$\mathcal{D} = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 \le q_1/2 \le q_2 \le 2q_1\} \tag{1.6}$$

如果我们将范围限制为满足 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 均为劣可逼近的点 $\boldsymbol{\xi}$。

本文进一步将范围限制为点 $\boldsymbol{\xi} = (1, \xi, \xi^2)$，其中 $\xi$ 属于定理 3.1]中定义的一个可数无限集的极值实数，并且该定理证明，这些数对三次代数整数具有可能的最强逼近度量（参见定理 1]）。对于每个这样的 $\boldsymbol{\xi}$，我们构造了$\mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}$ 的一个显式逼近，使其在 $\mathbb{R}^2$ 中满足 $q_1 \ge 0$ 和 $q_2 \le q_1$的点 $(q_1, q_2)$ 集合上具有有界差，这是一个覆盖 $\mathcal{D}$下半部的角扇区。主要结果及其证明的概要见第 3 节。作为一项应用，我们在第 15 节用此方法计算这些点的加权有理逼近指数。我们未纳入本文的数值实验表明，函数$\mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}$ 在 $\mathcal{D}$上半部的行为相对混沌。

我们认为，这些是首批这样的例子：点 $\boldsymbol{\xi}$ 位于 $\mathbb{R}^3$ 中，其坐标 $\mathbb{Q}$线性无关；对于这些点，在包含于 $\mathcal{D}$中的、角度为正的 $\mathbb{R}^2$角扇区内，$\mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}$ 可估计到有界差。

## 2. Basic tool and preliminary observations

对于每个整数 $n \geq 1$ 以及 $\mathbb{R}^n$的每个点$\mathbf{x}$，我们用 $\|\mathbf{x}\|$ 表示$\mathbf{x}$的最大范数。如同 [9, 第 1], 节，我们令

$$\Delta_3 = \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 ; p_1 \leq p_2 \leq p_3\}, \tag{2.1}$$

并用 $\Phi$: $\mathbb{R}^3 \to \Delta_3$ 表示将一个点的坐标按非递减顺序排列的连续映射。显然，由(1.4)定义的函数$\mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}$ 在 $\Delta_3$ 中取值，因此$\Phi \circ \mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}$。我们还注意到 $\Phi$ 是1-利普希茨的，即

$$\|\Phi(\mathbf{p}) - \Phi(\mathbf{p}')\| \leq \|\mathbf{p} - \mathbf{p}'\| \quad \text{for any } \mathbf{p}, \mathbf{p}' \in \mathbb{R}^3. \tag{2.2}$$

取定一点 $\boldsymbol{\xi} = (1, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3$。我们将非零整数点$\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3$的轨迹定义为映射 $L_{\mathbf{x}}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，其在点$\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$处的取值是使$\mathbf{x} \in e^t \mathcal{C}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q})$成立的最小 $t \in \mathbb{R}$，或等价地，使(1.3)成立的最小者。因此，

$$L_{\mathbf{x}}(\mathbf{q}) = \max\{\log|x_0|, q_1 + \log|x_0\xi_1 - x_1|, q_2 + \log|x_0\xi_2 - x_2|\}, \tag{2.3}$$

按照约定，当最大值中的某一项涉及 $\log 0 = -\infty$ 时，我们省略该项。除此情况外，$\mathbf{x}$ 的轨迹 $L_{\mathbf{x}}$ 是三个仿射映射的最大值，图1显示了 $\mathbb{R}^2$ 实现这一最大值的角扇区。

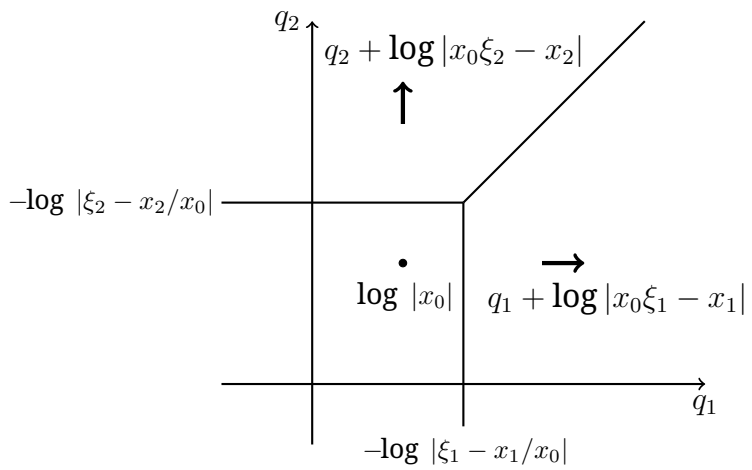



Figure 1. 一般情形下的映射 $L_{\mathbf{x}}$。

由 (2.3) 可得

$$|L_{\mathbf{x}}(\mathbf{q}) - L_{\mathbf{x}}(\mathbf{q}')| \leq \|\mathbf{q} - \mathbf{q}'\| \quad \text{for any } \mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \mathbb{R}^2. \tag{2.4}$$

现在证明$\mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}$ 也是 1-利普希茨的。

**引理 2.1.** 对于任意 $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}' \in \mathbb{R}^2$, 有 $\|\mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q}) - \mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q}')\| \leq \|\mathbf{q} - \mathbf{q}'\|$。

证明。 设$\mathbf{q}$, $\mathbf{q}' \in \mathbb{R}^2$。选取线性无关的整数点$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbb{Z}^3$，使得

$$\mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q}) = (L_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{q}), L_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{q}), L_{\mathbf{x}_3}(\mathbf{q})).$$

对于每个 $j = 1$，2，3，点$\mathbf{x}_1$，…，$\mathbf{x}_j$都是线性无关的，因此，对这些点分别应用 (2.4)，可得

$$L_{\boldsymbol{\xi},j}(\mathbf{q}') \le \max_{1\le i\le j} L_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{q}') \le \max_{1\le i\le j} \big(L_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{q}) + \|\mathbf{q}-\mathbf{q}'\|\big) = L_{\boldsymbol{\xi},j}(\mathbf{q}) + \|\mathbf{q}-\mathbf{q}'\|.$$

结果　如下：我们可以在上述估计中交换$\mathbf{q}$ 和$\mathbf{q}'$ 的作用　　s.　　□

主要　用于估计$\mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}$ 的是以下结果，类似于 [8,引理 4.1]　　.

**引理 2.2**。 设$\mathbf{x}_1$,$\mathbf{x}_2$,$\mathbf{x}_3 \in \mathbb{Z}^3$ 为线性无关整数点。设$\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$、$\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ 以及 $\delta \ge 0$ 满足

(2.5)　　$p_1 + p_2 + p_3 = q_1 + q_2 \quad and \quad L_{\mathbf{x}_j}(\mathbf{q}) \le p_j + \delta \quad for\ j = 1, 2, 3.$

那么，我们有 $\big\|\mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q}) - \Phi(\mathbf{p})\big\| \le 5\delta + c_1$，其中 $c_1$ 是仅依赖于 $\boldsymbol{\xi}$的常数。

证明。 令 $\mathbf{p}' = (L_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{q})\ L_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{q})\ L_{\mathbf{x}_3}(\mathbf{q}))$。根据 $\mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q})$ 的定义，差值 $\Phi(\mathbf{p}') - \mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q})$ 的坐标均非负。因此，其范数不超过其坐标之和。利用 (1.5) 和 (2.5) 的第一部分，可得

$$\begin{aligned}\|\Phi(\mathbf{p}') - \mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q})\| &\le \sum_{j=1}^{3} L_{\mathbf{x}_j}(\mathbf{q}) - \sum_{j=1}^{3} L_{\boldsymbol{\xi},j}(\mathbf{q}) \\ &\le \sum_{j=1}^{3} L_{\mathbf{x}_j}(\mathbf{q}) - (q_1+q_2) + c = \sum_{j=1}^{3} (L_{\mathbf{x}_j}(\mathbf{q}) - p_j) + c,\end{aligned}$$

其中 $c = c(\boldsymbol{\xi}) \ge 0$是一个常数。由 (2.5) 的第二部分可知，这意味着

$$\|\Phi(\mathbf{p}') - \mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q})\| \le 3\delta + c \quad \text{and} \quad -2\delta - c \le L_{\mathbf{x}_j}(\mathbf{q}) - p_j \le \delta \quad \text{for } j = 1, 2, 3.$$

因此，$\|\Phi(\mathbf{p}) - \Phi(\mathbf{p}')\| \le \|\mathbf{p} - \mathbf{p}'\| \le 2\delta + c$，所以 $\big\|\mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q}) - \Phi(\mathbf{p})\big\| \le 5\delta + 2c$。　　□

下一个命题给出了当 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 均为劣可逼近数时，角扇区 $\mathcal{D}$ （由 (1.6) 定义）之外的 $\mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}$ 的估计，如图 2 所示。回顾一下，若存在常数 $c = c(\xi) > 0$，使得 $|x_0\xi - x_1| \ge c^{-1}|x_0|^{-1}$ 对任意满足 $x_0 \ne 0$ 的 $(x_0, x_1) \in \mathbb{Z}^2$，则称实数 $\xi$ 为劣可逼近数。

**引理 2.3.** 令 $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$。

(i) 若 $q_1 \le 0$ 且 $q_2 \le 0$，则 $\mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q}) = \Phi(0, q_1, q_2) + \mathcal{O}_{\boldsymbol{\xi}}(1)$。

(ii) 设 $\xi_1$ 为劣可逼近数。若 $q_1 \ge \max\{0, 2q_2\}$，则

$$\mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q}) = (q_2, q_1/2, q_1/2) + \mathcal{O}_{\boldsymbol{\xi}}(1).$$

(iii) 设 $\xi_2$ 为劣可逼近数。若 $q_2 \ge \max\{0, 2q_1\}$，则

$$\mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q}) = (q_1, q_2/2, q_2/2) + \mathcal{O}_{\boldsymbol{\xi}}(1).$$

*Pr*糟。 对于 $\mathbb{Z}^3$的基 $\{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\}$，我们发现　d

$$L_{\mathbf{e}_1}(\mathbf{q}) = \max\{0, q_1 + \log|\xi_1|, q_2 + \log|\xi_2|\}, \quad L_{\mathbf{e}_2}(\mathbf{q}) = q_1, \quad L_{\mathbf{e}_3}(\mathbf{q}) = q_2.$$

若 $q_1 \le 0$ 且 $q_2 \le 0$，则有 $L_{\mathbf{e}_1}(\mathbf{q}) = \mathcal{O}_{\boldsymbol{\xi}}(1)$，且引理 2.2 给出

$$\|\mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q}) - \Phi(0, q_1, q_2)\| \le 5|L_{\mathbf{e}_1}(\mathbf{q})| + c_1 = \mathcal{O}_{\boldsymbol{\xi}}(1),$$

由此证明了 (i)。

假设 $\xi_1$ 是劣可逼近的，且 $q_1 \geq \max\{0, 2q_2\}$。设

$$(t_1, t_2) = \mathbf{L}_A(0, q_1) \quad \text{where} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi_1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

然后，在 $\mathbb{Z}^2$ 中选取线性无关点$(x_{1,0},x_{1,1})$、$(x_{2,0},x_{2,1})$，使得对 $j = 1,2$，

$$|x_{j,0}| \leq \exp(t_j) \quad \text{and} \quad |x_{j,0}\xi_1 - x_{j,1}| \leq \exp(t_j - q_1).$$

由于 $\xi_1$ 是劣可逼近的，这些估计表明 $t_j \geq q_1/2 + \mathcal{O}_{\xi_1}(1)$。由于将闵可夫斯基不等式(1.2)应用于(2.6)得到 $t_1 + t_2 = q_1 + \mathcal{O}_{\xi_1}(1)$，我们推出

$$t_j = q_1/2 + \mathcal{O}_{\xi_1}(1) \quad \text{for } j = 1, 2.$$

最后，对 $j = 1,2$，令$\mathbf{x}_j = (x_{j,0}, x_{j,1}, x_{j,2})$，其中取整数$x_{j,2}$使得

$$|x_{j,0}\xi_2 - x_{j,2}| \leq 1 \leq \exp(q_1/2 - q_2),$$

并令$\mathbf{x}_3 = (0,0,1)$。于是$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$与$\mathbf{x}_3$是 $\mathbb{Z}^3$ 的线性无关点，且

$$L_{\mathbf{x}_j}(\mathbf{q}) \leq \max\{t_j, q_1/2\} \leq q_1/2 + \mathcal{O}_{\xi_1}(1) \quad \text{for } j = 1, 2.$$

由于 $L_{\mathbf{x}_3}(\mathbf{q}) = q_2$，引理 2.2 得出 $\|\mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q}) - \Phi(q_1/2,\ q_1/2,\ q_2)\| = \mathcal{O}_{\boldsymbol{\xi}}(1)$。这证明了 (ii)。(iii) 的证明类似。□

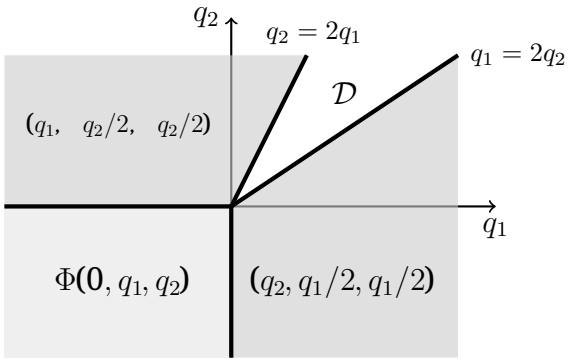



FIGURE 2. 映射 $\mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}$，除 $\mathcal{D}$ 外相差有界，其中 $\xi_1$ 和$\xi_2$ 均为劣可逼近数

利特尔伍德猜想指出，对于任意选取的 $\xi_1,\ \xi_2 \in \mathbb{R}$ 以及任意 $\epsilon > 0$，存在$\mathbf{x} = (x_0,\ x_1,\ x_2) \in \mathbb{Z}^3$，满足 $x_0 \neq 0$，使得

$$|x_0|\,|x_0\xi_1 - x_1|\,|x_0\xi_2 - x_2| \leq \epsilon.$$

我们留给读者去验证，在当前设定下，这一猜想的等价表述是：不存在一对不可很好逼近的数 $\xi_1,\ \xi_2 \in \mathbb{R}$ 使得点 $\boldsymbol{\xi} = (1,\ \xi_1,\ \xi_2) \in \mathbb{R}^3$ 满足

$$\mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q}) = \frac{q_1 + q_2}{3}(1, 1, 1) + \mathcal{O}_{\boldsymbol{\xi}}(1) \quad \text{for each } \mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathcal{D}.$$

尽管我们将在下一节给出的构造远不足以构成一个反例，但它最终或许能启发人们找到一个反例。在这方面，我们强调，对每个整数 $n \geq 2$，都存在矩阵 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$，使得

$$\mathbf{L}_A(\mathbf{q}) = \frac{q_1 + \cdots + q_n}{n}(1, \ldots, 1) + \mathcal{O}_A(1) \quad \text{for each } \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n,$$

因此，矩阵的情形下问题便迎刃而解（例如可由 [3, 第 4.2 节定理 1]推出）。

## 3. Notation and main results

**3.1.** 词幺半群。设 $E$ 是一个非空集合。我们用 $E^*$ 表示字母表 $E$上的词幺半群，即由 $E$ 中的元素构成的有限（可为空）序列的集合，其运算为词的串接。其单位元为空词 $\epsilon$。给定词 $u$、$w \in E^*$，若 $u$ 是 $w$ 的前缀，我们就称之为前缀，并记作 $u \leq w$，其中 $w = uv$ 对某个$v \in E^*$成立。更一般地，若 $u$ 是 $w$ 的因子，我们就称之为因子，并记作 $w = vuv'$，其中 $v$、$v' \in E^*$存在。我们用 $[u, w]$ 表示满足 $u \leq v \leq w$的词 $v \in E^*$ 的集合。若 $u \leq w$且 $u \neq w$，我们记作 $u < w$。按照惯例，我们还用 $]u$、$w]$、$[u, w[$ 以及 $]u$、$w[$ 表示分别从 $[u, w]$中去除 $u$、$w$ 和 $\{u, w\}$ 后得到的集合。$E^*$ 中的非空词 $a_1a_2 \cdots a_n$的反转定义为字母顺序反转后的词 $a_n \cdots a_2a_1$。$\epsilon$ 的反转是其本身。因此，$\epsilon$ 是 $E^*$中的一个回文，也就是说，它是 $E^*$中一个与自身反转相同的词。

**3.2. 斐波那契序列。** 若幺半群 $\mathcal{M}$中的一个序列 $(x_i)_{i\geq 1}$ 满足 $x_{i+2} = x_{i+1}x_i$（对每个 $i \geq 1$），则称其为斐波那契序列。这样的序列由其前两个元素 $x_1$ 和 $x_2$唯一确定。此外，若 $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 是一个幺半群态射，则 $\mathcal{M}$ 中的斐波那契序列 $(x_i)_{i\geq 1}$ 会给出 $\mathcal{N}$中的斐波那契序列 $(\varphi(x_i))_{i\geq 1}$。

非负整数集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ 在加法运算下构成一个幺半群。我们用 $(F_i)_{i\geq -1}$表示通常的斐波那契数列，该数列从 $F_{-1} = 0$、$F_0 = 1$开始，并且对每个 $i \geq -1$满足$F_{i+2} = F_{i+1} + F_i$。它可以用比内公式写成闭式

$$F_i = (\gamma^{i+1} - (-\gamma)^{-i-1})/\sqrt{5} \quad \text{where} \quad \gamma = (1 + \sqrt{5})/2. \tag{3.1}$$

设 $E = \{a, b\}$ 是一个由两个字母组成的字母表。$E^*$中的斐波那契序列 $(w_i)_{i\geq 1}$ 以 $w_1 = a$ 和 $w_2 = ab$开头，其各项为 $w_3 = aba$、$w_4 = abaab$等。由于该序列中的每个词都是下一个词的前缀，这个序列逐点收敛于一个无限词

$$f_{a,b} := w_\infty := \lim_{i\to\infty} w_i = abaababaabaab\ldots \tag{3.2}$$

从现在起，我们用记号 $(w_i)_{i\geq 1}$ 表示上述斐波那契数列中的 $E^*$，并用$w_\infty$ 表示其极限。我们称 $E^*$ 中的一个词 $u$ 是 $w_\infty$ 的前缀，并记作 $u < w_\infty$，如果对某个 $i \geq 1$有 $u \leq w_i$。于是，我们将由满足$u \leq v < w_\infty$ 的 $v \in E^*$ 组成的词的集合记为 $[u, w_\infty[$（分别为 $]u,\ w_\infty[$），其中 $u < v < w_\infty$。如果 $u$ 是某个 $i \geq 1$的因子，而 $i \geq 1$是 $w_\infty$ 的因子，则称 $u$ 是 $w_\infty$ 的因子。

我们用 $\theta$ 表示由条件 $\theta(a) = ab$ 和 $\theta(b) = a$ 确定的幺半群态射 $E^* \to E^*$。它满足

$$\theta(w_i) = w_{i+1} \quad \text{for each } i \geq 1, \tag{3.3}$$

并保持 $E^*$ 上的偏序。因此，它将前缀集合 $[\epsilon, w_\infty[$ 映射到其自身。

将词 $w$ 映射到其长度 $|w|$ 的映射，给出了一个从 $E^*$到 $\mathbb{N}$ 的幺半群态射；它限制后得到一个从 $[\epsilon, w_\infty[$ 到 $\mathbb{N}$的保序双射。它满足

$$|w_i| = F_i \quad \text{for each } i \geq 1. \tag{3.4}$$

一般而言，给定任意字母表上的任意词 $u, v$，我们用 $f_{u,v} = uvuuv\ldots$ 表示以 $(u, uv, uvu, \ldots)$ 为起始项的斐波那契数列的极限，并称其为 $(u, v)$ 上的无限斐波那契词。

3.3. **集合 $\mathcal{V}_\ell$。** 设

$$\mathcal{F} = \{\epsilon, w_1, w_2, w_3, \ldots\} = \{\epsilon, a, ab, aba, abaab, \ldots\} \tag{3.5}$$

表示由 $\epsilon$ 以及满足 $i \geq 1$的所有斐波那契词 $w_i$ 构成的集合。我们按如下方式定义一个从 $[\epsilon, w_\infty[$到其自身的映射 $\iota$。若 $w_\infty$的一个前缀 $v$属于 $\mathcal{F}$，则令 $\iota(v) = v$。否则，对于某个整数 $i \geq 3$，有 $v \in ]w_i, w_{i+1}[$，并将 $\iota(v)$ 定义为 $w_\infty$的长度为 $|v| - 2F_{i-2}$的前缀。这是有意义的，因为 $|v| - 2F_{i-2} > F_i - 2F_{i-2} = F_{i-3} \geq 1$。在所有情况下，均有 $\iota(v) \leq v$，因此，$\iota$ 在 $v$ 处的迭代序列 $(\iota^k(v))_{k\geq 1}$ 最终会稳定为 $\mathcal{F}$ 中的某个元素。由此，我们得到一个映射 $\alpha$: $[\epsilon, w_\infty[ \to \mathcal{F}$，将 $v$映射到这个词:

$$\alpha(v) = \lim_{k\to\infty} \iota^k(v). \tag{3.6}$$

下表给出了映射 $\iota$ 和 $\alpha$ 在 $w_\infty$的前 8 个前缀上的取值。

(3.7)

| $v$ | $\epsilon$ | $w_1 = a$ | $w_2 = ab$ | $w_3 = aba$ | $abaa$ | $w_4 = abaab$ | $abaaba$ | $abaabab$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\iota(v)$ | $\epsilon$ | $a$ | $ab$ | $aba$ | $ab$ | $abaab$ | $ab$ | $aba$ |
| $\alpha(v)$ | $\epsilon$ | $a$ | $ab$ | $aba$ | $ab$ | $abaab$ | $ab$ | $aba$ |

对于每个整数 $\ell \geq 1$，我们定义

$$\mathcal{V}_\ell = \{v \in [\epsilon, w_\infty[\ ;\ \alpha(v) \geq w_\ell\}. \tag{3.8}$$

这是一个无限集合，因为它对每个 $i \geq \ell$都包含 $w_i$。我们称 $\mathcal{V}_\ell$ 中的元素 $v_1 < v_2 < \cdots < v_k$在 $\mathcal{V}_\ell$ 中是相邻的，如果对于每个满足 $1 \leq i < k$的指标 $i$，都不存在 $\mathcal{V}_\ell$中的元素 $v$ 满足 $v_i < v < v_{i+1}$。第 4 节和第 5 节专门讨论集合$\mathcal{V}_\ell$的组合性质。特别地，推论 4.8 表明，对于 $\mathcal{V}_\ell$ 中满足$\ell \geq 3$的任意相邻元素 $u < v$，差值 $|v| - |u|$ 为 $F_{\ell-2}$ 或 $F_{\ell-1}$。命题 5.7 表明，对每个 $\ell \geq 4$，都有 $\mathcal{V}_{\ell+1} = \theta(\mathcal{V}_\ell)$。

3.4. **函数 $P_v$。** 对于每个 $v \in [\epsilon, w_\infty[$，我们定义一个函数 $P_v$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，其定义为

$$P_v(q_1, q_2) = \max\{q_1 - |v|, q_2 - |\alpha(v)|, |v|\}, \tag{3.9}$$

并且我们将由点 $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$构成的闭集记为 $\mathcal{A}(v)$、$\mathcal{B}(v)$ 和 $\mathcal{C}(v)$，其中 $P_v(\mathbf{q})$ 分别等于 $q_1 - |v|$、$q_2 - |\alpha(v)|$ 和 $|v|$。在它们的内部，$P_v$ 可微，且梯度分别为常数 (1,0)、(0,1) 和 $(0, 0)$。明确地说，这些集合为

- $\mathcal{A}(v) = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 ; \quad q_1 \geq 2|v| \text{ 和 } \quad q_2 \leq q_1 - |v| + |\alpha(v)|\}$,
- $\mathcal{B}(v) = \{(q_1, \quad q_2) \in \mathbb{R}^2 ; \quad q_2 \geq |v| + |\alpha(v)| \text{ 和 } \quad q_2 \geq q_1 - |v| + |\alpha(v)|\}$,
- $\mathcal{C}(v) = \{(q_1, \quad q_2) \in \mathbb{R}^2 ; \quad q_1 \leq 2|v| \text{ 和 } \quad q_2 \leq |v| + |\alpha(v)|\}$。

它们是 $\mathbb{R}^2$ 的闭扇形，内部互不相交，且它们的并集为 $\mathbb{R}^2$。图3 显示了这三个集合，以及 $P_v$ 在每个集合上的取值。图中还用箭头表示了它们内部的 $P_v$ 梯度（对于 $\mathcal{C}(v)$，梯度简化为一个点）。特别注意，

$$\mathcal{A}(\epsilon) = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 ; \, q_1 \geq 0 \text{ and } q_2 \leq q_1\}. \tag{3.10}$$

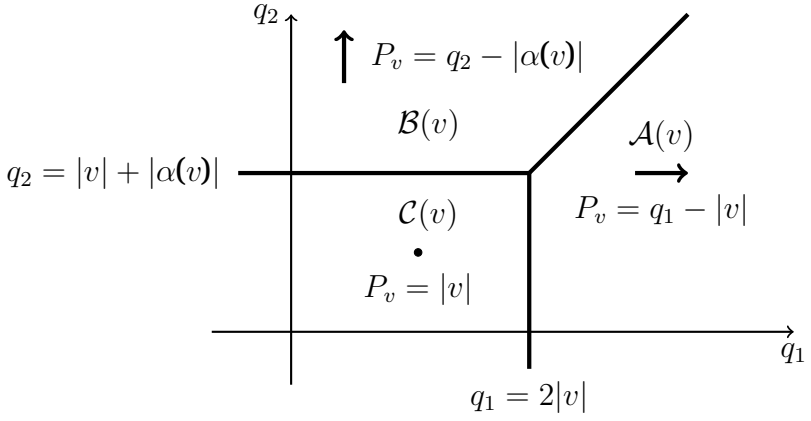



FIGURE 3. 与前缀 $v$ 相关联的函数 $P_v$，其中 $w_\infty$。

**3.5. 映射 $\mathbf{P}$。** 利用第2节中的函数 $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \Delta_3$，我们按如下方式构造映射$\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)\colon \mathcal{A}(\epsilon) \to \Delta_3$。对于 $\mathcal{A}(\epsilon)$ 中的每个点$\mathbf{q} = (q_1, q_2)$，令

$$\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \Phi(q_1 - |u|, q_2 + |u| - |w|, |w|) \tag{3.11}$$

其中，$u$ 是 $w_\infty$ 的最大前缀，使得$\mathbf{q} \in \mathcal{A}(u)$；$w$ 是 $w_\infty$中满足 $u < w$ 且$\mathbf{q} \in \mathcal{C}(w)$的最小前缀。这样的前缀存在，因为条件$\mathbf{q} \in \mathcal{A}(u)$要求$2|u| \leq q_1$；并且，如果我们选择满足 $q_2 \leq q_1 \leq 2F_i$ 的 $i \geq 1$，那么$\mathbf{q} \in \mathcal{C}(w_i) = ]\infty, 2F_i]^2$。根据 $u$ 和 $w$的选取，对于任意满足 $u < v < w$的词 $v$，都有$\mathbf{q} \in \mathcal{B}(v)$。在第6节中，我们将证明，对某个整数 $\ell \geq 1$，有 $|w| - |u| = F_\ell$；并且如果 $\ell > 1$，则存在唯一的词 $v$，使得 $u < v < w$ 是 $\mathcal{V}_\ell$ 中的相邻元素，且 $|\alpha(v)| = F_\ell = |w| - |u|$（见命题 6.7）。在后一种情况下，有

$$\mathbf{q} \in \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{B}(v) \cap \mathcal{C}(w) \quad \text{and} \quad \mathbf{P}(\mathbf{q}) = \Phi(P_u(\mathbf{q}), P_v(\mathbf{q}), P_w(\mathbf{q})). \tag{3.12}$$

在第7节中，我们将$\mathbf{P}$ 视为我们所称的积分 2参数 3系统的一个例子。具体来说，它是一个连续映射，其分量之和为

$$P_1(\mathbf{q}) + P_2(\mathbf{q}) + P_3(\mathbf{q}) = q_1 + q_2 \quad \text{for each } \mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathcal{A}(\epsilon). \tag{3.13}$$

以下　附加性质分别在第8节和第9节中得到证明。

**定理 3.1。** 对于每个整数 $k \geq 4$，每个$\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$，满足

$$0 \leq q_1 \leq 2F_{k-1} + 2F_{k-3} \quad \textit{and} \quad 0 \leq q_2 \leq \min\{q_1, 2F_{k-1}\}, \tag{3.14}$$

且对于每个 $j = 1,2、3$，我们有 $P_j(q_1 + 4F_{k-2}, q_2 + 2F_{k-2}) = P_j(q_1, q_2) + 2F_{k-2}$。

**定理 3.2**。 对于每个 $\mathbf{q} \in \mathcal{A}(\epsilon)$，我们有 $\|\mathbf{P}(\gamma\mathbf{q}) - \gamma\mathbf{P}(\mathbf{q})\| \leq 40$。

**3.6. 主要结果**。对于任意实系数矩阵 $A$，我们用 $\|A\|$ 表示其矩阵元素绝对值的最大值。对于任意正整数 $n$，这与我们对 $\mathbb{R}^n$ 中向量的约定一致。

如果存在一个无界斐波那契矩阵序列 $(W_i)_{i\geq 1}$，其中各矩阵属于 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$；一个矩阵 $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$，满足 ${}^tM \neq \pm M$；以及一个常数 $c \geq 1$，使得对于每个 $i \geq 1$，下列性质均成立，则称实数 $\xi$ 是 $GL_2(\mathbb{Z})$型极值数。

(E1) 乘积 $\mathbf{x}_i := W_i M_i^{-1}$ 是对称矩阵，其中 $M_i = \begin{cases} M \\ {}^tM \end{cases}$ 在 $i$ 为偶数时成立，在 $i$ 为奇数时成立；(E2) $c^{-1}\|W_{i+1}\|\,\|W_i\| \leq \|W_{i+2}\| \leq c\|W_{i+1}\|\,\|W_i\|$；(E3) $c^{-1}\|W_i\|^{-1} \leq \|(\xi,\ -1)W_i\| \leq c\|W_i\|^{-1}$。

根据 [6, 定理 2，2], 这些数 $\xi$ 恰好是其连分数展开从首项开始与由两个不交换的词 $u$ 和 $v$ 在（$\mathbb{N} \setminus \{0\}$）中构成的无限斐波那契词一致的那些数$f_{u,\ v}$。因此，它们是劣可逼近的，并且其集合在 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ 通过分式线性变换作用于 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 时保持不变。注意，我们总可以选择 $M$，使其具有互素的整数系数。那么乘积 $\det(M)\mathbf{x}_i$ 也具有互素的整数系数。

对于每个整数 $m \geq 1$，我们用 $\mathcal{E}_m$ 表示满足如下条件的实数集合 $\xi$：对于 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ 中一个无界斐波那契序列（$W_i$）$_{i\geq 1}$ 以及所选的

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}). \tag{3.15}$$

那么，(E1) 中定义的序列（$\mathbf{x}_i$）$_{i\geq 1}$ 包含于 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ 中。在 [5, 第 3], 节中将证明，对于每个 $m$，$\mathcal{E}_m$ 都非空。我们还用 $\mathcal{E}_m^+$ 表示与 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中一个斐波那契序列（$W_i$）$_{i\geq 1}$ 相关联的 $\mathcal{E}_m$中的元素集合。文献 [7] 研究了集合$\mathcal{E}_3^+$，并将其与丢番图逼近中的马尔可夫理论联系起来。在第 10 节中，我们证明它包含例如下述数：

$$\xi = [0, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 1, \dots] = [0, \mathbf{1}, f_{\mathbf{2},\mathbf{1}}] \tag{3.16}$$

其中 $\mathbf{1} = (1,\ 1)$、$\mathbf{2} = (2,\ 2)$ 和 $f_{\mathbf{2},\ \mathbf{1}}$ 是由**2** 和**1** 构成的无限斐波那契词（定义见第 3.2 节）。然而，根据 [7, 引理 3.4], ，集合 $\mathcal{E}_m^+$ 对于 $m \neq 3$为空。本文的主要结果如下。

**定理 3.3**。 设 $\xi \in \mathcal{E}_m$，其中 $m \geq 1$ 为某个整数，并设 $\boldsymbol{\xi} = (1,\ \xi,\ \xi^2)$。则存在$\rho > 0$ 和 $c > 0$ 使得

$$\|\mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q}) - \rho\mathbf{P}(\rho^{-1}\mathbf{q})\| \leq c$$

对于每个$\mathbf{q} \in \mathcal{A}(\epsilon)$。

**3.7. 点族**。固定一个整数 $m \geq 1$ 对应的 $\xi \in \mathcal{E}_m$ 的选择，并令 $\boldsymbol{\xi} = (1, \xi, \xi^2)$。另外，选择相应的无界斐波那契数列 $(W_i)_{i\geq 1}$，该数列属于 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$，且满足第 3.6 节中针对由 (3.15) 给出的矩阵 $M$ 的条件 (E1)–(E3)。令 $(\mathbf{x}_i)_{i\geq 1}$ 为

在 (E1) 中定义的、属于 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ 的对称矩阵序列。按照 [4, 5], ，我们将每个点 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^3$ 与对称矩阵

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

我们固定一个含有两个字母的字母表 $E = \{a, b\}$，并令

$$W_0 = W_1^{-1} W_2.$$

我们将由条件 $\varphi(b) = W_0$ 和 $\varphi(a) = W_1$ 确定的幺半群态射 $\varphi\colon\ E^* \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ 记为。于是，按照第 3.2 节的记号，我们注意到

$$\varphi(w_i) = W_i \quad \text{for each } i \geq 1.$$

对于每个非空字 $v \in E^*$，令

$$M(v) = \begin{cases} M & \text{if } v \text{ ends in } b, \\ {}^tM & \text{if } v \text{ ends in } a. \end{cases} \tag{3.17}$$

这对每个 $i \geq 1$ 都得到 $M(w_i) = M_i$。我们还定义

$$\mathbf{x}(v) = \begin{pmatrix} x_0(v) & x_1(v) \\ x_1(v) & x_2(v) \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

为具有与矩阵 $\varphi(v)M(v)^{-1}$ 相同的第一列、且满足 $|x_1(v)\xi - x_2(v)| < 1/2$ 的整数系数对称矩阵。第一个条件确定了 $x_0(v)$ 和 $x_1(v)$，而第二个条件则唯一确定 $x_2(v)$ 为 $\xi \notin \mathbb{Q}$。我们还将 $\mathbf{x}(v)$ 视为点 $(x_0(v)\ x_1(v)\ x_2(v)) \in \mathbb{Z}^3$，如本节开头所述。然后，根据（2.3），其相对于 $\boldsymbol{\xi}$ 的轨迹是函数 $L_{\mathbf{x}(v)}\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，定义为

$$L_{\mathbf{x}(v)}(\mathbf{q}) = \max\{\log|x_0(v)|,\ q_1 + \log|x_0(v)\xi - x_1(v)|,\ q_2 + \log|x_0(v)\xi^2 - x_2(v)|\} \tag{3.19}$$

对于每个 $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$。

第 13 节中的工具使我们能够对每个足够大的 $v \in \mathcal{V}_\ell$，计算 $\mathbf{x}(v)$。特别地，我们发现，对每个足够大的 $i$，$\mathbf{x}(w_i) = \mathbf{x}_i$。以下关键结果在第 14 节中借助第 3.4 节的函数 $P_v$ 得到证明。

**定理 3.4.** 采用上述记号，存在一个整数 $\ell_0 \geq 4$ 和一个常数 $\rho > 0$，使得对每个整数 $\ell \geq \ell_0$，以下性质均成立。

(i) 对于任意 $v \in \mathcal{V}_\ell$ 以及任意 $\mathbf{q} \in \mathcal{A}(\epsilon)$，我们有

$$L_{\mathbf{x}(v)}(\mathbf{q}) = \rho P_v(\rho^{-1}\mathbf{q}) + \mathcal{O}_\xi(1),$$

其中 $\mathcal{O}_\xi(1)$ 表示一个关于 $v$ 和 $\mathbf{q}$ 的函数，其绝对值有一个仅依赖于 $\xi$ 的常数上界。

(ii) 对于 $\mathcal{V}_\ell$中的任意三个相邻元素 $u < v < w$，点$\mathbf{x}(u)$、$\mathbf{x}(v)$和$\mathbf{x}(w)$线性无关，当且仅当 $v \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$。

**3.8. 主要结果的证明。** 利用第2节的结果，并假定前面各节中的结论成立，定理3.3的证明如下。

按照定理 3.4 选取 $\rho > 0$ 和 $\ell_0$，并固定一点 $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathcal{A}(\epsilon)$。那么 $\rho^{-1}\mathbf{q}$也属于 $\mathcal{A}(\epsilon)$, 因此根据第 3.5 节，我们有

$$\rho\mathbf{P}(\rho^{-1}\mathbf{q}) = \Phi(\mathbf{p}) \quad \text{with} \quad \mathbf{p} = (q_1 - \rho|u|, q_2 + \rho|u| - \rho|w|, \rho|w|) \tag{3.20}$$

其中， $u$ 是 $w_\infty$ 的最大前缀，使得 $\rho^{-1}\mathbf{q} \in \mathcal{A}(u)$； $w$ 是$w_\infty$ 的最小前缀，满足 $u < w$，使得 $\rho^{-1}\mathbf{q} \in \mathcal{C}(w)$。此外， $|w| - |u| = F_\ell$，其中$\ell$是某个正整数。此外，若 $\ell > 1$，则存在唯一的词 $v \in ]u, w[$，使得 $u < v < w$ 是 $\mathcal{V}_\ell$ 的相邻元素，且

$$|\alpha(v)| = F_\ell = |w| - |u| \quad \text{and} \quad \rho^{-1}\mathbf{q} \in \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{B}(v) \cap \mathcal{C}(w),$$

因此，根据 $P_u$、 $P_v$ 和 $P_w$的定义，我们有

$$\mathbf{p} = \big(\rho P_u(\rho^{-1}\mathbf{q}), \rho P_v(\rho^{-1}\mathbf{q}), \rho P_w(\rho^{-1}\mathbf{q})\big).$$

首先假设 $\ell \geq \ell_0$。那么，由于 $\ell_0 \geq 4$，上述关于$\mathbf{p}$的公式成立，并且根据定理 3.4(i)，我们有

$$\mathbf{p} = \big(L_{\mathbf{x}(u)}(\mathbf{q}), L_{\mathbf{x}(v)}(\mathbf{q}), L_{\mathbf{x}(w)}(\mathbf{q})\big) + \mathcal{O}_\xi(1).$$

由于 $\Phi$ 是 1-利普希茨，这就得到

$$\rho\mathbf{P}(\rho^{-1}\mathbf{q}) = \Phi(\mathbf{p}) = \Phi\big(L_{\mathbf{x}(u)}(\mathbf{q}), L_{\mathbf{x}(v)}(\mathbf{q}), L_{\mathbf{x}(w)}(\mathbf{q})\big) + \mathcal{O}_\xi(1).$$

此外，由于 $v \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$，根据定理 3.4(ii)，整数点$\mathbf{x}(u)$，$\mathbf{x}(v)$，$\mathbf{x}(w)$线性无关，因此我们有

$$\mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q}) \leq \Phi\big(L_{\mathbf{x}(u)}(\mathbf{q}), L_{\mathbf{x}(v)}(\mathbf{q}), L_{\mathbf{x}(w)}(\mathbf{q})\big)$$

逐分量地。综上，这意味着

$$L_{\boldsymbol{\xi},j}(\mathbf{q}) \leq \rho P_j(\rho^{-1}\mathbf{q}) + \mathcal{O}_\xi(1) \quad (1 \leq j \leq 3).$$

我们还从 (3.20) 注意到，$\mathbf{p}$ 的坐标之和为 $q_1 + q_2$。由于 $\Phi(\mathbf{p}) = \rho\mathbf{P}(\rho^{-1}\mathbf{q})$的坐标之和相同，根据引理 2.2，我们得出

$$\|\mathbf{L}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q}) - \rho\mathbf{P}(\rho^{-1}\mathbf{q})\| = \mathcal{O}_\xi(1). \tag{3.21}$$

现在假设 $\ell < \ell_0$。由于 $\rho^{-1}\mathbf{q} \in \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{C}(w)$，我们有

$$2|u| \leq \rho^{-1}q_1 \leq 2|w| \quad \text{and} \quad \rho^{-1}q_2 \leq \min\{\rho^{-1}q_1 - |u| + |\alpha(u)|,\, |w| + |\alpha(w)|\}.$$

由于 $|w| - |u| = F_\ell$，根据第 3.3 节末尾的注记（或参见推论 4.8），我们也有 $\{u, w\} \not\subseteq \mathcal{V}_{\ell+3}$。因此，

$$|w| - |u| = F_\ell = \mathcal{O}_\xi(1) \quad \text{and} \quad \min\{|\alpha(u)|, |\alpha(w)|\} \leq F_{\ell+2} = \mathcal{O}_\xi(1).$$

因此，前面的估计得出

$$q_2 \leq q_1/2 + \mathcal{O}_\xi(1) \quad \text{and} \quad \mathbf{p} = (q_1/2, q_2, q_1/2) + \mathcal{O}_\xi(1),$$

利用 (3.20) 中给出的$\mathbf{p}$公式。因此，

$$\rho\mathbf{P}(\rho^{-1}\mathbf{q}) = \Phi(q_2, q_1/2, q_1/2) + \mathcal{O}_\xi(1).$$

为了估计$\mathbf{L_\xi(q)}$，我们利用 $\xi$ 是劣可逼近的这一事实，正如第 3.6 节所述。令$\mathbf{q}' = (q_1, q_2')$，其中 $q_2' = \min\{q_2, q_1/2\}$。由上可知， $\|\mathbf{q} - \mathbf{q}'\| = |q_2 - q_2'| = \mathcal{O}_\xi(1)$。于是，由引理 2.1 和 2.3(ii) 得

$$\mathbf{L_\xi}(\mathbf{q}) = \mathbf{L_\xi}(\mathbf{q}') + \mathcal{O}_\xi(1) = \Phi(q_2', q_1/2, q_1/2) + \mathcal{O}_\xi(1) = \Phi(q_2, q_1/2, q_1/2) + \mathcal{O}_\xi(1).$$

因此，(3.21) 在这种情况下也成立。至此，定理 3.3 得证。

## 4. The maps $\iota$ and $\alpha$和 and the sets $\mathcal{V}_\ell$

在第 3.3 节中，我们定义了两个映射 $\iota$ 和 $\alpha$ ，它们将 $[\epsilon, w_\infty[$ 映射到自身。利用由词长给出的从 $[\epsilon, w_\infty[$ 到 $\mathbb{N}$ 的自然双射，可以得到从$\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$的映射$\iota$ 和 $\alpha$ 。类似地，$[\epsilon, w_\infty[$ 的子集 $\mathcal{V}_\ell$ 对应于 $\mathbb{N}$的子集 $\mathcal{V}_\ell$ 。本节致力于研究这些较简单对象的组合性质。

这里，由 (3.5) 给出的集合 $\mathcal{F}$被集合

$$\overline{\mathcal{F}} = \{F_i\,;\, i \geq -1\} = \{0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\} \tag{4.1}$$

所有斐波那契数（包括 0）所组成的集合所取代。我们定义$\iota\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 为

$$\overline{\iota}(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in \overline{\mathcal{F}}, \\ x - 2F_{i-2} & \text{if } F_i < x < F_{i+1} \text{ for an integer } i \geq 3. \end{cases}$$

我们注意到，对每个 $x \in \mathbb{N}$，都有 $\iota(x) \leq x$ ，且等号成立当且仅当 $x \in \mathcal{F}$。因此， $\iota$在 $x$处取值所得到的迭代序列 $(\iota^k(x))_{k\geq 1}$ 单调不增，所以从某一项起恒为某个 $\mathcal{F}$ 中的元素。由此，我们定义映射 $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathcal{F}$，将 $x$ 映到该值：

$$\overline{\alpha}(x) = \lim_{k\to\infty} \overline{\iota}^k(x). \tag{4.2}$$

显然，我们有 $\alpha\circ\overline{\iota} = \alpha$。我们还注意到，对每个 $x \in \mathbb{N}$，都有 $\alpha(x) \leq \overline{x}$，且等号成立当且仅当 $x \in \mathcal{F}$。下表给出了映射 $\iota$和 $\alpha$ 在 $\mathbb{N} \cap [0, 13]$上的取值。

(4.3)

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{\iota}(x)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 5 | 2 | 3 | 8 | 3 | 4 | 5 | 6 | 13 |
| $\overline{\alpha}(x)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 5 | 2 | 3 | 8 | 3 | 2 | 5 | 2 | 13 |

对每个整数 $\ell \geq 1$，我们还定义

$$\overline{\mathcal{V}}_\ell = \{x \in \mathbb{N}\,;\, \overline{\alpha}(x) \geq F_\ell\}.$$

如果 $\mathcal{V}_\ell$中的元素 $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$在 $\mathcal{V}_\ell$中满足 $x_1$， $x_2$， $\dots$， $x_k$也都属于 $\mathcal{V}_\ell \cap [x_1, x_k]$，则称它们在 $\overline{\mathcal{V}}_\ell$中连续。根据定义，我们有

$$\overline{\iota}(|v|) = |\iota(v)|, \quad \overline{\alpha}(|v|) = |\alpha(v)| \quad \text{and} \quad \overline{\mathcal{V}}_\ell = \{|v|\,;\, v \in \mathcal{V}_\ell\} \tag{4.4}$$

对于每个 $v \in [\epsilon, w_\infty[$ 以及每个正整数 $\ell$。

如表 (4.3) 所示，映射 $\alpha$ 具有以下性质。

**引理 4.1.** 设 $x \in \mathbb{N}$ 满足 $x \geq 2$。则， $\alpha(x) \geq 2$。

证明。只需证明 $\iota(x) \geq 2$。若 $x \in \mathcal{F}$，显然成立，因为此时 $\iota(x) = x \geq 2$。否则，对于某个 $i \geq 3$，有 $F_i < x < F_{i+1}$，于是 $\iota(x) = x - 2F_{i-2} > F_i - 2F_{i-2} = F_{i-3} \geq 1$，从而 $\iota(x) \geq 2$。□

**引理 4.2**。我们有 $\mathcal{V}_1 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 和 $\mathcal{V}_2 = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$。

证明。由引理 4.1，我们有 $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \subseteq \mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \mathbb{N}$。由于 $0 \notin \mathcal{V}_1$ 而 $1 \in \mathcal{V}_1 \setminus \mathcal{V}_2$，结论成立。□

**引理 4.3**。设 $\ell \geq 2$ 为一个整数。那么，$\mathcal{V}_\ell$ 的最小元素是 $F_\ell$。此外，对于每个整数 $i \geq \ell$，映射 $\iota$ 限制为从 $\mathcal{V}_\ell \cap ]F_i,\ F_{i+1}[$ 到 $\mathcal{V}_\ell \cap ]F_{i-3},\ F_{i-1} + F_{i-3}[$ 的保序双射。

证明。对于每个 $x \in \mathcal{V}_\ell$，我们有 $x \geq \alpha(x) \geq F_\ell$。因此，$F_\ell$ 是 $\mathcal{V}_\ell$ 的最小元素。设 $i \geq \ell$ 为一个整数。根据构造，映射 $\iota$ 限制为一个保序双射

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \cap ]F_i, F_{i+1}[ & \longrightarrow & \mathbb{N} \cap ]F_{i-3}, F_{i-1} + F_{i-3}[ \\ x & \longmapsto & x - 2F_{i-2} \end{array}$$

（若 $i = \ell = 2$，则定义域与陪域均为空）。由此可得最后一个断言，因为 $\iota^{-1}(\mathcal{V}_\ell) = \mathcal{V}_\ell$。□

**引理 4.4**。设 $\ell \geq 2$ 为一个整数。则 $\mathcal{V}_\ell \cap [0, F_{\ell+3}]$ 由以下 7 个数组成

$$F_\ell < F_{\ell+1} < F_{\ell+1} + F_{\ell-1} < F_{\ell+2} < F_{\ell+2} + F_{\ell-2} < F_{\ell+2} + F_\ell < F_{\ell+3}.$$

证明。根据引理 4.3，我们有

$$\mathcal{V}_\ell \cap [0, F_\ell] = \{F_\ell\},$$

并且 $\iota$ 将 $\mathcal{V}_\ell \cap ]F_\ell,\ F_{\ell+1}[$ 双射到 $\mathcal{V}_\ell \cap ]F_{\ell-3},\ F_{\ell-1} + F_{\ell-3}[ = \emptyset$，，因此

$$\mathcal{V}_\ell \cap ]F_\ell, F_{\ell+1}] = \{F_{\ell+1}\}.$$

类似地，$\iota$ 将 $\mathcal{V}_\ell \cap ]F_{\ell+1},\ F_{\ell+2}[$ 双射到 $\mathcal{V}_\ell \cap ]F_{\ell-2},\ F_\ell + F_{\ell-2}[ = \{F_\ell\}$，，则 us

$$\mathcal{V}_\ell \cap ]F_{\ell+1}, F_{\ell+2}] = \{2F_{\ell-1} + F_\ell, F_{\ell+2}\} = \{F_{\ell+1} + F_{\ell-1}, F_{\ell+2}\}.$$

最后，$\iota$ 映射 $\mathcal{V}_\ell \cap ]F_{\ell+2},\ F_{\ell+3}[$ 双射到 $\mathcal{V}_\ell \cap ]F_{\ell-1},\ F_{\ell+1} + F_{\ell-1}[ = \{F_\ell, F_{\ell+1}\}$，因此

$$\mathcal{V}_\ell \cap ]F_{\ell+2}, F_{\ell+3}] = \{3F_\ell, 2F_\ell + F_{\ell+1}, F_{\ell+3}\} = \{F_{\ell+2} + F_{\ell-2}, F_{\ell+2} + F_\ell, F_{\ell+3}\}. \qquad \square$$

下一个引理介绍了映射 $\alpha$ 的一个核心性质。它是第 8 节中证明定理 3.1 的关键。下面，我们将利用它推导出集合 $\mathcal{V}_\ell$ 的若干性质。

**引理 4.5**。设 $k \geq 3$ 为整数。我们有

$$\overline{\alpha}(x) \leq \overline{\alpha}(x + 2F_{k-2}) \quad \textit{for each } x \in \mathbb{N} \cap [0, F_{k-1} + F_{k-3}],$$

当且仅当 $x \notin \mathcal{F}$ 和 $x \neq F_{k-1} + F_{k-3}$ 时等号成立。

证明。我们对 $k$ 使用归纳法。若 $k = 3$，则 $x$ 的取值范围为 $\{0, 1, 2, 3\}$，包含于 $\mathcal{F}$ 中；利用表 (4.3)，我们便得到所需结论：对于该范围内的每个 $x$，都有 $\alpha(x) \leq \alpha(x + 2)$。现在，假设 $k \geq 4$。令 $x \in \mathbb{N} \cap [0, F_{k-1} + F_{k-3}]$，并设 $y = x + 2F_{k-2}$。注意到

(i) if $x = F_{k-3}$, then $y = F_k$, so $\overline{\alpha}(y) = F_k > F_{k-3} = \overline{\alpha}(x)$;

(ii) 若 $x = F_{k-1} + F_{k-3}$，则 $y = F_{k+1}$，因此 $\alpha(y) = F_{k+1} > F_{k-2} = \alpha(x)$；

(iii) 若 $x \in ]F_{k-3},\ F_{k-1} + F_{k-3}[$，则 $y \in ]F_k,\ F_{k+1}[$，因此 $\iota(y) = x$，从而 $\alpha(y) = \alpha(x)$。

因此，我们可以假设 $x \in [0, F_{k-3}[$。于是，$y \in ]F_{k-1},\ F_k[$，从而

$$\iota(y) = y - 2F_{k-3} = x + 2F_{k-4} \quad \Longrightarrow \quad \alpha(y) = \alpha(x + 2F_{k-4}).$$

若 $k = 4$，则结论成立，因为 $x = 0 \in \mathcal{F}$ 且 $\alpha(y) \equiv 2 > \alpha(x) = 0$。因此，我们还可以假设 $k \geq 5$。最后，由于 $x \in [0, F_{k-3} + F_{k-5}[$，我们可以进一步通过归纳法假设 $\alpha(x) \leq \alpha(x + 2F_{k-4}) = \alpha(y)$，当且仅当 $x \notin \mathcal{F}$ 时取等号，结论成立。□

**命题 4.6**。设 $k, \ell \in \mathbb{N}$ 满足 $k - 2 \geq \ell \geq 1$。则存在一个双射

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{V}}_\ell \cap [F_\ell, F_{k-1} + F_{k-3}] & \longrightarrow & \overline{\mathcal{V}}_\ell \cap [F_\ell + 2F_{k-2}, F_{k+1}] \\ x & \longmapsto & x + 2F_{k-2}. \end{array}$$

证明。设 $A = [F_\ell, F_{k-1} + F_{k-3}]$ 与 $B = 2F_{k-2} + A = [F_\ell + 2F_{k-2}, F_{k+1}]$。由引理 4.5，由 $2F_{k-2}$ 所作的平移将 $\mathcal{V}_\ell \cap A$ 单射地映射到 $\mathcal{V}_\ell \cap \overline{B}$中。为证明它是满射的，选取$y \in \mathcal{V}_\ell \cap B$，并令 $x \in \mathbb{N} \cap A$使得 $y = x + 2F_{k-2}$。若 $x \in \mathcal{F}$，则 $\alpha(x) = x \geq F_\ell$。若 $x = F_{k-1} + F_{k-3}$ 且 $x \notin \mathcal{F}$，则 $k \geq 4$ 且 $\alpha(x) = F_{k-2} \geq F_\ell$。对于 $x$的任何其他值，引理 4.5给出 $\alpha(x) = \alpha(y) \geq F_\ell$。因此，在所有情形下均有 $x \in \mathcal{V}_\ell \cap A$。□

**命题4.7.** 设 $\ell \geq 3$ 为整数，并设 $x_1 = F_\ell < x_2 < x_3 < \cdots$ 为$\mathcal{V}_\ell$ 中按递增顺序排列的元素。则序列

$$(x_{i+1} - x_i)_{i \geq 1} = (F_{\ell-1}, F_{\ell-1}, F_{\ell-2}, F_{\ell-2}, F_{\ell-1}, F_{\ell-1}, \dots) \tag{4.5}$$

是在词$(F_{\ell-1}、\ F_{\ell-1})$ 和$(F_{\ell-2}、\ F_{\ell-2})$上构造的无限斐波那契词。

这对 $\ell = 2$ 也成立，但并不有趣，因为根据引理 4.2，有 $\mathcal{V}_2 = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$，因此当 $\ell = 2$ 时，(4.5) 是常数序列 (1，1，1，.....)。

命题*4.7*的证明。对于每个整数 $j \geq 1$，令 $\lambda(j)$ 表示集合 $\mathcal{V}_\ell \cap [F_\ell, F_\ell + 2F_{\ell+j-2}]$ 的基数，并令

$$m_j = (x_{i+1} - x_i)_{1 \leq i < \lambda(j)}.$$

利用引理 4.4，我们得到 $x_1 = F_\ell$、$\lambda(1) = 3$、$\lambda(2) = 5$，

$$m_1 = (F_{\ell-1}, F_{\ell-1}) \quad \text{and} \quad m_2 = (F_{\ell-1}, F_{\ell-1}, F_{\ell-2}, F_{\ell-2}). \tag{4.6}$$

对于 $j \geq 1$，将命题 4.6 应用于 $k = \ell + j + 1$，可得到一个双射

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{V}}_\ell \cap [F_\ell, F_\ell + 2F_{\ell+j-2}] & \longrightarrow & \overline{\mathcal{V}}_\ell \cap [F_\ell + 2F_{\ell+j-1}, F_\ell + 2F_{\ell+j}] \\ x & \longmapsto & x + 2F_{\ell+j-1}. \end{array} \tag{4.7}$$

由于 $F_\ell \in \mathcal{V}_\ell$，这意味着对于每个 $j \geq 1$，都有 $F_\ell + 2F_{\ell+j-1} \in \mathcal{V}_\ell$。这也可扩展到 $j = 0$，因为 $F_\ell + 2F_{\ell-1} = F_{\ell+1} + F_{\ell-1} \in \mathcal{V}_\ell$。因此，对于每个 $j \geq 1$，我们都有 $F_\ell + 2F_{\ell+j-2} \in \mathcal{V}_\ell$，所以

$$x_{\lambda(j)} = F_\ell + 2F_{\ell+j-2},$$

而双射 (4.7) 相当于

$$(x_i + 2F_{\ell+j-1})_{1 \leq i \leq \lambda(j)} = (x_i)_{\lambda(j+1) \leq i \leq \lambda(j+2)}.$$

反过来，这意味着

$$(x_{i+1} - x_i)_{1 \leq i < \lambda(j)} = (x_{i+1} - x_i)_{\lambda(j+1) \leq i < \lambda(j+2)},$$

这可以转化为如下关系

$$m_{j+2} = m_{j+1}m_j \quad (j \geq 1).$$

结论由这个递推关系和 (4.6) 得出。 □

**推论 4.8**。 设 $\ell \geq 3$ 为整数。对于 $\mathcal{V}_\ell$中任意一对相邻的数 $x < y$，有 $y - x \in \{F_{\ell-2}, F_{\ell-1}\}$。由 $\mathcal{V}_\ell$中相邻的数构成、差为 $F_{\ell-2}$ 、长度为3 的等差数列有无穷多个，但不存在更长的此类数列。由 $\mathcal{V}_\ell$中相邻的数构成、差为 $F_{\ell-1}$ 、长度为5 的等差数列有无穷多个，但不存在更长的此类数列。

证明。 第一个断言是命题的直接推论。其余结论由该命题以及以下事实得出：由两个字母 $a$ 和 $b$ 构成的无限斐波那契词 $f_{a,b} = abaababa\cdots$ 含有无穷多个字母 $b$ ，但不含形如 $bb$ 的因子；并且它含有无穷多个因子 $aa$，但不含因子 $aaa$。因此，由 $(F_{\ell-1}, F_{\ell-1})$ 和 $(F_{\ell-2}, F_{\ell-2})$ 构成的无限斐波那契词含有无穷多个由两个连续项组成且等于 $F_{\ell-2}$ 的子序列，但不存在更长的此类子序列；并且含有无穷多个由四个连续项组成且等于 $F_{\ell-1}$ 的子序列，但不存在更长的此类子序列。□

**推论 4.9**。 设 $x < y$ 是某个整数 $\ell \geq 2$ 对应的 $\mathcal{V}_\ell$ 中的相邻元素。则，

$$\{x, y\} \not\subseteq \mathcal{V}_{\ell+2}, \quad \{x, y\} \cap \mathcal{V}_{\ell+1} \neq \emptyset \quad and \quad |\alpha(y) - \alpha(x)| \geq y - x.$$

证明。 若 $\ell \geq 3$，则由推论 4.8 得到 $y - x \in \{F_{\ell-2}, F_{\ell-1}\}$。当 $\ell = 2$ 时同样成立，因为根据引理 4.2 有 $y - x = 1$。由于 $y - x \leq F_{\ell-1} < F_\ell$，由推论 4.8 可知，$x < y$ 不是 $\mathcal{V}_{\ell+2}$ 中的相邻元素，因此 $\{x, y\} \not\subseteq \mathcal{V}_{\ell+2}$。

假设 $\{x, y\} \cap \mathcal{V}_{\ell+1} = \emptyset$。由于 $\mathcal{V}_\ell$ 的前两个元素是 $F_\ell$ 和 $F_{\ell+1}$，我们必有 $x > F_{\ell+1}$，因此在 $\mathcal{V}_{\ell+1}$ 中存在相邻的 $x' < y'$，使得 $x' < x < y < y'$。根据上文，差值 $x - x'$、$y - x$ 和 $y' - y$ 都不小于 $F_{\ell-2}$。此外，至少有一个差值不小于 $F_{\ell-1}$，因为否则将有 $F_{\ell-1} > F_{\ell-2}$，从而 $\ell \geq 3$，且 $x' < x < y < y'$ 将是 $\mathcal{V}_\ell$ 中以 $F_{\ell-2}$ 为公差的 4 个相邻元素，构成等差数列，这与推论 4.8 矛盾。我们得到 $y' - x' \geq 2F_{\ell-2} + F_{\ell-1} > F_\ell$。但这是不可能的，因为同一推论给出 $y' - x' \leq F_\ell$。因此，$\{x, y\} \cap \mathcal{V}_{\ell+1} \neq \emptyset$。

令 $m$ 为满足 $\{x, y\} \subseteq \mathcal{V}_m$ 的最大整数。由上文可知，$m \in \{\ell, \ell+1\}$，而前面的推理得出 $\{x, y\} \cap \mathcal{V}_{m+1} \neq \emptyset$。因此，$\alpha(x)$ 和 $\alpha(y)$ 是不同的斐波那契数，其中较小者等于 $F_\ell$ 或 $F_{\ell+1}$。因此，我们有$|\alpha(y) - \alpha(x)| \geq F_{\ell-1} \geq y - x$。□

下一个 结果刻画了任意整数 $\ell \geq 3$ 下 $\mathcal{V}_\ell$ 中 $\mathcal{V}_{\ell+1}$ 的元素。

**命题 4.10**。 设 $x < y < z$ 是 $\mathcal{V}_\ell$ 中的连续数，其中某个整数 $\ell \geq 3$ 满足这一条件。那么，我们有

$$y \notin \mathcal{V}_{\ell+1} \iff y - x \neq z - y. \tag{4.8}$$

当这些等价条件成立时，我们进一步有 $z - x = \alpha(y) = F_\ell$。

请注意，(4.8) 对于 $\ell = 2$ 不成立。任意一组三个连续整数 $x < y < z$ （其中 $x > 1$ 且 $\alpha(y) = 2$）都是一个反例。因为此时， $x < y < z$ 是 $\mathcal{V}_2$ 中的相邻元素，且 $y \notin \mathcal{V}_3$ 和 $y - x = z - y = 1$。

证明。令 $(x_i)_{i\geq 1}$ 表示按递增顺序排列的 $\mathcal{V}_\ell$ 中各元素的序列，并令 $(y_i)_{i\geq 1}$ 表示移除其首项 $x_1$ 以及所有满足 $i \geq 2$的 $x_i$ （其中 $x_i - x_{i-1} \neq x_{i+1} - x_i$）后得到的子序列。由于$x_1 = F_\ell \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$，要证明命题的第一部分，只需证明 $(y_i)_{i\geq 1}$ 按递增顺序列出了 $\mathcal{V}_{\ell+1}$ 中的各元素。

根据命题4.7，我们有 $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = F_{\ell-1}$，因此 $y_1 = x_2 = F_{\ell+1}$ 确实是 $\mathcal{V}_{\ell+1}$中的最小元素。接下来，令

$$X = (x_{i+1} - x_i)_{i\geq 1}, \quad X' = (x_{i+1} - x_i)_{i\geq 2} \quad \text{and} \quad Y = (y_{i+1} - y_i)_{i\geq 1}.$$

根据命题4.7，我们有 $X = \lim_{i\to\infty} u_i$ ，其中$(u_i)_{i\geq 1}$ 是$\{F_{\ell-2}, F_{\ell-1}\}^*$ 中以如下元素开头的斐波那契数列

$$u_1 = F_{\ell-1}F_{\ell-1} \quad \text{and} \quad u_2 = F_{\ell-1}F_{\ell-1}F_{\ell-2}F_{\ell-2}.$$

由于每个 $u_i$ 都以 $F_{\ell-1}$开头，我们可以写成

$$u_i F_{\ell-1} = F_{\ell-1} v_i$$

对某个 $v_i \in \{F_{\ell-2}, F_{\ell-1}\}^*$。于是，$(v_i)_{i\geq 1}$ 是 $\{F_{\ell-2}, F_{\ell-1}\}^*$ 中的斐波那契数列，其中

$$v_1 = F_{\ell-1}F_{\ell-1} \quad \text{and} \quad v_2 = F_{\ell-1}F_{\ell-2}F_{\ell-2}F_{\ell-1}.$$

我们推得， $X' = \lim_{i\to\infty} v_i = v_2 v_1 v_2 v_2 v_1 \cdots$是定义在 $v_2$和$v_1$上的无限斐波那契词。因此，因子 $F_{\ell-1}F_{\ell-2}$ 和 $F_{\ell-2}F_{\ell-1}$ 在 $X'$中不重叠，所以 $Y$ 是定义在 $\{F_{\ell-1}, F_\ell\}$ 上的无限词，它由 $X'$ 通过将这些因子分别替换为 $F_\ell$而得到。于是， $Y$是定义在 $F_\ell F_\ell$ 和 $F_{\ell-1}F_{\ell-1}$上的无限斐波那契词。由于 $y_1 = F_{\ell+1}$，我们由命题4.7得出，$(y_i)_{i\geq 1}$ 按递增顺序列出了$\mathcal{V}_{\ell+1}$ 中的元素。

命题的第二部分由此得出。事实上，当 (4.8) 中两个条件都成立时，我们有 $\alpha(y) = F_\ell$，因为 $y \in \mathcal{V}_\ell \setminus \mathcal{V}_{\ell+1}$；并且 $z - x = F_\ell$，因为 $(y - x,\ z - y)$ 是 $(F_{\ell-2},\ F_{\ell-1})$ 的一个排列。□

我们以两个补充观察结束本节。

**命题 4.11.** 设 $\ell \geq 2$ 为一个整数， $x < z$ 为正整数。则以下条件等价。

(i) $x < z$ 是 $\mathcal{V}_{\ell+1}$ 中的相邻元素，但不是 $\mathcal{V}_\ell$中的相邻元素；(ii) 存在 $y \in \mathcal{V}_\ell \setminus \mathcal{V}_{\ell+1}$，使得$x < y < z$ 是 $\mathcal{V}_\ell$中的相邻元素；(iii) $x < z$ 是 $\mathcal{V}_{\ell+1}$ 和 $z - x = F_\ell$中的相邻元素。

证明。(i) $\Rightarrow$ (ii)：假设 (i) 成立，并设 $y$ 是 $\mathcal{V}_\ell$中 $x$ 的后继。由于$x < y < z$，这个数 $y$ 不属于 $\mathcal{V}_{\ell+1}$。因此，根据推论 4.9，它在 $\mathcal{V}_\ell$中的后继属于 $\mathcal{V}_{\ell+1}$，所以必定是 $z$。故 (ii) 成立。

(ii) $\Rightarrow$ (iii)：在条件 (ii) 下，推论 4.9 意味着 $\{x, z\} \subseteq \mathcal{V}_{\ell+1}$。因此，$x < z$ 在 $\mathcal{V}_{\ell+1}$ 中连续。此外，如果 $\ell \geq 3$，命题 4.10 得出 $z - x = F_\ell$。当 $\ell = 2$ 时，这一结论仍然成立，因为此时 $x < y < z$ 是连续整数，因此 $z - x = 2 = F_\ell$。

(iii) $\Rightarrow$ (i)：如果 (iii) 成立，那么 $z-x=F_\ell\notin\{F_{\ell-2},F_{\ell-1}\}$。因此，如果 $\ell\geq 3$，根据推论 4.8，$x<z$ 不可能在 $\mathcal{V}_\ell$ 中连续；如果 $\ell=2$，则根据引理 4.2，结论相同。□

**命题 4.12**。设 $\ell\geq 2$ 是一个整数，且 $x<y<z$ 是 $\mathcal{V}_\ell$ 中连续的数，它们并非全都包含在 $\overline{\mathcal{V}}_{\ell+1}$ 中。那么，以下情况恰有一种成立：

(i) $\overline{\alpha}(x)\geq F_{\ell+1},\ \overline{\alpha}(y)=F_\ell,\quad \overline{\alpha}(z)\geq F_{\ell+1}\quad and\quad z-x=F_\ell;$

(ii) $\overline{\alpha}(x)=F_\ell,\quad \overline{\alpha}(y)\geq F_{\ell+1},\ \overline{\alpha}(z)=F_\ell\quad and\quad y-x=z-y;$

(iii) $\overline{\alpha}(x)=F_\ell,\quad \overline{\alpha}(y)=F_{\ell+1},\ \overline{\alpha}(z)\geq F_{\ell+2}\quad and\quad y-x=z-y=F_{\ell-1};$

(iv) $\overline{\alpha}(x)\geq F_{\ell+2},\ \overline{\alpha}(y)=F_{\ell+1},\ \overline{\alpha}(z)=F_\ell\quad and\quad y-x=z-y=F_{\ell-1}.$

证明。首先注意到，条件 (i) 至 (iv) 两两互斥。因此，我们只需证明它们穷尽了所有可能性。还要注意，若 $\ell=2$，那么 $x<y<z$ 是连续整数，因此 $y-x=z-y=1=F_1$ 和 $z-x=2=F_2$。

若 $y\notin\overline{\mathcal{V}}_{\ell+1}$，则由命题 4.11，情形 (i) 成立。

从现在起，假设 $y\in\mathcal{V}_{\ell+1}$。若 $\overline{\ell}\geq 3$，则有

$$y-x=z-y\in\{F_{\ell-2},F_{\ell-1}\}$$

由推论 4.8 和命题 4.10 得出。正如上文所述，对于 $\ell=2$，这一结论也成立。因此，若 $x\notin\overline{\mathcal{V}}_{\ell+1}$ 且 $z\notin\overline{\mathcal{V}}_{\ell+1}$，则情形 (ii) 成立。

假设 $x\notin\mathcal{V}_{\ell+1}$ 和 $z\in\mathcal{V}_{\ell+1}$。那么 $y<z$ 在 $\mathcal{V}_\ell$ 和$\mathcal{V}_{\ell+1}$中都是相邻元素。因此，由推论 4.8可得 $z-y=F_{\ell-1}$。我们还注意到 $x\neq F_\ell$，因为否则，根据引理 4.4，我们会有 $y=F_{\ell+1}$ 和 $z=F_{\ell+1}+F_{\ell-1}$，从而 $\alpha(z)=F_\ell$，这与假设 $z\in\mathcal{V}_{\ell+1}$矛盾。因此，$x$ 在 $\mathcal{V}_\ell$中有一个前驱元 $x'$。由于 $x\notin\mathcal{V}_{\ell+1}$，推论 4.9表明 $x'\in\mathcal{V}_{\ell+1}$，因此 $x'<y<z$ 是 $\mathcal{V}_{\ell+1}$ 中满足$y-x'>y-x=z-y$的相邻元素。根据命题 4.10，这意味着 $y\notin\mathcal{V}_{\ell+2}$，于是由推论 4.9可得 $z\in\mathcal{V}_{\ell+2}$。因此，适用情形 (iii)。

最后，假设 $x\in\mathcal{V}_{\ell+1}$。那么，该假设意味着 $z\notin\mathcal{V}_{\ell+1}$，我们采用与上文类似的论证。由于 $x<y$ 在 $\mathcal{V}_{\ell+1}$中相邻，我们有 $y-x=F_{\ell-1}$。令 $z'$ 为 $z$ 在 $\mathcal{V}_\ell$中的后继。由于 $z\notin\mathcal{V}_{\ell+1}$，我们有 $z'\in\mathcal{V}_{\ell+1}$，因此 $x<y<z'$ 在$\mathcal{V}_{\ell+1}$ 中相邻，且满足 $y-x=z-y<z'-y$。这意味着 $y\notin\mathcal{V}_{\ell+2}$，从而 $x\in\mathcal{V}_{\ell+2}$。因此，情形 (iv) 适用。□

## 5. The maps $\iota$ and $\alpha$, and the sets $\mathcal{V}_\ell$

记号与第 3.3 节中的相同。本节将明确描述映射 $\iota\colon\ [\epsilon,w_\infty[\to[\epsilon,w_\infty[$。随后，我们利用它来细化上一节的一些结果，并证明第 3.3 节的最后一个断言。

在此之前，我们注意到，根据引理 4.2，我们有 $\mathcal{V}_1=[w_1,w_\infty[$ 和 $\mathcal{V}_2=[w_2,w_\infty[$。我们还注意到引理 4.4 的如下直接推论。

**引理 5.1.** 设 $\ell\geq 3$ 是一个整数。那么，$\mathcal{V}_\ell\cap[\epsilon,w_{\ell+3}]$ 由以下 7 个词组成

$$w_\ell<w_{\ell+1}<w_{\ell+1}w_{\ell-1}<w_{\ell+2}<w_{\ell+2}w_{\ell-2}<w_{\ell+2}w_\ell<w_{\ell+3}.$$

对于 $E^*$ 中的每个非空字 $v$，我们将去掉最后一个字母后的词 $v$ 记为 $v^*$，也就是 $v$ 的长度为 $|v|-1$ 的前缀。根据递推公式 $w_{i+2} = w_{i+1}w_i (i \geq 1)$ 进行归纳可得

$$w_i = w_i^{**} f_i \quad \text{where} \quad f_i = \begin{cases} ab & \text{if } i \geq 2 \text{ is even,} \\ ba & \text{if } i \geq 2 \text{ is odd.} \end{cases} \tag{5.1}$$

对于每个 $i \geq 2$，我们将 $\widetilde{w}_i$ 定义为通过调换 $w_i$ 的最后两个字母得到的词。由上文可知，这意味着

$$\widetilde{w}_i = w_i^{**} f_{i+1} \quad (i \geq 2). \tag{5.2}$$

众所周知，J. Berstel 指出，对于每个 $i \geq 2$，$w_i^{**}$ 都是回文。这有一个有用的推论。

**引理 5.2.** 对于每个整数 $i \geq 2$，词 $w_i^{**}$ 都是回文，并且有

$$w_{i+1} = w_{i-1}\widetilde{w}_i. \tag{5.3}$$

证明。我们对 $i$ 使用归纳法。首先注意到，$w_2^{**} = \epsilon$ 和 $w_3^{**} = a$ 都是回文，且 $w_3 = aba = w_1\widetilde{w}_2$，并且 $w_4 = abaab = w_2\widetilde{w}_3$。假设对于某个 $i \geq 3$，字 $w_{i-1}^{**}$ 和 $w_i^{**}$ 都是回文，且 (5.3) 成立。由此得到 $w_{i+1}^{**} = w_{i-1}^{**} f_{i-1} w_i^{**}$。因此，$w_{i+1}^{**}$ 的反转是 $w_i^{**} f_i w_{i-1}^{**} = w_i w_{i-1}^{**} = w_{i+1}^{**}$，这表明 $w_{i+1}^{**}$ 是回文。此外，由于 (5.3) 推出 $\widetilde{w}_{i+1} = w_{i-1}w_i$，我们还可得 $w_{i+2} = w_{i+1}w_i = w_i w_{i-1} w_i = w_i\widetilde{w}_{i+1}$，从而完成归纳步骤。□

由引理 5.2 可知，对每个 $i \geq 2$，我们有 $w_{i+1}^{**} = w_{i-1}w_i^{**}$，因此 $w_i^{**}$是 $w_\infty$ 的最大前缀 $v$，使得 $w_{i-1}v$ 是 $w_\infty$ 的前缀。

**引理 5.3.** 设 $k \geq 4$ 为一个整数。则，

$$\begin{array}{ccc} ]w_k, w_{k+1}[ & \longrightarrow & ]w_{k-3}, w_{k-1}w_{k-3}[ \\ w & \longmapsto & \iota(w). \end{array} \tag{5.4}$$

是一个保序双射。对于 $w \in ]w_k、\ w_{k+1}[$，我们可以如下计算 $\iota(w)$。

(i) 若 $w < w_k w_{k-2}^*$，则对某些 $u \in \left]\epsilon、\ w_{k-2}^{**}\right]$，有 $w = w_k u$，且 $\iota(w) = w_{k-3}u$。(ii) 若 $w = w_k w_{k-2}^*$，则 $\iota(w) = w_{k-1}^*$。(iii) 若 $w > w_k w_{k-2}^*$，则对某个 $u \in [\epsilon, w_{k-3}[$，有 $w = w_k w_{k-2} u$，且 $\iota(w) = w_{k-1}u$。

证明。对于每个 $w \in ]w_k,\ w_{k+1}[$，我们都有 $|\iota(w)| = \iota(|w|) = |w| - 2F_{k-2}$。因此，(5.4) 是一个保序双射。为说明显式公式，只需注意，在每种情形下，$\iota(w)$ 的给定值都是 $w_\infty$ 的一个长度为 $|w| - 2F_{k-2}$ 的前缀。长度可通过直接计算得到。在情形 (ii) 和 (iii) 中，它是前缀这一点是显然的。在情形 (i) 中，这一点由引理之前紧接着的观察可得。□

**引理 5.4。** 对于每个整数 $k \geq 3$，我们有 $\{\alpha(w_k^*)\ \ \alpha(w_{k+1}^*)\ \ \alpha(w_k w_{k-2}^*)\} \subseteq \{w_2, w_3\}$。

证明。我们通过归纳法进行。表 (3.7) 给出 $\alpha(w_3^*) = \alpha(w_4^*) = w_2$ 以及 $\alpha(w_3 w_1^*) = w_3$。假设 $\alpha(w_{k-1}^*)$、$\alpha(w_k^*)$ 和 $\alpha(w_{k-1}w_{k-3}^*)$ 对某个 $k \geq 4$ 都属于 $\{w_2, w_3\}$。引理 5.3 给出

$$\iota(w_{k+1}^*) = w_{k-1}w_{k-3}^* \quad \text{and} \quad \iota(w_k w_{k-2}^*) = w_{k-1}^*.$$

因此，$\alpha(w_{k+1}^*) = \alpha(w_{k-1}w_{k-3}^*)$ 和 $\alpha(w_k w_{k-2}^*) = \alpha(w_{k-1}^*)$ 也属于 $\{w_2, w_3\}$。□

**命题 5.5**。 设 $\ell \geq 4$ 是一个整数，且 $u < v$ 是 $\mathcal{V}_\ell$中的相邻元素。那么，对于集合 $\mathcal{S}_\ell$：$= \{w_{\ell-2}, \widetilde{w}_{\ell-2}, w_{\ell-1}, \widetilde{w}_{\ell-1}\}$中的某个后缀 $s$，有 $v = us$。

证明。 根据引理 5.1， $\mathcal{V}_\ell$ 的最小元素是 $w_\ell$，而 $\mathcal{V}_\ell$ 的接下来六个元素依次由 $w_\ell$ 在右侧连续乘以 $w_{\ell-1}$、 $w_{\ell-1}$、 $w_{\ell-2}$、 $w_{\ell-2}$、 $\widetilde{w}_{\ell-1}$ 和$w_{\ell-1}$得到。因此，我们可以假设 $v > w_{\ell+3}$，于是对某个整数 $k \geq \ell + 3$，有 $v \in ]w_k,\ w_{k+1}]$。由于 $w_k \in \mathcal{V}_\ell$，我们推出 $\{u, v\} \subseteq [w_k, w_{k+1}]$。因为 $w_{k-3}$和 $w_{k-1}w_{k-3}$属于 $\mathcal{V}_\ell$，映射

$$\begin{aligned} \pi\colon \mathcal{V}_\ell \cap [w_k, w_{k+1}] &\longrightarrow \mathcal{V}_\ell \cap [w_{k-3}, w_{k-1}w_{k-3}] \\ w &\longmapsto \pi(w) = \begin{cases} w_{k-3} & \text{if } w = w_k, \\ \iota(w) & \text{if } w_k < w < w_{k+1}, \\ w_{k-1}w_{k-3} & \text{if } w = w_{k+1}. \end{cases} \end{aligned}$$

是一个保序双射。特别地， $\pi(u)$和 $< \pi(v)$是 $\mathcal{V}_\ell$中的相邻元素，因此我们可以对 $|v|$使用归纳法，假设

$$\pi(v) = \pi(u)s \quad \text{for some } s \in \mathcal{S}_\ell. \tag{5.5}$$

我们分三种情况讨论。

(i) 假设 $v < w_kw_{k-2}$。由于 $\ell \geq 4$，引理 5.4表明 $w_kw_{k-2}^* \notin \mathcal{V}_\ell$。因此，对于某个 $u'$，我们有 $u = w_ku'$和 $v = w_kv'$， $v'$属于 $[\epsilon, w_{k-2}^{**}[$。于是，由引理 5.3可得 $\pi(u) = w_{k-3}u'$以及 $\pi(v) = w_{k-3}v'$。由(5.5)，得到 $v' = u's$，从而 $v = us$。

(ii) 假设 $v > w_kw_{k-2}$。于是，我们有 $u \geq w_kw_{k-2}$。因此，对某个 $u'$， $[\epsilon, w_{k-3}]$中的 $v'$，有 $u = w_kw_{k-2}u'$ 且$v = w_kw_{k-2}v'$。应用引理 5.3 得到 $\pi(u) = w_{k-1}u'$ 且$\pi(v) = w_{k-1}v'$。由 (5.5)，这蕴含 $v' = u's$，从而 $v = us$。

(iii) 最后，假设 $v = w_kw_{k-2}$。由于 $w_kw_{k-2}^* \notin \mathcal{V}_\ell$，对某个词 $u' \in [\epsilon, w_{k-2}^{**}]$，我们有 $u = w_ku'$。于是，引理 5.3 给出 $\pi(u) = w_{k-3}u'$ 且 $\pi(v) = w_{k-1}$。因此，由引理 5.2，$\pi(v) = w_{k-3}\widetilde{w}_{k-2}$。由 (5.5)，我们推出 $\widetilde{w}_{k-2} = u's$，从而 $w_{k-2} = u's'$，其中 $s'$ 是 $s$的反转。我们得出结论： $v = w_ku's' = us'$，且 $s' \in \mathcal{S}_\ell$。 □

在第 3.2 节中，我们将 $\theta$ 定义为由 $\theta(a) = ab$ 和$\theta(b) = a$确定的 $E^*$ 的自同态。它具有以下性质。

**引理 5.6.** 对每个整数 $k \geq 2$，都有 $\theta(w_k) = w_{k+1}$ 和 $\theta(\widetilde{w}_k) = \widetilde{w}_{k+1}$。此外，$\theta$ 限制为一个从 $[\epsilon, w_\infty[$ 到其自身的保序映射。

证明.如 (3.3) 所述，第一个公式对每个 $k \geq 1$ 都成立。这是因为 $(\theta(w_i))_{i\geq 1}$ 是 $E^*$ 中的一个斐波那契数列，其中 $\theta(w_1) = \theta(a) = ab = w_2$ 且$\theta(w_2) = \theta(ab) = aba = w_3$。由于 $\theta$ 保持前缀关系，我们可以推得它将$[\epsilon, w_k]$映射到 $[\epsilon, w_{k+1}]$，对每个 $k \geq 1$均如此。因此，它将 $[\epsilon, w_\infty[$映射到自身。

为证明第二个公式，我们注意到 $\theta(ab) = aba$ 且 $\theta(ba) = aab$。这意味着，对每个 $k \geq 2$，我们有 $\theta(f_k) = af_{k+1}$，从而 $w_{k+1} = \theta(w_k) = \theta(w_k^{**})af_{k+1}$，于是

$$\widetilde{w}_{k+1} = \theta(w_k^{**})af_k = \theta(w_k^{**}f_{k+1}) = \theta(\widetilde{w}_k). \qquad \square$$

特别地，上述引理蕴含：采用命题 5.5 中的记号，我们有$\theta(\mathcal{S}_\ell) = \mathcal{S}_{\ell+1}$，对每个整数 $\ell \geq 4$ 均成立。现在我们可以证明第 3.3 节的最后一个断言。

**命题 5.7.** 设 $\ell \geq 4$ 为一个整数。那么，$\theta$ 限制后给出一个从 $\mathcal{V}_\ell$ 到 $\mathcal{V}_{\ell+1}$的保序双射。

证明。令 $(v_i)_{i\geq 1}$ 为 $\mathcal{V}_\ell$ 中元素按递增顺序排列的序列，并令 $(v'_i)_{i\geq 1}$ 为 $\mathcal{V}_{\ell+1}$ 中元素按递增顺序排列的序列。我们需要证明，对于每个 $i \geq 1$，都有 $\theta(v_i) = v'_i$。由于 $v_i$ 和 $v'_i$ 是 $w_\infty$ 的前缀，根据引理 5.6，$\theta(v_i)$ 和 $v'_i$ 都是 $w_\infty$ 的前缀。因此，只需证明 $|\theta(v_i)| = |v'_i|$。

对于每个 $i \geq 1$，用 $v_{i+1} = v_i s_i$ 和 $v'_{i+1} = v'_i s'_i$ 分别表示词 $s_i$ 和 $s'_i$。根据命题4.7，序列 $(|s_i|)_{i\geq 1}$ 是由 $(F_{\ell-1}, F_{\ell-1})$ 和 $(F_{\ell-2}, F_{\ell-2})$ 构成的无限斐波那契词，而 $(|s'_i|)_{i\geq 1}$ 是由 $(F_\ell, F_\ell)$ 和 $(F_{\ell-1}, F_{\ell-1})$ 构成的无限斐波那契词。因此，对于每个 $i \geq 1$，都存在一个整数 $k \in \{\ell-2, \ell-1\}$，使得 $|s_i| = F_k$ 和 $|s'_i| = F_{k+1}$。根据命题 5.5，由于 $|s_i| = F_k$，我们有 $s_i \in \{w_k, \widetilde{w}_k\}$。然后，引理 5.6 给出 $\theta(s_i) \in \{w_{k+1}, \widetilde{w}_{k+1}\}$，因此$|\theta(s_i)| = F_{k+1} = |s'_i|$。

由于 $v_1 = w_\ell$ 和 $v'_1 = w_{\ell+1}$，我们有 $\theta(v_1) = v'_1$，因此对于 $i = 1$，$|\theta(v_i)| = |v'_i|$。由归纳法可知，对于每个 $i \geq 1$，都有 $|\theta(v_i)| = |v'_i|$，因为如果这对某个 $i \geq 1$成立，那么

$$|\theta(v_{i+1})| = |\theta(v_i)| + |\theta(s_i)| = |v'_i| + |s'_i| = |v'_{i+1}|. \qquad \square$$

注记。该命题对 $\ell = 2$ 和 $\ell = 3$不成立。例如，对于$v = w_6 w_4^* = w_6 w_3 a$，我们有 $\theta(v) = w_7 w_4 ab = w_7 w_5^*$。利用引理 5.3，我们得到$\alpha(v) = \iota^2(v) = w_3$，并且 $\alpha(\theta(v)) = \iota^3(\theta(v)) = w_2$。因此，$v \in \mathcal{V}_3$，而 $\theta(v) \notin \mathcal{V}_3$。这表明 $\theta(\mathcal{V}_3) \not\subseteq \mathcal{V}_3$。更进一步，我们有 $\theta(\mathcal{V}_2) \not\subseteq \mathcal{V}_3$，以及 $\theta(\mathcal{V}_3) \not\subseteq \mathcal{V}_4$。

**推论 5.8**。对于每个 $v \in \mathcal{V}_4$，我们有 $\alpha(\theta(v)) = \theta(\alpha(v))$。

证明。设 $v \in \mathcal{V}_4$。我们有 $\alpha(v) = w_\ell$，其中某个整数为 $\ell \geq 4$。于是 $v \in \mathcal{V}_\ell \setminus \mathcal{V}_{\ell+1}$，由命题可得 $\theta(v) \in \mathcal{V}_{\ell+1} \setminus \mathcal{V}_{\ell+2}$。因此，$\alpha(\theta(v)) = w_{\ell+1} = \theta(\alpha(v))$。$\square$

## 6. A partition of the domain of $\mathbf{P}$

本节中，我们通过将其定义域 $\mathcal{A}(\epsilon)$ 分解为内部互不相交的闭多边形之并，并给出 $\mathbf{P}$ 在这些多边形上各自的显式公式，来研究第 3.5 节中的映射 $\mathbf{P}$。为此，我们引入若干定义。

我们将可容许线段 定义为 $\mathbb{R}^2$ 中的一条闭线段，其内部非空，且平行于 $(1, 0)$、$(1, 1)$ 或 $(0, 1)$，端点属于 $\mathbb{Z}^2$，即具有如下形式的集合

$$\{(i+t, j)\,;\, t \in I\} \quad \text{or} \quad \{(i+t, j+t)\,;\, t \in I\} \quad \text{or} \quad \{(i, j+t)\,;\, t \in I\}$$

其中 $(i,\ j) \in \mathbb{Z}^2$ 且其中 $I$ 是 $\mathbb{R}$ 的闭子区间，其内部非空，且可以无界。

我们将可容许多边形定义为 $\mathbb{R}^2$ 的一个非空子集，它是其内部的闭包，且其边界（可以为空）是一条由可容许线段组成的折线，这些线段至多在端点处相交。这些线段是多边形的边，其端点是多边形的顶点。

如果两个不同的可容许多边形的交集为空，或是它们各自的一个公共顶点，或是它们各自的一条公共边，我们就称它们相容。我们将可容许多边形 $\mathcal{A}$ 的多边形划分定义为一个集合 $S$，其中的可容许多边形两两相容，且它们的并集为 $\mathcal{A}$。这意味着 $\mathcal{A}$ 的每条边都是 $S$ 中多边形的边的并，但不一定是 $S$ 中某个单独多边形的一条边。

例如，扇形 $\mathcal{A}(\epsilon)$ 是一个可容许多边形，它有一个顶点 $(0,\ 0)$、一条垂直边 $\{(0,\ t);\ -\infty < t \le 0\}$，以及一条斜率为 1 的边 $\{(t,\ t);\ 0 \le t < \infty\}$。本节的主要结果如下。

**定理 6.1**。 对于集合 $u < v$ 中每一对相邻词 $[\epsilon, w_\infty[$,

$$\mathrm{Trap}(u,v) := \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{C}(v) \tag{6.1}$$

它是一个无界容许梯形，有 2 个顶点。对于其中的每个点 $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$，有

$$\mathbf{P}(\mathbf{q}) := \Phi(P_u(\mathbf{q}), q_2 - 1, P_v(\mathbf{q})) = \Phi(q_1 - |u|, q_2 - 1, |v|). \tag{6.2}$$

对于每个整数 $\ell \ge 2$ 以及集合 $\mathcal{V}_\ell$ 中满足 $v \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$ 的每个连续字的三元组 $u < v < w$，集合

$$\mathrm{Cell}(u,v,w) := \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{B}(v) \cap \mathcal{C}(w) \tag{6.3}$$

是一个有界容许多边形，有 4 个或 5 个顶点。对于其中的每个点 $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$，有

$$\mathbf{P}(\mathbf{q}) := \Phi(P_u(\mathbf{q}), P_v(\mathbf{q}), P_w(\mathbf{q})) = \Phi(q_1 - |u|, q_2 - |\alpha(v)|, |w|). \tag{6.4}$$

（6.1）和（6.3）中的多边形彼此均不相同，并构成 $\mathcal{A}$（$\epsilon$） 的一个划分。

注意，(6.1) 中的集合 Trap($u$, $v$) 以及 (6.3) 中的集合 Cell($u$, $v$, $w$) 均由 $v$ 唯一确定；$v$ 作为 $w_\infty$ 的前缀，又由其长度唯一确定。因此，分别将它们记为 $\mathcal{T}_i$ 和 $\mathcal{R}_i$ 是合理的，其中 $i = |v|$。对于 $\mathcal{I}_i$， $i$ 的取值范围为 $\mathbb{N} \setminus \{0\}$；而对于 $\mathcal{R}_i$，其取值范围为 $\mathbb{N} \setminus \mathcal{F}$（对于每个 $\ell \ge 1$，我们不能有 $v = w_\ell$，因为 $w_\ell \in \mathcal{V}_\ell \setminus \mathcal{V}_{\ell+1}$ 在 $\mathcal{V}_\ell$ 中没有前驱元）。下面的图 4 使用了这一更简洁的记号，以说明定理在范围 $0 \le q_1 \le 26$ 内给出的 $\mathcal{A}(\epsilon)$ 的划分。

定理 6.1 的证明需要分几个步骤进行，公式 (6.2) 和 (6.4) 留待最后处理。在此过程中，我们还将命题 6.7 形式化证明第 3.5 节开头提出的断言。我们首先引入一些额外的记号。

**定义 6.2**。 我们将 $\pi_1$记为第一坐标上的 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 投影：

$$\pi_1(\mathbf{q}) = q_1 \quad \text{for each } \mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2.$$

**定义 6.3**。 对于每个 $v \in [\epsilon, w_\infty[$，我们记

$$\mathbf{q}(v) = (q_1(v), q_2(v)) = (2|v|, |v| + |\alpha(v)|)$$

$\mathcal{A}(v)$、 $\mathcal{B}(v)$ 和 $\mathcal{C}(v)$ 的公共顶点。

14 个点 $\mathbf{q}(v)$（其中 $v \in [\epsilon, w_6]$ ）在图 4 中以大点表示。

**定义6.4**。 设 $\ell \ge 1$ 为一个整数。对于 $\{\epsilon\} \cup \mathcal{V}_\ell$ 中连续的 $u < v$，我们定义

$$\mathrm{Trap}(u,v) := \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{C}(v). \tag{6.5}$$

我们将这些集合的集合记为 $T_\ell$，并将它们的并集记为 b y

$$\mathrm{Layer}(\ell) = \mathrm{Trap}(\epsilon, w_\ell) \cup \mathrm{Trap}(w_\ell, w_{\ell+1}) \cup \cdots \tag{6.6}$$

当 $\ell = 1$ 时，我们有 $\{\epsilon\} \cup \mathcal{V}_\ell = [\epsilon, w_\infty[$，因此，上文定义的集合 Trap($u$, $v$) 与定理 6.1 中的集合相同。下一个引理说明了这一记号的合理性，它表明无论如何选择 $\ell$，后者都是梯形。对于 $\ell = 1$，它证明了定理 6.1 的第一个断言。

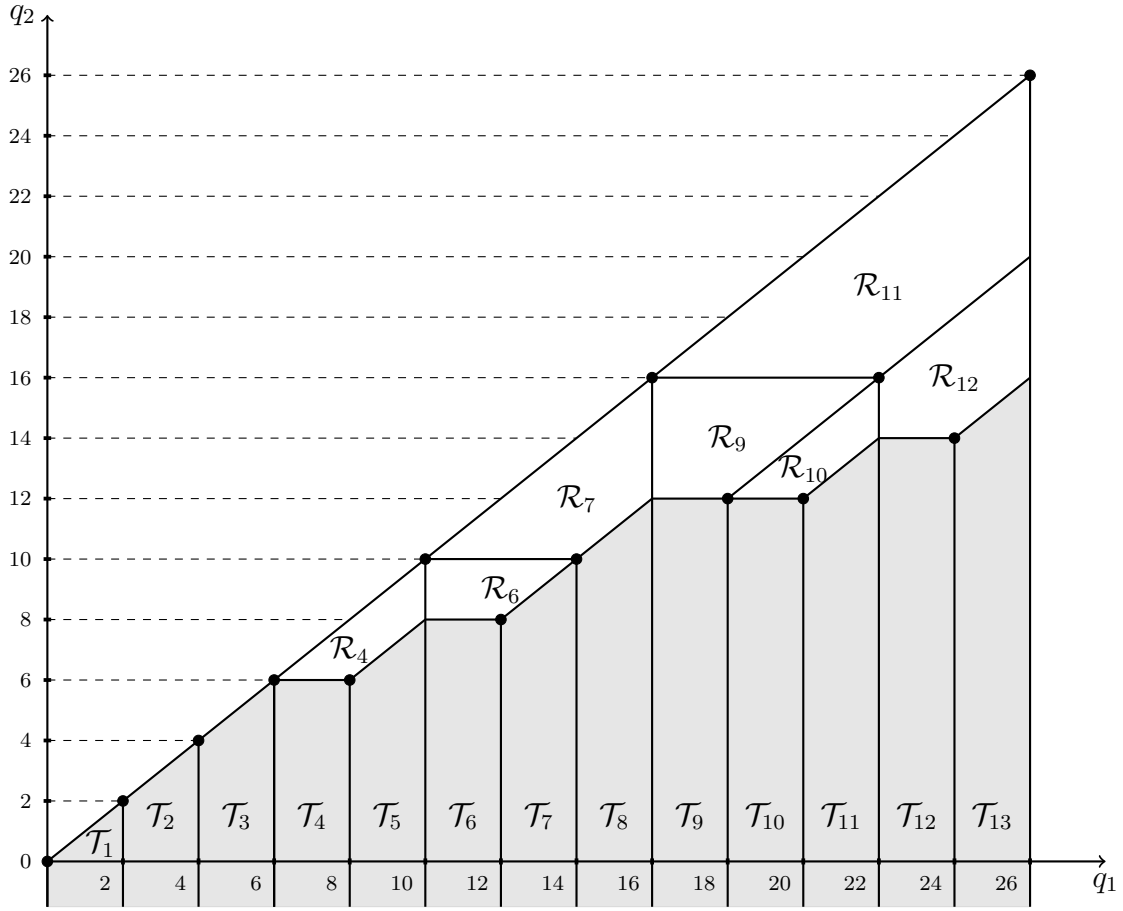



FIGURE 4. 将 $\mathcal{A}(\epsilon)$划分为 $q_1 \le 26$的容许多边形。

**引理 6.5**。 设 $\ell \ge 1$ 为整数， $u < v$ 为 $\{\epsilon\} \cup \mathcal{V}_\ell$ 中的相邻元素，且 $\mathcal{T} = \mathrm{Trap}(u, v)$。那么，我们有 $\alpha(u) \ne \alpha(v)$，并且 $\mathcal{T}$ 由满足以下条件的点 $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ 组成

$$q_1(u) \le q_1 \le q_1(v) \quad \textit{and} \quad q_2 \le \begin{cases} q_1 - q_1(u) + q_2(u) & \textit{if } \alpha(u) < \alpha(v), \\ q_2(v) & \textit{if } \alpha(u) > \alpha(v). \end{cases} \tag{6.7}$$

在这两种情形下， $\mathcal{T}$ 是一个具有三条边和两个顶点的闭的无界可容许梯形：两条向下无界的竖直边，各自终止于一个顶点，以及一条斜率为0 或1 、连接这两个顶点的线段。此外， $\pi_1(\mathcal{T}) = [q_1(u)\ q_1(v)]$。

我们将 $\mathcal{T} =$梯形$(u, v)$的左顶点 （相应地，右顶点）定义为其左（相应地，右）垂直边的顶点，并将其上边 定义为 $\mathcal{T}$ 连接这两个顶点的边。

引理 *6.5* 的证明。 只需证明第一个断言。根据定义， $\mathcal{T}$由满足以下条件的点 $(q_1,\ q_2) \in \mathbb{R}^2$ 组成

$$q_1(u) \le q_1 \le q_1(v) \quad \text{and} \quad q_2 \le \min\{q_1 - q_1(u) + q_2(u), q_2(v)\}. \tag{6.8}$$

设 $q_1 \in [q_1(u)\ q_1(v)]$。我们需要证明，(6.7) 和 (6.8) 中对 $q_2$ 的上界相同。为此，我们注意到，如果 $u > \epsilon$，数 $|u| < |v|$ 是 $\mathcal{V}_\ell$ 中的相邻元素，且由推论 4.9 可得

$$\big||\alpha(v)| - |\alpha(u)|\big| \geq |v| - |u|. \tag{6.9}$$

若 $u = \epsilon$，则 $v = w_\ell$，所以 $\alpha(u) = u$ 且 $\alpha(v) = v$，此结论同样成立。因此，我们有$\alpha(u) \neq \alpha(v)$。若 $\alpha(u) < \alpha(v)$，则由 (6.9) 可推得

$$q_1 - q_1(u) + q_2(u) \leq 2|v| - |u| + |\alpha(u)| \leq |v| + |\alpha(v)| = q_2(v).$$

否则，我们有 $\alpha(u) > \alpha(v)$，因此

$$q_1 - q_1(u) + q_2(u) \geq |u| + |\alpha(u)| \geq |v| + |\alpha(v)| = q_2(v). \qquad \square$$

下面的引理证明了定理 6.1 的第三个断言。

**引理 6.6.** 设 $\ell \geq 2$ 为整数，$u < v < w$ 为 $\mathcal{V}_\ell$ 中满足$v \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$的相邻元素，且 $\mathcal{R} =$单元$(u, v, w)$。那么，$u < w$是 $\mathcal{V}_{\ell+1}$中满足$|w| - |u| = F_\ell = |\alpha(v)|$的相邻元素，点 $\mathbf{q}(v)$ 位于内部梯形$(u, w)$，并且我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{Trap}(u,w) \cap \mathcal{A}(v) &= \mathrm{Trap}(v,w), \\ \mathrm{Trap}(u,w) \cap \mathcal{B}(v) &= \mathrm{Cell}(u,v,w), \\ \mathrm{Trap}(u,w) \cap \mathcal{C}(v) &= \mathrm{Trap}(u,v). \end{aligned} \tag{6.10}$$

此外，这三个集合构成了将 $\mathit{Trap}(u, w)$ 划分为可容许多边形的一个划分。特别地，$\mathcal{R}$ 是一个有界凸容许多边形，其边数为 *4* 或 *5*：包括 $\mathit{Trap}(u, v)$、$\mathit{Trap}(v, w)$ 和 $\mathit{Trap}(u, w)$ 的上边；当 $\mathit{Trap}(u, v)$ 和 $\mathit{Trap}(u, w)$ 的左顶点不同时，连接它们的垂直线段；以及当 $\mathit{Trap}(v, w)$ 和 $\mathit{Trap}(u, w)$ 的右顶点不同时，连接它们的垂直线段。此外，$\pi_1(\mathcal{R}) = [q_1(u)\ q_1(w)]$。

因此，$\mathcal{R} =$单元$(u,\ v,\ w)$恰有三条非竖直边。其中一条是梯形$(u,\ w)$的上边。我们称它为 $\mathcal{R}$的上边。另外两条分别是梯形$(u,\ v)$和梯形$(v,\ w)$的上边。我们称它们为 $\mathcal{R}$ 的底边。点$\mathbf{q}(v)$是它们的公共顶点。当梯形$(u,\ w)$的上边斜率为 0 时，图5展示了这一构型。斜率为 1 时，构型类似。

引理 *6.6* 的证明。根据命题 4.11，$u < w$ 是 $\mathcal{V}_{\ell+1}$中的相邻词，因此我们可以构造梯形 $\mathcal{T} =$ Trap$(u,\ w)$。此外，我们还有 $|w| - |u| = F_\ell$。由于 $\alpha(u) > \alpha(v)$且$\alpha(w) > \alpha(v)$，引理 6.5 表明，梯形$(u,\ v)$的上边是水平的，梯形$(v,\ w)$的上边斜率为 1，并且它们以$\mathbf{q}(v)$为顶点。

如果 $\alpha(u) > \alpha(w)$，$\mathcal{T}$的上边是水平的，其右顶点 $\mathbf{q}(w)$ 位于 Trap$(v, w)$ 的右顶点上方，且在同一条垂直线上。因此，$\mathbf{q}(v)$ 是 $\mathcal{T}$ 的内点。此情形如图5所示。否则，我们有 $\alpha(u) < \alpha(w)$，因此 $\mathcal{T}$的上边斜率为 1，其左顶点 $\mathbf{q}(u)$ 位于 Trap$(u, v)$ 的左顶点上方，且在同一条垂直线上。同样，$\mathbf{q}(v)$ 是 $\mathcal{T}$ 的内点。

由于$\mathbf{q}(v) \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}(u)$，我们有 $\mathcal{A}(v) \subseteq \mathcal{A}(u)$，从而得到(6.10)中的第一个公式。同样，由于 $\mathbf{q}(v) \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}(w)$，我们有 $\mathcal{C}(v) \subseteq \mathcal{C}(w)$，从而得到(6.10)中的第三个公式。中间的公式直接由 Cell$(u, v, w)$ 的定义得出。

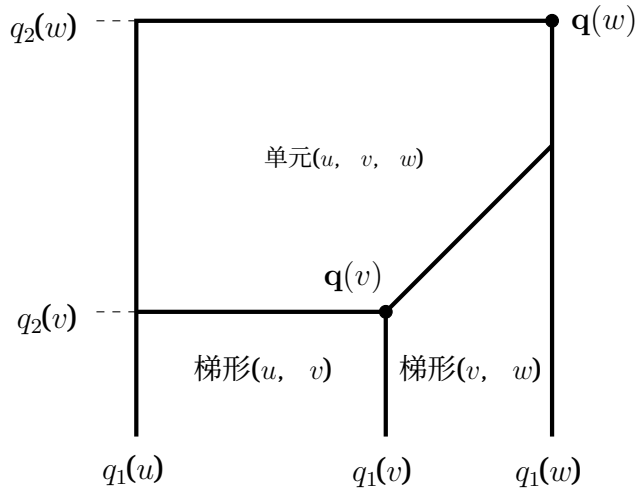



FIGURE 5. 梯形$(u,\ w)$的划分，当 $\alpha(w) < \alpha(u)$

由于 $\mathcal{A}(v)$、 $\mathcal{B}(v)$ 和 $\mathcal{C}(v)$ 将 $\mathbb{R}^2$ 划分为以$\mathbf{q}(v)$为公共顶点且位于 $\mathcal{T}$内部的容许扇区，因此(6.10)中的三个集合构成了 $\mathcal{T}$中的容许多边形的划分，其余断言也随之成立。□

现在我们可以证明在第 3.5 节开头提出的断言。

**命题 6.7**。 设 $\mathbf{q} \in \mathcal{A}(\epsilon)$，令 $u$ 为 $[\epsilon, w_\infty[$ 中使得 $\mathbf{q} \in \mathcal{A}(u)$成立的最大元素，并令 $w$ 为 $]u, w_\infty[$ 中使得 $\mathbf{q} \in \mathcal{C}(w)$成立的最小元素。那么，以下情形恰有一种成立。

(i) $u < w$ 是 $[\epsilon, w_\infty[$中的相邻元素。我们有 $|w| - |u| = F_1 = 1$,$\mathbf{q} \in \mathrm{Trap}(u, w)$ 且 $\mathbf{q} \notin \mathcal{A}(w)$。(ii)存在一个整数 $\ell \geq 2$，使得 $u < w$ 是 $\mathcal{V}_{\ell+1}$ 中的相邻元素，且 $|w| - |u| = F_\ell$；并且存在 $v \in \mathcal{V}_\ell \setminus \mathcal{V}_{\ell+1}$，使得 $u < v < w$ 在$\mathcal{V}_\ell$中相邻。点$\mathbf{q}$ 属于$\mathrm{Cell}(u, v, w)$，但不在其底边上，也不属于 $\mathcal{A}(w)$。

证明。由于$(F_\ell)_{\ell \geq 1}$ 严格递增，这两个断言互斥。因此，只需证明其中一个成立。

首先假设 $|u| \geq 2$。那么 $\{u, w\} \subseteq \mathcal{V}_2 = [w_2, w_\infty[$，因此存在一个最大的整数$m \geq 2$，使得 $\{u, w\} \subseteq \mathcal{V}_m$。我们断言， $u$ 和 $w$ 是 $\mathcal{V}_m$中的相邻元素。

为证明这一断言，先假设 $u \notin \mathcal{V}_{m+1}$，并令 $v$ 为 $\mathcal{V}_m$ 中 $u$ 的后继。根据引理 6.5，我们有 $\alpha(v) > \alpha(u) = w_m$，且梯形 $\mathrm{Trap}(u,\ v)$ 的上边斜率为 1。此外，根据 $u$ 的选取，我们有 $\mathbf{q} \notin \mathcal{A}(v)$，因此

$$\mathbf{q} \in \mathcal{A}(u) \setminus \mathcal{A}(v) = \mathrm{Trap}(u, v) \setminus \mathcal{A}(v) \subseteq \mathcal{C}(v). \tag{6.11}$$

由于 $v \leq w$，这意味着 $w = v$，因此如所声称， $u < w$ 在 $\mathcal{V}_m$中是连续的。现在假设 $u \in \mathcal{V}_{m+1}$，并令 $v \geq u$ 为 $w$ 在 $\mathcal{V}_m$中的前驱元。根据 $m$的选择，我们有 $w \notin \mathcal{V}_{m+1}$。因此，引理 6.5给出 $\alpha(v) > \alpha(w) = w_m$，并表明梯形 $\mathrm{Trap}(v, w)$的上边是水平的。如果 $v > u$，根据 $w$的选择，我们还有 $\mathbf{q} \notin \mathcal{C}(v)$，于是

$$\mathbf{q} \in \mathcal{C}(w) \setminus \mathcal{C}(v) = \mathrm{Trap}(v, w) \setminus \mathcal{C}(v) \subseteq \mathcal{A}(v)$$

这与 $u$的选择相矛盾。因此， $v = u$，结论再次成立。

令 $\ell$ 为满足 $1 \le \ell \le m-1$ 的最小整数，使得 $u$ 和 $w$ 是 $\mathcal{V}_{\ell+1}$ 中的相邻元素。若 $\ell = 1$，则断言 (i) 成立。若 $\ell \ge 2$，则 $u < w$ 在 $\mathcal{V}_\ell$ 中不是相邻元素。因此，由命题 4.11 可得 $|w| - |u| = F_\ell$，且存在 $v \in \mathcal{V}_\ell \setminus \mathcal{V}_{\ell+1}$，使得 $u < v < w$ 是 $\mathcal{V}_\ell$ 中的相邻元素。于是 (ii) 成立，因为 $\mathbf{q} \notin \mathcal{A}(v) \cup \mathcal{C}(v) \cup \mathcal{A}(w)$。

最后，假设 $|u| < 2$。若 $u = \epsilon$，则 (6.11) 在 $v = w_1$ 的情形下成立，因为 $\alpha(\epsilon) < \alpha(w_1)$，因此 $w = w_1$。否则，我们有 $u = w_1$，且 (6.11) 在 $v = w_2$ 的情形下成立，因为 $\alpha(w_1) < \alpha(w_2)$，故 $w = w_2$。因此，(i) 适用。□

**定义 6.8**。我们用 $S_1$ 表示所有梯形 $\mathrm{Trap}(u, v)$ 的集合 $T_1$，其中 $u < v$ 是 $[\epsilon, w_\infty[$ 中的相邻词。对于每个整数 $\ell \ge 2$，我们用 $S_\ell$ 表示所有多边形 $\mathrm{Cell}(u, v, w)$ 的集合，其中 $u < v < w$ 是 $\mathcal{V}_\ell$ 中满足 $v \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$的相邻词。我们还定义$S = \bigcup_{\ell \ge 1} S_\ell$。

我们的下一个目标是证明 $S$ 是 $\mathcal{A}(\epsilon)$ 的一个划分，正如定理 6.1 所述。根据命题 6.7，$\mathcal{A}(\epsilon)$ 是 $S$中的多边形之并。因此，剩下要证明的是，$S$ 中的任意两个不同多边形彼此相容。下面的结果表明，如上述定义所示，$S$中元素的表示是唯一的。它还表明，$S$ 中的不同多边形在第一坐标轴上的投影各不相同。

**引理 6.9**。设 $\mathcal{R} \in S$。那么，存在唯一的整数 $\ell \ge 1$ 使得 $\mathcal{R} \in S_\ell$。

(i) 若 $\ell = 1$，则 $[\epsilon, w_\infty[$ 中存在唯一一对相邻元素 $u < w$，使得$\mathcal{R} = \mathrm{Trap}(u, w)$。

(ii)若 $\ell \ge 2$，则 $\mathcal{V}_\ell$ 中存在唯一一组三个相邻元素 $u < v < w$，且$v \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$，使得 $\mathcal{R} = \mathrm{Cell}(u, v, w)$。

在这两种情况下，我们都有

$$|w| - |u| = F_\ell \quad and \quad \pi_1(\mathcal{R}) = [q_1(u), q_2(w)]. \tag{6.12}$$

$S$ 中不同的多边形在 $\pi_1$ 下的投影也各不相同。

例如，图 4 中的多边形 $\mathcal{R}_9$ 在 $\pi_1$ 下的投影为 $\mathcal{R}_9 = [16, 22]$。因此，它是 $\mathrm{Cell}(u, v, w)$，其中 $|u| = 8$、$|v| = 9$ 和 $|w| = 11$。由于 $|w| - |u| = 3 = F_3$，它属于 $S_3$。事实上，表 (4.3) 显示，$8 < 9 < 11$ 是 $\mathcal{V}_3$ 中相邻的元素，且 $\alpha(9) = 3$。

*引理 6.9 的证明*。首先假设 $\mathcal{R} \in S_1$。于是，对 $[\epsilon, w_\infty[$ 的相邻元素 $u < w$，有 $\mathcal{R} =$ 梯形$(u, w)$。我们有 $|w| - |u| = 1 = F_1$，且引理 6.5 给出 $\pi_1(\mathcal{R}) = [q_1(u)\ q_2(w)]$。

现假设对某个 $\ell \ge 2$ 有 $\mathcal{R} \in S_\ell$。于是，对 $\mathcal{V}_\ell$ 中满足 $v \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$ 的相邻元素 $u < v < w$，有 $\mathcal{R} =$ 单元$(u, v, w)$。由命题 4.10，我们有 $|w| - |u| = F_\ell$。由引理 6.6，$\mathcal{R}$ 的上边是梯形$(u, w)$ 的上边。因此，$\mathcal{R}$ 在 $\pi_1$ 下与梯形$(u, w)$ 具有相同的投影，由引理 6.5，该投影为 $[q_1(u)\ q_2(w)]$。

因此，（6.12）在所有情况下均成立。因此，$u$和 $w$ 由 $\pi_1$（$\mathcal{R}$）唯一确定，而后者又确定了 $\ell$。如果 $\ell \ge 2$，那么 $v$ 也可确定为 $\mathcal{V}_\ell$中 $u$ 的后继。□

**命题 6.10.** 设 $\ell \ge 1$ 为整数，且 $u < v < w$ 为$\{\epsilon\} \cup \mathcal{V}_\ell$中的相邻元素。那么，$\mathrm{Trap}(u, v)$ 和 $\mathrm{Trap}(v, w)$ 是相容梯形：它们的交集既是$\mathrm{Trap}(u, v)$ 的右侧竖边，也是$\mathrm{Trap}(v, w)$的左侧竖边。

证明. 根据引理 6.5，Trap$(u, v)$ 的右顶点为 $(q_1(v)\ r)$，其中 $r \in \mathbb{R}$ 为某个数；而 Trap$(v, w)$ 的左顶点为 $(q_1(v)\ s)$，其中 $s \in \mathbb{R}$ 为某个数。该引理还允许我们用数 $x = |u|$、$y = |v|$、$z = |w|$、$\alpha(x) = |\alpha(u)|$、$\alpha(y) = |\alpha(v)|$ 以及$\alpha(z) = |\alpha(w)|$来计算 $r$和 $s$。我们只需证明 $r = s$。不失一般性，我们可以假设 $u < v < w$ 不是 $\{\epsilon\} \cup \mathcal{V}_{\ell+1}$ 中的相邻元素。

若 $|u| \geq 2$，则 $\ell \geq 2$，且 $x < y < z$ 是 $\mathcal{V}_\ell$ 中的连续数，但并非全部包含于 $\mathcal{V}_{\ell+1}$ 中。因此，命题 4.12 适用，并给出需要考虑的四种情形 (i)–(iv)。图 6 展示了在这些情形下的梯形 Trap$(u, v)$ 和 Trap$(v, w)$。利用引理 6.5，我们在所有情形下都得到 $r = s$:

$$\begin{aligned}
\text{Case (i):}\quad & r = y + F_\ell = s;\\
\text{Case (ii):}\quad & r = (x + F_\ell) + 2(y - x) = z + F_\ell = s;\\
\text{Case (iii):}\quad & r = (x + F_\ell) + 2(y - x) = y + F_{\ell+1} = s;\\
\text{Case (iv):}\quad & r = y + F_{\ell+1} = z + F_\ell = s.
\end{aligned}$$

若 $u = \epsilon$，则 $v = w_\ell$、$w = w_{\ell+1}$，并得到 $r = 2F_\ell = s$。最后，若 $u = w_1$，则 $\ell = 1$、$v = w_2$、$w = w_3$，且 $r = s = 4$。□

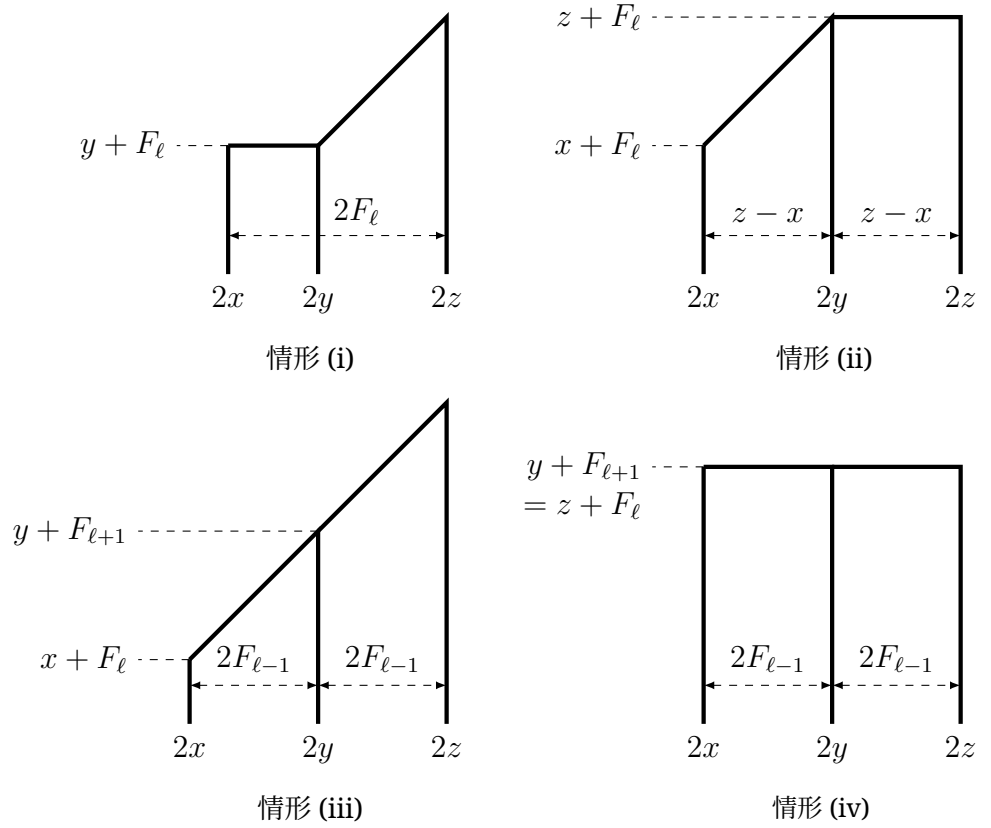



FIGURE 6. 词 $u < v < w$ 在 $\mathcal{V}_\ell$ 中且带有 $\ell \geq 1$ 时，梯形$(u, v)$ 和梯形$(v, w)$ 的四种可能构形。

**推论 6.11**。令 $\ell \geq 1$ 为一个整数。$T_\ell$ 中任意一对不同的梯形都是相容的。$S_\ell$ 中任意一对不同的多边形都是相容的。

证明。第一个断言显然成立，因为 $T_\ell$ 中任意一对具有非空交集的不同梯形都符合该命题。

对于第二个断言，我们可以假设 $\ell \geq 2$ ，因为 $S_1 = T_1$。设 $\mathcal{R}$ 与 $\mathcal{R}'$ 为 $S_\ell$中的不同元素。记 $\mathcal{R}$ =单元$(u, v, w)$以及 $\mathcal{R}'$ =单元$(u', v', w')$，其中 $u < v < w$与 $u' < v' < w'$ 是 $\mathcal{V}_\ell$ 的相邻元素三元组，且 $v \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$ 和 $v' \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$。不失一般性，我们可以假设 $v < v'$ ，从而 $w \leq u'$。于是，若 $w < u'$，则 $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ 为空；若 $w = u'$，则它包含在横坐标为 $q_1(w) = q_1(u')$的垂直线 $L$ 中。假设 $w = u'$。由引理 6.6， $\mathcal{R} \cap L$ 是连接梯形$(v, w)$的右顶点 r 与梯形$(u, w)$的右顶点 s 的线段，而 $\mathcal{R}' \cap L$ 是连接梯形$(u', v')$的左顶点 r′ 与梯形$(u', w')$的左顶点 s′ 的线段。这两条线段相同，因为根据该命题，由于 $v < w = u' < v'$ 是 $\mathcal{V}_\ell$的相邻元素，我们有 r = r′ ，并且由于 $u < w = u' < w'$ 是 $\mathcal{V}_{\ell+1}$的相邻元素，有 s = s′ 。因此，若 r ≠ s，则$\mathcal{R} \cap \mathcal{R}' = \mathcal{R} \cap L = \mathcal{R}' \cap L$ 是 $\mathcal{R}$ 与 $\mathcal{R}'$ 的公共边；若 r = s，则它是一个公共顶点。在所有情形下， $\mathcal{R}$ 与 $\mathcal{R}'$ 相容。□

**推论 6.12**。设 $\ell \geq 1$ 为整数。那么，层$(\ell)$ 是一个可容许多边形，而 $T_\ell$是它的一个划分。层$(\ell)$ 的边界是一条折线，由$\mathcal{A}(\epsilon)$ 的垂直边以及 $T_\ell$中梯形的上边组成。

这可由前一个推论和层$(\ell)$的定义直接得出。对于$\ell = 1$，图 4 展示了这一情形，其中层(1)以灰色标出。注意，如果$u < v < w$是 $\{\epsilon\} \cup \mathcal{V}_\ell$ 中的相邻词，并且 Trap$(u, v)$ 和 Trap$(v, w)$ 的上边斜率相同，那么它们都包含在层$(\ell)$的同一条边中。下一个结果给出了一个例子。

**推论 6.13**。设 $\ell \geq 1$ 为整数。那么，梯形$(\epsilon, w_\ell)$ 和 梯形$(w_\ell, w_{\ell+1})$ 构成梯形$(\epsilon, w_{\ell+1})$的一个划分，因此 梯形$(\epsilon, w_{\ell+1}) \subseteq$层$(\ell)$。我们还有 层(1) =层(2)，且 $S_1$ 是层(2)的一个划分。

证明。由于 $\epsilon < w_\ell < w_{\ell+1}$是 $\{\epsilon\} \cup \mathcal{V}_\ell$中的相邻元素，该命题表明，Trap$(\epsilon, w_\ell)$ 与 Trap$(w_\ell, w_{\ell+1})$ 相容。由于 $\alpha(\epsilon) < \alpha(w_\ell) < \alpha(w_{\ell+1})$，它们的上边斜率为 1，与 Trap$(\epsilon, w_{\ell+1})$ 的上边相同。因此，前者的梯形构成后者的一个划分。这证明了第一个断言。对于 $\ell = 1$，这给出 Trap$(\epsilon, w_2) \subseteq$ Layer(1)。由于 $\mathcal{V}_2 = [w_2, w_\infty[$ ，我们得出 Layer(2) = Layer(1)。由于 $S_1 = T_1$ 是 Layer(1) 的一个划分，因此它也是 Layer(2) 的一个划分。□

**引理 6.14**。设 $\ell \geq 2$ 为一个整数，且 $u < v < w$ 是 $\mathcal{V}_\ell$ 中满足$v \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$的相邻元素。那么，单元$(u, v, w) \cap$层$(\ell)$ 是单元$(u, v, w)$底边的并集。

证明。这由引理 6.6 立即可得，因为横坐标为 $q_1(u)$ 和 $q_1(w)$ 的垂直线段之间的层$(\ell)$部分是梯形$(u, v) \cup$梯形$(v, w)$。□

**引理 6.15**。设 $u < w$ 是 $\mathcal{V}_{\ell+1}$ 中相邻的元素，其中某个整数为 $\ell \geq 1$，并设 $\mathcal{E}$是 $\mathcal{T} =$梯形$(u, w)$的上边。那么 $\mathcal{E}$是唯一多边形 $\mathcal{R} \in S_1 \cup \cdots \cup S_\ell$的一条边，并且它是 $\mathcal{R}$的上边。

证明。如果 $\mathcal{E}$ 是某个 $\mathcal{R} \in S_1 \cup \cdots \cup S_\ell$ 的一条边，那么它就是其上边，因为 $\mathcal{R}$ 包含在 Layer$(\ell + 1)$ 中，而 $\mathcal{E}$ 位于 Layer$(\ell + 1)$ 的边界上。因此， $\pi_1(\mathcal{R}) = \pi_1(\mathcal{T})$，所以根据引理 6.9，这样的 $\mathcal{R}$ 至多有一个。

为了证明 $\mathcal{R}$ 的存在，我们不失一般性地假设 $\ell$ 是使得 $u < w$ 在 $\mathcal{V}_{\ell+1}$ 中相邻的最小正整数。如果 $\ell = 1$，我们可以取 $\mathcal{R} = \mathcal{T}$。如果 $\ell \geq 2$，那么 $u < w$ 在 $\mathcal{V}_\ell$ 中并不相邻，因此根据命题 4.11，存在 $v \in \mathcal{V}_\ell \setminus \mathcal{V}_{\ell+1}$，使得 $u < v < w$ 在 $\mathcal{V}_\ell$ 中相邻。接着，引理 6.6 表明，$\mathcal{R} = \mathrm{Cell}(u,\ v,\ w)$ 的上边是 $\mathcal{E}$。□

下面的结果证明了定理 6.1 的最后一个断言。

**命题 6.16**。对于每个整数 $\ell \geq 2$，集合 $S_1 \cup \cdots \cup S_{\ell-1}$ 是层$(\ell)$ 的一个划分。此外，$S = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} S_\ell$ 是 $\mathcal{A}(\epsilon)$的一个划分。

证明。由于当 $\ell \geq 2$ 时，集合 Layer$(\ell)$ 构成一个递增序列，其并集为 $\mathcal{A}(\epsilon)$，因此只需证明第一个断言。我们对 $\ell$ 使用归纳法来证明这一点。

对于 $\ell = 2$，该陈述由推论 6.13 得出。

现在，假设对于某个 $\ell \geq 2$，$S_1 \cup \cdots \cup S_{\ell-1}$ 是 Layer$(\ell)$ 的一个划分。根据引理 6.6，$T_{\ell+1}$ 中的每个梯形要么属于 $T_\ell$，要么分解为 $T_\ell$中的两个梯形与一个 $S_\ell$多边形的并。因此，Layer$(\ell+1)$ 是 Layer$(\ell)$ 与 $S_\ell$中的多边形的并。因此，它是 $S_1 \cup \cdots \cup S_\ell$中多边形的并。

为了完成归纳步骤，还需证明 $\mathcal{R} \neq \mathcal{R}'$ in$S_1 \cup \cdots \cup S_\ell$中的任意一对多边形都相容。根据假设，如果它们都属于 $S_1 \cup \cdots \cup S_{\ell-1}$，这一点成立。由推论 6.11 可知，如果它们都属于 $S_\ell$，这一点也成立。因此，我们可以假设 $\mathcal{R} \in S_\ell$且 $\mathcal{R}' \in S_1 \cup \cdots \cup S_{\ell-1}$。进一步假设 $\mathcal{R}$ 与 $\mathcal{R}'$ 相交。

由于 $\mathcal{R}' \subseteq$ Layer$(\ell)$，集合 $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ 包含于 $\mathcal{R} \cap$ Layer$(\ell)$，而根据引理 6.14，后者是 $\mathcal{R}$的两条底边的并集。由于这两条底边的斜率不同，且 $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ 是凸的，该交集包含于 $\mathcal{R}$的一条底边 $\mathcal{E}$ 中。由引理 6.15，$\mathcal{E}$ 是唯一一个 $\mathcal{R}'' \in S_1 \cup \cdots \cup S_{\ell-1}$的边。若 $\mathcal{R}' = \mathcal{R}''$，则 $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}' = \mathcal{E}$是$\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{R}'$的一条公共边，结论得证。否则，$\mathcal{E}$ 不是 $\mathcal{R}'$的一条边。由于根据归纳假设，$\mathcal{R}'$ 和 $\mathcal{R}''$ 是相容多边形，因此 $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}' = \mathcal{E} \cap \mathcal{R}'$ 是 $\mathcal{R}'$ 和 $\mathcal{E}$ 的公共顶点，从而也是 $\mathcal{R}$的顶点，结论再次得证。□

对于梯形，我们也有类似的结果。

**命题 6.17.** 设 $\mathcal{T} \in \bigcup_{\ell=1}^{\infty} T_\ell$。那么，$\{\mathcal{R} \in S\,;\ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}\}$ 是 $\mathcal{T}$ 的划分 .

证明。由命题 6.16，$S$ 中的多边形两两相容。因此，只需证明 $\mathcal{T}$是 $S$中的多边形之并。若 $\mathcal{T} \in T_1$，则显然成立，因为 $T_1 = S_1 \subseteq S$。设对于某个 $\ell \geq 1$，有 $\mathcal{T} \in T_{\ell+1}$。那么，我们有 $\mathcal{T} \in T_\ell$；或者，梯形 Trap$(\epsilon, w_{\ell+1})$ 根据推论 6.12 是 $T_\ell$ 中两个梯形之并；或者，我们有 $\ell \geq 2$，且 $\mathcal{T}$根据引理 6.6 是 $S_\ell$ 中的一个元素与 $T_\ell$ 中的两个元素之并。由归纳法，我们可以假设 $T_\ell$ 中的每个元素都是 $S$中的多边形之并，因此 $\mathcal{T}$也同样如此。□

根据引 理 6.5 和 6.6，下述结果完成了定理 6.1 的证明 .

**命题 6.18.** 设 $\mathcal{R} \in S$，设 $u$、$w \in [\epsilon, w_\infty[$ 使得 $\pi_1(\mathcal{R}) = [q_1(u)\ q_1(w)]$, 并设$\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathcal{R}$。则我们有

$$\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \Phi(q_1 - |u|, q_2 + |u| - |w|, |w|). \tag{6.13}$$

证明. 我们对使 $\mathcal{R} \in S_\ell$ 成立的整数 $\ell \geq 1$ 使用归纳法。

首先假设 $\ell = 1$。那么， $u < w$ 是 $[\epsilon, w_\infty[$ 中的相邻元素，且 $\mathcal{R} =$ 属于 Trap($u$， $w$)。如果$\mathbf{q} \notin \mathcal{A}(w)$，那么 $u$ 是满足$\mathbf{q} \in \mathcal{A}(u)$的 $[\epsilon, w_\infty[$ 的最大元素，而 $w$ 是 $]u$中满足$\mathbf{q} \in \mathcal{C}(w)$的最小元素。因此，适用于$\mathbf{P}(\mathbf{q})$的公式 (3.11) 给出 (6.13)。如果$\mathbf{q} \in \mathcal{A}(w)$，那么$\mathbf{q}$ 属于 Trap($w$， $w'$) $\setminus \mathcal{A}(w')$，其中 $w'$ 是$[\epsilon, w_\infty[$, 中 $w$ 的后继，由此可得

$$\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \Phi(q_1 - |w|, q_2 + |w| - |w'|, |w'|).$$

由于 $q_1 = 2|w|$ 和 $|w'| - |w| = 1 = |w| - |u|$，因此得到 (6.13)， s

$$(q_1 - |w|, q_2 + |w| - |w'|, |w'|) = (|w|, q_2 + |u| - |w|, q_1 - |u|).$$

现在假设 $\ell \geq 2$。那么，根据引理 6.9，对于某个 $v \in \mathcal{V}_\ell \setminus \mathcal{V}_{\ell+1}$，我们有 $|w|-|v| = F_\ell$，且 $\mathcal{R} =$ 属于 Cell($u$， $v$， $w$)，其中 $u < v < w$ 是 $\mathcal{V}_\ell$中的相邻元素。令 $\mathcal{E}_0$ 表示 Trap($u$, $v$)的上边， $\mathcal{E}_1$表示 Trap($v$， $w$)的上边。根据引理 6.6， $\mathcal{E}_0$ 和 $\mathcal{E}_1$ 是 $\mathcal{R}$的底边。此外， $u < w$ 是 $\mathcal{V}_{\ell+1}$中的相邻元素，且$\mathbf{q} \in$ Trap($u$， $w$)。我们考虑几种可能性。

1. 假设$\mathbf{q} \notin \mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1$。那么由引理 6.14 可得$\mathbf{q} \notin$ 层($\ell$)。令 $u'$ 为 $[\epsilon, w_\infty[$ 中满足$\mathbf{q} \in \mathcal{A}($ $u'$)的最大元素，并令 $w'$ 为$, w_\infty[$中满足$\mathbf{q} \in \mathcal{C}(w')$的最小元素。由于$\mathbf{q} \in$ 梯形($u, w$)，我们有 $u \leq u' < w'$。由命题 6.7，$u' < w'$ 是某个整数 $k \geq 1$ 对应的 $\mathcal{V}_{k+1}$ 中的相邻元素（因为 $u' \geq u \geq w_2$），因此$\mathbf{q} \in$梯形($u', w'$) $\subseteq$层($k+1$)。于是，我们必有 $k \geq \ell$，因此 $\{u', w'\} \subseteq \mathcal{V}_{\ell+1}$。我们将这种情况分为两个子情况。

a) 如果$\mathbf{q} \notin \mathcal{A}(w)$，那么我们有 $u \leq u' < w' \leq w$。由于 $u < w$ 是$\mathcal{V}_{\ell+1}$中的相邻元素，我们推得 $u' = u$ 和 $w' = w$，于是根据$\mathbf{P}$的定义，(6.13)成立。

b) 若相反，$\mathbf{q} \in \mathcal{A}(w)$，则 $u' = w$，并且根据命题 6.10，$\mathbf{q}$属于梯形 Trap($w, w''$) 的左侧竖边，其中 $w''$ 是 $\mathcal{V}_{\ell+1}$ 中 $w$ 的后继。因此，我们必须有 $w' = w''$。所以， $w < w'$ 在 $\mathcal{V}_{\ell+1}$ 中是相邻的，但在 $\mathcal{V}_\ell$ 中并不相邻，因为 $\mathbf{q} \notin$ 层($\ell$)，故由命题 4.11 可得 $|w'| - |w| = F_\ell = |w| - |u|$。根据$\mathbf{P}$的定义，我们因此有

$$\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \Phi(q_1 - |w|, q_2 + |w| - |w'|, |w'|) = \Phi(|w|, q_2 + |u| - |w|, q_1 - |u|)$$

其中，第二个等式用到了 $q_1 = q_1(w) = 2|w|$。因此，(6.13) 在这种情况下也成立。

2. 假设 $\mathbf{q} \in \mathcal{E}_0$。根据引理 6.15， $\mathcal{E}_0$是唯一一个 $\mathcal{R}' \in S_1 \cup \cdots \cup S_{\ell-1}$ 的上边。此外，我们有 $\pi_1(\mathcal{R}') = \pi_1(\mathcal{E}_0) = [q_1(u)\ q_1(v)]$。因此，根据归纳法，我们可以假设

$$\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \Phi(q_1 - |u|, q_2 + |u| - |v|, |v|).$$

由此得到（6.13），因为 $q_2 = q_2(v) = |v| + F_\ell = |v| + |w| - |u|$，因此

$$(q_1 - |u|, q_2 + |u| - |v|, |v|) = (q_1 - |u|, |w|, q_2 + |u| - |w|).$$

3. 最后，假设 $\mathbf{q} \in \mathcal{E}_1$。那么，与前一种情况类似， $\mathcal{E}_1$ 是唯一一个 $\mathcal{R}'' \in S_1 \cup \cdots \cup S_{\ell-1}$ 的上边，并且有 $\pi_1(\mathcal{R}'') = \pi_1(\mathcal{E}_1) = [q_1(v)\ q_1(w)]$。因此，根据归纳法，我们可以假设

$$\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \Phi(q_1 - |v|, q_2 + |v| - |w|, |w|).$$

那么（6.13）成立，因为 $q_1 - q_2 = q_1(v) - q_2(v) = |v| - F_\ell = |v| + |u| - |w|$，因此

$$(q_1 - |v|, q_2 + |v| - |w|, |w|) = (q_2 + |u| - |w|, q_1 - |u|, |w|). \qquad \square$$

## 7. Additional properties of the map $\mathbf{P}$

本节中，我们将更详细地研究映射 $\mathbf{P}$，并更仔细地考察其第一个分量 $P_1$。我们还将引入整 2 参数 3-系统的概念，该概念适用于 $\mathbf{P}$，并扩展了 [5] 中的整数 3 系统概念。

**命题 7.1**。令 $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3) : \mathcal{A}(\epsilon) \to \mathbb{R}^3$ 如第6节所述，并令 $\mathcal{R} \in S$。则存在唯一的三元组 $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ 满足 $c = a + b$，使得

$$\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \Phi(q_1 - a, q_2 - b, c) \quad \textit{for each } \mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathcal{R}. \tag{7.1}$$

若 $\mathcal{R} \neq$ 梯形 $(\epsilon, w_1)$，则还存在唯一的点 $\mathbf{r}$ 属于 $\mathcal{R}$，使得 $P_1(\mathbf{r}) = P_2(\mathbf{r}) = P_3(\mathbf{r})$。此外，若 $\mathcal{R} \neq$ 梯形 $(w_1, w_2)$，则 $\mathbf{r}$ 是 $\mathcal{R}$ 的内部点，而这些集合

$$\mathcal{R}_{i,j,k} = \{\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathcal{R} \,;\, P_i(\mathbf{q}) = q_1 - a, P_j(\mathbf{q}) = q_2 - b, P_k(\mathbf{q}) = c\}$$

与 $(i, j, k)$ 的六种排列相关联的集合构成了 $\mathcal{R}$ 的一个划分，划分所得为以 $\mathbf{r}$ 为公共顶点的可容凸多边形。若 $\mathcal{R}$ 是梯形 $(\epsilon, w_1)$ 或梯形 $(w_1, w_2)$，则具有非空内部的 $\mathcal{R}_{i,j,k}$ 将 $\mathcal{R}$ 划分为可容凸多边形。

证明。我们只需讨论整数 $\ell \geq 2$ 满足 $\mathcal{R} \in S_\ell$ 的情形。对于 $S_1$ 的梯形，推理类似且更简单。因此，我们假设 $\mathcal{R} = \mathsf{Cell}(u, v, w)$，其中 $u < v < w$ 是 $\mathcal{V}_\ell$ 中满足 $v \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$ 的相邻元素。于是，由定理 6.1 得到 (7.1)，其中 $(a, b, c) = (|u|, |\alpha(v)|, |w|)$。由引理 6.6，得 $|w| - |u| = F_\ell = |\alpha(v)|$，因此 $c = a + b$。由于 $\mathcal{R}$ 的内部非空，条件 (7.1) 唯一确定了 $(a, b, c)$。如图 7 所示，当 $\mathcal{R}$ 的上边为水平线时，方程为 $q_1 - a = c$、$q_2 - b = c$ 和 $q_1 - a = q_2 - b$ 的直线分别在 $\mathsf{Trap}(u, w)$、$\mathsf{Trap}(v, w)$ 和 $\mathsf{Trap}(u, v)$ 的上边中点处与之相交。因此，它们的交点 $\mathbf{r} = (a + c, b + c)$ 是 $\mathcal{R}$ 的一个内点，也是 $\mathcal{R}$ 中唯一满足 $P_1$、$P_2$ 和 $P_3$ 重合的点。这些直线将 $\mathcal{R}$ 划分为六个凸多边形，在这些多边形上，差值 $(q_1 - a) - c$、$(q_2 - b) - c$ 和 $(q_1 - a) - (q_2 - b)$ 处处为 $\geq 0$ 或 $\leq 0$。根据 $\mathbf{P}$ 的定义，这等价于对于固定的 $(i, j, k)$（即 (1, 2, 3) 的一个排列），有 $(q_1 - a, q_2 - b, c) = (P_i(\mathbf{q}), P_j(\mathbf{q}), P_k(\mathbf{q}))$。如图 7 所示，每个多边形对应不同的排列。□

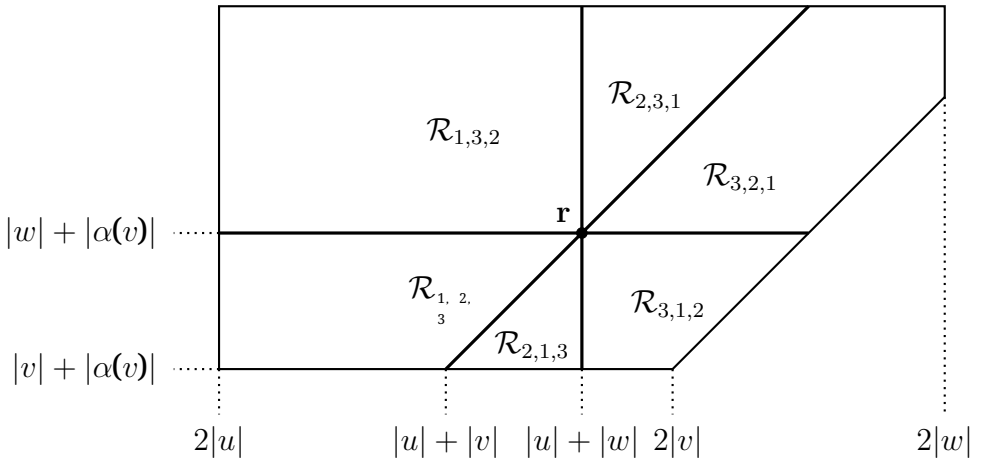



Figure 7. $\mathcal{R}$的划分，分成六个多边形，在这些多边形上$\mathbf{P}$ 是仿射的

按照命题中的记号，我们有

$$P_1(\mathbf{q}) = \begin{cases} q_1 - a & \text{if } \mathbf{q} \in \mathcal{R}_{1,2,3} \cup \mathcal{R}_{1,3,2}, \\ q_2 - b & \text{if } \mathbf{q} \in \mathcal{R}_{2,1,3} \cup \mathcal{R}_{3,1,2}, \\ c & \text{if } \mathbf{q} \in \mathcal{R}_{2,3,1} \cup \mathcal{R}_{3,2,1}. \end{cases}$$

因此，将梯形 Trap($\epsilon$, $w_\ell$) 划分为多边形 $\mathcal{R} \in S$，再根据相应的 $\mathcal{R}_{i,\ j,\ k}$，在 $i = 1$ 时涂成浅灰色，在 $j = 1$ 时涂成中灰色，在 $k = 1$ 时涂成深灰色，我们便得到了 $P_1$ 在该梯形上的图像的三维图像。图8展示了 $\ell = 7$ 时的结果。在浅灰色的连通区域上，$P_1(\mathbf{q}) - q_1$ 是常数；在中灰色区域上，$P_1(\mathbf{q}) - q_2$ 是常数；在深灰色区域上，$P_1(\mathbf{q})$ 是常数。这幅图像展示了一些对称性。例如，可以看到，被实线围住的区域与被虚线围住的区域，经过平移后着色相同。这是定理 3.1 的一个例证，其中 $k = 6$。

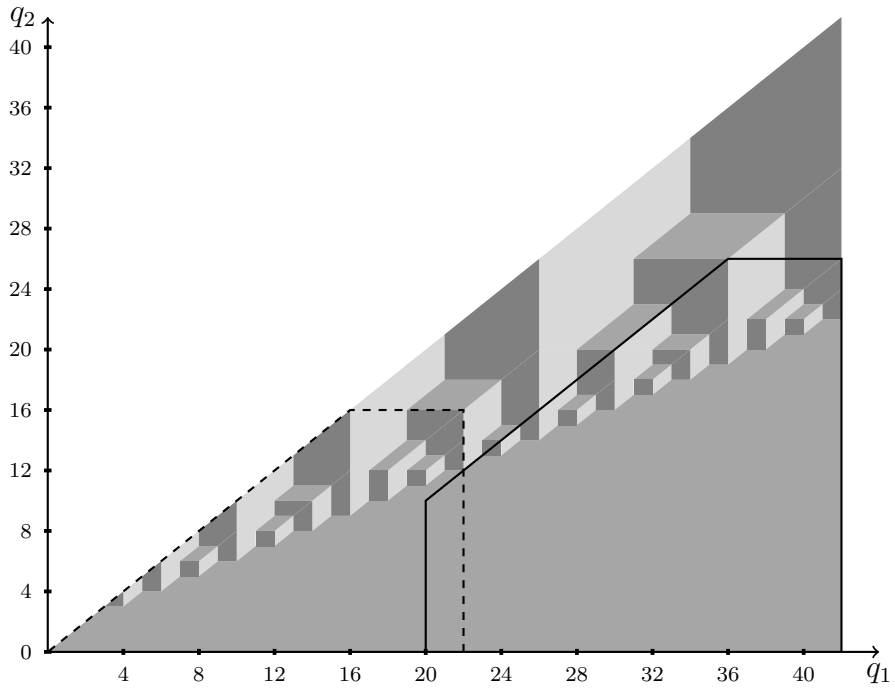



FIGURE 8. $P_1$（$q_1$, $q_2$）在 $0 \le q_2 \le q_1 \le 2F_7 = 42$上的图像

最小的可容许多边形是边长为 1 且边分别水平和竖直的可容许三角形，即顶点集合为

$$V = \{(m,\ n), (m+1, n), (m+1, n+1)\} \quad \text{or} \quad V' = \{(m, n), (m, n+1), (m+1, n+1)\}$$

对于某个（$m$, $n$）$\in \mathbb{Z}^2$。我们称它们为基本三角形。如果基本三角形 $\mathcal{T}$ 的顶点集合分别具有 $V$ 或 $V'$ 的形式，也就是说，如果 $\mathcal{T}$ 分别位于其斜边的下方或上方，我们就分别称该基本三角形为下型或上型。

这些基本三角形两两相容，每个类型的基本三角形都与另一类型的3个基本三角形共享公共边（见图9）。它们构成了 $\mathbb{R}^2$ 的划分，如

第6节中所定义。一般而言，包含在任意给定可容许多边形 $\mathcal{A}$ 中的基本三角形集合，是 $\mathcal{A}$的一个划分。

**引理 7.2**。 设 $\mathcal{T}$ 是一个基本三角形，且 $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$。那么，将每个 $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathcal{T}$映射到 $\Phi(q_1 - a, q_2 - b, c)$ 的从 $\mathcal{T}$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的映射是仿射的。

证明。 对于 $\mathcal{T}$ 的任意内点 $\mathbf{q} = (q_1,\ q_2)$，数 $q_1$、$q_2$ 和 $q_1 - q_2$ 均不是整数，因此 $(q_1 - a,\ q_2 - b,\ c)$ 的坐标两两不同，且其排列顺序不随 $\mathbf{q}$ 改变。因此，存在一个线性映射 $\sigma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，它对 $\mathbb{R}^3$ 中的坐标进行置换，使得对于 $\mathcal{T}$ 的每个内点，$\Phi(q_1 - a,\ q_2 - b,\ c) = \sigma(q_1 - a,\ q_2 - b,\ c)$；由连续性可知，这对 $\mathcal{T}$ 的每个点也成立。□

根据命题 7.1，接下来的两个结果适用于第6节的映射 $\mathbf{P}\colon\ \mathcal{A}(\epsilon) \to \mathbb{R}^3$。

**引理 7.3**。 设 $\mathcal{A}$ 是一个可容许多边形，令 $T$ 表示包含于 $\mathcal{A}$中的基本三角形集合，并令 $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)\colon\ \mathcal{A} \to \mathbb{R}^3$是一个函数。假设对于每个 $\mathcal{T} \in T$，存在 $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$，满足 $c = a + b$，使得

$$\mathbf{P}(q_1, q_2) = \Phi(q_1 - a, q_2 - b, c) \quad \textit{for any } (q_1, q_2) \in \mathcal{T}. \tag{7.2}$$

那么$\mathbf{P}$是连续的，并且满足

$$P_1(\mathbf{q}) + P_2(\mathbf{q}) + P_3(\mathbf{q}) = q_1 + q_2 \quad \textit{for any } \mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathcal{A}. \tag{7.3}$$

如果 $\mathcal{A}$ 是凸的，那么 $\mathbf{P}$是1-*Lipschitz* 的。

证明。由（7.2）可知，映射 $\mathbf{P}$ 在每个 $\mathcal{T} \in T$ 上（关于 $\mathcal{T}$的相对拓扑）都是连续的。因此，它在 $\mathcal{A}$ 上连续，因为对于每个 $\mathbf{q} \in \mathcal{A}$，至多有六个三角形 $\mathcal{T} \in T$满足 $\mathbf{q} \in \mathcal{T}$，且它们的并是 $\mathbf{q}$ 的一个邻域。公式（7.2）还对每个满足 $\mathcal{T} \in T$的 $\mathbf{q} \in \mathcal{T}$ 推出（7.3），因而对每个 $\in \mathcal{A}$ 的 $\mathbf{q}$ 都成立。最后，假设 $\mathcal{A}$ 是凸的，并令 $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \mathcal{A}$。记 $\mathbf{q}' - \mathbf{q} = (u_1, u_2)$。那么，对于每个 $i = 1$、2、3，函数 $f_i\colon\ [0,1] \to \mathcal{A}$由 $f_i(t) = P_i(\mathbf{q} + t(\mathbf{q}' - \mathbf{q}))$ 给出，它是连续的分段线性函数，其斜率为 0、$u_1$ 或 $u_2$，因此

$$|P_i(\mathbf{q}') - P_i(\mathbf{q})| = |f_i(1) - f_i(0)| \le \max\{|u_1|, |u_2|\} = \|\mathbf{q}' - \mathbf{q}\|,$$

因此 $\|\mathbf{P}(\mathbf{q}') - \mathbf{P}(\mathbf{q})\| \le \|\mathbf{q}' - \mathbf{q}\|$。 □

**引理 7.4**。 设记号与假设同引理 7.3。假设 $\mathcal{T} \in T$ 是下基本三角形，$\mathcal{T}' \in T$ 是上基本三角形，且二者有一条公共边 $\mathcal{E}$。令 $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$，其中 $c = a + b$ 满足 (7.2)，并令 $(a', b', c') \in \mathbb{Z}^3$，其中$c' = a' + b'$ 满足

$$\mathbf{P}(q_1, q_2) = \Phi(q_1 - a', q_2 - b', c') \quad \textit{for each } (q_1, q_2) \in \mathcal{T}'.$$

进一步假设 $(a', b', c') \ne (a, b, c)$。那么，

(i) $(a', b', c') = (m - c, b, m - a)$ 若 $\mathcal{E}$ 包含于垂直线 $q_1 = m$；(ii) $(a', b', c') = (a, m - c, m - b)$ 若 $\mathcal{E}$ 包含于水平线 $q_2 = m$；(ii) $(a', b', c') = (b + m, a - m, c)$ 若 $\mathcal{E}$ 包含于直线 $q_1 - q_2 = m$。

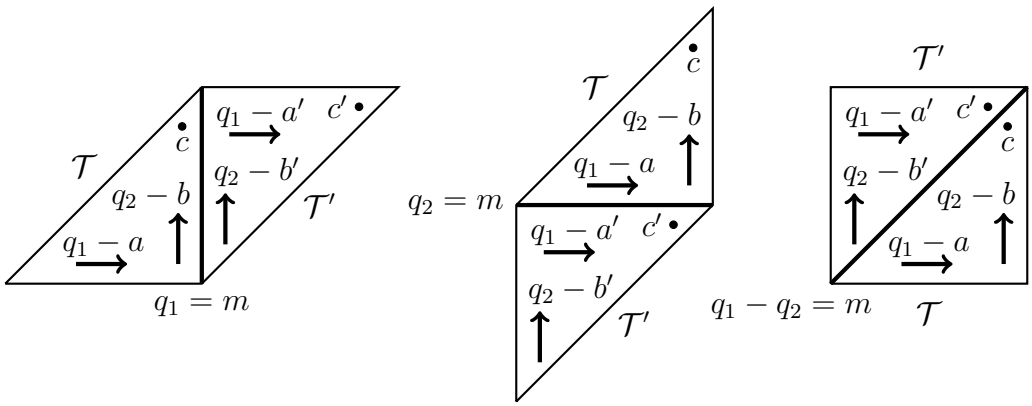



FIGURE 9. 交于一条公共边的基本三角形

这三种情形如图 9 所示。在每种情形中，$(a', b', c')$ 的公式均由以下假设得出：$(a', b', c') \neq (a, b, c)$，且对于所有 $(q_1, q_2) \in \mathcal{E}$，$\Phi(q_1 - a, q_2 - b, c) = \Phi(q_1 - a', q_2 - b', c')$。

我们提出如下概念。

**定义 7.5.** 整 2 参数 3-系统是一个函数 $\mathbf{P}\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}^3$，如引理 7.3 所述，使得在引理 7.4 的假设下，情形 (i) 中有 $c' > c$，情形 (ii) 中有 $b' < b$，情形 (iii) 中有 $a' < a$。

容易看出，若 $\mathbf{P}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的整 2 参数 3-系统，则映射 $q \mapsto P(q, 0)$ 与 $q \mapsto P(0, q)$ 在 [5] 的意义下均为整 3-系统。我们以下述结果作为结束。

**命题 7.6** 。第6节的映射 $\mathbf{P}\colon \mathcal{A}(\epsilon) \to \mathbb{R}^3$ 是一个整系数的2参数3系 .

证明。设记号和假设与引理 7.4 中相同，并设 $\mathcal{R}, \mathcal{R}' \in S$ 使得 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{R}$ 且 $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{R}'$。由于 $(a', b', c') \neq (a, b, c)$，由命题 7.1 得到 $\mathcal{R} \neq \mathcal{R}'$。因此，$\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}'$ 的公共边 $\mathcal{E}$ 包含在 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{R}'$ 的一条公共边中。若 $\mathcal{R}$ = 梯形$(\epsilon, w_1)$，则有 $\mathcal{R}'$ = 梯形$(w_1, w_2)$、$(a, b, c) = (0, 1, 1)$、$(a', b', c') = (1, 1, 2)$，并且情形 (i) 适用于$m = 2$。若 $\mathcal{R}$ = 梯形$(w_1, w_2)$，则有 $\mathcal{R}'$ = 梯形$(w_2, w_3)$、$(a, b, c) = (1, 1, 2)$、$(a', b', c') = (2, 1, 3)$，并且情形 (i) 适用于 $m = 4$。在这两种情形下，我们注意到 $c' > c$，正如所需。若 $\mathcal{R}$ 不是这些梯形之一，则由命题 7.1，函数 $q_1 - a$、$q_2 - b$ 和 $c$在 $\mathcal{R}$的一个内点处重合。因此，在情形 (i) 中，对于某个 $q_1 < m$，有 $q_1 - a = c$，从而$c' = m - a > c$。在情形 (ii) 中，对于某个 $q_2 > m$，有 $q_2 - b = c$，从而 $b' = m - c < b$。在情形 (iii) 中，对于某个 $(q_1, q_2) \in \mathcal{R}$ 且满足 $q_1 - q_2 > m$，有 $q_1 - a = q_2 - b$，从而 $a - b > m$，因此 $a' = b + m < a$。□

值得探究的是，对于任意矩阵 $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$，是否存在一个整 2 参数 3-系统 $\mathbf{P}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$，使得 $\mathbf{L}_A(0, q_1, q_2) - \mathbf{P}(q_1, q_2)$ 是 $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ 的有界函数；反过来，对于任意整 2 参数 3- 系统 $\mathbf{P}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$，是否存在具有相同性质的 $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$?

## 8. Proof of Theorem 3.1

固定一个整数 $k \geq 4$。由于 $q_2(w_{k-1}) = q_2(w_{k-1}w_{k-3}) = 2F_{k-1}$，点 $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ 上的条件 (3.14) 可归结为

$$\mathbf{q} \in \mathrm{Trap}(\epsilon, w_{k-2}) \cup \mathrm{Trap}(w_{k-2}, w_{k-1}) \cup \mathrm{Trap}(w_{k-1}, w_{k-1}w_{k-3}). \tag{8.1}$$

固定这样一个点 $\mathbf{q}$。我们需要证明

$$\mathbf{P}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \mathbf{r} + \mathbf{P}(\mathbf{q}) \quad \text{where} \quad \mathbf{p} = (4F_{k-2}, 2F_{k-2}) \text{ and } \mathbf{r} = (2F_{k-2}, 2F_{k-2}, 2F_{k-2}).$$

为此，在 (8.1) 右侧选择一个梯形 $\mathcal{T}$，使得 $\mathbf{q} \in \mathcal{T}$。根据命题 6.17，存在 $\mathcal{R} \in S$ 使得 $\mathbf{q} \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}$。因此，对于某个 $u < w$ 属于 $[\epsilon, w_{k-1}w_{k-3}]$，有 $\pi_1(\mathcal{R}) = [q_1(u)\ q_1(w)]$。此外，由于 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T} \subseteq$ 层$(k-2)$，命题 6.16 意味着存在某个 $\ell \in \{1, \ldots, k-3\}$，使得 $\mathcal{R} \in S_\ell$。令 $u'$ 和 $w'$ 为 $w_\infty$ 的前缀，满足

$$|u'| = |u| + 2F_{k-2} \quad \text{and} \quad |w'| = |w| + 2F_{k-2}. \tag{8.2}$$

我们声称存在 $\mathcal{R}' \in S_\ell$ 使得

$$\pi_1(\mathcal{R}') = [q_1(u'), q_1(w')] \quad \text{and} \quad \mathbf{p} + \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}'. \tag{8.3}$$

若接受这一点，则有 $\mathbf{p} + \mathbf{q} \in \mathcal{R}'$，并利用 (8.2) 和命题 6.18，可得

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) &= \Phi(q_1 + 4F_{k-2} - |u'|, q_2 + 2F_{k-2} + |u'| - |w'|, |w'|) \\ &= \Phi(q_1 - |u| + 2F_{k-2}, q_2 + |u| - |w| + 2F_{k-2}, |w| + 2F_{k-2}) = \mathbf{r} + \mathbf{P}(\mathbf{q}),\end{aligned}$$

正如所需。

为证明这一断言，我们首先注意到，根据引理 4.5，有 $|\alpha(u)| \leq |\alpha(u')|$ 且$|\alpha(w)| \leq |\alpha(w')|$，因此 $\mathbf{p} + \mathbf{q}(u) \in \mathcal{A}(u')$ 且 $\mathbf{p} + \mathbf{q}(w) \in \mathcal{C}(w')$，故

$$\mathbf{p} + \mathcal{A}(u) \subseteq \mathcal{A}(u') \quad \text{and} \quad \mathbf{p} + \mathcal{C}(w) \subseteq \mathcal{C}(w'). \tag{8.4}$$

若 $\ell = 1$，则字 $u < w$ 是 $w_\infty$ 的相邻前缀，并且有 $\mathcal{R} =$ 梯形$(u, w)$。于是，根据 (8.2)，字 $u' < w'$ 也是 $w_\infty$ 的相邻前缀，我们可以构造$\mathcal{R}' =$ 梯形$(u', w') \in S_1$。它满足 (8.3)，因为根据 (8.4)，有

$$\mathbf{p} + \mathcal{R} = (\mathbf{p} + \mathcal{A}(u)) \cap (\mathbf{p} + \mathcal{C}(w)) \subseteq \mathcal{A}(u') \cap \mathcal{C}(w') = \mathcal{R}'.$$

否则，有 $\ell \geq 2$，并且根据引理 6.9，存在 $v \in \mathcal{V}_\ell \setminus \mathcal{V}_{\ell+1}$，使得 $u < v < w$ 是 $\mathcal{V}_\ell$ 的相邻元素，且 $\mathcal{R} =$ 单元$(u, v, w)$。注意到 $v \notin \mathcal{F}$，因为 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{V}_\ell \setminus \mathcal{V}_{\ell+1}$ 中唯一的元素是 $w_\ell$，且 $v > u \geq w_\ell$。由于还有 $v < w \leq w_{k-1}w_{k-3}$，由引理 4.5 可知，$w_\infty$ 的前缀 $v'$ 满足 $|\alpha(v)| = |\alpha(v')|$，因此 $v' \in \mathcal{V}_\ell \setminus \mathcal{V}_{\ell+1}$ 且 $\mathbf{p} + \mathbf{q}(v) = \mathbf{q}(v')$，故

$$\mathbf{p} + \mathcal{B}(v) = \mathcal{B}(v'). \tag{8.5}$$

根据命题 4.6，词 $u' < v' < w'$ 是 $\mathcal{V}_\ell$中的相邻元素，因此我们可以构造$\mathcal{R}' =$ 单元$(u', v', w') \in S_\ell$。根据 (8.4) 和 (8.5)，我们可以像上文一样得出结论：(8.3) 成立。

## 9. Proof of Theorem 3.2

我们首先证明三个引理，其中前两个涉及第 3.2 节定义的幺半群态射 $\theta\colon E^*\to E^*$。

**引理 9.1.** 对于每个 $v\in[\epsilon,w_\infty[$，我们有 $\big||\theta(v)|-\gamma|v|\big|\le 2$。

证明。 更确切地说，我们将对 $|v|$使用归纳法证明

$$\big||\theta(v)|-\gamma|v|\big|+\max\{1,|v|\}^{-1}\le 2 \tag{9.1}$$

对每个 $v\in[\epsilon,w_\infty[$ 均成立。若 $|v|=0$，则 $\epsilon=v=\theta(v)$，因此 $|\theta(v)|=0$，且 (9.1) 成立。若对于某个正整数 $k$，有 $|v|=F_k$，则 $v=w_k$ 且 $\theta(v)=w_{k+1}$，因此 $|\theta(v)|=F_{k+1}$。由于 $F_{k+1}/F_k$ 是 $\gamma$ 的既约形式渐近分数，我们有

$$|F_{k+1}-\gamma F_k|\le 1/F_k.$$

因此，(9.1) 的左边至多为 $2/F_k\le 2$，证毕。

因此，我们可以假设 $F_k<|v|<F_{k+1}$ 对于某个 $k\ge 3$，从而 $v=w_ku$，其中$u\in]\epsilon,w_{k-1}[$。于是，我们有 $\theta(v)=w_{k+1}\theta(u)$，因此

$$\big||\theta(v)|-\gamma|v|\big|\le|F_{k+1}-\gamma F_k|+\big||\theta(u)|-\gamma|u|\big|.$$

根据归纳法，我们可以假设 $\big||\theta(u)|-\gamma|u|\big|\le 2-1/|u|$。因此，我们得到

$$\big||\theta(v)|-\gamma|v|\big|+1/|v|\le 1/F_k+2-1/|u|+1/|v|=1/F_k+2-F_k/(|u|\,|v|)$$

因为 $|v|-|u|=F_k$。由于 $|u|\,|v|<F_{k-1}F_{k+1}=F_k^2\pm 1$，我们还有 $|u|\,|v|\le F_k^2$，所需的估计 (9.1) 得证。□

**引理 9.2。** 设 $v\in\mathcal{V}_4$，并令 $v'=\theta(v)$。那么，$\|\mathbf{q}(v')-\gamma\mathbf{q}(v)\|\le 4$。

证明。 由于 $v\in\mathcal{V}_4$，推论 5.8 得出 $\alpha(v')=\theta(\alpha(v))$。因此，根据引理 9.1，

$$\|\mathbf{q}(v')-\gamma\mathbf{q}(v)\|\le 2\max\big\{\big||v'|-\gamma|v|\big|,\big||\alpha(v')|-\gamma|\alpha(v)|\big|\big\}\le 4. \qquad \square$$

**引理 9.3。** 设 $\mathbf{q}=(q_1,q_2)\in\mathcal{A}(\epsilon)$ 满足 $q_2\le q_1/2$。那么，$\|\mathbf{P}(\mathbf{q})-(q_2,q_1/2,q_1/2)\|\le 1$。

证明。 在 $[\epsilon,w_\infty[$ 中选取相邻词 $u<v$，使得 $q_1(u)\le q_1\le q_1(v)$。那么，$\mathbf{q}$ 属于梯形 $\mathrm{Trap}(u,v)$，因为

$$\min\{q_2(u)+q_1-q_1(u),q_2(v)\}\ge\min\{q_1-|u|,|v|\}\ge q_1/2\ge q_2.$$

因此，根据定理 6.1，我们有 $\mathbf{P}(\mathbf{q})=\Phi(\mathbf{r})$，其中 $\mathbf{r}=(q_1-|u|,q_2-1,|v|)$。由于 $\Phi$ 是 1-利普希茨的，由此可得

$$\|\mathbf{P}(\mathbf{q})-(q_2,q_1/2,q_1/2)\|=\|\Phi(\mathbf{r})-\Phi(q_1/2,q_2,q_1/2)\|\le\|\mathbf{r}-(q_1/2,q_2,q_1/2)\|\le 1. \quad \square$$

**定理 3.2 的证明。** 设 $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathcal{A}(\epsilon)$。我们需要证明

$$\|\mathbf{P}(\gamma\mathbf{q}) - \gamma\mathbf{P}(\mathbf{q})\| \le 40.$$

若 $q_2 \le q_1/2$，则引理 9.3 适用于 $\mathbf{q}$ 以及 $\gamma\mathbf{q}$。因此，令 $\mathbf{r} = (q_2, q_1/2, q_1/2)$，我们得到

$$\|\mathbf{P}(\gamma\mathbf{q}) - \gamma\mathbf{P}(\mathbf{q})\| \le \|\mathbf{P}(\gamma\mathbf{q}) - \gamma\mathbf{r}\| + \gamma\|\mathbf{r} - \mathbf{P}(\mathbf{q})\| \le 1 + \gamma.$$

Su现设 $q_2 > q_1/2$ 且 $\mathbf{q} \in$ 层(4)。上述特殊情形给出

$$\|\mathbf{P}(\gamma\mathbf{q}') - \gamma\mathbf{P}(\mathbf{q}')\| \le 1 + \gamma \quad \text{where} \quad \mathbf{q}' = (q_1, q_1/2). \tag{9.2}$$

由于 $\mathbf{q} \in$ 层(4)，我们有 $\mathbf{q} \in$ 梯形$(u, v)$，其中 $u < v$ 在 $\{\epsilon\} \cup \mathcal{V}_4$ 中连续，于是

$$2|u| \le q_1 \le 2|v| \quad \text{and} \quad q_2 \le \min\{q_1 - |u| + |\alpha(u)|, |v| + |\alpha(v)|\}.$$

若 $u \ne \epsilon$，推论 4.8 给出 $|v| - |u| \le F_3 = 3$，推论 4.9 给出 $\{u, v\} \not\subseteq \mathcal{V}_6$，因此 $\min\{|\alpha(u)|, |\alpha(v)|\} \le F_5 = 8$，从而

$$q_2 - q_1/2 \le \max\{q_1/2 - |u|, |v| - q_1/2\} + 8 \le |v| - |u| + 8 \le 11.$$

若 $u = \epsilon$，则我们有 $v = w_4$，从而 $q_2 - q_1/2 \le q_1/2 \le |v| = 5$。因此，在所有情形下，我们有$0 \le q_2 - q_1/2 \le 11$。由于根据命题 7.1 和引理 7.3，$\mathbf{P}$ 是 1-利普希茨的，我们推得

$$\|\mathbf{P}(\mathbf{q}) - \mathbf{P}(\mathbf{q}')\| \le 11 \quad \text{and} \quad \|\mathbf{P}(\gamma\mathbf{q}) - \mathbf{P}(\gamma\mathbf{q}')\| \le 11\gamma.$$

利用 (9.2)，我们得出 $\|\mathbf{P}(\gamma\mathbf{q}) - \gamma\mathbf{P}(\mathbf{q})\| \le 1 + 23\gamma \le 40$，如所声称。

最后，假设 $\mathbf{q} \notin$层(4)。根据命题 6.10，存在一个整数 $\ell \ge 4$ 和一个多边形 $\mathcal{R} \in S_\ell$，使得 $\mathbf{q} \in \mathcal{R}$。令 $u < v < w$ 为 $\mathcal{V}_\ell$ 中满足$v \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$的相邻元素，使得 $\mathcal{R} =$单元$(u, v, w)$，并设

$$u' = \theta(u), \quad v' = \theta(v) \quad \text{and} \quad w' = \theta(w).$$

根据命题 5.7，字 $u' < v' < w'$ 是 $\mathcal{V}_{\ell+1}$ 中满足 $v' \notin \mathcal{V}_{\ell+2}$的相邻元素。因此，我们可以构造 $\mathcal{R}' =$单元$(u', v', w') \in S_{\ell+1}$。利用引理 9.2，我们得到

$$\gamma\mathcal{A}(u) = \gamma\mathbf{q}(u) - \mathbf{q}(u') + \mathcal{A}(u') \subseteq [-4, 4]^2 + \mathcal{A}(u'),$$
$$\gamma\mathcal{B}(v) = \gamma\mathbf{q}(v) - \mathbf{q}(v') + \mathcal{B}(v') \subseteq [-4, 4]^2 + \mathcal{B}(v'),$$
$$\gamma\mathcal{C}(w) = \gamma\mathbf{q}(w) - \mathbf{q}(w') + \mathcal{C}(w') \subseteq [-4, 4]^2 + \mathcal{C}(w').$$

逐项取交集后，我们推得

$$\gamma\mathcal{R} \subseteq [-8, 8]^2 + \mathcal{R}'$$

因为 $\mathcal{A}(u')$、$\mathcal{B}(v')$ 和 $\mathcal{C}(w')$ 的边是水平的、垂直的或斜率为 1。因此，存在 $\mathbf{q}' = (q_1', q_2') \in \mathcal{R}'$，使得

$$\|\gamma\mathbf{q} - \mathbf{q}'\| \le 8. \tag{9.3}$$

由于$\mathbf{P}$ 是 1-利普希茨的，这意味着

$$\|\mathbf{P}(\gamma\mathbf{q}) - \mathbf{P}(\mathbf{q}')\| \le 8. \tag{9.4}$$

由于$\mathbf{q} \in \mathcal{R}$ 且$\mathbf{q}' \in \mathcal{R}'$，定理 6.1 给出$\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \Phi(\mathbf{r})$ 以及$\mathbf{P}(\mathbf{q}') = \Phi(\mathbf{r}')$，其中

$$\mathbf{r} = (q_1 - |u|, q_2 + |u| - |w|, |w|) \quad \text{and} \quad \mathbf{r}' = (q_1' - |u'|, q_2' + |u'| - |w'|, |w'|).$$

由于 $\Phi$ 是 1-利普希茨的，且与数乘可交换，我们推得

$$\|\mathbf{P}(\mathbf{q}') - \gamma\mathbf{P}(\mathbf{q})\| \le \|\mathbf{r}' - \gamma\mathbf{r}\| \le 12,$$

其中，第二个估计用到了 (9.3) 和引理 9.1。结合 (9.4)，我们得出 $\|\mathbf{P}(\gamma\mathbf{q}) - \gamma\mathbf{P}(\mathbf{q})\| \leq 20$。

## 10. A specific example

使用第 3.6 节的术语，我们将在下文通过显式计算一个相关的斐波那契数列（位于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中），证明由式（3.16）给出的实数 $\xi$ 属于 $\mathcal{E}_3^+$。虽然本文其余部分并不需要这一点，但它提供了一个具体的数 $\xi$ 实例，我们的结果适用于该数，且与 [6]无关。我们先回顾连分数理论中的一些一般事实。

设 $\sigma\colon (\mathbb{N}\setminus\{0\})^* \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ 是一个幺半群态射，使得

$$\sigma(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{for each } a \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

根据 [6, 推论 4.2], ，其像为 $\mathcal{S}\cup\{I\}$ ，其中 $I$ 是 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ 的单位元，并且

$$\mathcal{S} = \Big\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})\,;\, a \geq \max\{b,c\} \text{ and } \min\{b,c\} \geq d \geq 0 \Big\}.$$

此外，其限制 $\sigma\colon (\mathbb{N}\setminus\{0\})^* \to \mathcal{S}\cup\{I\}$ 是一个幺半群同构。因此，对于每个词 $v \in (\mathbb{N}\setminus\{0\})^*$，矩阵 $\sigma(v)$ 是对称矩阵，当且仅当 $v$ 是回文。

设 $(a_i)_{i\geq 1}$ 为一个正整数序列，令 $\xi \in ]0,1[$ 为具有如下连分数展开的实数

$$\xi = [0, a_1, a_2, a_3 \dots] = 1/(a_1 + 1/(a_2 + \cdots)).$$

对于每个整数 $k \geq 1$，有

$$\sigma(a_1 \cdots a_k) = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_k & q_{k-1} \\ p_k & p_{k-1} \end{pmatrix}$$

其中 $p_k/q_k = [0, a_1, \dots, a_k]$ 是 $\xi$ 的第 $k$ 个既约形式渐近分数（且 $p_0/q_0 = 0$），因此

$$\|(\xi, -1)\sigma(a_1 \cdots a_k)\| = |q_{k-1}\xi - p_{k-1}| \asymp q_k^{-1} = \|\sigma(a_1 \cdots a_k)\|^{-1} \tag{10.1}$$

其中隐含常数为绝对隐含常数（见 [10, 第一章]）。

**命题 10.1**。设 $\xi = [0, \mathbf{1}, f_{\mathbf{2},\mathbf{1}}]$，其中 $\mathbf{1} = (1,\ 1)$ 且 $\mathbf{2} = (2,\ 2)$。则 $\xi$ 属于 $\mathcal{E}_3^+$，其对应的斐波那契数列为 $(W_i)_{i\geq 0}$，位于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中，并以如下项开始

$$W_0 = \sigma(\mathbf{1}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{and} \quad W_1 = \sigma(\mathbf{1})\sigma(\mathbf{2})\sigma(\mathbf{1})^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}. \tag{10.2}$$

此外，设 $E = \{a, b\}$ 为一个由两个字母组成的字母表，设 $w_\infty = f_{a,b}$，并设 $\varphi\colon E^* \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 为满足 $\varphi(a) = W_1$ 及 $\varphi(b) = W_0$ 的幺半群态射。那么，对于每个 $v \in [\epsilon, w_\infty[$，我们有

$$\|(\xi, -1)\varphi(v)\| \asymp \|\varphi(v)\|^{-1}. \tag{10.3}$$

在（10.3）中以及下面的证明中，所有隐含常数都是可明确计算的数。

证明。我们首先注意到，对于每个 $v \in E^*$，都有

$$\varphi(v) = \sigma(\mathbf{1})\sigma(\tau(v))\sigma(\mathbf{1})^{-1} \tag{10.4}$$

其中 $\tau\colon E^* \to (\mathbb{N} \setminus \{0\})^*$ 是满足 $\tau(a) = \mathbf{2}$ 且 $\tau(b) = \mathbf{1}$的幺半群态射。事实上，这个等式两边都定义了从 $E^*$ 到 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$的态射；根据（10.2），它们在 $v = a$ 和 $v = b$上相同。我们还注意到，对于每个 $i \geq 0$，都有 $W_i = \varphi(w_i)$，其中 $(w_i)_{i\geq 0}$是 $E^*$ 中的斐波那契数列，满足 $w_0 = b$ 和 $w_1 = a$。因此，（10.4）给出

$$W_i = \sigma(\mathbf{1})\sigma(\tau(w_i))\sigma(\mathbf{1})^{-1} \quad (i \geq 0). \tag{10.5}$$

对于 $v \in [\epsilon, w_\infty[$，词 $(\mathbf{1},\ \tau(v))$ 是 $(\mathbf{1},\ f_{\mathbf{2},\,\mathbf{1}})$ 的前缀，因此利用（10.4），一般估计（10.1）给出

$$\|(\xi, -1)\varphi(v)\| \asymp \|(\xi, -1)\sigma(\mathbf{1}, \tau(v))\| \asymp \|\sigma(\mathbf{1}, \tau(v))\|^{-1} \asymp \|\varphi(v)\|^{-1},$$

这就证明了（10.3）。取 $v = w_i$ 时，对于每个$i \geq 0$，可得 $\|(\xi,\ -1)W_i\| \asymp \|W_i\|^{-1}$。因此，序列 $(W_i)_{i\geq 0}$ 满足第 3.6 节中的条件（E3）。

根据 (10.5)，对每个 $i \geq 0$，我们有 $\|W_i\| \asymp \|\sigma(\tau(w_i))\|$。由于对于任意 $A,\ B \in \mathcal{S}$都有 $\|A\|\,\|B\| \leq \|AB\| \leq 2\|A\|\,\|B\|$，并且对每个 $i \geq 1,\ \sigma(\tau(w_i)) \in \mathcal{S}$，因此我们推得

$$\begin{aligned}\|W_{i+2}\| \asymp \|\sigma(\tau(w_{i+2}))\| &= \|\sigma(\tau(w_{i+1}))\sigma(\tau(w_i))\| \\ &\asymp \|\sigma(\tau(w_{i+1}))\|\|\sigma(\tau(w_i))\| \asymp \|W_{i+1}\|\|W_i\|\end{aligned}$$

对每个 $i \geq 0$ 都成立。因此，$(W_i)_{i\geq 0}$ 无界且满足条件（E2）。

最后，我们注意到

$$\sigma(\mathbf{2}) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \sigma(\mathbf{1})M = {}^tM\sigma(\mathbf{1}) \quad \text{where} \quad M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.6}$$

对每个 $i \geq 0$，令 $\mathbf{x}_i = W_iM_i^{-1}$，其中 $M_i$ 按照上述对 $M$ 的选取，在条件（E1）中定义。对于 $i \geq 2$，我们断言

$$\mathbf{x}_i = \sigma(\mathbf{1}, \tau(w_i^{**}), \mathbf{1}). \tag{10.7}$$

事实上，若 $i$ 为偶数，则 $w_i$ 以 $ab$ 结尾。于是，利用 (10.5) 和 (10.6)，我们得到

$$\mathbf{x}_i = \sigma(\mathbf{1})\sigma(\tau(w_i^{**}))\sigma(\mathbf{2})M^{-1} = \sigma(\mathbf{1})\sigma(\tau(w_i^{**}))\sigma(\mathbf{1}).$$

否则，$i$ 为奇数，$w_i$ 以 $ba$ 结尾，并且类似地可得

$$\mathbf{x}_i = \sigma(\mathbf{1})\sigma(\tau(w_i^{**}))\sigma(\mathbf{1})\sigma(\mathbf{2})\sigma(\mathbf{1})^{-1}({}^tM)^{-1} = \sigma(\mathbf{1})\sigma(\tau(w_i^{**}))\sigma(\mathbf{1}).$$

此外，根据引理 5.2，$w_i^{**}$是 $E^*$中的回文。由于 $\tau(a) = \mathbf{2}$和 $\tau(b) = \mathbf{1}$都是$(\mathbb{N} \setminus \{0\})^*$中的回文，我们由此推出$(\mathbf{1},\ \tau(w_i^{**}),\ \mathbf{1})$是$(\mathbb{N} \setminus \{0\})^*$中的回文。因此，根据 (10.7)，矩阵$\mathbf{x}_i$关于 $i \geq 2$对称。直接计算可知$\mathbf{x}_0$ 和$\mathbf{x}_1$也对称。因此，(E1)也成立，从而 $\xi \in \mathcal{E}_3^+$。□

马尔可夫三元组是马尔可夫方程$m^2+m_1^2+m_2^2 = 3mm_1m_2$在正整数中的一个解$\mathbf{m} = (m, m_1, m_2)$，其中解按排列视为相同。[7]定理 3.6 提供了一个显式双射$\mathbf{m} \mapsto \xi_{\mathbf{m}}$，它将所有满足$\mathbf{m} \neq (1, 1, 1)$的马尔可夫三元组$\mathbf{m}$ 的集合映射到集合 $\mathcal{E}_3^+ \cup\, ]1/2, 1[$。可以证明，命题 10.1 中的数 $\xi$为 $\xi_{\mathbf{m}}$，当$\mathbf{m} = (2,1,1)$时。因此，根据[7, 推论 5.10]，，其拉格朗日常数为 $1/3$，这是非二次无理实数可能取得的最大值。

## 11. 初步估计

由 [6, 定理 2.1] 可知，与极值数 $\xi$ 的 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ 型相关联的任意斐波那契数列 $(W_i)_{i\geq 1}$（属于 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$）都满足 $\|W_{i+1}\| \asymp \|W_i\|^{\gamma}$。本节旨在证明以下结果；该结果不仅给出了更精确的估计，还揭示了这一序列以及相应的对称矩阵序列 $(\mathbf{x}_i)_{i\geq 1}$ 的其他性质。

**命题 11.1.** 设 $\xi$ 是 $_2\mathrm{GL}\mathbb{Z}()$-型的极值实数。固定一个无界斐波那契序列 $(W_i)_{i\geq 1}$，其中 $_{i\geq 1}$ 属于 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$；取一个矩阵 $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ 以及一个对称矩阵序列 $(\mathbf{x}_i)_{i\geq 1}$，其中 $_{i\geq 1}$ 属于 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$，并满足第 *3.6* 节中的条件 (E1)–(E3) 。令

$$t_i = \mathrm{trace}(W_i) \quad and \quad d_i = \det(W_i) \tag{11.1}$$

对每个整数 $i \geq 1$。还令

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \xi^2 \end{pmatrix} \quad and \quad \theta_0 = \mathrm{trace}(\Xi M). \tag{11.2}$$

那么我们有 $\theta_0 \neq 0$，并且对每个 $i \geq 1$,

(i) $\mathbf{x}_{i+2} = W_{i+1}\mathbf{x}_i = W_i\mathbf{x}_{i+1}$,

(ii) $\mathbf{x}_{i+3} = t_{i+1}\mathbf{x}_{i+2} - d_{i+1}\mathbf{x}_i$,

(iii) $t_{i+3} = t_{i+1}t_{i+2} - d_{i+1}t_i$,

(iv) $\det(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_{i+2}) = \pm \det(M)^{-2}\mathrm{trace}(MJ) \neq 0.$

此外，存在 $\rho > 0$ 和 $i_0 \geq 1$，使得对每个 $i \geq i_0$，我们有 $t_i \neq 0$,

$$\log|t_i| = \rho F_i + \mathcal{O}(\gamma^{-i}) \quad and \quad W_i = \theta_0^{-1} t_i \Xi M_i + \mathcal{O}(|t_i|^{-1}). \tag{11.3}$$

主要的新意在于 (11.3) 中的第一个估计。在公式 (iv) 中，我们将每个

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} x_{k,0} & x_{k,1} \\ x_{k,1} & x_{k,2} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$$

对应于三元组 $\mathbf{x}_k = (x_{k,\,0},\ x_{k,\,1},\ x_{k,\,2}) \in \mathbb{Q}^3$。于是，$\det(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{x}^{i+1},\ \mathbf{x}^{i+2})$ 表示以三元组 $\mathbf{x}_i$、$\mathbf{x}^{i+1}$ 和 $\mathbf{x}^{i+2}$ 为行的 $3 \times 3$ 矩阵的行列式。

命题 *11.1* 的证明。对每个整数 $i \geq 1$，我们得到

$$\mathbf{x}_{i+2} = W_{i+2}M_i^{-1} = W_{i+1}\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i+1}M_{i+1}\mathbf{x}_i.$$

取转置 后，我们推得 $\mathbf{x}_{i+2} = \mathbf{x}_i M_i \mathbf{x}_{i+1} = W_i \mathbf{x}^{i+1}$。这证明了 (i)，并导出 s

$$\mathbf{x}_{i+3} = W_{i+1}\mathbf{x}_{i+2} = W_{i+1}^2\mathbf{x}_i \quad (i \geq 1).$$

此外，凯莱-哈密顿定理给出 $W_{i+1}^2 = t_{i+1}W_{i+1} - d_{i+1}I$，其中 $I$ 是 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ 的单位元。将其代入 $\mathbf{x}^{i+3}$ 的公式，即得 (ii)。

我们还注意到，对于每个 $k \geq 1$，矩阵 $\mathbf{x}_k M$ 和 $\mathbf{x}_k\,{}^tM = {}^t(M\mathbf{x}_k)$ 的迹相同，均为 $t_k$。因此，将 (ii) 的两边右乘 $M$ 并取迹，即得 (iii)。

根据 [4], 中的公式（2.1），我们有

$$\det(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_{i+2}) = \mathrm{trace}(J\mathbf{x}_i J\mathbf{x}_{i+2} J\mathbf{x}_{i+1}).$$

利用 $\mathbf{x}_{i+2} = \mathbf{x}_i M_i \mathbf{x}_{i+1}$ 和 $\mathbf{x}_k J \mathbf{x}_k = \det(\mathbf{x}_k) J = \pm \det(M)^{-1} J$，对每个 $k \geq 1$，我们可以推得

$$\det(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_{i+2}) = \mathrm{trace}(J\mathbf{x}_i J \mathbf{x}_i M_i \mathbf{x}_{i+1} J \mathbf{x}_{i+1}) = \pm \det(M)^{-2} \mathrm{trace}(M_i J),$$

注意到 $\mathrm{trace}({}^t MJ) = -\mathrm{trace}(MJ) \neq 0$ since ${}^t M \neq M$，即可推出 (iv)。

令 $c \geq 1$ 为满足 (E2) 和 (E3) 的常数。我们有

$$c^{-1}\|W_{i+2}\| \geq (c^{-1}\|W_{i+1}\|)(c^{-1}\|W_i\|) \quad (i \geq 1). \tag{11.4}$$

由于 $(W_i)_{i\geq 1}$ 无界，存在一个指标 $k \geq 2$ 使得 $\|W_k\| \geq ec^2$。由于我们有 $\|W_{k-1}\| \geq 1$，将 (11.4) 应用于 $i = k-1$ 和 $i = k$，得到 $c^{-1}\|W_{k+2}\| \geq c^{-1}\|W_{k+1}\| \geq e$。然后，对 $i$ 使用归纳法，可得

$$c^{-1}\|W_{k+i+1}\| \geq c^{-1}\|W_{k+i}\| \geq \exp(F_{i-1}) \quad (i \geq 1). \tag{11.5}$$

由于 $\|(\xi, -1)W_i\| \leq c\|W_i\|^{-1}$，我们有 $\|(\xi, -1)\mathbf{x}_i\| \ll \|W_i\|^{-1}$，因此，

$$\mathbf{x}_i = x_{i,0}\Xi + \mathcal{O}(\|W_i\|^{-1}). \tag{11.6}$$

由于 $\mathbf{x}_i$ 的矩阵元素是公分母为 $d \geq 1$ 且与 $i$ 无关的有理数，这意味着 $x_{i,0} \neq 0$ 对每个充分大的 $i$ 都成立，并且

$$t_i = \mathrm{trace}(\mathbf{x}_i M) = x_{i,0}\theta_0 + \mathcal{O}(\|W_i\|^{-1}). \tag{11.7}$$

若 $\theta_0 = 0$，则对每个充分大的 $i$，都有迹 $(\mathbf{x}_i M) = 0$。然而，由 (iv) 可知，对每个 $i \geq 1$，矩阵 $\mathbf{x}_i$、$\mathbf{x}_{i+1}$ 和 $\mathbf{x}_{i+2}$ 张成了 $\mathbf{x}$ 上系数属于 $\mathbb{Q}$ 的 $2 \times 2$ 对称矩阵的向量空间。因此，对所有这些 $\mathbf{x}$，都有迹 $(\mathbf{x}M) = 0$，于是 ${}^t M = -M$，这与假设矛盾。我们得出结论：$\theta_0 \neq 0$。

由于 $\theta_0 \neq 0$，我们由 (11.5)、(11.6) 和 (11.7) 推得，存在一个整数 $i_0 > k$，使得对每个 $i \geq i_0$，$t_i$ 和 $x_{i,0}$ 均非零，且

$$\|W_i\| \asymp \|\mathbf{x}_i\| \asymp |x_{i,0}| \asymp |t_i|, \tag{11.8}$$

从而得到 (11.3) 中的第二个估计。

为证明 (11.3) 中的第一个估计，我们注意到，对于 $i \geq i_0$，有

$$|t_{i+2}| \gg |t_{i+1}| \gg |t_i| \gg \exp(F_{i-1-k}) \gg \exp(i)$$

由 (11.5) 和 (11.8) 可得。于是，递推关系 (iii) 给出

$$\Big|\frac{t_{i+3}}{t_{i+1}t_{i+2}} - 1\Big| = \Big|\frac{t_i}{t_{i+1}t_{i+2}}\Big| \ll \frac{1}{|t_{i+2}|} \ll \exp(-i),$$

由此我们推出

$$\Big|\log\Big|\frac{t_{i+3}}{t_{i+1}t_{i+2}}\Big|\Big| \ll \exp(-i) \leq \gamma^{-2i}. \tag{11.9}$$

对每个 $i \geq i_0$，我们令

$$\rho_i = \gamma^{-i}\log|t_i| \quad \text{and} \quad \delta_i = \rho_{i+2} - \rho_{i+1}.$$

使用此记号，我们得到

$$\gamma^{-i-3}\log\Big|\frac{t_{i+3}}{t_{i+1}t_{i+2}}\Big| = \rho_{i+3} - \gamma^{-1}\rho_{i+2} - \gamma^{-2}\rho_{i+1} = \delta_{i+1} + \gamma^{-2}\delta_i.$$

因此，对于 $i \geq i_0$，(11.9) 可转化为 $\left|\delta_{i+1} + \gamma^{-2}\delta_i\right| \leq c_1\gamma^{-3i-3}$，其中 $c_1 > 0$ 是一个与 $i$ 无关的常数，因此

$$\gamma^{2(i+1)}|\delta_{i+1}| \leq \gamma^{2i}|\delta_i| + c_1\gamma^{-i-1} \quad (i \geq i_0).$$

因此，存在一个常数 $c_2 > 0$，使得对每个 $i \geq i_0$ 都有 $\gamma^{2i}|\delta_i| \leq c_2$。于是，$(\rho_i)_{i\geq i_0}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的柯西序列，且

$$|\rho_i - \rho_{i+1}| = |\delta_{i-1}| \leq c_2\gamma^{-2i+2} \quad (i \geq i_0 + 1).$$

因此，它收敛于一个实数 $\rho_\infty$，对 $i \geq i_0 + 1$ 有 $|\rho_i - \rho_\infty| \ll \gamma^{-2i}$，于是

$$\log|t_i| = \rho_\infty\gamma^i + \mathcal{O}(\gamma^{-i}) \quad (i \geq i_0 + 1).$$

由比内公式 (3.1)，对于 $i \geq 0$，我们还有 $\gamma^i = \sqrt{5}\gamma^{-1}F_i + \mathcal{O}(\gamma^{-i})$。将其代入前面的估计，便得到 (11.3) 的第一部分，其中 $\rho = \sqrt{5}\gamma^{-1}\rho_\infty$。□

## 12. The first two coordinates of the approximation points

本节中，我们为满足 $v \in ]\epsilon,\ w_\infty[$、关联到满足 $m \geq 1$ 的数 $\xi \in \mathcal{E}_m$ 的点 $\mathbf{x}(v)$，给出 $|x_0(v)|$ 和 $|x_0(v)\xi - x_1(v)|$ 的估计，定义见第 3.7 节。我们首先证明一个一般结果，该结果适用于任何 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ 型极值数。

**命题 12.1**。设记号与命题 *11.1* 中相同，$E = \{a, b\}$ 为一个含两个字母的字母表，且 $\varphi\colon\ E^* \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ 为满足 $\varphi(a) = W_1$ 和 $\varphi(b) = W_0 := W_1^{-1}W_2$ 的幺半群态射。对每个 $v \in ]\epsilon,\ w_\infty[$，有

(i) $\|\varphi(v)\| \asymp \exp(\rho|v|)$,

(ii) $\|(\xi, -1)\varphi(v)\| \asymp \|\varphi(v)\|^{-1}$.

证明。（ii）由 [6, 定理 2.3] 得出，因为对于每个 $v$，都有 $|\det\varphi(v)| = 1$。经过额外推导，也可以从 [6, 命题 4.3] 的证明中推出。命题 10.1 为由 (3.16) 给出的数 $\xi$ 提供了一个独立的论证。

为证明（i），我们按照 [6, 引理 5.2] 的证明进行。将 (11.3) 用于命题 11.1 后，我们首先注意到，对于每个 $i \geq 1$，都有

$$\exp(-\rho|w_i|)\varphi(w_i) = \exp(-\rho F_i)W_i = A_i + R_i \tag{12.1}$$

where $\|R_i\| \leq c_1\gamma^{-i}$ 其中 $c_1 \geq 1$ 为一个常数，且 $A_i = \pm\theta_0^{-1}\Xi M_i$ 属于

$$\mathcal{A} = \left\{\pm I, \pm\theta_0^{-1}\Xi M, \pm\theta_0^{-1}\Xi\,{}^tM\right\}.$$

由于 $\Xi M\Xi = \Xi\,{}^tM\Xi = \theta_0\Xi$，集合 $\mathcal{A}$ 在乘法下封闭。选取 $c_2 \geq 1$ 使得对于每个 $A \in \mathcal{A}$，都有 $c_2^{-1} \leq \|A\| \leq c_2$，并选取一个整数 $\ell$ 使得 $\gamma^{\ell-1} \geq 16c_1c_2^3$。

任何 $v \in ]w_\ell,\ w_\infty[$ 都可以写成一个乘积

$$v = w_{i_1}\cdots w_{i_s}u$$

对于一个递减的整数序列 $i_1 > \cdots > i_s$，其中 $i_s > \ell$，且某个 $u \in [\epsilon, w_\ell]$。令 $w = w_{i_1}\cdots w_{i_s}$。然后，利用 (12.1)，我们得到

$$\exp(-\rho|w|)\varphi(w) = (A_{i_1} + R_{i_1})\cdots(A_{i_s} + R_{i_s}) = A + R$$

其中 $A = A_{i_1} \cdots A_{i_s} \in \mathcal{A}$，而 $R$ 是一个求和，求和指标为 $(i_1, \dots, i_s)$ 的所有非空子序列 $(j_1, \dots, j_t)$，求和项是形如 $B_1 R_{j_1} \cdots B_t R_{j_t} B_{t+1}$ 的乘积，其中 $B_1, \dots, B_{t+1} \in \mathcal{A}$。由于此类乘积的范数至多为 $c_3^t \|R_{j_1}\| \cdots \|R_{j_t}\|$，其中 $c_3 = 4c_2^2$，我们得到

$$\|R\| \le \prod_{k=1}^{s} (1 + c_3 \|R_{i_k}\|) - 1 \le \exp\Big(c_3 \sum_{i=\ell+1}^{\infty} \|R_i\|\Big) - 1 \le \exp\big(c_1 c_3 \gamma^{-\ell+1}\big) - 1.$$

由于 $c_1 c_3 \gamma^{-\ell+1} \le (4c_2)^{-1} \le 1/2$，这给出 $\|R\| \le (2c_2)^{-1} \le \|A\|/2$，因此

$$\|\exp(-\rho|v|)\varphi(v)\| \asymp \|\exp(-\rho|w|)\varphi(w)\| = \|A + R\| \asymp \|A\| \asymp 1,$$

因此 $\|\varphi(v)\| \asymp \exp(\rho|v|)$。这一估计在 $v \in ]\epsilon, w_\ell]$ 时也成立。 □

**推论 12.2.** 设 $\xi \in \mathcal{E}_m$，其中 $m \ge 1$ 为某个整数。存在 $\rho > 0$，使得对每个 $v \in ]\epsilon$，由第 *3.7* 节定义的点 $\mathbf{x}(v)$ 满足

$$\max\{1, |x_0(v)|\} \asymp \exp(\rho|v|) \quad \textit{and} \quad |x_0(v)\xi - x_1(v)| \asymp \exp(-\rho|v|).$$

证明. 设 $v \in ]\epsilon, w_\infty[$。由于 $\mathbf{x}(v)$ 的第一列与 $\varphi(v)M(v)^{-1} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ 的第一列相同，我们有 $(x_0(v)\ x_1(v)) \ne (0, 0)$，而命题给出

$$\max\{1, |x_0(v)|\} \le \|\varphi(v)M(v)^{-1}\| \asymp \exp(\rho|v|),$$
$$|x_0(v)\xi - x_1(v)| \le \|(\xi, -1)\varphi(v)M(v)^{-1}\| \asymp \exp(-\rho|v|).$$

由于 $\xi$ 是劣可逼近的，我们也有 $\max\{1, |x_0(v)|\}|x_0(v)\xi - x_1(v)| \gg 1$，结论由此得出。□

借此机会，我们补上 [6, 命题 4.3], 证明中的一个小漏洞；这本身是迈向 [6, 定理 2.2]的关键一步。其中的论证涉及一个未指明的实数 $c_i$，并默认当 $i$足够大时，其绝对值有一个正下界。为证明这一点确实成立，只需注意到，按照证明中的记号，我们有 $c_i = c^2 y_{i,\,2}$，其中 $c \ne 0$ 与 $i$ 无关，并由条件 $(1/\xi,\ 1)^t U_k^{-1} = c(r,\ 1)$ 定义。由于对每个足够大的 $i$，$y_{i,\,2}$ 都是非零整数，因此我们得出，对所有这些 $i$，都有 $|c_i| \ge c^2$。

## 13. Recurrence relations

记号和假设与第 3.7 节相同。特别地，$\xi$ 是 $\mathcal{E}_m$ 中的一个固定数，其中 $m \ge 1$为某个整数，并且命题 11.1 和推论 12.2 均适用。本节中，我们通过对每个$v \in \mathcal{V}_\ell$ 且 $\ell \ge 4$ 充分大时的 $\|(\xi,\ -1)\mathbf{x}(v)\|$ 给出上界，补充推论 12.2。我们还将证明定理 3.4 (ii)。

我们称 $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ 中的两个对称矩阵 $A$ 和 $B$ 为等价的，记作$A \equiv B$，如果它们的第一列相同。借助这一记号，我们回顾一下：对于每个非空词 $v \in E^*$，矩阵 $\mathbf{x}(v)$ 是 $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ 中满足以下条件的唯一对称矩阵

$$\mathbf{x}(v) \equiv \varphi(v)M(v)^{-1} \quad \text{and} \quad |x_1(v)\xi - x_2(v)| < 1/2. \tag{13.1}$$

为了估计 $\|(\xi,\ -1)\mathbf{x}(v)\|$，我们将首先针对每个 $v \in \mathcal{V}_4$递归地构造一个对称矩阵 $\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(v)$，它属于 $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$，且满足 $\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(v) \equiv \mathbf{x}(v)$。然后，我们将从上方估计 $\|(\xi,\ -1)\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(v)\|$，并证明对于每个 $v \in \mathcal{V}_\ell$，只要 $\ell \ge 4$ 足够大，这个范数就小于

$1/2$，因此 $\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(v) = \mathbf{x}(v)$。由此，对于 $\mathcal{V}_\ell$ 中每组三个相邻元素 $u < v < w$，只要 $\ell$足够大，我们就能推导出 $\mathbf{x}(u)$、$\mathbf{x}(v)$ 和 $\mathbf{x}(w)$ 之间的一个明确线性相关关系（当 $v \in \mathcal{V}_{\ell+1}$ 时）；同时，我们将证明这三个点的行列式在 $v \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$ 时为 $\pm 2$，从而证明定理 3.4(ii)。

我们从三个简单的引理开始。

**引理 13.1.** 我们有 $\mathbf{x}(vw_i) = \mathbf{x}(v\widetilde{w}_i)$ 对每个 $v \in E^*$ 以及每个 $i \geq 2$ .

证明. 设 $u \in E^*$，并设 $U = \varphi(u)$。根据定义，我们有

$$\mathbf{x}(uab) \equiv UW_1W_0M^{-1} = UW_2M_2^{-1} = U\mathbf{x}_2.$$

命题 11.1 (i) 还给出 $W_1\mathbf{x}_2 = W_2\mathbf{x}_1$, ，因此$\mathbf{x}_2 = W_0\mathbf{x}_1$ ，于是我们得到

$$\mathbf{x}(uba) \equiv UW_0W_1\,{}^tM^{-1} = UW_0\mathbf{x}_1 = U\mathbf{x}_2.$$

这表明$\mathbf{x}(uab) \equiv \mathbf{x}(uba)$，从而$\mathbf{x}(uab)$ =$\mathbf{x}(uba)$。对整数 $i \geq 2$ 和词 $v \in E^*$将此应用于$u = vw_i^{**}$，由此得到$\mathbf{x}(vw_i) = \mathbf{x}(v\widetilde{w}_i)$。□

**引理 13.2**。对于每个整数 $i \geq 2$，矩阵 $\varphi(\widetilde{w}_i)$ 和 $\varphi(w_i)$ 具有相同的特征多项式。

证明。对于 $i \geq 3$，由引理 5.2 得到 $w_i = w_{i-2}\widetilde{w}_{i-1}$，这意味着 $\widetilde{w}_i = w_{i-2}w_{i-1}$。又由于我们还有 $w_i = w_{i-1}w_{i-2}$，因此可推得

$$\varphi(\widetilde{w}_i) = W_{i-2}W_{i-1} = W_{i-2}\varphi(w_i)W_{i-2}^{-1}.$$

最后这些公式对于 $i = 2$ 仍然成立。因此，$\varphi(\widetilde{w}_i)$ 和 $\varphi(w_i)$ 是相似矩阵，所以它们的特征多项式相同。□

下面的第三个引理依赖于矩阵 $M$ 的特定形式，该形式由 (3.15) 给出。

**引理 13.3**。对于任意非空字 $u, v \in E^*$，我们有

$$\varphi(u)M(v)^{-1} \equiv \begin{cases} \mathbf{x}(u) & \text{if } M(u) = M(v), \\ -\mathbf{x}(u) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。如果 $M(u) = M(v)$，则由定义可得此结论。否则，我们有 $M(v) = {}^tM(u)$。由于

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -m \end{pmatrix} = -{}^tM^{-1},$$

我们推导出 $M(v)^{-1} \equiv -M(u)^{-1}$，因此 $\varphi(u)M(v)^{-1} \equiv -\varphi(u)M(u)^{-1} \equiv -\mathbf{x}(u)$。 □

下一个结果是我们分析的关键。

**命题 13.4**。设 $\ell \geq 4$ 是一个整数，且设 $u < v < w$ 是 $\mathcal{V}_\ell$ 中满足 $v \in \mathcal{V}_{\ell+1}$ 的相邻词。则对于某个 $i \in \{\ell-2, \ell-1\}$，有 $|w| - |v| = |v| - |u| = F_i$，并且

$$\mathbf{x}(w) \equiv \begin{cases} t_i\mathbf{x}(v) - d_i\mathbf{x}(u) & \text{if } M(u) = M(v), \\ t_i\mathbf{x}(v) + d_i\mathbf{x}(u) & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{13.2}$$

其中 $t_i = $ 迹$(W_i)$ 和 $d_i =$det$(W_i)$。

证明。由推论 4.8 和命题 4.10 可知，$|w|-|v|=|v|-|u|=F_i$ 对于某个 $i\in\{\ell-2,\ell-1\}$ 成立。根据命题 5.5，这意味着 $v=us$且 $w=vs'$ 对于某个 $s,\ s'\in\{w_i,\widetilde{w}_i\}$成立。由引理 13.1 可得 $\mathbf{x}(vs)=\mathbf{x}(vs')$，因此

$$\mathbf{x}(w)=\mathbf{x}(vs)=\mathbf{x}(us^2).$$

由 $M(us^2)=M(us)=M(v)$，我们推得

$$\mathbf{x}(w)\equiv\varphi(us^2)M(v)^{-1}=\varphi(u)\varphi(s)^2M(v)^{-1}.$$

由于 $s\in\{w_i,\widetilde{w}_i\}$ 和 $i\geq 2$，引理 13.2 表明 $\varphi(s)$ 与 $\varphi(w_i)=W_i$ 具有相同的特征多项式，因此由凯莱-哈密顿定理可得

$$\varphi(s)^2=t_i\varphi(s)-d_iI$$

其中 $I$ 表示 $2\times 2$ 单位矩阵。综上可得

$$\mathbf{x}(w)\equiv\varphi(u)\big(t_i\varphi(s)-d_iI\big)M(v)^{-1}=t_i\varphi(v)M(v)^{-1}-d_i\varphi(u)M(v)^{-1},$$

利用引理 13.3，即可得到 (13.2)。 □

我们将在下文证明，当 $\ell$足够大时，同余式 (13.2) 实际上是等式。为此，我们首先针对每个 $w\in\mathcal{V}_4$ 构造“代数”点 $\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(w)$。

**推论 13.5**。对于每个 $w\in\mathcal{V}_4$，下面的递推过程构造一个对称矩阵 $\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(w)$，其属于 $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$，且满足 $\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(w)\equiv\mathbf{x}(w)$。

(i) 如果 $w\in\mathcal{F}$，则对于某个 $i\geq 4$有 $w=w_i$，我们令 $\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(w)=\mathbf{x}_i$。

(ii) 如果 $w\notin\mathcal{F}$，则 $\alpha(w)=w_\ell$ 对于某个整数 $\ell\geq 4$成立，并且 $w$ 至少是 $\mathcal{V}_\ell$ 的第三个元素。因此，我们可以找到 $u$、$v\in\mathcal{V}_\ell$，使得 $u<v<w$ 是 $\mathcal{V}_\ell$的相邻元素。由于 $w\notin\mathcal{V}_{\ell+1}$，推论 *4.9* 表明 $v\in\mathcal{V}_{\ell+1}$，因此根据命题 *13.4*，对于某个 $i\in\{\ell-2,\ell-1\}$，我们有 $|w|-|v|=|v|-|u|=F_i$。然后，我们定义

$$\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(w)=\begin{cases}t_i\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(v)-d_i\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(u) & \text{if } M(u)=M(v),\\ t_i\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(v)+d_i\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(u) & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{13.3}$$

证明。在情形 (i) 中，这是因为 $\mathbf{x}_i=W_iM_i^{-1}=\varphi(w_i)M(w_i)^{-1}\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ 是对称的，因此对每个 $i\geq 1$，都有 $\mathbf{x}_i\equiv\mathbf{x}(w_i)$。在情形 (ii) 中，按长度归纳，我们可以假设$\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(u)\equiv\mathbf{x}(u)$ 和 $\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(v)\equiv\mathbf{x}(v)$ 是对称的整矩阵。由于 $\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(w)$ 是这些矩阵的整系数线性组合，因此它也是对称的整矩阵；由命题 13.4，我们有$\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(w)\equiv\mathbf{x}(w)$。□

因此，按照构造，对于每组三个相邻元素 $u<v<w$ of$\mathcal{V}_\ell$，只要满足 $\ell\geq 4$ 和 $w\notin\mathcal{V}_{\ell+1}$，(13.3) 就成立。这与同余式 (13.2) 不同，后者对更大的集合中的三元组成立：这些三元组由相邻元素 $u<v<w$ of $\mathcal{V}_\ell$ 构成，并满足 $\ell\geq 4$ 和 $v\in\mathcal{V}_{\ell+1}$。

根据定义，对于每个 $\ell\geq 4$，我们都有 $\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(w_\ell)=\mathbf{x}_\ell$。下面，我们计算 $\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(w)$，针对 $w_\infty$ 的下一类最简单的前缀族 $w$。

**引理 13.6.** 对于每个整数 $\ell\geq 4$，我们有

$$\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(w_{\ell+1}w_{\ell-1})=\mathbf{y}_\ell:=t_{\ell-1}\mathbf{x}_{\ell+1}+d_{\ell-1}\mathbf{x}_\ell,$$
$$\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(w_{\ell+2}w_{\ell-2})=\mathbf{z}_\ell:=t_{\ell-2}\mathbf{x}_{\ell+2}+d_{\ell-2}\mathbf{y}_\ell.$$

证明. 固定一个 $\ell \geq 4$ 的选择。根据引理 5.1，字 $w_\ell < w_{\ell+1} < w_{\ell+1}w_{\ell-1}$ 是 $\mathcal{V}_\ell$ 的前三个元素。由于 $w_{\ell+1}w_{\ell-1} \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$，它们满足推论 13.5 (ii) 中关于 $i = \ell - 1$ 的假设。又由于 $M(w_\ell) = M_\ell \neq M_{\ell+1} = M(w_{\ell+1})$，我们推得

$$\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(w_{\ell+1}w_{\ell-1}) = t_{\ell-1}\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(w_{\ell+1}) + d_{\ell-1}\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(w_\ell) = t_{\ell-1}\mathbf{x}_{\ell+1} + d_{\ell-1}\mathbf{x}_\ell$$

记作 $\mathbf{y}_\ell$。引理 5.1 还表明，$w_{\ell+1}w_{\ell-1} < w_{\ell+2} < w_{\ell+2}w_{\ell-2}$ 是 $\mathcal{V}_\ell$中的相邻元素。由于 $w_{\ell+2}w_{\ell-2} \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$，它们满足推论 13.5 (ii) 的假设，其中$i = \ell - 2$。因为 $M(w_{\ell+1}w_{\ell-1}) = M_{\ell-1} \neq M_{\ell+2} = M(w_{\ell+2})$，我们推得

$$\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(w_{\ell+2}w_{\ell-2}) = t_{\ell-2}\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(w_{\ell+2}) + d_{\ell-2}\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(w_{\ell+1}w_{\ell-1}) = t_{\ell-2}\mathbf{x}_{\ell+2} + d_{\ell-2}\mathbf{y}_\ell$$

记作 $\mathbf{z}_\ell$。 □

现在我们可以着手给出主要估计。

**命题 13.7**。 设 $\rho$ 如命题 *11.1* 所述。那么存在常数 $c > 0$，使得对任意 $v \in \mathcal{V}_4$，都有

$$\delta(v) := \|(\xi, -1)\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(v)\| \exp(\rho|\alpha(v)|) \leq c.$$

证明。 对于任意一对整数 $k$、$\ell$，满足 $4 \leq \ell \leq k$，令

$$d_k(\ell) = \max\{\delta(v) ;\, v \in \mathcal{V}_\ell \text{ and } v \leq w_k\}.$$

我们需要证明非递减序列 $\big(d_k(4)\big)_{k\geq 4}$ 有上界。我们分两步进行。

**第一步**。 根据命题 11.1 中的估计 (11.3)，存在 $c_1, c_2 > 0$ 使得

$$|t_\ell| \leq (1 + c_1\gamma^{-\ell}) \exp(\rho F_\ell),$$
$$\delta(w_\ell) = \|(\xi, -1)\mathbf{x}_\ell\| \exp(\rho F_\ell) \leq c_2,$$

对每个整数 $\ell \geq 1$ 都成立，因为 $\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(w_\ell) = W_\ell M_\ell^{-1} = \mathbf{x}_\ell$ 且 $(\xi, -1)\Xi = 0$。于是，对于任意$\ell \geq 4$，由引理 13.6 可得

$$\begin{aligned}
\delta(w_{\ell+1}w_{\ell-1}) &= \|(\xi, -1)\mathbf{y}_\ell\| \exp(\rho F_\ell) \\
&\leq (1 + c_1\gamma^{-\ell+1})\delta(w_{\ell+1}) + \delta(w_\ell) \leq (2 + c_1)c_2, \\
\delta(w_{\ell+2}w_{\ell-2}) &= \|(\xi, -1)\mathbf{z}_\ell\| \exp(\rho F_\ell) \\
&\leq (1 + c_1\gamma^{-\ell+2})\delta(w_{\ell+2}) + \delta(w_{\ell+1}w_{\ell-1}) \leq (3 + 2c_1)c_2.
\end{aligned}$$

由引理 5.1 可知，对于任意 $\ell \geq 4$，有

$$\delta(v) \leq c_3 \quad \text{for each } v \in \mathcal{V}_\ell \cap [\epsilon, w_{\ell+3}] \tag{13.4}$$

其中 $c_3 = (3 + 2c_1)c_2$，因此 $d_{\ell+3}(\ell) \leq c_3$。

**第二步**。 我们断言存在一个常数 $c_4 > 0$ 使得

$$\delta(v) \leq (1 + c_4\gamma^{-\ell})d_k(\ell + 1) \tag{13.5}$$

对于每个 $v \in \mathcal{V}_\ell \cap ]w_{\ell+3},\ w_k]$ 满足 $4 \leq \ell \leq k - 4$。

如果我们认为这是理所当然的，那么根据（13.4），我们得到

$$\max\{c_3, d_k(\ell)\} \leq (1 + c_4\gamma^{-\ell}) \max\{c_3, d_k(\ell + 1)\}$$

对每个 $k \geq 8$ 和每个 $\ell = 4, \ldots, k-4$。由于 $d_k(k-3) \leq c_3$，这就得到了所需结果

$$d_k(4) \leq c := c_3 \prod_{i=4}^{\infty} (1 + c_4 \gamma^{-\ell}) < \infty.$$

为证明该断言，不妨假设 $v \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$，因为否则 $\delta(v) \leq d_k(\ell+1)$，而（13.5）自动成立。于是，我们有 $v \in \mathcal{V}_\ell \setminus \mathcal{V}_{\ell+1}$；又由于 $v > w_{\ell+3}$，存在一个由 $\mathcal{V}_\ell$中相邻元素组成的最大序列

$$v_1 < u_1 < \cdots < v_s < u_s$$

其基数为偶数 $2s$，且满足 $s \geq 2$，使得

$$v = v_s \quad \text{and} \quad \{v_2, \ldots, v_s\} \subseteq \mathcal{V}_\ell \setminus \mathcal{V}_{\ell+1}.$$

由于 $w_{\ell+2} w_\ell < w_{\ell+3}$ 是 $\mathcal{V}_\ell$ 中包含于 $\mathcal{V}_{\ell+1}$内的相邻元素，我们必有 $v_1 \geq w_{\ell+2} w_\ell$，因此根据该序列的极大性，$v_1 \in \mathcal{V}_{\ell+1}$。此外，对于每个 $i = 2, \ldots, s$，词 $u_{i-1} < v_i < u_i$ 在 $\mathcal{V}_\ell$ 中相邻，且满足 $v_i \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$。根据命题 4.11，这意味着 $u_{i-1} < u_i$ 是 $\mathcal{V}_{\ell+1}$ 中满足 $|u_i| - |u_{i-1}| = F_\ell$ 的相邻元素。因此，$|u_1| < |u_2| < \cdots < |u_s|$ 是由 $\mathcal{V}_{\ell+1}$ 中的相邻元素组成的等差数列。根据推论 4.8，这意味着 $s \leq 5$。如果 $s \geq 3$，那么根据命题 4.10，对于 $i = 2, \ldots, s-1$，我们还进一步有 $u_i \in \mathcal{V}_{\ell+2}$。

对于每个 $i = 1$、.....、$s-1$，字 $v_i < u_i < v_{i+1}$ 是 $\mathcal{V}_\ell$ 中满足 $v_{i+1} \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$ 的相邻元素。因此，由推论 13.5 (ii) 可得

$$\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(v_{i+1}) = t_k \mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(u_i) \pm \mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(v_i)$$

对于某个 $k = k_i \in \{\ell-2, \ell-1\}$。对于 $i = 1$，我们有 $\{u_1, v_1\} \subseteq \mathcal{V}_{\ell+1}$。因此

$$\begin{aligned} \delta(v_2) &\leq (|t_{\ell-1}| \delta(u_1) + \delta(v_1)) \exp(\rho F_\ell - \rho F_{\ell+1}) \\ &\leq (1 + c_1 \gamma^{-\ell+1}) \delta(u_1) + \exp(-\rho F_{\ell-1}) \delta(v_1) \\ &\leq \left(1 + c_1 \gamma^{-\ell+1} + \exp(-\rho F_{\ell-1})\right) d_k(\ell+1). \end{aligned} \tag{13.6}$$

当 $2 \leq i \leq s-1$ 时，我们有 $\{v_i, v_{i+1}\} \subseteq \mathcal{V}_\ell \setminus \mathcal{V}_{\ell+1}$ 和 $u_i \in \mathcal{V}_{\ell+2}$，因此

$$\delta(v_{i+1}) \leq |t_k| \delta(u_i) \exp(\rho F_\ell - \rho F_{\ell+2}) + \delta(v_i).$$

由于 $|t_k| \leq (1 + c_1) \exp(\rho F_{\ell-1})$ 且 $\delta(u_i) \leq d_k(\ell+1)$，由此可得

$$\delta(v_{i+1}) \leq \delta(v_i) + (1 + c_1) \exp(-\rho F_\ell) d_k(\ell+1) \quad (2 \leq i \leq s-1). \tag{13.7}$$

由于 $v = v_s$ 满足 $s \leq 5$，由 (13.6) 和 (13.7) 可得，(13.5) 对某个常数 $c_4$ 成立，该常数仅取决于 $c_1$ 和 $\rho$。□

**推论 13.8.** 存在一个整数 $\ell_1 \geq 4$，具有以下性质。

(i) 对于任意整数 $\ell \geq \ell_1$ 以及任意 $v \in \mathcal{V}_\ell$，我们有

$$\mathbf{x}(v) = \mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(v), \quad \|(\xi, -1)\mathbf{x}(v)\| \leq c \exp(-\rho |\alpha(v)|) \quad \textit{and} \quad x_0(v) \neq 0. \tag{13.8}$$

(ii) 对于任意整数 $\ell \geq \ell_1$ 以及 $\mathcal{V}_\ell$ 中满足$v \in \mathcal{V}_{\ell+1}$的任意连续字的三元组 $u < v < w$，存在某个 $i \in \{\ell-2, \ell-1\}$，使得 $|w| - |v| = |v| - |u| = F_i$，并且

$$\mathbf{x}(w) = \begin{cases} t_i \mathbf{x}(v) - d_i \mathbf{x}(u) & \textit{if } M(u) = M(v), \\ t_i \mathbf{x}(v) + d_i \mathbf{x}(u) & \textit{otherwise.} \end{cases} \tag{13.9}$$

因此，当 $\ell \geq \ell_1$ 时，同余式 (13.2) 成为等式，正如前面所述。

推论 *13.8* 的证明。由命题 11.1 的估计 (11.3)，存在一个整数 $\ell_1 \geq 4$，使得对每个 $i \geq \ell_1$，都有 $|t_i| \leq 2\exp(\rho F_i)$。我们选取这个 $\ell_1$，使得 $3c\exp(-\rho F_{\ell_1}) < 1/2$，其中 $c \geq 1$ 是前一个命题中的常数。

(i) 对于满足 $\ell \geq \ell_1$ 的 $v \in \mathcal{V}_\ell$，我们有 $|\alpha(v)| \geq F_\ell \geq F_{\ell_1}$，由前一个命题可得

$$\|(\xi, -1)\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(v)\| \leq c\exp(-\rho|\alpha(v)|) < 1/2.$$

由于 $\mathbf{x}^{\mathrm{alg}}(v) \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ 是一个对称整数矩阵，故 (13.8) 成立。

(ii) 设 $\ell \geq \ell_1$，并设 $u < v < w$ 是 $\mathcal{V}_\ell$ 中满足 $v \in \mathcal{V}_{\ell+1}$ 的相邻元素。由命题 13.4，对某个 $i \in \{\ell-2, \ell-1\}$，有 $|w| - |v| = |v| - |u| = F_i$，且 $\mathbf{x}(w) \equiv \mathbf{y}$，其中 $\mathbf{y}$ 表示 (13.9) 的右端。由上文已证明的 (i) 部分，(13.8) 同时适用于 $u$ 和 $v$，因此

$$\begin{aligned}\|(\xi, -1)\mathbf{y}\| &\leq c|t_i|\exp(-\rho|\alpha(v)|) + c\exp(-\rho|\alpha(u)|)\\ &\leq 2c\exp(\rho F_{\ell-1} - \rho F_{\ell+1}) + c\exp(-\rho F_\ell) = 3c\exp(-\rho F_\ell) < 1/2.\end{aligned}$$

由于 $\mathbf{y}$ 是具有整数系数的对称式，我们得出 $\mathbf{x}(w) = \mathbf{y}$。 □

最后给出以下补充结果。

**命题 13.9.** 设 $\ell_1$ 如推论 *13.8* 中所述，并设 $u < v < w$ 是 $\mathcal{V}_\ell$ 中满足 $v \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$ 的相邻词，其中 $\ell \geq \ell_1$ 为整数。那么，我们有

$$\det(\mathbf{x}(u), \mathbf{x}(v), \mathbf{x}(w)) = \pm 2.$$

证明.我们对 $|v|$ 使用归纳法。由于 $v \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$，引理 5.1 蕴含 $v \geq w_{\ell+1}w_{\ell-1}$。

首先，假设 $v = w_{\ell+1}w_{\ell-1}$。那么我们有 $u = w_{\ell+1}$ 和 $w = w_{\ell+2}$。由于 $\ell \geq \ell_1$，推论 13.8 (i) 适用于 $u$、$v$ 和 $w$。因此，我们得到

$$\det(\mathbf{x}(u), \mathbf{x}(v), \mathbf{x}(w)) = \det(\mathbf{x}_{\ell+1}, \mathbf{y}_\ell, \mathbf{x}_{\ell+2}) = \pm\det(\mathbf{x}_\ell, \mathbf{x}_{\ell+1}, \mathbf{x}_{\ell+2}) = \pm 2,$$

先使用引理 13.6，再使用命题 11.1(iv)。

从现在起，假设 $v > w_{\ell+1}w_{\ell-1}$。根据引理 5.1，我们有 $v \geq w_{\ell+2}w_{\ell-2}$，并且可以将 $u < v < w$ 扩展为一个相邻词序列

$$u' < v' < u < v < w$$

在 $\mathcal{V}_\ell$ 中。由于 $v \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$，命题 4.11 表明 $u < w$ 是 $\mathcal{V}_{\ell+1}$中的相邻元素，且 $|w| - |u| = F_\ell$。此外，由于 $v' < u < v$ 是 $\mathcal{V}_\ell$ 中的相邻元素，且 $u \in \mathcal{V}_{\ell+1}$，推论 13.8 (ii) 得出 $\mathbf{x}(v) = t_i\mathbf{x}(u) \pm \mathbf{x}(v')$，其中某个 $i \in \{\ell-2, \ell-1\}$，因此

$$\det(\mathbf{x}(u), \mathbf{x}(v), \mathbf{x}(w)) = \pm\det(\mathbf{x}(v'), \mathbf{x}(u), \mathbf{x}(w)). \tag{13.10}$$

首先假设 $v' \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$。那么，按照上述论证，我们发现 $u' < u$ 是 $\mathcal{V}_{\ell+1}$ 中满足 $|u| - |u'| = F_\ell$ 的相邻元素。因此，$u' < u < w$ 是 $\mathcal{V}_{\ell+1}$ 中满足 $|w| - |u| = |u| - |u'| = F_\ell$ 的相邻元素。由命题 4.10 可知，这意味着 $u \in \mathcal{V}_{\ell+2}$；于是根据推论 13.8，$\mathbf{x}(w) = t_\ell\mathbf{x}(u) \pm \mathbf{x}(u')$。将其代入 (13.10) 右侧，我们便可推出

$$\det(\mathbf{x}(u), \mathbf{x}(v), \mathbf{x}(w)) = \pm\det(\mathbf{x}(u'), \mathbf{x}(v'), \mathbf{x}(u)).$$

由于 $u' < v' < u$ 是 $\mathcal{V}_\ell$ 中满足 $v' \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$ 和 $|v'| < |v|$ 的相邻元素，根据归纳法，我们可以假设此等式右侧的行列式为 $\pm 2$，证毕。

最后，假设 $v' \in \mathcal{V}_{\ell+1}$。那么， $v' < u < w$ 是 $\mathcal{V}_{\ell+1}$中的相邻元素。由于$v' < u$ 在 $\mathcal{V}_\ell$中也是相邻的，根据推论 4.8可得 $|u| - |v'| = F_{\ell-1}$，因此 $|u| - |v'| < F_\ell \leq |w| - |u|$，于是根据命题 4.10，$u \notin \mathcal{V}_{\ell+2}$。由于 $|u| < |v|$，我们可以通过归纳法假设 (13.10) 右侧的行列式为 $\pm 2$，于是再次得证。□

将此命题与推论 13.8 (ii)结合，可得以下定性结论，从而证明定理 3.4(ii)。

**推论 13.10**。 对于 $\mathcal{V}_\ell$ 中满足 $\ell \geq \ell_1$的相邻词 $u < v < w$， 点$\mathbf{x}(u)$、$\mathbf{x}(v)$和$\mathbf{x}(w)$ 线性无关，当且仅当 $v \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$。

## 14. Proof of Theorem 3.4

记号同第 3.7 节，令 $\rho$ 如命题 11.1 中针对给定 $\xi \in \mathcal{E}_m$ 所定义，并令 $\ell_1$ 如推论 13.8 中所定义。由推论 13.10 可知，只需证明存在一个整数 $\ell$，使得 $\ell \geq \ell_1$，并且对于每个 $v \in \mathcal{V}_\ell$ 和每个$\mathbf{q} \in \mathcal{A}(\epsilon)$，都有$L_{\mathbf{x}(v)}(\mathbf{q}) = \rho P_v(\rho^{-1}\mathbf{q}) + \mathcal{O}_\xi(1)$，其中 $\mathcal{O}_\xi(1)$ 表示 $v$ 和$\mathbf{q}$的一个函数，其绝对值有一个仅依赖于 $\xi$ 的上界。

对于每个 $v \in ]\epsilon, w_\infty[$，我们令

$$\Delta(v) = (\Delta_0(v), \Delta_1(v), \Delta_2(v)) = (x_0(v), x_0(v)\xi - x_1(v), x_0(v)\xi^2 - x_2(v)),$$

因此，对于任意$\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$，都有

$$L_{\mathbf{x}(v)}(\mathbf{q}) = \max\{\log|\Delta_0(v)|, q_1 + \log|\Delta_1(v)|, q_2 + \log|\Delta_2(v)|\}.$$

根据推论 12.2 和推论 13.8 (i)，对于每个满足 $\ell \geq \ell_1$的 $v \in \mathcal{V}_\ell$，都有

$$\begin{aligned} &\log|\Delta_0(v)| = \rho|v| + \mathcal{O}_\xi(1), \\ &\log|\Delta_1(v)| = -\rho|v| + \mathcal{O}_\xi(1), \\ &\log|\Delta_2(v)| \leq \log\|(\xi, -1)\mathbf{x}(v)\| + \mathcal{O}_\xi(1) \leq -\rho|\alpha(v)| + \mathcal{O}_\xi(1). \end{aligned} \tag{14.1}$$

我们声称还可以进一步选择 $\ell$，使得

$$\log|\Delta_2(v)| \geq -\rho|\alpha(v)| + \mathcal{O}_\xi(1) \quad \text{for all } v \in \mathcal{V}_\ell \setminus \mathcal{F}. \tag{14.2}$$

若暂且接受这一点，那么对于 $v \in \mathcal{V}_\ell \setminus \mathcal{F}$ 和 $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$，我们得到

$$L_{\mathbf{x}(v)}(\mathbf{q}) = \max\{\rho|v|, q_1 - \rho|v|, q_2 - \rho|\alpha(v)|\} + \mathcal{O}_\xi(1) = \rho P_v(\rho^{-1}\mathbf{q}) + \mathcal{O}_\xi(1).$$

这对于 $v \in \mathcal{F}$ 和 $\mathbf{q} \in \mathcal{A}(\epsilon)$ 仍然成立，因为此时有 $\alpha(v) = v$ 和 $q_2 \leq q_1$，因此，

$$q_2 + \log|\Delta_2(v)| \leq q_1 - \rho|v| + \mathcal{O}_\xi(1) = q_1 + \log|\Delta_1(v)| + \mathcal{O}_\xi(1).$$

为证明 (14.2)，选取 $v \in \mathcal{V}_{\ell_1} \setminus \mathcal{F}$，并令 $\ell \geq \ell_1$ 使得 $\alpha(v) = w_\ell$。于是， $v \neq w_\ell$，因此 $v$ 是 $u < v < w$ 中三个相邻元素的中间项，而 $\mathcal{V}_\ell$。由于 $v \notin \mathcal{V}_{\ell+1}$，命题 13.9 给出

$$2 = |\det(\mathbf{x}(u), \mathbf{x}(v), \mathbf{x}(w))| = |\det(\Delta(u), \Delta(v), \Delta(w))|.$$

右侧的行列式是六个乘积 $\pm\Delta_i(u)\Delta_j(v)\Delta_k(w)$ 之和，其中 $(i,\ j,\ k)$ 遍历 $(0,\ 1,\ 2)$ 的所有排列。由于估计 (14.1) 对以 $u$ 和 $w$ 替代 $v$ 的情形同样适用，我们得到：当 $(i,\ j,\ k) \neq (1,\ 2,\ 0)$ 时，当 $\ell$ 趋于无穷大时，这些乘积一致地趋于 0，且对 $v$ 一致。例如，我们有

$$\log|\Delta_2(u)\Delta_1(v)\Delta_0(w)| \leq \rho(-|\alpha(u)| - |v| + |w|) + \mathcal{O}_\xi(1) \leq -\rho F_\ell + \mathcal{O}_\xi(1)$$

因为根据推论 4.8，$|\alpha(u)| \geq F_{\ell+1}$ 根据推论 4.9，最后$|w| - |u| = |\alpha(v)| = F_\ell$ 根据命题 4.10。因此，若 $\ell$ 足够大，我们得到

$$\begin{aligned} 0 \leq \log|\Delta_1(u)\Delta_2(v)\Delta_0(w)| &= \rho(|w| - |u|) + \log|\Delta_2(v)| + \mathcal{O}_\xi(1) \\ &= \rho|\alpha(v)| + \log|\Delta_2(v)| + \mathcal{O}_\xi(1) \end{aligned}$$

由此得到 (14.2)。

## 15. 加权逼近指数

对每个 $\boldsymbol{\xi} = (1, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3$ 和每个 $\sigma \in [0, \infty[$，我们将 $\lambda_\sigma(\boldsymbol{\xi})$（分别将 $\widehat{\lambda}_\sigma(\boldsymbol{\xi})$）定义为满足以下不等式的所有实数 $\lambda > 0$ 的上确界：

$$|x_0| \leq Q, \quad |x_0\xi_1 - x_1| \leq Q^{-\lambda+1} \quad \text{and} \quad |x_0\xi_2 - x_2| \leq Q^{-\sigma\lambda+1} \tag{15.1}$$

对于任意大的 $Q \geq 1$ 值（分别对于所有充分大的 $Q \geq 1$值），这些不等式都有非零解 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3$。除指数 $Q$ 中加了常数 1 外，这些本质上就是通常意义上对 $\boldsymbol{\xi}$ 的加权逼近指数，例如 [2] 中的定义。因此，我们也可以将 $\lambda_\sigma(\boldsymbol{\xi})$等价地定义为所有满足以下条件的 $\lambda > 0$ 的上确界：

$$|\xi_1 - x_1/x_0| \leq x_0^{-\lambda} \quad \text{and} \quad |\xi_2 - x_2/x_0| \leq x_0^{-\sigma\lambda}$$

对于无穷多个 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3$ 满足 $x_0 > 0$。这一修改还使得通过以下结果处理这些指数更加容易。

**引理 15.1.** 对于上述的 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\sigma$，有

$$\lambda_\sigma(\boldsymbol{\xi})^{-1} = \liminf_{q\to\infty} \frac{L_{\boldsymbol{\xi},1}(q, \sigma q)}{q} \quad \textit{and} \quad \widehat{\lambda}_\sigma(\boldsymbol{\xi})^{-1} = \limsup_{q\to\infty} \frac{L_{\boldsymbol{\xi},1}(q, \sigma q)}{q}.$$

证明。对于满足 $q \geq 0$的 $Q = e^q$，(15.1) 在 $\mathbb{Z}^3$ 中存在非零解的条件等价于要求 $L_{\boldsymbol{\xi},1}(\lambda q, \sigma\lambda q) \leq q$。因此，$\lambda_\sigma(\boldsymbol{\xi})$（分别地，$\lambda_\sigma(\boldsymbol{\xi})$）也等于所有满足以下条件的 $\lambda > 0$ 的上确界：对于任意大的 $q > 0$（分别地，对于所有充分大的 $q > 0$），均有 $L_{\boldsymbol{\xi},1}(q, \sigma q)/q < 1/\lambda$；由此即得这些公式。□

我们以如下计算作为本文的结尾。

**定理 15.2**。设 $\boldsymbol{\xi} = (1、\ \xi、\ \xi^2)$ 其中 $\xi \in \mathcal{E}_m$ 为某个正整数 $m$。那么，对于每个 $\sigma \in [0, 1]$，都有$\lambda_\sigma\boldsymbol{\xi}() = 2$，并且

$$\widehat{\lambda}_\sigma(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \gamma & \textit{if } 1 - \gamma^{-4} \leq \sigma \leq 1, \\ (1 + \gamma^{-2})/\sigma & \textit{if } 5/(2\gamma^2 + 1) \leq \sigma \leq 1 - \gamma^{-4}, \\ (2\gamma^2 + 1)/(\gamma^2 + 1) & \textit{if } 1 - \gamma^{-3} \leq \sigma \leq 5/(2\gamma^2 + 1). \end{cases} \tag{15.2}$$

证明。设 $\sigma \in [0,1]$。由于 $\xi$ 是劣可逼近的，当 $Q$ 足够大时，(15.1) 对于 $\xi_1 = \xi$ 和 $\lambda > 2$ 没有非零解 $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3$。另一方面，由于 $\xi \in \mathcal{E}_m$，第 3.6 节的条件 (E1)–(E3) 适用，并且对于每个 $i \geq 1$，可得 $\|(\xi, -1)\mathbf{x}_i\| \asymp \|\mathbf{x}_i\|^{-1}$。因此，对于当前点 $\boldsymbol{\xi}$ 以及任意给定的满足 $0 < \lambda < 2$ 的 $\lambda$，点 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ 满足 (15.1)，其中对于每个足够大的 $i$都有$Q = \|\mathbf{x}_i\|$。这表明 $\lambda_\sigma(\boldsymbol{\xi}) = 2$。

取定定理 3.3 中的 $\rho$，由引理 15.1 可得

$$\widehat{\lambda}_\sigma(\boldsymbol{\xi})^{-1} = \limsup_{q\to\infty} \frac{\rho P_1(\rho^{-1}q, \sigma\rho^{-1}q)}{q} = \limsup_{q\to\infty} \frac{P_1(q,\sigma q)}{q},$$

thus

$$\widehat{\lambda}_\sigma(\boldsymbol{\xi})^{-1} = \limsup_{k\to\infty} \bar{\varphi}_k(\sigma) \quad \text{where} \quad \bar{\varphi}_k(\sigma) = \max\{P_1(q,\sigma q)/q\,;\, 2F_k \leq q \leq 2F_{k+1}\}.$$

设 $k \geq 5$ 为任意大的整数。为估计 $\bar{\varphi}_k(\sigma)$，令

$$\mathcal{R} = \mathrm{Cell}(w_k, w_k w_{k-4}, w_k w_{k-2}) \in S_{k-2} \quad \text{and} \quad \mathcal{R}' = \mathrm{Cell}(w_k, w_k w_{k-2}, w_{k+1}) \in S_{k-1}.$$

我们将由点$\mathbf{q} = (q_1, q_2)$构成的 $\mathcal{R}$ 的子集分别记为 $\mathcal{R}_1$、$\mathcal{R}_2$ 和 $\mathcal{R}_3$，其中$P_1(\mathbf{q})$分别由 $q_1 - F_k$、$q_2 - F_{k-2}$和 $F_k + F_{k-2}$给出。正如命题 7.1 之后所述，这些是具有公共顶点$\mathbf{r}$的可容许多边形，并且它们构成 $\mathcal{R}$的一个划分，如图 10 所示。类似地，我们分别将 $\mathcal{R}'_1$、$\mathcal{R}'_2$ 和

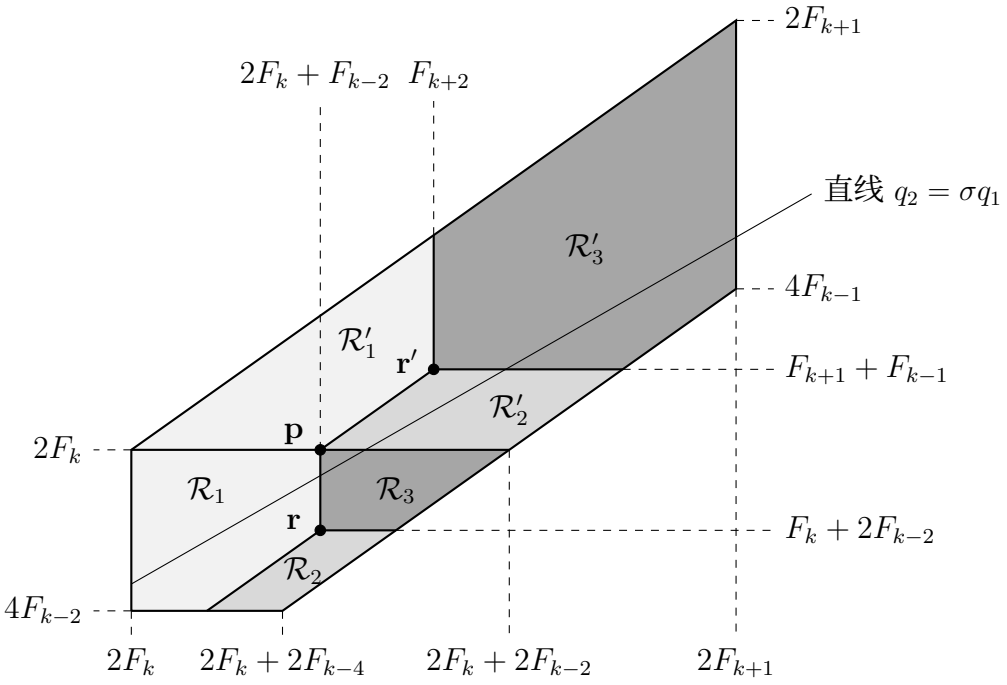



FIGURE 10. $P_1$ 在单元$(w_k, w_k w_{k-4}, w_k w_{k-2})$ ∪ 单元$(w_k, w_k w_{k-2}, w_{k+1})$

$\mathcal{R}'_3$ $\mathcal{R}'$ 的子集，其中 $P_1(\mathbf{q})$分别由 $q_1 - F_k$、$q_2 - F_{k-1}$ 和 $F_{k+1}$给出，并且我们用$\mathbf{r}'$ 表示这些多边形的公共顶点。我们还将$\mathbf{p}$定义为 $\mathcal{R}$上边的中点。对每个$\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathcal{A}(\epsilon)$设定 $\mu(\mathbf{q}) = q_2/q_1$ 后，我们得到

$$\mu(\mathbf{r}') = \frac{F_{k+1} + F_{k-1}}{F_{k+2}} > \mu(\mathbf{p}) = \frac{2F_k}{2F_k + F_{k-2}} > \mu := \max\left\{\frac{2F_{k-2}}{F_k}, \frac{2F_{k-1}}{F_{k+1}}\right\} > \mu(\mathbf{r})$$

对每个足够大的 $k$。当 $\sigma \geq \mu$时，直线 $q_2 = \sigma q_1$ 与 $\mathcal{R}$的左侧竖边以及 $\mathcal{R}'$的右侧竖边相交。在此之间，它始终位于 $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$内。当这条直线穿过区域 $\mathcal{R}_1$、 $\mathcal{R}'_1$ 或 $\mathcal{R}'_2$时，比值 $P_1(q, \sigma q)$ $/q$ 增大。当它穿过 $\mathcal{R}_3$ 或 $\mathcal{R}'_3$时，同一比值减小。因此，该比值在直线与 $\mathcal{R}_3$ 的左侧竖边、或 $\mathcal{R}'_3$ 的左侧竖边、或 $\mathcal{R}'_3$的水平底边相交的点处达到最大。由于 $P_1$ 在 $\mathcal{R}_3$ 上为等于 $F_k + F_{k-2}$ 的常数，且在 $\mathcal{R}'_3$上为等于 $F_{k+1}$ 的常数，我们推出

$$\bar{\varphi}_k(\sigma) = \begin{cases} \dfrac{F_{k+1}}{F_{k+2}} & \text{if } \mu(\mathbf{r}') \leq \sigma \leq 1, \\ \dfrac{F_{k+1}\sigma}{F_{k+1} + F_{k-1}} & \text{if } \mu(\mathbf{p}) \leq \sigma \leq \mu(\mathbf{r}'), \\ \max\left\{ \dfrac{F_k + F_{k-2}}{2F_k + F_{k-2}}, \dfrac{F_{k+1}\sigma}{F_{k+1} + F_{k-1}} \right\} & \text{if } \mu \leq \sigma \leq \mu(\mathbf{p}). \end{cases}$$

令 $k$ 趋于无穷，我们推导出

$$\widehat{\lambda}_\sigma(\boldsymbol{\xi})^{-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma} & \text{if } \dfrac{\gamma^2+1}{\gamma^3} \leq \sigma \leq 1, \\ \dfrac{\gamma^2\sigma}{\gamma^2+1} & \text{if } \dfrac{2\gamma^2}{2\gamma^2+1} \leq \sigma \leq \dfrac{\gamma^2+1}{\gamma^3}, \\ \max\left\{ \dfrac{\gamma^2+1}{2\gamma^2+1}, \dfrac{\gamma^2\sigma}{\gamma^2+1} \right\} & \text{if } \dfrac{2}{\gamma^2} \leq \sigma \leq \dfrac{2\gamma^2}{2\gamma^2+1}, \end{cases}$$

这可改写为 (15.2)。 □

$\widehat{\ }$经过进一步推导，同样的方法可以计算任意给定$\sigma \in ]1/2, 1]$对应的 $\lambda_\sigma(\boldsymbol{\xi})$。对于 $\sigma \in ]0, 1/2]$，引理 2.3 可直接得出 $\widehat{\lambda}_\sigma(\boldsymbol{\xi}) = \sigma^{-1}$（在 (15.1) 中取 $\mathbf{x} = (0,0,1)$）。

致谢。 本文内容曾在2025年6月于约克大学举行的“丢番图逼近及相关领域”会议上作报告。作者感谢 Victor Beresnevich 和所有组织者的邀请。他还感谢 Anthony Po¨els 和 Nicolas de Saxc´e 提供的宝贵意见。

## References

[1] H. Davenport 和 W. M. Schmidt，以代数整数逼近实数。《算术学报》**15**（1969年），393–416。[2] O. N. German，数的多参数几何学及其在分裂型转移定理中的应用。《数学月刊》**197**（2022年），579–606。[3] P. M. Gruber 和 C. G. Lekkerkerker，数的几何，North-Holland，1987年。[4] D. Roy，以三次代数整数逼近实数 I。《伦敦数学会会刊》**88**（2004年），42–62。[5] D. Roy，以三次代数整数逼近实数 II。《数学年刊》**158**（2003年），1081–1087。[6] D. Roy，论一类数的连分数展开。载于：丢番图逼近，*Wolfgang Schmidt*纪念文集，《数学进展》**16**，编者：H. P. Schlickewei、K. Schmidt 和 R. Tichy，施普林格出版社，2008年，347–361。[7] D. Roy，马尔可夫–拉格朗日谱与极值数。《数学学报》**206**（2011年），325–362。[8] D. Roy，构造实现 Wolfgang Schmidt 和 Leonard Summerer 正规系统的点，《波尔多数论杂志》´**27**（2015年），591–603。

[9] D. Roy，论 Schmidt 和 Summerer 的参数数的几何，《数学年刊》**182**（2015年），739–786。[10] W. M. Schmidt，丢番图逼近，《数学讲义》，第785卷，施普林格出版社，1980年。[11] W. M. Schmidt，论参数数的几何。《算术学报》**195**（2020年），383–414。[12] W. M. Schmidt 和 L. Summerer，参数数的几何及其应用。《算术学报》**140**（2009年），67–91。[13] W. M. Schmidt 和 L. Summerer，丢番图逼近与参数数的几何，《数学月刊》**169**（2013年），51–104。

Département de Mathématiques, Université d'Ottawa, 150 Louis Pasteur, Ottawa, On-tario K1N 6N5, Canada电子邮件地址：droy@uottawa.ca