arXiv:2602.01492v1 [q-bio.PE] 2 Feb 2026

从离散到连续：从众者、非从众者与模仿者的混合种群

Azadeh Aghaeeyan [a] Pouria Ramazi [b]

[a]数学与统计系，布鲁克大学，加拿大。[b]生物科学系与数学与统计系，卡尔加里大学，加拿大。

摘要

在双策略决策问题中，个体常常模仿收入最高者，或选择常见策略或稀有策略。从常见策略中获益的个体是从众者，而通过选择较不常见策略获利的个体则称为非从众者。在由模仿者、从众者和非从众者组成的有限、离散、异质种群中，两种策略的种群比例可能会出现持续波动。这些波动如何随种群规模增大而演化曾是一个未决问题，本文对此加以探讨。我们证明，描述离散种群动态的马尔可夫链族构成针对某一微分包含——即连续时间动力学——的广义随机逼近过程。此外，我们证明连续时间动力学总会达到均衡。随后，借助随机逼近理论的结果，我们表明，当种群规模趋于无穷时，种群中两种策略比例的波动幅度以概率一趋于零。我们的结果表明，在由这三种类型组成的大规模充分混合种群中，尤其是当模仿者追随收入最高者时，大规模持续波动不太可能出现。

1 引言

许多日常决策，例如是否追随时尚潮流、加入志愿者团体或接种流感疫苗，都涉及在两种竞争策略 [10,23,39]之间做出选择。模仿 和最优反应 是常用于解释个体决策的两种主要规则，无论是在涉及两种策略 [8,11,26]的情境中，还是在涉及多种策略 [6,13,27,28]的情境中。在模仿更新规则的一种形式下，个体会模仿收益最高的同伴所采用的策略；而根据最优反应更新规则，个体会选择使自身收益最大化的策略。具体而言，从众者 最佳响应者受益于

版权 may be 已转让 没有 注意

已被种群中超过其阈值比例的个体采用的策略。另一方面，非从众者 最佳响应者偏好相对于其阈值而言较少见的策略 [3, 12, 20, 22]。这些行为分别由线性阈值模型 和反阈值模型刻画。

人们投入了大量精力，研究在结构化环境和充分混合环境中，仅由最佳响应者 [4, 5, 17, 37, 40] 或仅由模仿者 [13, 34], 组成的种群的渐近行为。此外，还有若干研究提出了控制机制，以引导种群达到期望的策略分布 [32, 38, 41]。

相比之下，据我们所知，研究同时包含最佳响应者和模仿者、且收益矩阵几乎不受限制的种群的工作寥寥无几。在[24], 中，研究者建立了由模仿者、从众者和非从众者组成的有限离散异质种群的动态模型，并刻画了其均衡。研究表明，从长远来看，种群可能稳定在某个均衡状态，此时每个个体都对自己的策略感到满意；也可能出现持续波动，此时一些个体不断重新采用自己的策略，导致采用两种策略之一的玩家所占种群比例发生波动。

但是，当种群规模趋于无穷大时，这样的种群会呈现出怎样的渐近行为？为回答这一问题，我们采用与 [1, 2] 类似的方法：*(i)*证明离散种群动态构成一个马尔可夫链；*(ii)* 证明以种群规模为索引的马尔可夫链构成一个针对微分包含的广义随机逼近过程；以及*(iii)* 分析相应的微分包含，以推断其收敛性质。为此，我们扩展状态空间，将模仿者子群体的动态纳入其中。此外，为了有效地刻画模仿者的动态，受 [15], 启发，我们引入最大效用和最大活跃效用的概念。模仿者、从众者和反从众者共存会产生新的均衡，具体而言，是连续统平衡点。

在 [2], 中，我们通过分析一个标量微分包含——抽象动力学——来研究该微分包含。抽象动力学等价于两种策略（策略 A）之一的种群比例动态。本文采用类似的分析框架，但由于纳入了模仿者，存在显著差异，因此抽象动力学不再与 A 玩家比例的动态直接对应。因此，从边界点出发的轨迹需要单独分析。 [1], 研究了一个相关情形，其中模仿者所处的环境具有对角反协调收益矩阵；该研究通过对种群分布施加限制性条件来处理边界点。相比之下，我们当前的模型更加灵活，收益矩阵和种群分布几乎可以任意设定。

种群的长期行为——轨迹是收敛到均衡，还是呈现持续波动——已在演化博弈论和博弈学习领域得到广泛研究。这些研究大多采用同质修正协议，例如最优反应、模仿及其变体，并考察其确定性极限；例如参见 [5, 14, 34]。与此同时，从众（阈值）行为和非从众／反叛（反阈值）行为

是社会影响模型的核心内容 [16,19]。然而，现有的大多数渐近刻画都聚焦于所有个体采用相同决策规则的种群（例如 [37,40]），或仅研究有限几种异质混合情形，例如不含模仿者的从众者与非从众者混合种群（例如 [3,18]）。在此背景下，我们的贡献有三点。(i) 我们推导出由模仿者、从众者和非从众者组成的混合群体的离散动力学所对应的微分包含。我们刻画了其均衡，包括新发现的混合型／非混合型非从众驱动均衡类别，以及混合从众者驱动／非混合从众者驱动均衡类别（引理2）。由于排除了整数阈值，这些类别未出现在 [24] 中；而在混合情形下，它们构成连续统，而非孤立点。(ii) 我们分析微分包含的渐近行为，并证明解轨迹总是收敛到这些均衡（定理4）。(iii) 我们证明，随着种群规模趋于无穷， A-玩家比例的持续波动幅度几乎必然趋于零（定理 3 和推论 1）。

记号。

用 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$表示实数和非负整数集合。令 $\mathbb{Z}^n$ 和 $\mathbb{R}^n$分别表示元素为整数和实数的 $n \times 1$ 维向量集合。对于正整数 N，记号 ${}^{1}\mathsf{N}\mathbb{Z}^n$ 表示大小为 n 且分量为有理数、其分母均可被 N 整除的向量集合。集合用花体字母表示，集合 $\mathcal{X}$ 的边界记为 $\partial\mathcal{X}$. 。向量用粗体表示，x_p 表示向量 $\boldsymbol{x}$. 的第 p^{th} 个元素。对于正整数 k，记号 $[k]$ 表示 $\{1, 2, \ldots, k\}$。对于实数（或逻辑变量） x，若 $x > 0$ （或 x 为 TRUE），则 $\mathbf{1}(x)$ 等于一；否则等于 $-\infty$ 。随机变量序列 X_0、 X_1、.....记为 $\langle X_k \rangle_{k=0}^{\infty}$. 。对应记为 $\rightrightarrows$. 。符号函数记为 sgn(x)：参数为正时返回一，为负时返回负一，否则返回零。对于两个策略 x 和 y， x、 y $\in \{\mathtt{A}, \mathtt{B}\}$，若 x 和 y 的值相同，则称陈述 x == y 为 TRUE ； 否则为 FALSE 。表 1 总结了全文中最常用的记号。

2 问题表述

我们研究一个充分混合的种群的长期行为，其中个体逐一被激活；激活后，个体与整个种群进行双策略博弈，并获得相应的收益。该博弈是一个矩阵博弈，也就是说，所有可能的成对结果的收益都可以用一个矩阵来概括。个体的收益矩阵各不相同，且分为最佳响应者或模仿者。接下来我们给出形式化模型。

考虑一个由 N 个个体组成的充分混合种群，这些个体标记为 1、2、.....、N，随时间进行双策略博弈 $t \in {}^{1}\mathsf{N}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$，其索引为 k，其中 $k = \mathsf{N}t$，并相应地获得收益。 2×2 矩阵总结了个体 i 对阵另一名个体时可能获得的四种收益增益：

表 **1符号表**

$\mathtt{A}$, $\mathtt{B}$	博弈中的可能的策略
$\mathtt{s}^i$	个体 i 的策略
a^i （分别为 c^i）	个体 i 选择策略A（分别为B）对抗A策略玩家时的收益
b^i （分别为 d^i）	个体 i 对阵B策略玩家时采取策略A（分别为策略B）的收益
$\mathtt{u}^{\mathtt{A},\,i}(x)$（分别为$\mathtt{u}^{\mathtt{B},\,i}(x)$）	个体 i 采取策略A（分别为策略B）的效用
τ^i	个体 i的阈值
τ_i' （分别为 τ_i）	从众者（分别为非从众者）类型 i的阈值
$\mathtt{p}'$ （分别为 $\mathtt{p}$）	（从众者）非从众类型的总数
$\mathtt{P}$	$\mathtt{p}$ +$\mathtt{p}'$
ρ_i' （分别为 ρ_i）	从众者（非从众者）类型 i 的种群比例
ζ_i' （分别为 ζ_i）	与从众者共享收益矩阵的模仿者种群比例， 从众者（分别为非从众者）类型 i
$\boldsymbol{x}$	种群状态
$u_i^{\mathtt{A}}(x)$（分别为 $u_i^{\mathtt{B}}(x)$）	类型 i 选择策略A（分别为策略B）的效用
$\mathbf{X}^{\frac{1}{\mathtt{N}}}$	规模为N的种群的马尔可夫链状态
$\mathcal{T}$	阈值集合
$\mathcal{C}$	效用交点集合
$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{ss}$	连续时间群体动力学的状态空间

$$\pi^i = \begin{array}{c} \\ \mathtt{A} \\ \mathtt{B} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathtt{A} & \mathtt{B} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a^i & b^i \\ c^i & d^i \end{pmatrix} \end{array}$$

其中， a^i、 b^i、 c^i、 $d^i \in \mathbb{R}$ 以及 a^i和 b^i（分别为 c^i和 d^i）是个体 i分别采用策略 $\mathtt{A}$（分别为 $\mathtt{B}$）对阵一名 $\mathtt{A}$玩家和一名 $\mathtt{B}$玩家时获得的收益。在充分混合种群中，每个个体都会与所有其他个体（包括自身）进行博弈，并获得累积收益。当采用策略-$\mathtt{A}$ 的玩家所占的种群比例为 x时，个体 i的平均收益或效用 为

$$\begin{aligned} \mathtt{u}^{\mathtt{A},i}(k) &= \Big(1,\,0\Big)\,\pi^i\,\Big(x(k),\,1-x(k)\Big)^\top \\ &= (a^i - b^i)x(k) + b^i \end{aligned}$$

如果她采用策略 $\mathtt{A}$，并且

$$\begin{aligned} \mathtt{u}^{\mathtt{B},i}(k) &= \Big(0,\,1\Big)\,\pi^i\,\Big(x(k),\,1-x(k)\Big)^\top \\ &= (c^i - d^i)x(k) + d^i \end{aligned}$$

如果她采用策略 $\mathtt{B}$。在每个时间索引 k，只有一个个体会变为活跃状态，并可以修改自己的策略。

每个个体要么是模仿者、从众者 （也称为协调者），要么是非从众者 （也称为反协调者）。模仿者根据模仿更新规则更新自己的策略，即转而采用收入最高者所采用的策略。更具体地说，在时间索引 $k+1$，时间索引 k 处活跃的模仿型个体 i 的策略将是

$$\mathtt{s}^i(k+1)=\begin{cases}\mathtt{A},\ \text{if } \max\limits_{j\in\mathtt{N}}\mathtt{u}^{\mathtt{A},j}(k)\mathtt{1}\Big(\mathtt{s}^j(k)==\mathtt{A}\Big)\\ \quad\geq \max\limits_{j\in\mathtt{N}}\mathtt{u}^{\mathtt{B},j}(k)\mathtt{1}\Big(\mathtt{s}^j(k)==\mathtt{B}\Big),\\ \mathtt{B},\ \text{otherwise},\end{cases} \tag{1}$$

其中， $\mathtt{s}^j(k)$ 是个体 j 在时间索引 k. 时采用的策略。模仿更新规则 (1) 规定，任何活跃的模仿者采用的策略都相同，而不受其收益矩阵影响。根据更新规则 (1)，模仿者会采用当前收入最高者所用的策略。我们将此视为成功／收益偏向社会学习的一种简约模型：当个体无法可靠地评估自身的收益函数时，可能会利用可观察到的成功线索来决定模仿谁。这种“模仿成功者”的行为已在人类 [21]，和其他动物 [7, 9] 中得到记录，而“模仿最佳者”是演化博弈与空间博弈模型中的一种标准更新规则 [30]。

获得修正机会时，从众者和非从众者都会根据当前状态切换到效用最大化的策略。也就是说，在时间索引 k 时，活跃个体 i（从众者或非从众者）若满足 $\mathtt{u}^{\mathtt{B},i}(x)$ 不小于 $\mathtt{u}^{\mathtt{B},i}(x)$，就选择策略 A ；否则选择策略 B。如果个体 i 是从众者，那么 $a^i+d^i-b^i-c^i>0$，其更新规则变为

$$\mathtt{s}^i(k+1)=\begin{cases}\mathtt{A}, & \text{if } x(k)\geq\tau^i,\\ \mathtt{B}, & \text{otherwise},\end{cases} \tag{2}$$

其中 $\tau^i\triangleq(d^i-b^i)/(a^i+d^i-b^i-c^i)$ 是个体 i 的阈值。因此，从众者会根据自己感知到的流行程度，采用常见策略；而感知到的流行程度由其阈值决定。如果 $a^i+d^i-b^i-c^i<0$，个体 i 则是非从众者，并根据以下更新规则选择不常见策略：

$$\mathtt{s}^i(k+1)=\begin{cases}\mathtt{A}, & \text{if } x(k)\leq\tau^i,\\ \mathtt{B}, & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{3}$$

如果 $a^i+d^i-b^i-c^i=0$，个体 i 在 $b^i\geq d^i$时总是一个 A-玩家（相应地，在 $b^i<d^i$时总是一个 B-玩家）。共享相同收益矩阵，进而共享相同阈值的从众者（相应地，非从众者）构成一个类型。我们总共假设有 $\mathtt{p}'$（相应地，$\mathtt{p}$）种不同且非空的从众类型（相应地，非从众类型）。从众类型按阈值递增的顺序标记为 1，.....，$\mathtt{p}'$，即 $\tau'_1<\tau'_2<\cdots<\tau'_{\mathtt{p}'}$；非从众类型按阈值递减的顺序标记为 1，.....，$\mathtt{p}$，即 $\tau_1>\tau_2>\cdots>\tau_{\mathtt{p}}$。这里，$\tau'_p$（相应地，$\tau_p$）表示与第 p^{th} 种从众类型（相应地，非从众类型）相关联的阈值。我们假设各类型的阈值互不相同，且严格介于零和一之间，并用 $\mathcal{T}=\{\tau_1,\ldots,\tau_{\mathtt{p}},\tau'_1,\ldots,\tau'_{\mathtt{p}'}\}$ 表示所有阈值的集合。我们假设，对于每个模仿者，恰好存在一种从众或非从众类型与其共享相同的收益矩阵。

因此，种群的异质性由总计 2P 种类型上的种群比例分布来体现，其中 $\mathsf{P} = (\mathsf{p} + \mathsf{p}'$，如下

$$\boldsymbol{\theta} = (\underbrace{\zeta_1, \ldots, \zeta_{\mathsf{p}}, \zeta'_{\mathsf{p}'}, \ldots, \zeta'_1}_{\mathsf{P}\text{ imitative types}}, \underbrace{\rho_1, \ldots, \rho_{\mathsf{p}}}_{\substack{\mathsf{p}\text{ nonconformist}\\ \text{types}}}, \underbrace{\rho'_{\mathsf{p}'}, \ldots, \rho'_1}_{\substack{\mathsf{p}'\text{ conformist}\\ \text{types}}})^\top,$$

其中，ζ'_j（分别为 ζ_j）表示与类型为 j 从众者（分别为非从众者）共享收益矩阵的模仿者数量与种群规模 N 之比。此外，ρ'_j（分别为 ρ_j）表示从众者（分别为非从众者）类型j 中的个体数量与种群规模 N 之比。为方便进行向量索引，对于 $\mathsf{p} < j \leq \mathsf{P}$，我们定义 $\zeta_j = \zeta'_{\mathsf{P}+1-j}$ 和 $\rho_j = \rho'_{\mathsf{P}+1-j}$。例如，$\theta_{2\mathsf{P}+1-p} = \rho_{\mathsf{P}+1-p} = \rho'_p$ 表示从众者类型 p的种群比例。类型为 p、$p \in \mathsf{P}$ 的个体选择 A（分别为 B）时的效用记为 $u_i^{\mathsf{A}}(x)$（分别为 $u_i^{\mathsf{B}}(x)$）。在人口层面，我们关注的是每种类型内部的集体行为，而非个体层面的行为。随后，我们将种群状态 $\boldsymbol{x}$ 定义为一个 (2P) 维向量，其中前 P 个元素表示模仿型类型中A-玩家的分布，接下来 p 个元素表示非从众类型中的分布，最后 p′ 个元素表示从众类型中的分布。等价地，

$$\boldsymbol{x} = (\underbrace{x_1, \ldots, x_{\mathsf{p}}, x_{\mathsf{p}+1}, \ldots, x_{\mathsf{P}}}_{\mathsf{P}\text{ imitative types}}, \underbrace{x_{\mathsf{P}+1}, \ldots, x_{\mathsf{P}+\mathsf{p}}}_{\substack{\mathsf{p}\text{ nonconformist}\\ \text{types}}}, \underbrace{x_{\mathsf{P}+\mathsf{p}+1}, \ldots, x_{2\mathsf{P}}}_{\substack{\mathsf{p}'\text{ conformist}\\ \text{types}}})^\top,$$

因此，所得状态空间等于 $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{ss} \cap {}^{1}{}_{\mathsf{N}}\mathbb{Z}^{2\mathsf{P}}$，其中 –

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{ss} = \prod_{j=1}^{\mathsf{p}} [0, \zeta_j] \times \prod_{j=1}^{\mathsf{p}'} [0, \zeta'_{\mathsf{p}'-j+1}] \times \prod_{j=1}^{\mathsf{p}} [0, \rho_j] \times \prod_{j=1}^{\mathsf{p}'} [0, \rho'_{\mathsf{p}'-j+1}],$$

定义 1 将最大 A-效用 和 最大 B-效用 分别定义为

$$u^{\mathsf{A}}(x) = \max_{i \in [\mathsf{P}]} u_i^{\mathsf{A}}(x), \tag{4a}$$

$$u^{\mathsf{B}}(x) = \max_{i \in [\mathsf{P}]} u_i^{\mathsf{B}}(x), \tag{4b}$$

对于 $x \in [0, 1]$。相应地，最大活跃 A-效用，$u^{\mathsf{A}}(\boldsymbol{x})$，以及最大活跃 B-效用，$u^{\mathsf{B}}(\boldsymbol{x})$，定义如下：

$$u^{\mathsf{A}}(\boldsymbol{x}) = \max_{i \in [\mathsf{P}]} \Big(u_i^{\mathsf{A}}(x) \mathbb{1}(x_i + x_{\mathsf{P}+i}) \Big), \tag{5a}$$

$$u^{\mathsf{B}}(\boldsymbol{x}) = \max_{i \in [\mathsf{P}]} \Big(u_i^{\mathsf{B}}(x) \mathbb{1}(\theta_i + \theta_{\mathsf{P}+i} - x_i - x_{\mathsf{P}+i}) \Big), \tag{5b}$$

对于 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{ss}$，且其中 $x = \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} = \sum_{p=1}^{2\mathsf{P}} x_p$.

在定义 1 中，我们滥用记号，使用相同的符号 u^{A}（分别为 u^{B}）同时表示最大 A-效用和最大活跃 A-效用（分别为 B-效用和最大活跃 B-效用）。前者定义在单位区间上，后者则定义在 $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{ss}$ 上。

如果某些个体能够获得最大 A-效用（分别为 B-效用），那么最大 A-效用（分别为 B-效用）与最大活跃 A-效用（分别为 B-效用）相等。具体而言，对于某个 $i \in [\mathrm{P}]$，若最大 A-效用（分别为 B-效用）等于 $u_i^{\mathrm{A}}(x)$（分别为 $u_i^{\mathrm{B}}(x)$），且状态 $\boldsymbol{x}$ satisfies $0 < x_i + x_{\mathrm{P}+i}$（分别为 $x_i + x_{\mathrm{P}+i} < \theta_i + \theta_{\mathrm{P}+i}$），那么最大 A-效用与最大活跃 A-效用（分别为最大 B-效用与最大活跃 B-效用）相等。还需注意，个体 $i, i \in [\mathrm{N}]$, 的效用（记为 $\mathrm{u}^{\mathrm{A},i}$，分别为 $\mathrm{u}^{\mathrm{B},i}$）与类型为 i 的个体 $i \in [\mathrm{P}]$, 的效用（记为 u_i^{A}，分别为 u_i^{B}）之间的区别。

我们将最大 A 效用与最大 B 效用的交点集合记为 $\mathcal{C}$，即，

$$\mathcal{C} = \{x \in [0,1] \mid u^{\mathrm{A}}(x) = u^{\mathrm{B}}(x)\}.$$

接下来，我们定义一些额外的记号，以便陈述结果。记号η_j' 表示阈值不大于 τ_j' 的从众者的种群比例，而 η_i 表示阈值不小于 τ_i 的非从众者的种群比例，即，

$$\eta_j' = \sum_{p=1}^{j} \rho_p', \quad \eta_i = \sum_{p=1}^{i} \rho_p,$$

其中 $j \in [\mathrm{p}']$, $i \in [\mathrm{p}]$, ，并定义 $\eta_0' = \eta_0 = \eta_{-1} = \eta_{-1}' = 0$、$\eta_{\mathrm{p}'+1}' = \eta_{\mathrm{p}'}', \eta_{\mathrm{p}+1} = \eta_{\mathrm{p}}$、$\tau_{\mathrm{p}+1} = \tau_0' = 0$ 和 $\tau_0 = \tau_{\mathrm{p}'+1}' = 1$。此外，我们将种群中模仿者所占的比例记为 ζ_0，即 $\zeta_0 = \sum_{p=1}^{\mathrm{P}} \theta_p$。

假设 1 类型比例满足

$$\forall k \in [\mathrm{p}] \cup \{0\} \forall l \in [\mathrm{p}'] \cup \{0\} \\ \Big(\{\eta_k + \eta_l', \eta_k + \eta_l' + \zeta_0\} \cap (\mathcal{T} \cup \mathcal{C}) = \varnothing\Big).$$

给定假设 1，任意组合的种群类型比例之和都不等于任何阈值，也不等于最大化 A-效用与最大化 B-效用的交点。

假设 2

$$\forall x \in \mathcal{C} \exists p \in [\mathrm{P}](x = \tau_p) \Rightarrow u^{\mathrm{A}}(x) = u_p^{\mathrm{A}}(x), u^{\mathrm{B}}(x) = u_p^{\mathrm{B}}(x).$$

根据假设 2，如果点 $x = \sum^{2\mathrm{P}} p=1\, x_p$ 是最大A-效用线与 B-效用线的交点，并且等于某个类型 $p \in \mathcal{T}$的阈值 τ_p，即 $x = \tau_p$，那么这些最大效用就是非模仿型 p（个体）的效用。换言之，如果当 x 等于某个类型的阈值时， A 和 B 都能带来最高效用，那么在 x处，其他类型获得的效用都不会高于该类型。我们进一步假设，任何 B-效用线，即 $u_i^{\mathrm{B}}(x)$、$i \in [\mathrm{P}]$, 都不会与 A-效用线，即$u_i^{\mathrm{A}}(x)$、$i \in [\mathrm{P}], $重合：

假设 3

$$\{(i,j) \in [\mathrm{P}] \times [\mathrm{P}] \mid b_i = d_j, a_i - b_i + d_j - c_j = 0\} = \varnothing.$$

状态随时间的演变刻画了种群动力学，我们称之为离散混合种群动力学。该动力学由个体的激活序列以及更新规则 (1)、(2)、(3) 决定。激活序列是由相互独立的随机变量 $\langle A_k \rangle_{k=0}^{\infty}$ 组成的序列，其中 A_k 表示时间索引 k 处的活跃个体，并且服从 $[\mathsf{N}]$, 上的均匀分布，即 $\mathbb{P}[A_k = i] = {}^{1}\!/_{\mathsf{N}}$。

种群动力学的渐近行为是什么？动力学是否会达到均衡，即每种类型中 A玩家的种群比例保持不变？否则，这意味着动力学永远不会收敛到均衡；此时，如果我们关注随时间变化的 A玩家数量，就会发现它始终不会稳定下来，而是呈现持续波动。我们知道第二种情况可能发生。但问题是，随着种群规模增大，这些波动的振幅是否会消失。

例1 考虑一个由N 个个体组成的社区，他们反复决定是否 *(i)* 继续登记/预约免费接种季节性流感疫苗（策略A），或 *(ii)* 继续未登记 （策略 B）。登记可以撤销。在登记期内，可以预约、取消预约并重新预约。因此，随时间在 A 和 B之间切换是有意义的。个体通过预约提醒获得修正机会。我们用均匀随机激活序列来模拟这些修正机会。个体分为三种行为类别：从众者、非从众者和模仿者。被激活时，从众者/非从众者应用(2)-(3)中的更新规则，分别体现对社会规范的遵从和搭便车倾向。然而，模仿者应用(1)：他们采用收入最高者当前使用的策略。我们考虑具有种群比例的P $= 4$ 种收益矩阵类型

$$\boldsymbol{\theta} = (\underbrace{0.25, 0.13, 0.14, 0.17}_{imitators}, \underbrace{0.11, 0.05, 0.03}_{nonconformists}, \underbrace{0.12}_{conformists})^{\top},$$

和效用函数

$$\begin{aligned} u_1^{\mathtt{A}}(x) &= -1.3x + 1, & u_1^{\mathtt{B}}(x) &= 2.5x - 1.3, \\ u_2^{\mathtt{A}}(x) &= -0.7x + 0.4, & u_2^{\mathtt{B}}(x) &= 1.5x - 0.3, \\ u_3^{\mathtt{A}}(x) &= -0.8x + 1, & u_3^{\mathtt{B}}(x) &= 2x + 0.2, \\ u_4^{\mathtt{A}}(x) &= 0.7, & u_4^{\mathtt{B}}(x) &= -0.556x + 0.856. \end{aligned}$$

相应的阈值为 $\tau_1 = 0.605$， $\tau_2 = 0.318$， $\tau_3 = 0.286$，以及 $\tau_1' = 0.281$。从原点开始（初始时无人登记），一个包含*100*个个体的种群，其登记比例 $x(k)$可能会出现持续波动（图*1*，面板*a*）。如果随着N增大，登记比例的波动仍持续存在，那么卫生官员就应预料到，大规模种群中的需求会存在不确定性。然而，随着种群规模增加，登记比例波动的幅度会减小（图*1*，面板*b*和*c*）。因此，现实登记数据中出现的大幅振荡，很可能反映了外生驱动因素（例如发病率冲击、政策变化或供应中断），而非仅仅是内生社会学习所致。

在例1中，波动的幅度会随着种群规模的增大而减小。这一观察是否能够推广到其他混合群体，仍有待研究。随机

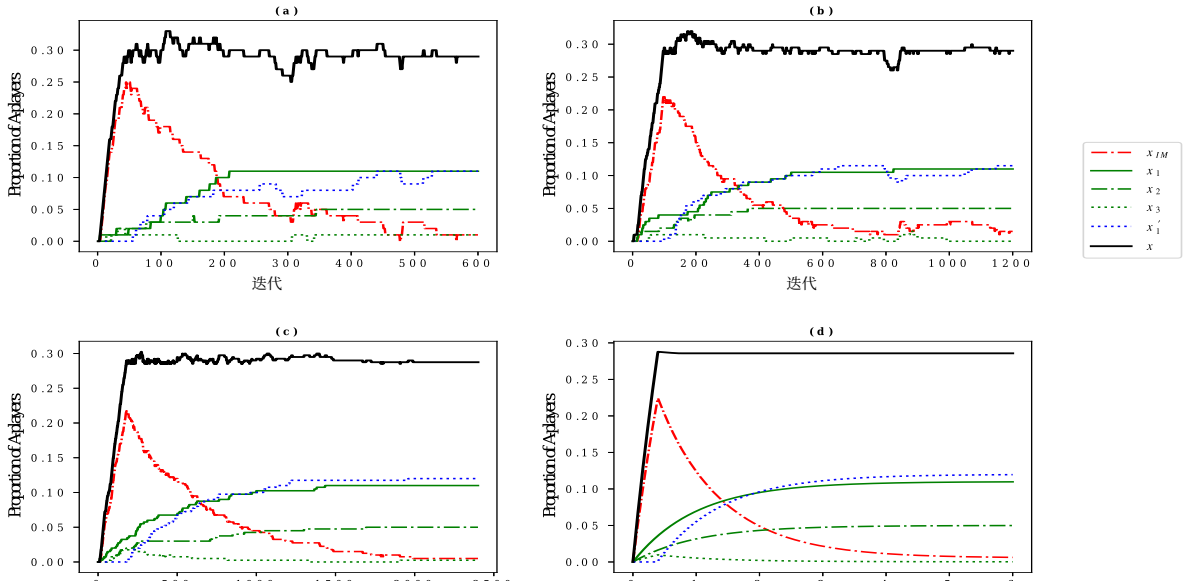

图1. **例1中三种种群规模下离散混合种群动力学的演化，以及连续时间动力学的演化。**每个面板均展示种群比例随时间的演化，其中 x_{IM} 表示采用策略A的模仿者比例； x_i 表示 $i = 1$、2、3（分别为 x_1'）中采用策略A的非从众者（分别为从众者）比例， i表示类型，且 x 表示A类玩家的比例。面板(a)对应600个时间步内的N $= 100$ 个单位；面板(b)和(c)分别对应N等于200和400的情况。随着N增大， x （黑色曲线）的波动幅度减小。面板(d)展示了相应连续时间群体动力学的演化。

逼近理论有助于揭示种群规模趋于无穷大时离散动力学的渐近行为。我们先介绍一些背景和定义。

3 背景

一个微分包含定义在 $\mathbb{R}^n$ 上，其定义为

$$\dot{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}), \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ ： $\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ 是一个集值映射。若点 $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ 满足$\boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}^*)$，则称其为均衡0 $\in$。从$\boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x})$中选取的一个选取是一个单值映射 $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^n$，满足 $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x})$，对所有 $\boldsymbol{x}$ 属于 $\mathbb{R}^n$ [35]均成立。

若集合 $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ 在微分包含$\boldsymbol{\mathcal{V}}$ 下相对于集合$\boldsymbol{\mathcal{U}}$ 是吸引的，则对集合$\boldsymbol{\mathcal{M}}$ 的每个邻域$\boldsymbol{\mathcal{M}}^\epsilon$ ，从$\boldsymbol{\mathcal{U}}$ 中某一点出发的每条解轨迹都会在有限时间 [29]后进入并保持在$\boldsymbol{\mathcal{M}}^\epsilon$ 中。所有此类集合 $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ 的并集构成$\boldsymbol{\mathcal{M}}$ [29]的吸引域。

以下定义 定义采用自 [34]。闭凸集的切锥 t

点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 处的$\boldsymbol{\mathcal{X}} \subseteq \mathbb{R}^n$，记为 $\mathrm{TC}(\boldsymbol{x})$，定义为

$$\mathrm{TC}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{cl}\left(\{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{z} = \alpha(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}), \alpha \geq 0, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\}\right),$$

其中 cl 表示集合的闭包。$\mathbb{R}^n$ 到 X 的投影定义为 $\Pi_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$：$\mathbb{R}^n \to \mathrm{X}$，其中 $\Pi_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(\boldsymbol{x}) = \arg\min_{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|$. 假设集值映射 V：$\mathrm{X} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ 满足：(i) $\mathrm{V}(\boldsymbol{x}) \subseteq \mathrm{TC}(\boldsymbol{x})$，(ii) $\mathrm{V}(\boldsymbol{x})$ 非空、凸且有界，并且 (iii) V 的图定义为 $\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \in \mathrm{V}(\boldsymbol{x})\}$，是闭的。通过令 $\mathrm{V}(\boldsymbol{x}) := \mathrm{V}(\Pi_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(\boldsymbol{x}))$ for $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{X}$，将 V 扩展到 $\mathbb{R}^n$。则对于该扩展后的 V，微分包含（6）是良好的上半连续的，并且集合 X 是正向不变的 [34,定理 6.A.2]。本文始终采用这种基于投影的扩展。以下定义引自 [33]。我们将从 $\boldsymbol{x}_0$开始的微分包含 $\dot{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{V}(\boldsymbol{x})$ 的解集记为 $\mathrm{T}_{\boldsymbol{x}_0}(\cdot)$。集合 $\mathrm{T}_{\boldsymbol{x}_0}$ 是从 $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathrm{X}$ 的连续映射空间的子集。微分包含 $\dot{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{V}(\boldsymbol{x})$ 的所有解的集合记为 T_{Φ}。由该微分包含诱导的集值动力系统定义为 $\boldsymbol{\Phi}: \mathbb{R}_+ \times \mathrm{X} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$，其中 $\boldsymbol{\Phi}_t(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x}(t) \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{x}_0}\}$。点 $\boldsymbol{x}_0$ 的极限集记为 $\mathrm{L}(\boldsymbol{x}_0)$，其定义为 $\bigcup_{\boldsymbol{y} \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{x}_0}} \bigcap_{t \geq 0} \mathrm{cl}(\boldsymbol{y}[t, \infty))$。回归点的集合为 $\{\boldsymbol{x}_0 \mid \boldsymbol{x}_0 \in \mathrm{L}(\boldsymbol{x}_0)\}$，而回归点集合的闭包称为 $\boldsymbol{\Phi}$ 的比尔霍夫中心。为简洁起见，我们省略“由.....诱导的动力系统”。

定义 2（[33]）对于一个趋于零的正值序列 ϵ，设 $\mathbf{U}^\epsilon = \langle \mathbf{U}_k^\epsilon \rangle_{k=0}^\infty$ 和 $\langle \boldsymbol{\mathcal{V}}^\epsilon \rangle$ 分别为随机变量序列和集值映射族。考虑紧凸状态空间 $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ 上的良好上半连续微分包含 $\dot{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x})$。若序列 $\mathbf{X}^\epsilon = \langle \mathbf{X}_k^\epsilon \rangle_{k=0}^\infty$ 满足以下条件，则称其为该微分包含的广义随机逼近过程（GSAP）：

(1) 对所有 $k \geq 0$，$\mathbf{X}_k^\epsilon \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$；*(2)* $\mathbf{X}_{k+1}^\epsilon - \mathbf{X}_k^\epsilon - \epsilon \mathbf{U}_{k+1}^\epsilon \in \epsilon \boldsymbol{\mathcal{V}}^\epsilon(\mathbf{X}_k^\epsilon)$；*(3)* $\forall \delta > 0 \exists \epsilon_0 > 0\ \forall \epsilon \leq \epsilon_0 \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}^\epsilon(\boldsymbol{x}) \subset \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \boldsymbol{y} : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| < \delta, \inf_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{y})} |\boldsymbol{z} - \boldsymbol{v}| < \delta\},$$

(4) 对所有 $T > 0$ 和所有 $\alpha > 0$，以下条件关于 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ 一致成立：

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mathbb{P}\left[\max_{k \leq \frac{T}{\epsilon}} \left|\sum_{i=1}^k \epsilon \mathbf{U}_i^\epsilon\right| > \alpha \mid \mathbf{X}_0^\epsilon = \boldsymbol{x}\right] = 0.$$

[1]对于定义在$\boldsymbol{\mathcal{X}}$上的离散时间序列 $\langle \mathbf{X}_k^{\mathrm{N}} \rangle_{k=0}^\infty$，我们定义一个与之对应的仿射插值过程 $\bar{\boldsymbol{X}}^{\frac{1}{\mathrm{N}}}$，其定义在连续时间 t 上，具体如下

$$\bar{\boldsymbol{X}}^{\frac{1}{\mathrm{N}}}(t) = \mathbf{X}_{l(t)}^{\frac{1}{\mathrm{N}}} + \left(\mathrm{N}t - l(t)\right)\left(\mathbf{X}_{l(t)+1}^{\frac{1}{\mathrm{N}}} - \mathbf{X}_{l(t)}^{\frac{1}{\mathrm{N}}}\right),$$

其中 $l(t) = \lfloor \mathrm{N}t \rfloor$。下一个定理阐述了随着种群规模趋于无穷，GSAP 的有限时域演化与相应微分包含之间的关系。

定理 1 *[33]* 设 $\mathbf{X}^\epsilon$ 是微分包含 $\dot{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x})$ 的一族 *GSAP*。则

对于任意 $T>0$ 和任意 $\alpha>0$，都有

$$\lim_{\frac{1}{\mathsf{N}}\to 0}\mathbb{P}\left[\inf_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\Phi}}\sup_{0\le s\le T}\left|\bar{\boldsymbol{X}}^{\frac{1}{\mathsf{N}}}(s)-\boldsymbol{x}(s)\right|\ge\alpha\;\middle|\;\bar{\boldsymbol{X}}^{\frac{1}{\mathsf{N}}}(0)=\boldsymbol{x}_0\right]=0$$

在 $\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{\mathcal{X}}$ 中一致收敛。

关于渐近行为，在 [33], 中已证明，若对每个 $\epsilon>0$，GSAP$\langle\mathbf{X}_k^{\epsilon}\rangle_{k=0}^{\infty}$ 都是马尔可夫链，那么当 ϵ 趋于零时，平稳测度的极限点在弱收敛拓扑下的支撑将包含于微分包含 $\dot{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x})$。下述定理是 [33, 定理 3.5 和推论 3.9] 的结果。

定理2（ [2]） 对于微分包含 $\dot{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x})$，设 $\mathbf{X}^{\epsilon}$ 是具有不变测度 μ^{ϵ} 的 *GSAP* 马尔可夫链，其对应于趋于零序列 ϵ。那么，对于微分包含的比尔霍夫中心的任意开邻域$\boldsymbol{\mathcal{O}}$，有 极限$_{\epsilon\to 0}\,\mu^{\epsilon}(\boldsymbol{\mathcal{O}})=1$.

4 与连续时间动力学的联系

根据定理2，如果*(i)* 离散混合种群动力学构成一个马尔可夫链，并且*(ii)* 以种群规模为索引的马尔可夫链族，是某个良好的上半连续微分包含的 GSAP，那么当种群规模趋于无穷时，离散混合种群动力学的渐近行为可由该微分包含的渐近行为揭示。平均动态确实是从这个微分包含中选取出来的。

为证明离散混合种群动力学构成一个马尔可夫链，首先，我们用紧凑的形式写出第2节所述的混合种群动力学。我们定义函数 $s^{*}(p,\ \boldsymbol{x}):\ [2\mathsf{P}]\times(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{ss}\cap\ ^{1}{}_{\mathsf{N}}\mathbb{Z}^{2\mathsf{P}})\ \to\{1,2\}$，它返回在种群状态 $\boldsymbol{x}$下类型-p个体的“偏好策略”；如果 $\mathtt{A}$，则该值为1（若 $\mathtt{B}$，则为2）。所谓“偏好策略”，是指由个体的更新规则所规定、并将在个体活跃时采用的策略。因此，

$$s^{*}(p,\boldsymbol{x})= \tag{7}$$
$$\begin{cases}1, & \text{if } (x\le\tau_{p-\mathsf{P}} \text{ and } \mathsf{P}<p\le\mathsf{P}+\mathsf{p})\\ & \text{or } (x\ge\tau'_{2\mathsf{P}+1-p} \text{ and } p>\mathsf{P}+\mathsf{p})\\ & \text{or } \Big(\max\limits_{i\in[\mathsf{P}]}u_i^{\mathtt{A}}(x)\mathbf{1}(x_i+x_{\mathsf{P}+i})\\ & \qquad\ge\max\limits_{i\in[\mathsf{P}]}u_i^{\mathtt{B}}(x)\mathbf{1}(\theta_i+\theta_{\mathsf{P}+i}-x_i-x_{\mathsf{P}+i})\\ & \quad\text{and } p\le\mathsf{P}\Big),\\ 2, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

效用 $u_i^{\mathtt{A}}(x)$ (res p. $u_i^{\mathtt{B}}(x)$), 对于 $i\in[\mathsf{P}]$, 与模仿型和非模仿型类型 i 都有关联 ,

如果这两种类型中的某些个体正在采用策略 A （分别为 B），那么在确定收入最高者时也会将其纳入考量；或者等价地说， x_i 或 $x_{\mathsf{P}+i}$ 不为零（分别不等于 θ_i 或 $\theta_{\mathsf{P}+i}$）。

命题 1 离散混合种群动力学等价于以下离散时间随机方程所蕴含的、关于 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的动力学：

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{x}(k) + \frac{1}{\mathsf{N}}\Big(S_k - s^*(P_k, \boldsymbol{x}(k))\Big)\mathbf{e}_{P_k}, \tag{8}$$

其中， P_k 是一个支撑为 $[2\mathsf{P}]$ 、分布为 $\mathbb{P}[P_k = p] = \theta_p$ 的随机变量；对于 $p \in [2\mathsf{P}],$ ，随机变量 S_k 的支撑为 $\{1, 2\}$ ，分布为 $\mathbb{P}[S_k = 1|P_k = p] = x_p/\theta_p \mathbb{P}[S_k = 2|P_k = p] = 1 - x_p/\theta_p$；此外， $\mathbf{e}_{P_k}$ 是 $\mathbb{R}^{2\mathsf{P}}$. 中的第 P_k 个单位向量

在命题 1 中，随机变量 P_k 表示时间索引 k 处活跃个体的类型，而随机变量 S_k 在活跃个体于索引 k 处的策略为 A （分别为 B）时取值 1（分别为 2）。因此， $S_k - s^*$（P_k, $\boldsymbol{x}$（k））表示活跃个体当前策略与偏好策略之间的差异，而 $\mathbf{e}_{P_k}$ 则将该差异定位到种群状态 $\boldsymbol{x}$ 中与活跃个体类型对应的行。

根据 (8)，种群动力学的下一状态由当前种群状态以及当前活跃个体的类型和策略决定。因此，序列$\langle \boldsymbol{x}(k) \rangle_{k=0}^{\infty}$ 是下文定义的马尔可夫链的一个实现；该链看起来与 [2, 定义 5] 相同，但函数 s^*不同。

定义 3 种群规模$_1$N 时的**混合种群动态马尔可夫链** 定义为马尔可夫链 $\langle \mathbf{X}_{k}^{\mathsf{N}} \rangle_{k=0}^{\infty}$，其状态空间为 $\boldsymbol{\mathcal{X}}^{ss} \cap {}^{1}_{\mathsf{N}}\mathbb{Z}^{2\mathsf{P}}$，初始状态为$_1\mathbf{X}_0^{\mathsf{N}} = \boldsymbol{x}(0)$，转移概率为

$$Pr_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} = \tag{9}$$
$$\begin{cases} (\theta_p - x_p)(2 - s^*(p, \boldsymbol{x})), & if\ \exists p(\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \frac{1}{\mathsf{N}}\mathbf{e}_p), \\ x_p(s^*(p, \boldsymbol{x}) - 1), & if\ \exists p(\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \frac{1}{\mathsf{N}}\mathbf{e}_p), \\ 1 - \Big(\sum_{p=1}^{2\mathsf{P}} x_p(s^*(p, \boldsymbol{x}) - 1) & if\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}, \\ \qquad +(\theta_p - x_p)(2 - s^*(p, \boldsymbol{x})) \Big), & \\ 0, & otherwise, \end{cases}$$

其中，$\mathbf{e}_p$ 是 $\mathbb{R}^{2\mathsf{P}}$中的 p^{th} 单位向量。

容易证明，序列 $\langle \boldsymbol{x}(k) \rangle_{k=0}^{\infty}$是 $\langle \mathbf{X}_k^{\mathsf{N}} \rangle_{k=0}^{\infty}$的一个实现，其中 $\boldsymbol{x}(k)$由 (8) 决定。类似结果的证明见 [2] 。注意，命题 1 和定义 3 的形式与 [2], 中的相同，但区别在于底层动力学不同，因此随机变量和函数 s^* 也不同。

平均动力学　　给出了大规模种群极限下每个时间步中 A-玩家种群比例的期望增量　　s

在每种类型中，并且可以写成 A-玩家的期望流入与 A-玩家的期望流出之差。前几节介绍的设置所诱导的平均动态，是从以下微分包含中选取的一个结果。

定义 4 连续时间混合种群动力学定义为 y

$$\dot{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}), \tag{10a}$$

其中 $\boldsymbol{\mathcal{V}} : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{ss} \rightrightarrows \mathbb{R}^{2\mathsf{P}}$ 且对于 $0 < p \leq \mathsf{P}$

$$\mathcal{V}_p(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \{\theta_p - x_p\}, & \text{if } u^{\mathsf{A}}(x) > u^{\mathsf{B}}(x) \\ & \quad \text{and } u^{\mathsf{A}}(\boldsymbol{x}) > u^{\mathsf{B}}(\boldsymbol{x}), \\ \{-x_p\}, & \text{if } u^{\mathsf{A}}(x) < u^{\mathsf{B}}(x) \\ & \quad \text{and } u^{\mathsf{A}}(\boldsymbol{x}) < u^{\mathsf{B}}(\boldsymbol{x}), \\ [-x_p, \theta_p - x_p], & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{10b}$$

对于 $\mathsf{P} < p \leq \mathsf{P} +$
p</style},

$$\mathcal{V}_p(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \{\theta_p - x_p\}, & \text{if } x < \tau_{p-\mathsf{P}}, \\ [-x_p, \theta_p - x_p], & \text{if } x = \tau_{p-\mathsf{P}}, \\ \{-x_p\}, & \text{if } x > \tau_{p-\mathsf{P}}, \end{cases} \tag{10c}$$

且对于 $p > \mathsf{P}$ +p

$$\mathcal{V}_p(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \{-x_p\}, & \text{if } x < \tau'_{2\mathsf{P}+1-p}, \\ [-x_p, \theta_p - x_p], & \text{if } x = \tau'_{2\mathsf{P}+1-p}, \\ \{\theta_p - x_p\}, & \text{if } x > \tau'_{2\mathsf{P}+1-p}, \end{cases} \tag{10d}$$

其中

$$x = \sum_{p=1}^{2\mathsf{P}} x_p \tag{10e}$$

是种群中 A 玩家所占的比例。

除 $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ 的前 P 个元素（对应模仿型）外，其余元素与纯最佳响应者种群 [2] 所得的微分包含中的元素相同。只要最大 A-效用和活跃 A-效用分别同时大于或同时小于最大 B-效用和活跃 B-效用，$p \leq \mathsf{P}$ 的集值映射 $\mathcal{V}_p(\boldsymbol{x})$ 就是单元素集。若在某个 $\boldsymbol{x}$，最大 A-效用大于最大 B-效用，而活跃 A-效用小于活跃 B-效用（反之亦然），或者任何一个 A-效用等于其对应的 B，那么 $\mathcal{V}_p(\boldsymbol{x})$ 就不是单元素集。

我们分析离散种群动态（8）在种群规模增大而种群结构（即向量 $\boldsymbol{\theta}$）保持不变时的行为。因此，该序列

$\langle N\rangle_{N=\mathsf{N}}^{\infty}$（种群规模沿其趋于无穷）必须满足 $N\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{Z}^{2\mathsf{P}}$。所有此类可行种群规模的集合由 $\mathcal{N}$ 表示。所谓$\langle {}^{1}{}_{\mathsf{N}}\rangle_{\mathsf{N}\in\mathcal{N}}$，是指一个递减序列 ${}^{1}{}_{\mathsf{N}},\mathsf{N}\in\mathcal{N}$，收敛于零。

可以证明，微分包含 (10) 满足良好上半连续性的条件。因此，我们得到以下引理。

引理 1 对于趋于零序列$\langle {}^{1}{}_{\mathsf{N}}\rangle_{\mathsf{N}\in\mathcal{N}}$，集合 $\mathbf{X}^{{}^{1}{}_{\mathsf{N}}}=\langle\mathbf{X}_{{}^{1}{}_{\mathsf{N}}k}\rangle_{k=0}^{\infty}$是$(10)$的 *GSAP*。

根据引理 1 和定理1，当种群规模趋于无穷大时，在任意有限时间区间内，混合种群动态马尔可夫链的插值过程 $\bar{\boldsymbol{X}}^{{}^{1}{}_{\mathsf{N}}}$ 以高概率紧密跟踪连续时间种群动力学的某个解。

命题2 对于任意 $T>0$ 以及任意 $\alpha>0$，有

$$\lim_{\frac{1}{\mathsf{N}}\to 0}\mathbb{P}\left[\inf_{\boldsymbol{x}(t)\in\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\Phi}}\sup_{0\le s\le T}|\bar{\boldsymbol{X}}^{\frac{1}{\mathsf{N}}}(s)-\boldsymbol{x}(s)|\ge\alpha\,|\,\bar{\boldsymbol{X}}^{\frac{1}{\mathsf{N}}}(0)=\boldsymbol{x}_0\right]=0$$

在 $\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{\mathcal{X}}_{ss}$ 上一致成立，其中 $\bar{\boldsymbol{X}}^{{}^{1}{}_{\mathsf{N}}}$ 是混合种群动态马尔可夫链(9) 的插值过程，而 $\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\Phi}$ 是连续时间混合种群动力学(10)的所有解的集合。

离散混合种群动力学的渐近行为如何？根据引理 1 和定理2，当种群规模趋于无穷时，离散混合种群动力学的渐近行为也可以通过式（10）所定义的微分包含的渐近行为揭示。

备注 1（1）、（2）和（3）中引入的设置基于特定的平局判定规则；当策略之间没有差异时，个体选择策略 $\mathtt{A}$。然而，当考虑其他平局判定规则时，本文的主要结果仍然成立。更具体地说，不同的平局判定机制只会在出现平局时改变 $s^{*}(\cdot,\cdot)$。这反过来会改变微分包含在满足定义 *2* 中条件*3*的平局处所进行的选取。因此，具有（9）所示转移概率的马尔可夫链仍然是微分包含（10）的 *GSAP*。

5 主要结果

下面的定义刻画了种群状态的类别；稍后我们将证明，动力学的均衡点包含在这些类别中。

定义5 种群状态 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\mathcal{X}}_{ss}$ 是

(1) 若其特征为干净切割

$$(\zeta_1,\ldots,\zeta_{\mathsf{P}},\rho_1,\ldots,\rho_i,0,\ldots,0,\rho'_j,\ldots,\rho'_1),$$

其中 最大值$\{\tau_{i+1},\tau'_j\}<\eta'_j+\eta_i+\zeta_0<$最小值$\{\tau_i,\tau'_{j+1}\}$，且 $u^{\mathsf{A}}(\eta_i+\eta'_j+\zeta_0)>u^{\mathsf{B}}(\eta_i+\eta'_j+\zeta_0)$；
（*2*）无模仿干净切割 当其特征为

$$(\underbrace{0,\ldots,0}_{\mathsf{P}},\rho_1,\ldots,\rho_i,0,\ldots,0,\rho'_j,\ldots,\rho'_1),$$

其中 最大值$\{\tau_{i+1},\tau'_j\}<\eta'_j+\eta_i<$最小值$\{\tau_i,\tau'_{j+1}\}$，且 $u^{\mathsf{A}}(\eta_i+\eta'_j)<u^{\mathsf{B}}($
$\eta_i+\eta'_j)$； （*3*）混合截然分明型 当其属于以下集合

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{C}}^c_{i,j}=\Big\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\mathcal{X}}_{ss}\mid&\sum_{p=1}^{\mathsf{P}}x_p=c-(\eta_i+\eta'_j),\\ &x_p=\theta_p,\ \textit{if}\ \mathsf{P}+1\le p\le\mathsf{P}+i\\ &\qquad\textit{or}\ 2\mathsf{P}-j+1\le p\le 2\mathsf{P},\\ &x_p=0,\ \textit{if}\ \mathsf{P}+i<p<2\mathsf{P}-j+1\Big\},\end{aligned}\tag{11}$$

对于某个 $c\in$(最大值$\{\tau_{i+1},\tau'_j\}$，最小值$\{\tau_i,\tau'_{j+1}\}$)，以及 $i\in[\mathsf{p}],j\in[\mathsf{p}'],c\in\mathcal{C}$；
（*4*）非混合型非从众驱动 当其特征为

$$\begin{aligned}\Big(&r_1,\ldots,r_{\mathsf{P}},\rho_1,\ldots,\rho_{i-1},\tau_i-(\sum_{p=1}^{\mathsf{P}}r_i+\eta_{i-1}+\eta'_j),0,\\ &\ldots,0,\rho'_j,\ldots,\rho'_1\Big),\end{aligned}$$

其中 $\tau_i\notin\mathcal{C}$，$j=\max\{k|\tau'_k<\tau_i\}$,

$$r_p=\begin{cases}0, & \textit{if}\ u^{\mathsf{A}}(\tau_i)<u^{\mathsf{B}}(\tau_i),\\ \theta_p, & \textit{if}\ u^{\mathsf{A}}(\tau_i)>u^{\mathsf{B}}(\tau_i),\end{cases}$$

对于 $p\in[\mathsf{P}]$, 且

$$\tau_i\in\begin{cases}(\eta_{i-1}+\eta'_j,\eta_i+\eta'_j),\\ \qquad\textit{if}\ u^{\mathsf{A}}(\tau_i)<u^{\mathsf{B}}(\tau_i),\\ (\eta_{i-1}+\eta'_j+\zeta_0,\eta_i+\eta'_j+\zeta_0),\\ \qquad\textit{if}\ u^{\mathsf{A}}(\tau_i)>u^{\mathsf{B}}(\tau_i);\end{cases}$$

(5) 混合型非从众驱动，若它属于以下集合

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{R}}^n_{i,j}=\Big\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\mathcal{X}}_{ss}\mid&\sum_{p=1}^{\mathsf{P}}x_p+x_{\mathsf{P}+i}=\tau_i-(\eta_{i-1}+\eta'_j),\\ &x_p=\theta_p,\ \textit{if}\ \mathsf{P}+1\le p\le\mathsf{P}+i-1\\ &\qquad\textit{or}\ 2\mathsf{P}-j+1\le p\le 2\mathsf{P},\\ &x_p=0,\ \textit{if}\ \mathsf{P}+i<p<2\mathsf{P}-j+1\Big\},\end{aligned}\tag{12}$$

对于某些 $i \in [\mathsf{p}]$, $j = \max\{k|\tau'_k < \tau_i\}$, $\tau_i \in \mathcal{C} \cap (\eta_{i-1} + \eta'_j, \eta_i + \eta'_j + \zeta_0)$;

(6) 非混合从众者驱动，若其特征为

$$\Big(r_1, \ldots, r_{\mathsf{P}}, \rho_1, \ldots, \rho_i, 0, \ldots, 0, \\ \tau'_j - (\sum_{p=1}^{\mathsf{P}} r_i + \eta_i + \eta'_{j-1}), \rho'_{j-1}, \ldots, \rho'_1\Big),$$

其中 $\tau'_j \notin \mathcal{C}$, $i =$最大$\{k \in [\mathsf{p}]|\tau'_j < \tau_k\}$,

$$r_p = \begin{cases} 0, & if\ u^{\mathtt{A}}(\tau'_j) < u^{\mathtt{B}}(\tau'_j), \\ \theta_p, & if\ u^{\mathtt{A}}(\tau'_j) > u^{\mathtt{B}}(\tau'_j), \end{cases}$$

对于 $p \in [\mathsf{P}]$, 和

$$\tau'_j \in \begin{cases} (\eta_i + \eta'_{j-1}, \eta_i + \eta'_j), \\ \qquad if\ u^{\mathtt{A}}(\tau'_j) < u^{\mathtt{B}}(\tau'_j), \\ (\eta_i + \eta'_{j-1} + \zeta_0, \eta_i + \eta'_j + \zeta_0), \\ \qquad if\ u^{\mathtt{A}}(\tau'_j) > u^{\mathtt{B}}(\tau'_j), \end{cases}$$

(7) 混合从众者驱动 当其属于以下集合时

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}^c_{i,j} = \Big\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{ss} \,|\, \sum_{p=1}^{\mathsf{P}} x_p + x_{2\mathsf{P}-j+1} = \tau'_j - (\eta_i + \eta'_{j-1}), \\ x_p = \theta_p,\ if\ \mathsf{P}+1 \le p \le \mathsf{P}+i \\ or\ 2\mathsf{P}-j+2 \le p \le 2\mathsf{P}, \\ x_p = 0,\ if\ \mathsf{P}+i < p < 2\mathsf{P}-j+1\Big\}, \tag{13}$$

for 某些 $j \in [\mathsf{p}']$, $i =$最大$\{k \in [\mathsf{p}]|\tau'_j < \tau_k\}$, $\tau'_j \in \mathcal{C} \cap (\eta_i + \eta'_{j-1}, \eta_i + \eta'_j + \zeta_0)$。

在上述定义的种群状态中，$i = 0$ （分别地，$j = 0$）意味着没有非从众者（分别地，从众者）在玩 A。

注 2 三种种群状态——混合型非从众驱动、混合从众者驱动和混合截然分明型——构成一个连续体。

下面的引理刻画了连续时间群体动力学 (10) 的均衡。

引理2 设$\mathcal{Q}$ 为连续时间群体动力学的所有均衡点组成的集合。在假设 *1-3* 下，集合$\mathcal{Q}$中的每个元素都是定义*5*中定义的种群状态之一。

引理2的证明见附录，其依据是微分包含均衡点的定义；在均衡点处，集合值映射 (10) 中的每个 2P 元素都应包含零。现在我们给出本文的主要结果。

定理 3 对于由(8)支配、由 N 个体组成并参与双策略博弈的种群，设 $\mu^{1}{}_{N}$是相应混合种群动态马尔可夫链的不变概率测度。在假设 *1-3* 下，对于任意趋于零序列 $\langle {}^{1}{}_{N} \rangle_{N\in\mathcal{N}}$，我们有 $\lim_{N\to 0} \mu^{1}{}_{N}(\mathcal{O})$，其中 $\mathcal{O}$是包含集合 $\mathcal{Q}$的任意开集。

换言之，考虑一个由模仿者、从众者和非从众者组成、规模为 N 的种群，其演化遵循离散种群动力学 (8)。随着种群规模趋于无穷大，从长期来看，种群状态几乎必然会访问均衡附近的点。因此， A玩家的种群比例持续波动的幅度依概率趋于零。由此得到以下推论。

推论 1 在定理 *3* 的条件下， A玩家种群比例波动的幅度几乎必然趋于零。

即使种群规模很大，种群动力学仍可能持续波动。不过，大多数时候，种群动力学都保持在均衡附近。

注 3 本文将我们先前的研究 *[24]* 从有限种群——个体与包括自身在内的整个种群进行博弈——扩展到种群规模较大的情形（N $\to\infty$）。我们沿用相同的结构，以便直接比较。在大规模种群中，个体是否将自身纳入种群状态往往无关紧要，决策主要取决于行动普及率（例如，*20%* 的个体选择 A ，*80%* 的个体选择 B）。在我们先前的从众者／非从众者模型中，排除自身也会得到相同的定性结果：波动几乎必然消失 *[2]*。

6 辅助结果

根据定理2，随着种群规模趋于无穷大，种群动力学马尔可夫链的不变概率测度的支撑包含于任何包含微分包含（10）的比尔霍夫中心的开集内。另一方面，定理 3 声称，该支撑包含于任何包含（10）的均衡点的开集内，这暗示比尔霍夫中心与均衡点集相等。在本节中，我们将证明这一猜想成立。

在 [2], 中，对一维动力学的分析有助于研究种群动力学，因为一维动力学刻画了 A型玩家的种群比例的演变。受此启发，我们计算了 A型玩家的种群比例的导数（10e），其表达式见（A.3）。与 [2], 中的情形不同，微分包含（A.3）不一定是一维的。不过，只要初始条件 $\boldsymbol{x}(0)$位于状态空间内部，即$\boldsymbol{x}(0) \notin \partial\boldsymbol{\mathcal{X}}_{ss}$，那么在任意有限时间范围内，动力学都将是一维的，如（14）所示。在这种情况下，最大 A效用与最大活跃 A效用相等。同样，最大 B效用与最大活跃 B效用也相等。因此，

$$\dot{\hat{x}} \in \mathcal{X}(\hat{x}), \tag{14}$$

$$\mathcal{X}(\hat{x}) = \begin{cases} [\eta_{i-1} + \eta'_j + \zeta_0 - \hat{x}, \eta_i + \eta'_j + \zeta_0 - \hat{x}], & \text{if } \exists i(\hat{x} = \tau_i) \text{ and } u^{\mathtt{A}}(\hat{x}) > u^{\mathtt{B}}(\hat{x}), \\ [\eta_i + \eta'_{j-1} + \zeta_0 - \hat{x}, \eta_i + \eta'_j + \zeta_0 - \hat{x}], & \text{if } \exists j(\hat{x} = \tau'_j) \text{ and } u^{\mathtt{A}}(\hat{x}) > u^{\mathtt{B}}(\hat{x}), \\ [\eta_{i-1} + \eta'_j - \hat{x}, \eta_i + \eta'_j - \hat{x}], & \text{if } \exists i(\hat{x} = \tau_i) \text{ and } u^{\mathtt{A}}(\hat{x}) < u^{\mathtt{B}}(\hat{x}), \\ [\eta_i + \eta'_{j-1} - \hat{x}, \eta_i + \eta'_j - \hat{x}], & \text{if } \exists j(\hat{x} = \tau'_j) \text{ and } u^{\mathtt{A}}(\hat{x}) < u^{\mathtt{B}}(\hat{x}), \\ [\eta_{i-1} + \eta'_j - \hat{x}, \eta_i + \eta'_j + \zeta_0 - \hat{x}], & \text{if } \exists i(\hat{x} = \tau_i) \text{ and } u^{\mathtt{A}}(\hat{x}) = u^{\mathtt{B}}(\hat{x}), \\ [\eta_i + \eta'_{j-1} - \hat{x}, \eta_i + \eta'_j + \zeta_0 - \hat{x}], & \text{if } \exists j(\hat{x} = \tau'_j) \text{ and } u^{\mathtt{A}}(\hat{x}) = u^{\mathtt{B}}(\hat{x}), \\ [\eta_i + \eta'_j - \hat{x}, \eta_i + \eta'_j + \zeta_0 - \hat{x}], & \text{if } \exists i, j(\hat{x} \in (\max\{\tau'_j, \tau_{i+1}\}, \{\tau'_{j+1}, \tau_i\})) \text{ and } u^{\mathtt{A}}(\hat{x}) = u^{\mathtt{B}}(\hat{x}), \\ \{\eta_i + \eta'_j + \zeta_0 - \hat{x}\}, & \text{if } \exists i, j(\hat{x} \in (\max\{\tau'_j, \tau_{i+1}\}, \{\tau'_{j+1}, \tau_i\})) \text{ and } u^{\mathtt{A}}(\hat{x}) > u^{\mathtt{B}}(\hat{x}), \\ \{\eta_i + \eta'_j - \hat{x}\}, & \text{if } \exists i, j(\hat{x} \in (\max\{\tau'_j, \tau_{i+1}\}, \{\tau'_{j+1}, \tau_i\})) \text{ and } u^{\mathtt{A}}(\hat{x}) < u^{\mathtt{B}}(\hat{x}), \end{cases}$$

在（A.3）中，状态为 x的项将处于非活跃状态。

当初始条件位于状态空间的边界上时，会发生什么？在此情形下，只要二者从同一初始条件出发， A-参与者种群比例的渐近行为便由(14)中的一维动力学所刻画（引理 A4与命题 3）。因此，我们如下定义抽象状态及相应的动力学。

定义 6与连续时间种群动力学相关联的抽象动力学由(14)定义，其中在$\hat{x} = \tau_i$处， j 由$\max\{k|\tau'_k < \tau_i\}$定义，而在$\hat{x} = \tau_j$处，$i$ 由$\max\{k|\tau'_j < \tau_k\}$定义。标量状态$\hat{x}$ 称为抽象状态。

按照定义5中的术语，我们称抽象状态$\hat{x} \in [0,1]$ 为非从众者驱动的（相应地，从众者驱动的）状态，如果$\hat{x}$ 等于 τ_p （对某个 $p \in [\mathtt{p}]$ ）（相应地，等于 τ'_p，对某个 $p \in [\mathtt{p}']$）。抽象状态$\hat{x} \in [0,1]$ 是干净切割的（相应地，无模仿干净切割的），如果存在某个$i \in \{0\} \cup [\mathtt{p}], j \in \{0\} \cup [\mathtt{p}']$ 使得$\hat{x} = \eta_i + \eta'_j + \zeta_0$ （相应地，$\hat{x} = \eta_i + \eta'_j$） 。最后，抽象状态$\hat{x} \in [0,1]$ 是混合整齐切分状态，如果存在某个 $i \in \{0\} \cup [\mathtt{p}], j \in \{0\} \cup [\mathtt{p}']$以及$r \in (0, \zeta_0)$使得$\hat{x} = \eta_i + \eta'_j + r$。

以下引理刻画了抽象动力学的均衡点。

引理 3 在假设 *1-3* 下，抽象动力学的每个均衡点都且仅会属于以下类别之一： (14)

(1) 由非从众者驱动的均衡点， τ_i, $i \in [\mathtt{p}]$, 当且仅当以下条件之一成立

- $u^{\mathtt{A}}(\tau_i) < u^{\mathtt{B}}(\tau_i)$ 且 $\tau_i \in (\eta_{i-1} + \eta'_j, \ \eta_i + \eta'_j)$,
- $\tau_i \in \mathcal{C}$ 和 $\tau_i \in (\eta_{i-1} + \eta'_j, \eta_i + \eta'_j + \zeta_0)$,
- $u^{\mathtt{A}}(\tau_i) > u^{\mathtt{B}}(\tau_i)$ 且 $\tau_i \in (\eta_{i-1} + \eta'_j + \zeta_0, \eta_i + \eta'_j + \zeta_0)$;*(2)* 由从众者驱动的均衡点， τ'_j, $j \in [\mathtt{p}']$, 当且仅当以下条件之一成立

- $u^{\mathtt{A}}(\tau'_j) < u^{\mathtt{B}}(\tau'_j)$ 和 $\tau'_j \in (\eta_i + \eta'_{j-1}, \ \eta_i + \eta'_j)$,
- $\tau'_j \in \mathcal{C}$和 $\tau'_j \in (\eta_i + \eta'_{j-1}, \eta_i + \eta'_j + \zeta_0)$,

- $u^{\mathtt{A}}(\tau_j') > u^{\mathtt{B}}(\tau_j')$ 和 $\tau_j' \in (\eta_i + \eta_{j-1}' + \zeta_0, \eta_i + \eta_j' + \zeta_0)$; **(3)** 无模仿的干净切换均衡点 $\eta_i + \eta_j'$, $i \in \{0\} \cup [p]$, $j \in \{0\} \cup [p']$，当且仅当 $\max\{\tau_{i+1}, \tau_j'\} < \eta_j' + \eta_i < \min\{\tau_i, \tau_{j+1}'\}$ 且 $u^{\mathtt{A}}(\eta_i + \eta_j') < u^{\mathtt{B}}(\eta_i + \eta_j')$; **(4)** 干净切换均衡点 $\eta_i + \eta_j' + \zeta_0$, $i \in \{0\} \cup [p]$, $j \in \{0\} \cup [p']$，当且仅当 $\max\{\tau_{i+1}, \tau_j'\} < \eta_j' + \eta_i + \zeta_0 < \min\{\tau_i, \tau_{j+1}'\}$ 且 $u^{\mathtt{A}}(\eta_i + \eta_j' + \zeta_0) > u^{\mathtt{B}}(\eta_i + \eta_j' + \zeta_0)$; **(5)** 混合型干净截断均衡点 $\eta_i + \eta_j' + r$, $i \in \{0\} \cup [p]$, $j \in \{0\} \cup [p']$, $r \in (0, \zeta_0)$，当且仅当 $\max\{\tau_{i+1}, \tau_j'\} < \eta_j' + \eta_i + r < \min\{\tau_i, \tau_{j+1}'\}$ 且 $(\eta_i + \eta_j' + r) \in \mathcal{C}$.

引理 3 中抽象状态的五个类别互不相容，这一点可由假设 1 以及与各类型相关的阈值互不相同这一事实直接得出。下面的引理刻画抽象均衡点的稳定性性质。

引理 4 考虑抽象动力学(14)。在假设 *1-3* 下，抽象动力学的不稳定均衡点集合由从众驱动均衡点以及满足 $b_{i(q)} < d_{i(q)}$ 的混合截然分明型均衡 q 组成，其中 $i(q)$ （分别为 $j(q)$）是在 $x = q$ 处具有最高 A 效用（分别为 B 效用）的类型。其余均衡点均为渐近稳定。

在引理 4 中，对于混合型干净截断均衡点，不等式 $b_{i(q)} < d_{i(q)}$ 意味着，在 q 的左邻域内，最大 B 效用超过最大 A 效用，因此该均衡点不稳定。

容易证明，抽象动力学至少存在一个渐近稳定的均衡点。将渐近稳定的均衡点按升序排列为 $q_1^* < q_2^* < \ldots < q_{\mathtt{Q}-1}^* < q_{\mathtt{Q}}^*$，其中 Q 为稳定均衡点的数量。可以证明，任意两个相邻的稳定均衡点之间，即对于 q_k^*, q_{k+1}^*，当 $k \in [\mathtt{Q}-1]$ 时，存在一个不稳定均衡点，记为 $q_{k,k+1}^*$. 类似结果的证明见引理 A1] 。下面的命题揭示了抽象均衡的吸引域。

命题 3 考虑抽象动力学 (14)。在假设 *1-3* 下，抽象动力学的均衡点 q_k^*, $k \in [\mathtt{Q}]$ 的吸引域等于

$$\mathcal{A}(q_k^*) = \begin{cases} [0, q_{1,2}^*), & \text{if } k = 1, \\ (q_{k-1,k}^*, q_{k,k+1}^*), & \text{if } 2 \le k \le \mathtt{Q}-1, \\ (q_{\mathtt{Q}-1,\mathtt{Q}}^*, 1], & \text{if } k = \mathtt{Q}. \end{cases} \tag{15}$$

到目前为止，我们已经分析了抽象动力学的全局收敛性，表明每个解都趋近于引理 3 中刻画的某个均衡点。现在我们转而讨论种群动力学的全局收敛性。下面的引理揭示了抽象动力学的均衡与 (10) 的均衡之间的关系。

引理5 在假设 *1-3* 下，以下结论成立：

(1) 对于每个抽象平衡点 q，动力学 (10) 至少存在一个均衡点 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$，使得 $\sum_{p=1}^{2\mathtt{P}} q_p = q$，其中 q_p 表示 $\boldsymbol{q}$ 的 p^{th} 元素。

(2) 反之，动力学 (10) 的每个均衡点 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$ 都恰好对应一个满足 $\sum_{p=1}^{2\mathrm{P}} q_p = q$ 的抽象平衡点 q。

以下结果刻画了连续时间群体动力学的全局收敛行为。

定理4 对于连续时间群体动力学(10)，在假设 *1-3*下，以下结论成立：

(1) 任何干净切割、无模仿干净切割或非混合型非从众驱动平衡点 $\boldsymbol{q} \in Q$（若存在）是吸引的，其吸引域为 $\{\boldsymbol{x} \in X_{ss} \mid \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} \in \mathcal{A}(\mathbf{1}^\top \boldsymbol{q})\}$.*(2)* 混合非从众驱动平衡点的连续统$R_{i,j}^{n}$, $i \in [p]$, $j = \max\{k \le p' \mid \tau'_k < \tau_i\}$（若存在）是吸引的，其吸引域为 $\{\boldsymbol{x} \in X_{ss} \mid \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} \in \mathcal{A}(\mathbf{1}^\top \boldsymbol{q})$，对某个 $\boldsymbol{q} \in R_{i,j}^{n}\}$.*(3)* 混合型清晰均衡点的连续统$C_{i,j}^{[c]}$, $i \in [p], j \in [p']$（若存在）是吸引的，当且仅当其相应的抽象平衡点 $\mathbf{1}^\top \boldsymbol{q}$，对于 $\boldsymbol{q} \in C_{i,j}^{[c]}$，是渐近稳定的。在此情形下，集合 $\{\boldsymbol{x} \in X_{ss} \mid \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} \in \mathcal{A}(\mathbf{1}^\top \boldsymbol{q})$对某个 $\boldsymbol{q} \in C_{i,j}^{[c]}\}$是该连续统的吸引域。*(4)* 集合 $\{\boldsymbol{x} \in X_{ss} \mid \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} = q^*_{k,k+1}\}$ 中每一点的极限集对于 $k \in [\mathrm{Q} - 1]$ 为$\{\boldsymbol{x} \in Q \mid \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} \in \{q^*_k, q^*_{k,k+1}, q^*_{k+1}\}\}$.

备注 4 学者们也研究了种群结构及其在种群渐近行为中的作用。在图上的演化博弈中，长期行为可能取决于收益矩阵、策略更新规则和种群结构 *[25]*。尽管如此，对于排列在正则图上的大型模仿者种群，各策略期望比例的演化可以用复制者微分方程（*RFE*）近似，这与描述大型充分混合种群中演化的方程类似 *[31]*。当博弈动力学与环境反馈相耦合时，根据近似的复制者微分方程推断出的渐近行为可能取决于每位参与者的邻居数量 *[36]*。本文研究了有限规模充分混合异质种群，并考察了种群规模足够大时波动的命运。对于所研究种群的结构化版本，也可以采取类似步骤。这有待未来进一步研究。

注 5 若不满足假设 *1*，当 A 类玩家的比例处于 $\mathcal{C} \cup \mathcal{T}$ 时，动态可能出现新的均衡，其结构与（无模仿的）清晰均衡相同。任何种群比例中 A类玩家等于从众阈值的新均衡都是不稳定的。若该比例与 $\mathcal{C}$中的一个元素相符，其稳定性则取决于 $u_i^{\mathrm{A}}(0)$ 和 $u_j^{\mathrm{B}}(0)$的相对大小，其中 i（分别为 j）表示该点上具有最高 A效用（分别为最高 B效用）的类型。若不满足假设 *2*，抽象从众均衡和非从众均衡的稳定性取决于抽象均衡点附近收益最高的策略。因此，从众（分别为非从众）均衡点可能渐近稳定，也可能不稳定。若不满足假设 *3*，不同类型的 A效用线与B效用线可能重合。如果在种群比例的某个范围内这些效用均为最高

的 A类玩家中，模仿者可能无法达到均衡。具体而言，在 $p \in [\mathrm{P}]$ 条件下， x_p 的演化遵循 $\dot{x}_p \in [-x_p, \theta_p - x_p]$，其中存在一些轨迹，会导致模仿者中 A类玩家的比例，进而导致种群中 A类玩家的比例无限波动。因此， A类玩家的比例将无限波动。

重访例1 例*1*中引入的离散群体所对应的连续时间种群动力学存在由非从众者驱动的连续统均衡点，其特征可表示为

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, 0.11, 0.05, x_5^*, 0.12),$$

其中，对于 $p \in [6]$， x_p^* 的总和等于 $\tau_3 - \eta_1' - \eta_2 = 0.006$，而 A 玩家所占的种群比例等于 $\tau_3 \approx 0.286.$ 。事实上，在有限离散群体中， A 玩家的种群比例会围绕 τ_3 波动。同样， A 策略模仿者与类型 *3* 非从众者所占比例之和会围绕 0.006 波动（图*1*）。

7 结论

我们研究了在双策略博弈中进行决策的充分混合种群的渐近行为，该种群由模仿者、从众者和非从众者组成。我们以微分包含的形式推导并分析了这类种群的平均动力学。研究表明，平均动力学总是收敛到一个均衡点或一个连续统均衡。利用随机逼近理论，我们证明，种群中 A 玩家的比例所报告的波动幅度以概率 1 收敛到零（图2）。本文的结果与 $[1, 2],$ 的结果共同表明，在现实世界的双策略决策问题中，如果采用者的比例出现大幅波动，那么采用者比例的仿射函数无法充分刻画个体的效用。

参考文献

[1] Azadeh Aghaeeyan 和 Pouria Ramazi。从离散到连续的模仿动力学。载于*2024*年*IEEE*第*63*届决策与控制会议（*CDC*），第966–971页，2024年。[2] Azadeh Aghaeeyan 和 Pouria Ramazi。从离散到连续的二元最佳响应动力学：随着种群规模增大，离散波动几乎必然消失。*IEEE* 自动控制汇刊，第1–16页，2025年。提前出版。[3] Laura Arditti、Giacomo Como、Fabio Fagnani 和 Martina Vanelli。混合网络协调／反协调博弈中的均衡与学习动力学。载于*2021*年*IEEE*第*60*届决策与控制会议（*CDC*），第4982–4987页，2021年。

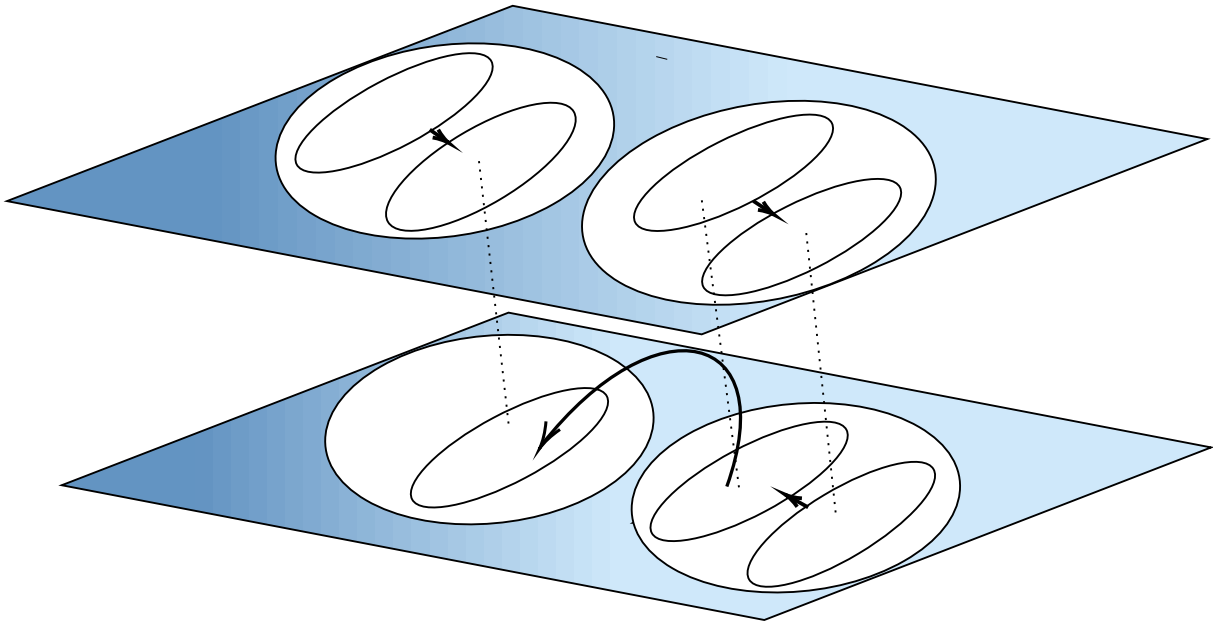

图 2。**随机逼近理论为由离散时间动力学支配的有限种群行为与相应的连续时间系统之间建立了联系**。对一维抽象动力学的分析有助于分析平均动力学。抽象动力学的收敛意味着平均动力学收敛，而后者又意味着离散种群动态依概率收敛。

[4] Laura Arditti、Giacomo Como、Fabio Fagnani 和 Martina Vanelli。有向加权网络上线性阈值动力学的鲁棒协调。*IEEE* 自动控制汇刊，69(10):6515–6529，2024年。[5] Sina Arefizadeh、Sadegh Arefizadeh、S Rasoul Etesami 和 Sadegh Bolouki。博弈动力学的鲁棒性：压缩映射分解方法。*Automatica*，155:111142，2023年。[6] Julian Barreiro-Gomez 和 Hamidou Tembine。通过模仿动力学混合实现受约束的演化博弈。*Automatica*，97:254–262，2018年。[7] Brendan J. Barrett、Richard L. McElreath 和 Susan E. Perry。收益偏向型社会学习是野生灵长类提取式觅食新传统扩散的基础。英国皇家学会学报*B*辑：生物科学，284(1856):20170358，2017年。[8] Chris T Bauch 和 David JD Earn。疫苗接种与博弈论。美国国家科学院院刊，101(36):13391–13394，2004年。[9] Axelle E. J. Bono、Andrew Whiten、Carel P. van Schaik、Michael Kr¨utzen、Stefanie M. Graber 和 Erica van de Waal。收益和性别偏向型社会学习在野生灵长类群体中相互作用。《当代生物学》，28(17):2800–2805.e4，2018年。[10]Gretchen B Chapman、Meng Li、Jeffrey Vietri、Yoko Ibuka、David Thomas、Haewon Yoon 和 Alison P Galvani。运用博弈论考察流感疫苗接种行为中的激励。《心理科学》，23(9):1008–1015，2012年。

[11]Ge Chen 和 Yongyuan Yu。从众网格上带有模仿规则的演化博弈的收敛性分析与策略控制。*IEEE* 自动控制汇刊，68(12):8185– 8192，2023。[12]Giacomo Como、St´ephane Durand 和 Fabio Fagnani。超模博弈中的最优目标选择。*IEEE* 自动控制汇刊，67(12):6366–6380，2022。[13]Giacomo Como、Fabio Fagnani 和 Lorenzo Zino。社群网络中群体博弈的模仿动力学。*IEEE* 网络系统控制汇刊，8(1):65–76，2021。[14]Giacomo Como、Fabio Fagnani 和 Lorenzo Zino。社群网络中群体博弈的模仿动力学。*IEEE* 网络系统控制汇刊，8(1):65–76，2021。[15]Yiheng Fu 和 Pouria Ramazi。异质种群中模仿作用下的演化矩阵博弈动力学。*Automatica*，159:111354，2024。[16]Serge Galam。反从众对意见动力学的确定性效应："悬而未决选举情景"。*Physica A*：统计力学及其应用，333:453–460，2004。[17]Bahman Gharesifard、Behrouz Touri、Tamer Ba¸sar 和 Jeff Shamma。网络上分段线性策略互动动力学的收敛性。*IEEE* 自动控制汇刊，61(6):1682–1687，2016。[18] Michel Grabisch、Alexis Poindron 和 Agnieszka Rusinowska。一个包含反从众主体的匿名影响模型。*Journal of Economic Dynamics and Control*，109:103773，2019。[19]Mark Granovetter。集体行为的阈值模型。*American journal of sociology*，83(6):1420–1443，1978。[20]John Haslegrave 和 Chris Cannings。含有一名非从众者的多数动力学。*DiscreteApplied Mathematics*，219:32–39，2017。[21] Joseph Henrich 和 Francisco J Gil-White。声望的演化：作为增强文化传播效益机制的自愿敬重。*Evolution and humanbehavior*，22(3):165–196，2001。[22] Yuri M Kaniovski、Arkadii V Kryazhimskii 和 H Peyton Young。异质种群参与博弈中的适应性动力学。《博弈与经济行为》，31(1):50–96，2000。[23]Toshiji Kawagoe、Hirokazu Takizawa 和 Tetsuo Yamamori。非对称志愿者困境博弈：理论与实验。《博弈与经济行为》，142:955–977，2023。[24]Hien Le、A Aghaeeyan 和 Pouria Ramazi。从众者、非从众者与模仿者的异质混合种群。*IEEE* 自动控制汇刊，69(5):3373–3380，2024。[25]Erez Lieberman、Christoph Hauert 和 Martin A Nowak。图上的演化动力学。《自然》，433(7023):312–316，2005。[26]Aixin Liu、Lin Wang、Guanrong Chen 和 Xinping Guan。存在群际冲突的异质网络演化博弈。*IEEE* 控制论汇刊，54(10):5684– 5695，2024。

[27]Mohamed A. Mabrok。复制子动力学及其变体的无源性分析。*IEEE* 自动控制汇刊，66(8):3879–3884，2021。[28] Dario Madeo 和 Chiara Mocenni。网络化种群中的博弈交互与动力学。*IEEE* 自动控制汇刊，60(7):1801–1810，2015。[29]Christopher G. Mayhew 和 Andrew R. Teel。微分包含吸引域的拓扑结构。《系统与控制快报》，60(12):1045–1050，2011。[30]Martin A Nowak 和 Robert M May。演化博弈与空间混沌。$nature$，359(6398):826–829，1992。[31] Hisashi Ohtsuki 和 Martin A Nowak。图上的复制子方程。《理论生物学杂志》，243(1):86–97，2006。[32]James R. Riehl 和 Ming Cao。迈向网络演化博弈的最优控制。*IEEE* 自动控制汇刊，62(1):458–462，2017。[33]Gr´egory Roth 和 William H Sandholm。恒定步长随机逼近与微分包含。《*SIAM* 控制与优化杂志》，51(1):525–555，2013。[34]William H Sandholm。群体博弈与演化动力学。麻省理工学院出版社，2010。[35]Georgi V Smirnov。微分包含理论导论，第41卷。美国数学学会，2002。[36]Leonardo Stella、Wouter Baar 和 Dario Bauso。较低的网络度在具有环境反馈的囚徒困境中促进合作。*IEEE* 控制系统快报，6:2725–2730，2022。[37]Brian Swenson、Ryan Murray 和 Soummya Kar。势博弈中的最佳响应动力学。《*SIAM* 控制与优化杂志》，56(4):2734–2767，2018。[38]Shaolin Tan、Yaonan Wang 和 Jinhu L¨u。通过微观确定性方法分析和控制网络化博弈动力学。*IEEE* 自动控制汇刊，61(12):4118–4124，2016。[39]Boyu Zhang、Zhigang Cao、Cheng-Zhong Qin 和 Xiaoguang Yang。时尚与同质性。《运筹学》，66(6):1486–1497，2018。[40]Yuying Zhu、Zhipeng Zhang、Chengyi Xia 和 Zengqiang Chen。反协调网络化博弈动力学的均衡分析与基于激励的控制。$Automatica$，147:110707，2023。[41]Lorenzo Zino、Mengbin Ye、Giuseppe C Calafiore 和 Alessandro Rizzo。利用自适应增益控制选择复制子方程的均衡。*IEEE* 自动控制汇刊，2025。

附录

引理 A1 考虑连续时间种群动力学(10)。在假设 *1-3* 下， A-玩家的种群比例 $\sum_{p=1}^{2\mathrm{P}} x_p(t)$ 的演化由$(\mathrm{A}.3)$支配，

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_1 = \{\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{ss} \mid \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x}^* \notin \mathcal{C} \text{ and } \operatorname{sgn}(u^{\mathtt{A}}(\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x}^*) - u^{\mathtt{B}}(\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x}^*)) \neq \operatorname{sgn}(u^{\mathtt{A}}(\boldsymbol{x}^*) - u^{\mathtt{B}}(\boldsymbol{x}^*))\}, \tag{A.1a}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_2 = \{\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{ss} \mid \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x}^* \in (\mathcal{C} - \mathcal{T}) \text{ and } \operatorname{sgn}(u^{\mathtt{A}}(\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x}^*) - u^{\mathtt{B}}(\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x}^*)) \neq \operatorname{sgn}(u^{\mathtt{A}}(\boldsymbol{x}^*) - u^{\mathtt{B}}(\boldsymbol{x}^*))\}. \tag{A.1b}$$

其中， $\boldsymbol{x}(t)$ 是由(10) 支配的连续时间种群状态；对于 $x = \tau_i$, $j = \max\{k|\tau'_k < \tau_i\}$，以及对于 $x = \tau_j$, $i = \max\{k|\tau'_j < \tau_k\}$。

证明。 证明基于这样一个事实：A-玩家的种群比例的导数，等于每种类型中 A-玩家比例的导数之和，即$\dot{\tilde{x}} = \sum^{2\mathsf{P}}_{p=1} \dot{x}_p(t)$。接下来的步骤与 [2]中命题2的证明类似，因此省略。□

引理 A2 设$\boldsymbol{\mathcal{X}}_1$和$\boldsymbol{\mathcal{X}}_2$由(A.1)定义。则$\boldsymbol{\mathcal{X}}_1 \cap \boldsymbol{\mathcal{Q}} = \varnothing$且$\boldsymbol{\mathcal{X}}_2 \cap \boldsymbol{\mathcal{Q}} = \varnothing$.

证明。反设存在某个 $\boldsymbol{x}^* \in \mathsf{Q} \cap \mathsf{X}_1$。 $\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x}^* \notin \mathcal{C}$ 蕴含$u^{\mathtt{A}}(x^*) \neq u^{\mathtt{B}}(x^*)$，其中 $x^* = \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x}^*$. 。下面证明在 $u^{\mathtt{A}}(x^*) > u^{\mathtt{B}}(x^*)$的情况下会产生矛盾； $u^{\mathtt{A}}(x^*) < u^{\mathtt{B}}(x^*)$的情况可用类似方法处理。不失一般性，设对某个 $p \in [\mathsf{P}]$, $u^{\mathtt{A}}(x^*)$等于 $u^{\mathtt{A}}_p(x^*)$。我们知道 $u^{\mathtt{A}}(x^*) \geq u^{\mathtt{A}}(\boldsymbol{x}^*)$且 $u^{\mathtt{B}}(x^*) \geq u^{\mathtt{B}}(\boldsymbol{x}^*)$。由 $u^{\mathtt{B}}(\boldsymbol{x}^*) \geq u^{\mathtt{A}}(\boldsymbol{x}^*)$和 $u^{\mathtt{A}}(x^*) > u^{\mathtt{B}}(x^*)$可得 $u^{\mathtt{A}}(\boldsymbol{x}^*) < u^{\mathtt{A}}(x^*) = u^{\mathtt{A}}_p(x^*)$。这意味着 $x^*_p + x^*_{\mathsf{P}+p} = 0$，进而可得 $x^*_{\mathsf{P}+p} = 0$。另一方面，元素$x_{\mathsf{P}+p}$ 对应一种非模仿型类型，而两个不等式 $u^{\mathtt{B}}(x^*) \geq u^{\mathtt{B}}_p(x^*)$和$u^{\mathtt{A}}(x^*) > u^{\mathtt{B}}(x^*)$意味着 $u^{\mathtt{A}}_p(x^*) > u^{\mathtt{B}}_p(x^*)$, 进而得到 $\mathcal{V}_{\mathsf{P}+p} = \{\theta_p - x^*_p\}$. 。因此， $0 \notin \mathcal{V}_{\mathsf{P}+p}(\boldsymbol{x}^*)$。但点 $\boldsymbol{x}^*$ 是一个均衡。这就产生了矛盾。现在，反设存在某个 $\boldsymbol{x}^* \in \mathsf{Q} \cap \mathsf{X}$ 2。关系 $\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x}^* \in \mathcal{C}$蕴含 $u^{\mathtt{A}}(x^*) = u^{\mathtt{B}}(x^*)$。有$\exists p \in [\mathsf{P}]\Big((u^{\mathtt{A}}(x^*) = u^{\mathtt{A}}_p(x^*))\Big)$ 且 $existsq \in [\mathsf{P}]\Big((u^{\mathtt{B}}(x^*) = u^{\mathtt{B}}_q(x^*))\Big)$。由 $x^* \notin \mathcal{T}$可知， p 和 q 并不相同。另一方面，(A.1b)意味着 $u^{\mathtt{A}}(\boldsymbol{x}^*) > u^{\mathtt{B}}(\boldsymbol{x}^*)$或 $u^{\mathtt{A}}(\boldsymbol{x}^*) < u^{\mathtt{B}}(\boldsymbol{x}^*)$。我们考虑 $u^{\mathtt{A}}(\boldsymbol{x}^*) > u^{\mathtt{B}}(\boldsymbol{x}^*)$的情形，另一种情形可用类似方法处理。不等式 $u^{\mathtt{A}}(x^*) \geq u^{\mathtt{A}}(\boldsymbol{x}^*)$、 $u^{\mathtt{B}}(x^*) \geq u^{\mathtt{B}}(\boldsymbol{x}^*)$、 $u^{\mathtt{A}}(x^*) = u^{\mathtt{B}}(x^*)$和$u^{\mathtt{A}}(\boldsymbol{x}^*) > u^{\mathtt{B}}(\boldsymbol{x}^*)$意味着 $u^{\mathtt{B}}(\boldsymbol{x}^*) < u^{\mathtt{B}}(x^*)$, 进而得到 $u^{\mathtt{B}}(\boldsymbol{x}^*) < u^{\mathtt{B}}_q(x^*)$。因此，我们有$\theta_q + \theta_{\mathsf{P}+q} - x^*_q - x^*_{\mathsf{P}+q} = 0$ 和 $x^*_{\mathsf{P}+q} = \theta_{\mathsf{P}+q}$。 由于 $p \neq q$， 有 $u^{\mathtt{A}}_q(x^*) < u^{\mathtt{B}}_q(x^*)$, 从而 $\mathcal{V}_{\mathsf{P}+q}(\boldsymbol{x}^*) = \{-x_{q+\mathsf{P}}\} \neq \{0\}$。但点 $\boldsymbol{x}^*$ 是一个均衡。这就产生了矛盾。□

引理 1 的证明。引理 1 的证明受到 [33,例 4.1] 和 [2, 引理 1]中所采用步骤的启发。由于集合 X_{ss} 是凸且紧的，因此满足条件 1。现在，考虑序列$\langle {}^{1}\mathsf{N}\rangle_{\mathsf{N}\in\mathcal{N}}$。为了证明集合$\langle \boldsymbol{X}^{1}\mathsf{N}\rangle^{\infty}_{k=0}$是微分包含 (10) 的 GSAP，我们需要找到序列 $\langle \mathsf{U}_1 \mathsf{N}_{-k}\rangle_k$和 $\langle \bar{\mathsf{V}}^{1}\mathsf{N}\rangle$，使其满足定义 2 中列出的最后三个条件。对于条件 2，我们将马尔可夫链 $\boldsymbol{X}^{1}\mathsf{N}$ 的单位时间期望增量记为 $\boldsymbol{\nu}^{1}\mathsf{N}$，并将其作为 $\mathsf{V}^{1}\mathsf{N}$ 的候选。每个时间单位分为 N 个子时间单位。因此， $\boldsymbol{\nu}^{1}\mathsf{N}$ 等于 $\boldsymbol{\nu}^{1}\mathsf{N}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{N}\mathbb{E}[\mathsf{X}\,1\,\mathsf{N}^{k+1} - \mathsf{X}\text{-}1\,\mathsf{N}_k \mid \mathsf{X}_1\,\mathsf{N}_k = \bar{\boldsymbol{x}}]$。 $p^{\text{th}}\mathsf{N}$ 的 $\boldsymbol{\nu}^{1}$ 元素 $\bar{p} \in [2\mathsf{P}]$, 是类型 p的期望增量，等于以下各项之和：

类型 p 的可能变化及其概率的乘积。根据 (9)，可能发生两种变化： ^{1}N 增加或 ^{1}N 减少。因此， $\nu_p^{\mathrm{N}}(\boldsymbol{x})$ 等于 $\theta_p(2-s^*(p,\boldsymbol{x}))-x_p$。此时，取 U 1 N$_{k+1}$ = N(X$_{\mathrm{i}}$ N$_{k+1}$ − X 1 N$_k$) − $\boldsymbol{\nu}^{1}$ N ($\boldsymbol{x}$) 即可满足条件 2。对于条件 3，我们考虑微分包含 (10) 的一个选取，其 p^{th} 元素等于 $\theta_p(2-s^*(p,\boldsymbol{x}))-x_p$，并将其记为 $\boldsymbol{\nu}_1(\boldsymbol{x})$。此时，任意选取一个 ϵ_0值，令 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$，并令 $\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\nu}_{1\cdot}$，即可满足条件 3。对于最后一个条件，给定 $\mathbb{E}[\mathrm{U\,N}_{k+1}|\mathrm{X}_k^{\mathrm{N}}]=0$1 1（对 $k\geq 0$ 而言），$\langle \mathrm{U}_k^{\mathrm{N}}\rangle_k$是一个鞅差序列。此外，对于所有 k， $|\mathrm{U\,N}_k|\leq\sqrt{\Sigma_{l=1}^{2\mathrm{P}}(1+\theta_l)^2}$，因此 U$_{\mathrm{l}}$ N$_k$ 一致有界。因此，根据 [33, 命题2，3],条件 4 得以满足。□

命题*2*的证明。 根据引理 1，对于趋于零序列$\langle {}^{1}{}_{\mathrm{N}}\rangle_{\mathrm{N}\in\mathcal{N}}$，集合 $\mathbf{X}$ $^{1}{}_{\mathrm{N}}$是微分包含 (10) 的 GSAP。由此并结合定理1，证明完毕。

引理2的证明。假设 $\boldsymbol{x}^*$ 是 (10) 的一个均衡，即 $\boldsymbol{x}^*\in$ Q。成立 $0\in$ V($\boldsymbol{x}^*$)，因此对于 $p\in[2\mathrm{P}]$，有 $0\in\mathcal{V}_p(\boldsymbol{x}^*)$。令 $x^*=\sum^{2\mathrm{P}}{}_{i=1}x_i^*$. 情形 1. $x^*\notin\mathcal{T}$。根据关系$0\in\mathcal{V}_p(\boldsymbol{x}^*)$，可知对于 P $<p\leq$ P + p（分别对于 P + p $<p\leq 2$P），若 $x^*<\tau_{p-\mathrm{P}}$（分别若$x^*>\tau'_{2\mathrm{P}+1-p}$），则 $x_p^*=\theta_p$。在另一种情况下，对于 P $<p\leq$ P + p（分别对于 P + p $<p\leq 2$P），若$x^*>\tau_{p-\mathrm{P}}$（分别若 $x^*<\tau'_{2\mathrm{P}+1-p}$），则有 $x_p^*=0$。令 $i=\max\{k\in[\mathrm{p}]\mid\tau_k>x^*\}$ 和$j=\max\{k\in[\mathrm{p}']\mid\tau'_k<x^*\}$, 其中若前一个（分别后一个）集合为空，则 $i=1$（分别 j=0）。由此可得 $x^*\in[\eta_i+\eta'_j,\eta_{i+1}+\eta'_{j+1}+\zeta_0]$ 且 $\max\{\tau_{i+1},\tau'_j\}<x^*<\min\{\tau_i,\tau'_{j+1}\}$。于是，点 $\boldsymbol{x}^*$ 可表征为

$$(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_{\mathrm{P}}^*,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_i,0,\ldots,0,\rho'_j,\ldots,\rho'_1). \tag{A.2}$$

p^{th} 元素 $\boldsymbol{x}^*$, $p\in[\mathrm{P}]$, 与模仿者相关；若在均衡点 $\boldsymbol{x}^*$ 处同时满足关系 $u^{\mathrm{A}}(\boldsymbol{x}^*)<u^{\mathrm{B}}(\boldsymbol{x}^*)$ 和 $u^{\mathrm{A}}(x^*)<u^{\mathrm{B}}(x^*)$（分别为 $u^{\mathrm{A}}(\boldsymbol{x}^*)>u^{\mathrm{B}}(\boldsymbol{x}^*)$ 和 $u^{\mathrm{A}}(x^*)>u^{\mathrm{B}}(x^*$），则该元素等于零（分别为 θ_p）。对于每个 $p\in[\mathrm{P}]$，状态 (A.2) 中的 $x_p^*=\theta_p$（分别为 $x_p^*=0$）刻画了一个截然分明型（分别为无模仿干净切割型）状态。 p^{th} 元素 $\boldsymbol{x}^*$, $p\in[\mathrm{P}]$ 的另一种可能情形是： $\mathcal{V}_p(\boldsymbol{x}^*)$， $p\in[\mathrm{P}]$, 不是单元素集。根据引理 A2，若 $x^*\notin\mathcal{T}$，且对于某个 $p\in[\mathrm{P}]$, $\mathcal{V}_p(\boldsymbol{x}^*)$不是单元素集，则 $\boldsymbol{x}^*$只有在 $u^{\mathrm{A}}(x^*)=u^{\mathrm{B}}(x^*)$（等价地， $x^*\in\mathcal{C}$）时才可能是均衡。结合 (A.2) 和 $x^*\in\mathcal{C}$，即可得到混合截然分明型种群状态的刻画。情形 2。 $x^*\in\mathcal{T}$。假设对于 $i\in[\mathrm{p}]$， $x^*=\tau_i$ 成立。按照情形 1 中的类似推理，可得 $x^*\in[\eta_{i-1}+\eta'_j,\eta_i+\eta'_j+\zeta_0]$, 其中 $j=\max\{k\in\{0\}\cup[\mathrm{p}']\mid\tau'_k<x^*\}$。结合这一点及 $\sum^{2\mathrm{P}}{}_{p=1}x_p^*=\tau_i$, 均衡点 $\boldsymbol{x}^*$ 应具有形式 $\left(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_{\mathrm{P}}^*,\rho_1,\ldots,\rho_{i-1},\tau_i-(\eta_{i-1}+\eta'_j+\sum\mathrm{P}_{p=1}x_p^*)\right.$ $\left.0,\ldots,0,\rho'_j,\ldots,\rho'_1\right)$. 若 $x^*=\tau'_j$, 对于某个 $j\in[\mathrm{p}']$, 类似的推理可得 $x^*\in[\eta_i+\eta'_{j-1},\ \eta_i+\eta'_j+\zeta_0]$ 以及该点的刻画

$$\left(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_{\mathrm{P}}^*,\rho_1,\ldots,\rho_i,0,\ldots,0,\tau'_j-(\eta'_{j-1}+\eta_i+\sum_{p=1}^{\mathrm{P}}x_p^*),\rho'_{j-1},\ldots,\rho'_1\right)$$

对于点 $\boldsymbol{x}^*$。模拟 与情形 *1*中的论证类似，给定引理 A2，容易证明 i f

$$\dot{\tilde{x}} \in \tilde{\mathcal{X}}(\tilde{x}, \boldsymbol{x}), \quad \tilde{x}(0) = \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x}(0), \tag{A.3}$$

$$\tilde{\mathcal{X}}(\tilde{x}, \boldsymbol{x}) = \begin{cases} [\eta_{i-1} + \eta'_j + \zeta_0 - \tilde{x}, \eta_i + \eta'_j + \zeta_0 - \tilde{x}], & \text{if } \exists i(\tilde{x} = \tau_i), u^{\mathtt{A}}(\tilde{x}) > u^{\mathtt{B}}(\tilde{x}), \text{ and } u^{\mathtt{A}}(\boldsymbol{x}) > u^{\mathtt{B}}(\boldsymbol{x}), \\ [\eta_i + \eta'_{j-1} + \zeta_0 - \tilde{x}, \eta_i + \eta'_j + \zeta_0 - \tilde{x}], & \text{if } \exists j(\tilde{x} = \tau'_j), u^{\mathtt{A}}(\tilde{x}) > u^{\mathtt{B}}(\tilde{x}), \text{ and } u^{\mathtt{A}}(\boldsymbol{x}) > u^{\mathtt{B}}(\boldsymbol{x}), \\ [\eta_{i-1} + \eta'_j - \tilde{x}, \eta_i + \eta'_j - \tilde{x}], & \text{if } \exists i(\tilde{x} = \tau_i), u^{\mathtt{A}}(\tilde{x}) < u^{\mathtt{B}}(\tilde{x}), \text{ and } u^{\mathtt{A}}(\boldsymbol{x}) < u^{\mathtt{B}}(\boldsymbol{x}), \\ [\eta_i + \eta'_{j-1} - \tilde{x}, \eta_i + \eta'_j - \tilde{x}], & \text{if } \exists j(\tilde{x} = \tau'_j), u^{\mathtt{A}}(\tilde{x}) < u^{\mathtt{B}}(\tilde{x}), \text{ and } u^{\mathtt{A}}(\boldsymbol{x}) < u^{\mathtt{B}}(\boldsymbol{x}), \\ [\eta_{i-1} + \eta'_j - \tilde{x}, \eta_i + \eta'_j + \zeta_0 - \tilde{x}], & \text{if } \exists i(\tilde{x} = \tau_i) \text{ and } \Big(u^{\mathtt{A}}(\tilde{x}) = u^{\mathtt{B}}(\tilde{x}) \text{ or} \\ & \quad \operatorname{sgn}(u^{\mathtt{A}}(\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x}) - u^{\mathtt{B}}(\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x})) \neq \operatorname{sgn}(u^{\mathtt{A}}(\boldsymbol{x}) - u^{\mathtt{B}}(\boldsymbol{x}))\Big), \\ [\eta_i + \eta'_{j-1} - \tilde{x}, \eta_i + \eta'_j + \zeta_0 - \tilde{x}], & \text{if } \exists j(\tilde{x} = \tau'_j) \text{ and } \Big(u^{\mathtt{A}}(\tilde{x}) = u^{\mathtt{B}}(\tilde{x}) \text{ or} \\ & \quad \operatorname{sgn}(u^{\mathtt{A}}(\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x}) - u^{\mathtt{B}}(\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x})) \neq \operatorname{sgn}(u^{\mathtt{A}}(\boldsymbol{x}) - u^{\mathtt{B}}(\boldsymbol{x}))\Big), \\ [\eta_i + \eta'_j - \tilde{x}, \eta_i + \eta'_j + \zeta_0 - \tilde{x}], & \text{if } \exists i, j(\tilde{x} \in (\max\{\tau'_j, \tau_{i+1}\}, \{\tau'_{j+1}, \tau_i\})) \\ & \text{and } \Big(u^{\mathtt{A}}(\tilde{x}) = u^{\mathtt{B}}(\tilde{x}) \text{ or } \operatorname{sgn}(u^{\mathtt{A}}(\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x}) - u^{\mathtt{B}}(\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x})) \neq \operatorname{sgn}(u^{\mathtt{A}}(\boldsymbol{x}) - u^{\mathtt{B}}(\boldsymbol{x}))\Big), \\ \{\eta_i + \eta'_j + \zeta_0 - \tilde{x}\}, & \text{if } \exists i, j(\tilde{x} \in (\max\{\tau'_j, \tau_{i+1}\}, \{\tau'_{j+1}, \tau_i\})), u^{\mathtt{A}}(\tilde{x}) > u^{\mathtt{B}}(\tilde{x}), \text{ and } u^{\mathtt{A}}(\boldsymbol{x}) > u^{\mathtt{B}}(\boldsymbol{x}), \\ \{\eta_i + \eta'_j - \tilde{x}\}, & \text{if } \exists i, j(\tilde{x} \in (\max\{\tau'_j, \tau_{i+1}\}, \{\tau'_{j+1}, \tau_i\})), u^{\mathtt{A}}(\tilde{x}) < u^{\mathtt{B}}(\tilde{x}), \text{ and } u^{\mathtt{A}}(\boldsymbol{x}) < u^{\mathtt{B}}(\boldsymbol{x}). \end{cases}$$

$x^* \notin \mathcal{C}$ 且 $\boldsymbol{x}^* \in \mathsf{Q}$，则 $\mathcal{V}_p(\boldsymbol{x}^*)$，$p \in [\mathsf{P}]$, 为单点集。因此，第 p^{th} 个元素（属于 $\boldsymbol{x}^*$）$p \in [\mathsf{P}]$,为零（相应地为 θ_p），若在均衡点 $\boldsymbol{x}^*$处 $u^{\mathtt{A}}(\boldsymbol{x}^*) < u^{\mathtt{B}}(\boldsymbol{x}^*)$（相应地，$u^{\mathtt{A}}(\boldsymbol{x}^*) > u^{\mathtt{B}}(\boldsymbol{x}^*)$）成立。这些条件刻画了 $x^* = \tau_i$、$i \in [\mathsf{p}]$ 的非混合型非从众驱动，以及 $x^* = \tau'_j$、$j \in [\mathsf{p}']$. 的非混合从众者驱动。现假设 $x^* \in \mathcal{T} \cap \mathcal{C}$。设 $x^* = \tau_i$，对于 $i \in [\mathsf{p}]$; 情形 $x^* = \tau'_j$，对于 $j \in [\mathsf{p}']$，可类似处理。元素 p（属于 $\boldsymbol{x}^*$）$p \in$（$[\mathsf{P}] \cup \{i + \mathsf{P}\}$）可在区间 $[0, \theta_p]$ 内取任意值，只要$\sum_{p=1}^{\mathsf{P}} x^*_p + x^*_{i+\mathsf{P}} = \tau_i - (\eta_{i-1} + \eta'_j)$。$\boldsymbol{x}^*$的其余元素可类似于先前研究的情形加以刻画。这刻画了一个混合型非从众驱动状态。因此，（10）的每一个均衡点 $\boldsymbol{x}^*$ 都是定义5中所定义的状态之一。□

引理 *3*的证明。 该引理可通过应用微分包含均衡点的定义，并遵循 [2, 引理 2], 证明中的步骤来证明，因篇幅限制而省略。□

引理 4的证明。我们证明混合型清晰均衡点的不稳定性。从众驱动均衡点的不稳定性以及其余均衡点的稳定性，可用与 [2]中定理2的证明类似的论证来说明。设 a_p、b_p、c_p 和 d_p 表示与类型p相关联的收益矩阵的元素。由此可得，$u^{\mathtt{A}}_{i(q)}(0)$（相应地，$u^{\mathtt{B}}_{i(q)}(0)$）等于 $b_{i(q)}$（相应地，$d_{i(q)}$）。设 $i = i(q)$（相应地，$j = j(q)$）。我们证明不等式 $b_i < d_j$ 蕴含混合型干净截断均衡点 q的不稳定性。由 $u^{\mathtt{A}}(q) = u^{\mathtt{A}}_i(q)$、$u^{\mathtt{B}}(q) = u^{\mathtt{B}}_j(q)$以及 $u^{\mathtt{A}}(q) = u^{\mathtt{B}}(q)$，我们得出$(a_i - b_i)q + b_i = (c_j - d_j)q + d_j$。关系 $b_i < d_j$与 $q > 0$蕴含$(-a_i - d_j + b_i + c_j) < 0$。由此得到 $q = (b_i - d_j)/(-a_i - d_j + b_i + c_j)$。我们首先证明如下陈述

$$\exists \epsilon > 0 \forall x \in (q - \epsilon, q), \Big(u^{\mathtt{A}}(x) < u^{\mathtt{B}}(x)\Big) \tag{A.4}$$

蕴含不等式 $b_i < d_j$。在 (A.4) 下，$u^{\mathtt{A}}_i(q - \epsilon) < u^{\mathtt{B}}_j(q - \epsilon)$，对于足够小的正$\epsilon$.，由此可得

$$(b_i - d_j) < (c_j - d_j + b_i - a_i)(q - \epsilon). \tag{A.5}$$

若 $b_i - d_j > 0$，由于 $b_i - d_j$ 与 $(c_j - d_j + b_i - a_i)$ 同号，方程 (A.5) 蕴含 $q < q - \epsilon$，这与 $\epsilon.$ 的正性相矛盾。若 $b_i = d_j$，则要么 q 为零，要么项 $(c_j - d_j + b_i - a_i)$ 为零。可以容易地证明原点不是均衡，这意味着 q 不能为零。此外，根据假设 3，若 $b_i = d_j$，则 $i = j$。这意味着点 q 等于某个阈值。然而，根据混合型干净截断均衡点的定义，q 不等于任何阈值。因此，$b_i - d_j < 0$。类似地，可以证明关系 $b_i < d_j$ 蕴含 (A.4)。给定 (A.4)，证明的其余部分可利用稳定性的定义给出，并遵循 [2] 中定理2的证明。□

命题 *3* 的证明。鉴于抽象动力学是一维的，结合吸引域的定义，均衡点 $q^*_{k,k+1}$ 在 $k \in [\mathtt{Q} - 1]$ 下的不稳定性，以及均衡点 q^*_k 在 $k \in [\mathtt{Q}]$ 下的渐近稳定性，结论显然成立。□

引理5的证明。我们证明由非从众者驱动的均衡点情形。其他类型的均衡也可用类似方法处理。我们证明 $q \in \mathcal{C}$ 的情形；其他情形也可用类似方法处理。设 $q = \tau_i$，其中 $i \in [$ P]。有 $q \in (\eta_{i-1} + \eta'_j, \eta_i + \eta'_j + \zeta_0)$。集合 $\mathrm{R}^n_{i\ ,j}$ 中的任意点 $\boldsymbol{q}$ 都满足抽象平衡点 q 的引理第一部分。这显然成立，因为 $\mathrm{R}^n_{i\ ,j}$ 的每个元素中的全部 2P 个元素之和等于 τ_i. 现在，我们转向第二部分。反设存在一个均衡点 $\boldsymbol{q} \in \mathrm{Q}$，使得 $\sum^{2\mathrm{P}}{}_{p=1}\, q_p$ 不是抽象平衡点。根据引理2，连续时间动力学的任意均衡点都属于定义5中定义的七种类别之一。如果 $\boldsymbol{q}$ 是干净切割（分别为无模仿干净切割），那么 $\sum^{2\mathrm{P}}{}_{p=1}\, q_p$ 等于 $q = \eta'_j + \eta_i + \zeta_0$（分别为 $q = \eta'_j + \eta_i$），满足 $\max\{\tau_{i+1}, \tau'_j\} < q < \min\{\tau_i, \tau'_{j+1}\}$ 且 $u^{\mathtt{A}}(\eta_i + \eta'_j + \zeta_0) > u^{\mathtt{B}}(\eta_i + \eta'_j + \zeta_0)$（分别满足 $\max\{\tau_{i+1}, \tau'_j\} < \eta'_j + \eta_i < \min\{\tau_i, \tau'_{j+1}\}$ 且 $u^{\mathtt{A}}(\eta_i + \eta'_j) < u^{\mathtt{B}}(\eta_i + \eta'_j)$）。然而，这正是抽象动力学中干净切割（分别为无模仿干净切割）均衡点的特征。因此，点 $\boldsymbol{q}$ 不可能是干净切割（分别为无模仿干净切割）。对连续时间种群动力学的其他类型进行类似推理，也会导出矛盾。证毕。□

定理*4*证明的辅助引理

我们给出两个额外的引理，以便于定理4的证明。为此，我们定义集值映射 $\mathcal{S}(\boldsymbol{x})$，它将每个 $\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{ss} - \boldsymbol{\mathcal{Q}}$ 映射到 $\{\mathrm{P}+1, \mathrm{P}+2, \ldots, 2\mathrm{P}\}$ 的一个子集 $\mathcal{S}(\boldsymbol{x})$，使得任意 $p \in \mathcal{S}(\boldsymbol{x})$ 都满足 $\tau_{p-\mathrm{P}} \in \mathcal{C}$、$x_{p-\mathrm{P}} \in \{0, \theta_{p-\mathrm{P}}\}$ 和 $x_p \in \{0, \theta_p\}$；其中，对于 $\mathrm{p} < j < \mathrm{P}$，我们定义 $\tau_j = \tau'_{\mathrm{P}+1-j}$。事实上，集合 $\mathcal{S}(\boldsymbol{x})$ 的每个元素都是某个最佳响应类型的索引，该类型的阈值属于 $\mathcal{C}$，且其在 $\boldsymbol{x}$ 中的相关分量（包括对应的模仿分量）都位于边界。这些类型可能导致在种群状态 $\boldsymbol{x}$ 下最大效用与最大活跃效用出现分歧，其中 $\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x}$ 等于与这些类型相关联的阈值。

引理 A3 *Co*　　考虑连续时间群体动力学(10)。假设集合 $\mathcal{S}(\boldsymbol{x}$<style id='7>(0　　))

为空，并且

$$\operatorname{sgn}\Big(u^{\mathtt{A}}(\boldsymbol{x}(t))-u^{\mathtt{B}}(\boldsymbol{x}(t))\Big)=\operatorname{sgn}\Big(u^{\mathtt{A}}(\sum_{p=1}^{2\mathtt{P}}x_p(t))-u^{\mathtt{B}}(\sum_{p=1}^{2\mathtt{P}}x_p(t))\Big) \tag{A.6}$$

对 t成立 $=0$。那么，在假设 *1-3* 下，对所有 $t\geq 0$，等式 (A.6) 均成立 .

由于篇幅限制，省略证明。

引理 A4 假设连续时间群体动力学的初始条件满足 $\mathbf{1}^\top\boldsymbol{x}(0)\in\mathcal{A}(q_k^*)$，其中某个 $k\in[\mathtt{Q}]$。那么，在假设 *1-3* 下， A-玩家的种群比例收敛到 q_k^*.

为证明这一点，我们将抽象动力学 (14) 的演化与 A-玩家的种群比例 (A.3) 的演化联系起来，假设这两种动力学具有相同的初始条件 $\mathbf{1}^\top\boldsymbol{x}_0\in\mathcal{A}(q_k^*)$，其中某个 $k\in[\mathtt{Q}]$。标量动态 (14) 和 (A.3) 的轨迹是否对所有 $t>0$ 重合，取决于等式 (A.6) 在 $t=0$, 是否成立，以及初始条件是否位于边界上。即使它们在某个时刻发生分歧，我们也会证明，在某个有限时间后，(14) 和 (A.3) 的活跃情形将变得相同，并保持一致。此时，我们将抽象状态重置为与当前的 A-玩家种群比例相匹配。由于抽象动力学仅是一种辅助工具，这种重置是有效的，并有助于我们证明，只要 $\mathbf{1}^\top\boldsymbol{x}_0\in\mathcal{A}(q_k^*)$，种群比例就会收敛到 q_k^*。注意，种群动力学遵循 (A.3) 中微分包含的一种选取。因此，在下面的证明中，当两个系统的轨迹集合一致时，我们默认研究与支配 A-玩家种群比例的选取相匹配的抽象动力学选取。在下面的证明中，记号 t^- （分别为 t^+）表示实数轴在 t 处的左侧（分别为右侧）极限点；直观地说，它表示时间 t之前（分别之后）的瞬间。

考虑满足 $\mathbf{1}^\top\boldsymbol{x}_0\in\mathcal{A}(q_k^*)$ 的初始条件 $\boldsymbol{x}_0$。我们进一步假设 $k\notin\{1,\mathtt{Q}\}$；类似的推理也适用于情形 $k\in\{1,\mathtt{Q}\}$。根据命题 3， $\mathcal{A}(q_k^*)=(q_{k-1,k}^*,q_{k,k+1}^*)$。现在，根据初始条件 $\boldsymbol{x}_0$，可能出现两种情形：情形 1，即 (A.6) 对 $t=0$ 成立；情形 2，即其他情况。情形 1。此处，若抽象动力学 (14) 从与动力学 (A.3) 相同的初始条件出发，即 $\hat{}x(0)=\mathbf{1}^\top\boldsymbol{x}_0$，则两个系统中的活跃情形相同。第 1 部分）若 $\boldsymbol{x}_0\notin\partial\mathrm{X}_{ss}$，对任意有限时间 $t>0$，有 $\boldsymbol{x}(t)\notin\partial\mathrm{X}_{ss}$，因此 (A.6) 成立。这意味着两个系统 (14) 和 (A.3) 的解轨迹集合等价。另一方面，根据命题 3，若初始条件满足 $\hat{}x(0)\in\mathcal{A}(q_k^*)$，则抽象动力学趋近于点 q_k^*。由此， A玩家的种群比例收敛至点 q_k^*. 。第 2 部分）$\boldsymbol{x}_0\in\partial\mathrm{X}_{ss}$ 且 $\mathcal{S}(\boldsymbol{x}(0))=\varnothing$。根据引理 A3，(A.6) 对所有时间均成立，因此第 1 部分中的推理适用。第 3 部分） $\boldsymbol{x}_0\in\partial\mathrm{X}_{ss}$ 且 $\mathcal{S}(\boldsymbol{x}(0))\neq\varnothing$。令$\mathcal{I}=\Big\{t>0\,|\,\exists M>0,\ \ p\in\mathcal{S}(\boldsymbol{x}(0))\Big(\sum^{2}\mathrm{P}_{k=1}x_k(t)=\tau_{p-\mathtt{P}},\ \ t<M\Big)\Big\}$，其中 $x_k,\ \ k\in[2\mathtt{P}]$, 的演化由 (10) 支配。若 $\mathcal{I}=\varnothing$, 则在所有时间，种群状态边界处元素对应的非活跃效用都严格小于相应的活跃效用。因此，第 1 部分中的推理成立。现在，令 $\mathcal{I}\neq\varnothing.$ 。令$t_1=\min\{t\mid t\in\mathcal{I}\}$，并将集合 $\mathcal{S}(\boldsymbol{x}(0))$ 中与 t_1 对应的元素记为 p_1，

即 $\sum^{2}\mathrm{P}_{k=1}\, x_k(t_1) = \tau_{p_1}\text{–P}_{\cdot}$。我们假设 $\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x}(0) < q_k^*$，并分析 τ_{p_1}–P 为从众智能体的阈值的情形，即对于足够小的正 $\epsilon.$，$u^{\mathtt{A}}(\sum^{2}\mathrm{P}_{k=1}\, x_k(t_1-\epsilon)) < u^{\mathtt{B}}(\sum^{2}\mathrm{P}_{k=1}\, x_k(t_1-\epsilon))$。其他情形可用类似方法处理。根据上述论证，很容易看出，对于 $t < t_1$，抽象动力学的轨迹集合与 A玩家的种群比例相同。若 $x_{p_1}(t_1^-) \in (0, \theta_{p_1})$ 或 $x_{p_1}\text{–P}(t_1^-) \in (0, \theta_{p_1}\text{–P})$，则 $u^{\mathtt{A}}_{p_1}$–P 和 $u^{\mathtt{B}}_{p_1}$–P 均处于活跃状态，并被纳入最大活跃效用的计算。因此，对于某个足够小的值 ϵ_1，当 $t \in (t_1-\epsilon_1, t_1+\epsilon_1)$ 时，抽象状态 (14) 和 A玩家的种群比例 (A.3) 的演化保持一致。现在考虑 $x_{p_1}(t_1^-)$ 和 $x_{p_1}\text{–P}(t_1^-)$ 均为零的情形。在状态 $\boldsymbol{x}(t_1)$ 下，零是集值映射 $\mathcal{V}_{p_1}(\boldsymbol{x}(t_1))$ 和 $\mathcal{V}_{p_1}\text{–P}(\boldsymbol{x}(t_1))$ 的一个元素。对于 $\dot{x}_{p_1}(t_1) \in \mathcal{V}_{p_1}(\boldsymbol{x}(t_1))$ 和 $\dot{x}_{p_1}\text{–P} \in \mathcal{V}_{p_1}\text{–P}\boldsymbol{x}(t_1)$ 的所有可能取值（零除外），动力学 (14) 和 (A.3) 的演化保持一致，前述情形中的论证仍然成立。反之，当 $\dot{x}_{p_1}$ 和 $\dot{x}_{p_1}\text{–P}$ 在 $t = t_1$ 处均为零时，动力学 (14) 和 (A.3) 的活跃情形不同。点 $\tau_{p_1}\text{–P} \neq q_k^*$ 不是 (14) 的均衡——点 q_k^* 是区间 $\mathcal{A}(q_k^*))$ 上唯一的均衡——因此也不是 $0 \notin \mathcal{X}(\tau_{p_1}\text{–P})$ 的均衡。此外，$\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x}(0) < q_k^*$ 导致 $\min\left(y \in \mathcal{X}(\tau_{p_1}\text{–P})\right) > 0$，从而 $\min\left(y \in \tilde{\mathcal{X}}(\tau_{p_1}\text{–P})\right) > 0$。由此，在时间 $t = t_1^+$，抽象状态和 $\sum^{2}\mathrm{P}_{k=1}\, x_k$ 均大于 $\tau_{p_1}\text{–P}_{\cdot}$。因此，在 $t = t_1^+$ 处，(A.3) 的动力学为 $[\eta_i + \eta_j' - \sum^{2}\mathrm{P}_{k=1}\, x_k, \eta_i + \eta_j' + \zeta_0 - \sum^{2}\mathrm{P}_{k=1}\, x_k]$；而对于 (14)，我们有 $\{\eta_i + \eta_j' + \zeta_0 - \hat{}x\}$，其中 $j = 2\mathrm{P} + 1 - p_1$ 且 $i = \max\{k \leq \mathrm{p} \mid \tau_k > \tau_j'\}$。根据 (10d)，$\sum^{2}\mathrm{P}_{p=1}\, x_p(t_1^+) > \tau_{p_1}\text{–P}$，我们有 $\dot{x}_{p_1}(t_1^+) = \theta_{p_1} - x_{p_1}(t_1^+)$，由此得到 $x_{p_1}(t_1^+) > 0$。这意味着，当 $t = t_1 + \varepsilon_1$ 且 ε_1 足够小时，(A.6) 成立。现在，我们通过将时间点 $t_1 + \varepsilon_1$ 的抽象状态设为 $\sum^{2}\mathrm{P}_{k=1}\, x_k(t_1+\varepsilon_1)$，重置抽象动力学。随后，抽象动力学与 A玩家种群比例的演化等价（(14) 和 (A.3)）。显然，$\sum^{2}\mathrm{P}_{k=1}\, x_k(t_1+\varepsilon_1) \in \mathcal{A}(q_k^*)$，因此两者都朝 q^* 移动，直到 A玩家的种群比例达到集合 $\mathcal{I}$ 中第二小的元素。对于集合 $\mathcal{I}$ 中第二小的元素以及集合 $\mathcal{I}$ 中的其他元素，我们沿用前述推理。令 t^* 为集合 $\mathcal{I}$ 中最大的元素。通过重置抽象动力学，并将其状态设为 $\sum^{2}\mathrm{P}_{k=1}\, x_k(t^*+\varepsilon)$，其中正值 ε 足够小，这两种动力学在所有有限时间内的演化都保持一致，证明的其余部分与 $\boldsymbol{x}(0) \notin \mathrm{X}_{ss}.$ 的情形相同。现在我们研究情形 2，即 (A.6) 在 $t = 0$ 处不成立。不失一般性，令 $r \in [\mathrm{P}]$ 和 $q \in [\mathrm{P}]$ 分别满足 $u^{\mathtt{A}}(\sum^{2}\mathrm{P}_{k=1}\, x_k(0)) = u^{\mathtt{A}}_q(\sum^{2}\mathrm{P}_{k=1}\, x_k(0))$ 和 $u^{\mathtt{B}}(\sum^{2}\mathrm{P}_{k=1}\, x_k(0)) = u^{\mathtt{B}}_r(\sum^{2}\mathrm{P}_{k=1}\, x_k(0)$。首先，假设 $\sum^{2}\mathrm{P}_{k=1}\, x_k(0) \notin \mathcal{T}$。在这种情况下，只要 $u^{\mathtt{A}}_q(\sum^{2}\mathrm{P}_{k=1}\, x_k(0)) > u^{\mathtt{B}}_q(\sum^{2}\mathrm{P}_{k=1}\, x_k(0))$ 和 $u^{\mathtt{B}}_r(\sum^{2}\mathrm{P}_{k=1}\, x_k(0)) > u^{\mathtt{A}}_r(\sum^{2}\mathrm{P}_{k=1}\, x_k(0))$ 成立，$x_{\mathrm{P}+q}(0) = 0$ 或 $x_{\mathrm{P}+r}(0) = \theta_{\mathrm{P}+r}$ 至少有一个成立。前一种情况下，集值映射 $\mathcal{V}_{\mathrm{P}+q}(\boldsymbol{x}(0))$ 等于 $\{\theta_{\mathrm{P}+q} - x_{\mathrm{P}+q}\}$，进而 $\dot{x}_{\mathrm{P}+q}(0) > 0$。类似地，后一种情况下有 $\dot{x}_{\mathrm{P}+r}(0) < 0$。于是，对某个足够小的正值 ϵ，元素 $x_{\mathrm{P}+q}(\epsilon)$ 和 $x_{\mathrm{P}+r}(\epsilon)$ 将分别不等于 0 和 $\theta_{\mathrm{P}+r}$，且方程 (A.6) 在 $t = \epsilon.$ 处成立。因此，在 $t = \epsilon$ 处重置抽象动力学，并将抽象状态设为 $\sum^{2}\mathrm{P}_{p=1}\, x_p(\epsilon)$ 后，在某个 $t > \epsilon$ 内，抽象状态与 A玩家的种群比例将以相同方式演化。另一方面，鉴于 (i) ϵ 可以任意小，(ii) (A.3) 的解是连续的，且 (iii)$\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x}_0 \in (q^*_{k-1,k}, q^*_{k,k+1})$；有 $\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x}(\epsilon) \in (q^*_{k-1,k}, q^*_{k,k+1})$。因此，证明的其余部分与情形 1 类似。现在假设 $\sum^{2}\mathrm{P}_{k=1}\, x_k(0) \in \mathcal{T}$，这意味着对于某个$p \in [\mathrm{P}].$，$\sum^{2}\mathrm{P}_{k=1}\, x_k(0) = \tau_p$。若 $p \notin \{r, q\}$，则对 $\sum^{2}\mathrm{P}_{k=1}\, x_k(0) \notin \mathcal{T}$ 所作的论证仍然有效。否则，

关系 $u_p^{\mathtt{A}}(\tau_p) = u_p^{\mathtt{B}}(\tau_p)$ 意味着 $q = p$, $r = p$ 和 $\tau_p \in \mathcal{C}$。由于方程 (A.6) 不成立，$x_{p+\mathrm{P}} = 0$ 或 $x_{p+\mathrm{P}} = \theta_{p+\mathrm{P}}$ 必有一个成立。我们重点考虑 $x_{p+\mathrm{P}} = 0$,$\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x}(0) < q_k^*$ 且 τ_p 是从众者阈值的情形，即 $p > \mathrm{P} + \mathrm{p}$；其他情形可以类似处理。因此，根据 (14) 和 (A.3)，并注意到 τ_p 不是抽象动力学的均衡点，可以很容易地得出，在 τ_p 时，集合 $\tilde{\mathcal{X}}$ 和 $\mathcal{X}$ 中的值均远离零且为正。这意味着在 $t = 0^+$ 时， $\mathtt{A}$-玩家的抽象状态和种群比例均大于 τ_p。(A.3) 在 $t = 0^+$ 处的激活情形为 $[\eta_i + \eta'_j - \sum_{k=1}^{2\mathrm{P}} x_k, \eta_i + \eta'_j + \zeta_0 - \sum_{k=1}^{2\mathrm{P}} x_k]$，而 (14) 的激活情形为 $\{\eta_i + \eta'_j + \zeta_0 - \hat{x}\}$，其中 $j = \mathrm{P} + 1 - p$ 且 $i = \max\{k \le \mathrm{p} \mid \tau_k > \tau'_j\}$。根据 (10d)， $\dot{x}_{p-\mathrm{P}}(t_1^+) = \theta_{p-\mathrm{P}} - x_{p-\mathrm{P}}(t_1^+)$，从而得到 $x_{p-\mathrm{P}}(t_1^+) > 0$。这意味着，对于 $t = \varepsilon$，关系 (A.6) 成立，其中 ε 是足够小的正值。现在，我们重置抽象动力学，并将时间点 ε_1 处的抽象状态设为 $\sum_{k=1}^{2\mathrm{P}} x_k(\varepsilon_1)$，其中 ε_1 是足够小的正值。于是，抽象动力学的演化与 $\mathtt{A}$-玩家的种群比例等价（(14) 和 (A.3)）。如果 $\mathcal{S}(\boldsymbol{x}(\varepsilon_1))$ 为空，那么抽象动力学的轨迹集合与 (A.3) 的轨迹集合相同，因此， $\mathtt{A}$-玩家的种群比例收敛到点 q_k^*。如果 $\mathcal{S}(\boldsymbol{x}(\varepsilon_1))$ 非空，则可采用情形 1-第 3 部分中的类似方法完成证明的其余部分。证明完毕。□

定理4的证明。第1项）。设 $q_k^* = \mathbf{1}^\top \boldsymbol{q}$ 表示对应于 $\boldsymbol{q}$ ∈Q的抽象平衡点，其存在性由引理5保证。我们证明点 $\boldsymbol{q}$ 为（10）的非混合型非从众驱动平衡点的情形；其他情形可类似处理。此时 q_k^* 的值等于某个非从众阈值 τ_i， $i \in [\mathrm{p}]$.考虑满足 $\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{A}(q_k^*)$ 的初始条件 $\boldsymbol{x}_0$。我们进一步假设 $k \notin \{1, \mathtt{Q}\}$；对情形 $k \in \{1, \mathtt{Q}\}$可应用类似推理。由引理 A4，容易证明 $\mathtt{A}$-参与者的种群比例在有限时间内趋近 q_k^* 的 ϵ-邻域，并且永不离开该邻域。我们取 ϵ 足够小，使得在点 q_k^*的 ϵ-邻域内，除向量 $\boldsymbol{x}$中对应于非从众者类型-i的第（$\mathrm{P}+i$）th 个元素外，（10）中的活跃情形不发生变化，即 $\Big((q_k^*-\epsilon,\ q_k^*+\epsilon) - \{q_k^*\}\Big) \cap \Big(\mathcal{C} \cup \mathcal{T}\Big) = \varnothing$.于是，对于 $p \in (\{\mathrm{P}+1,\ \ldots\ldots,\ 2\mathrm{P}\} - \{\mathrm{P}+i\})$，集值映射 $\mathcal{V}_p$要么等于 $\{\theta_p - x_p\}$，要么等于 $\{-x_p\}$，而状态 x_p 分别指数收敛到 θ_p 或0。此外， x_p 的最终渐近值与均衡点 $\boldsymbol{q}$. 的第（$\mathrm{P}+p$）th 个分量相同。至于模仿型，取决于 $u^{\mathtt{A}}(q_k^*) - u^{\mathtt{B}}(q_k^*)$ 的符号，对所有 $p \in [\mathrm{P}]$， x_p 要么收敛到 θ_p，要么收敛到0，这与向量 $\boldsymbol{q}$. 的第 p^{th} 个元素相同。注意到对任意 y， $z \in \mathbb{R}$ $|y+z| \le |y| + |z|$，并且给定 $|x_{\mathrm{P}+i}(t) - q_{\mathrm{P}+i}| = |(\sum_{p=1}^{2\mathrm{P}} x_p(t) - q_k^*) - \sum_{l \ne (\mathrm{P}+i)} (x_l(t) - q_l)|$，我们有 $|x_{\mathrm{P}+i}(t) - q_{\mathrm{P}+i}| \le |(\sum_{p=1}^{2\mathrm{P}} x_p(t) - q_k^*)| + |\sum_{l \ne (\mathrm{P}+i)} (x_l(t) - q_l)|$.上述关系式右边两项均收敛到零，这意味着：若 $u^{\mathtt{A}}(q_k^*) < u^{\mathtt{B}}(q_k^*)$，则 $x_{\mathrm{P}+i}(t) \to (q_k^* - \eta_{i-1} - \eta'_j)$；若 $u^{\mathtt{A}}(q_k^*) > u^{\mathtt{B}}(q_k^*)$，则 $x_{\mathrm{P}+i}(t) \to (q_k^* - \eta_{i-1} - \eta'_j - \zeta_0)$。至此完成第1项的证明。第2项）此处， $u^{\mathtt{A}}(q_k^*) = u^{\mathtt{B}}(q_k^*)$，并且动力学（10）并非具有孤立均衡点，而是容许一个连续统均衡。对某个 $i \in [\mathrm{p}]$，我们有 $\tau_i = \mathbf{1}^\top \boldsymbol{q}$。与第一部分的证明类似，即（$u^{\mathtt{A}}(q_k^*) \ne u^{\mathtt{B}}(q_k^*)$），可以证明：对于满足 $\Big((\tau_i-\epsilon,\ \tau_i+\epsilon) - \{\tau_i\}\Big) \cap \Big(\mathcal{C} \cup \mathcal{T}\Big) = \varnothing$的 ϵ，由（A.3）支配的 $\mathtt{A}$-参与者的种群比例在有限时间内到达点 τ_i 的 ϵ-邻域并保持在其中。因此，状态 $\boldsymbol{x}$的元素 p，除前P个元素（它们与

模仿型相关联）以及元素P $+ i$ （其阈值等于 q_k^*）之外，即$p \in \{$P $+ 1$，.....，2P$\} - \{$ P $+ i\}$，指数收敛到 q_p，即均衡点 $\boldsymbol{q}$. 的第 p^{th} 个分量。点 $\boldsymbol{q}$ 的这P $- 1$ 个分量之和为 $\eta_{i-1} + \eta'_j$，其中 $j =$ max$\{k \leq$ P′ $\mid \tau'_j < \tau_i\}$。由此以及 $\sum^2$P$_{i=1} x_i$ 收敛到 $q_k^* = \tau_i$这一事实，可以得出不等式|（$x_{\text{P}+i}$（t） $+\sum$P$_{p=1} x_p$（t）） $-$（$\tau_i - \eta_{i-1} - \eta'_j$）| ≤ |（$\sum^2P_{p=1} x_p$（$t$） $-\tau_i$）|+|$\sum$P$_{<l\leq 2}$P $_{l\neq i+}$P （x_l（t） $- q_l$）|右边两项均收敛到零，因而其左边亦然。第3项可按与第二项类似的方式处理。最后一项的证明类似于 [2] 中定理2第二部分的证明，故略去。□

定理 *3*的证明。 根据引理 1，对于序列$\langle {}^1{}_{\text{N}} \rangle_{\text{N}\in\mathcal{N}}$，具有转移概率（9）的混合种群动态马尔可夫链是动力学（10）的GSAP。转移概率（9）是齐次的，且每个种群规模N $\in \mathcal{N}$的状态空间是有限的。因此，该马尔可夫链具有不变测度。另一方面，动力学（10）的每个解都收敛到集合$\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ 中的某些元素（定理4）。这意味着集合$\boldsymbol{\mathcal{Q}}$是（10）的回归点集。由于集合$\boldsymbol{\mathcal{Q}}$包含某些孤立平衡点和/或连续统平衡点，故它是闭集，从而动力学（10）的比尔霍夫中心等于集合$\boldsymbol{\mathcal{Q}}$。据此并结合定理2，不变测度极限的支撑包含在任何包含集合$\boldsymbol{\mathcal{Q}}$的开集中. □