揭示线性自适应巡航控制的交通波：二阶宏观交通流模型

Zihao Li[a]、Quyuan Lin[b]、Fan Pu[a]、Soyoung Ahn[c]、Yunlong Zhang[a]、Jiwan Jiang[a]和Yang Zhou[a]、*

[a]*Zachry*土木与环境工程系，德克萨斯农工大学，美国德克萨斯州大学城 *77843*[b]数学与统计科学学院，克莱姆森大学，美国南卡罗来纳州克莱姆森 *29634*[c]土木与环境工程，威斯康星大学麦迪逊分校，美国威斯康星州麦迪逊 *53706*

arXiv:2602.01506v1 [math.AP] 2 Feb 2026

关键词：交通流模型 交通波 自适应巡航控制 自动驾驶车辆

交通波，即拥堵的时空传播，是交通流的一个关键特征。随着自适应巡航控制（ACC）系统得到广泛应用，并展现出同时提升效率和安全性的潜力，了解这些交通波在ACC作用下如何演化变得日益重要。然而，现有大多数分析依赖稳态指标（例如平衡间距），却忽略了ACC控制律参数（如反馈增益）；这些参数从根本上决定了高阶交通动力学。为克服这一局限，我们将ACC控制律直接嵌入动量方程，同时保留质量守恒定律。由此得到一个高阶宏观模型，其动力学由一个等价于线性ACC反馈律的二阶偏微分方程所支配。对通量雅可比矩阵的分析证实，该系统是严格双曲型的，从而保持各向异性并确保物理一致性。推导还表明，交通波的演化取决于初始状态和ACC控制参数。我们分析了波传播特性、线性退化、可容许间断及其与自适应巡航控制串稳定性的联系，并给出了相应推导。数值实验表明，在相同非稳态扰动下，与一阶模型相比，二阶模型沿波路径产生的车辆对速度偏差显著更低，这既凸显了采用二阶处理的必要性，也验证了所提框架的合理性。

* 通讯作者。电子邮箱：yangzhou295@tamu.edu。

1 引言

交通波形成与传播是理解交通动力学的基础，对于人工驾驶车辆（HDV）而言，这一问题已得到广泛研究（Newell、1993年，b；Zhang和Jin、2002年；Laval和Leclercq，2010）。交通波模型依赖于明确定义的流量-密度关系（即基本图）和流量守恒，并通过偏微分方程（PDE）加以表达。经典的Lighthill-Whitham-Richards（LWR）模型（Lighthill和Whitham，1955年；Richards，1956年）将交通概念化为类似流体的系统。LWR模型基于一阶流量守恒偏微分方程，能够描述交通波传播等关键交通现象，尤其是激波，即交通在自由流与拥堵状态之间发生突变时形成的移动界面。在LWR模型基础上，Newell的简化运动学波模型（Newell，1993年，b），也称为Rankine–Hugoniot激波（LeVeque和Leveque，1992），基于三角形基本图提供了一种简化解，其中拥堵条件下的交通波与交通状态无关，保持不变。

尽管 LWR 和简化运动学波模型能够较为合理地描述现实世界中观测到的交通波，但其简单性限制了它们捕捉更细致的高阶交通动力学的能力。这一局限促使高阶模型得以发展（Ross，1988年；K¨uhne，1984；Michalopoulos 等人，1993）。其中最著名的是 Payne–Whitham（PW）模型（Payne，1971年；Whitham，2011），该模型通过引入动量方程增加了复杂性。然而，Daganzo（1995）批评高阶模型会预测不符合物理规律的现象，例如在某些条件下出现负流量和负速度。为解决这些物理上的不一致，Zhang（1998年）提出了一种改进的非平衡模型，并证明其中的波在线性和非线性意义下均稳定（Zhang，1999年）。然而，后来发现该模型仍表现出“类气体”行为：交通速度或密度的扰动传播速度可能超过交通速度。这意味着车辆能够影响前方车辆的行为，这与真实驾驶行为的本质相悖。尽管这些效应会随时间呈指数衰减，该模型仍缺乏物理真实性（Zhang，2000）。之后，Aw–Rascle–Zhang（ARZ）模型（Aw 和 Rascle，2000；Zhang，2002年）解决了这些不一致之处，并被证明能够更好地捕捉现实世界中的交通行为，包括激波的形成与消散。

随着自动驾驶车辆（AV）的引入，涉及自动驾驶车辆的交通流研究日益受到关注（Yu 等人，2021）。自适应巡航控制（ACC）是自动驾驶车辆的一项基础跟驰功能；模拟和理论研究表明，它能够减轻交通扰动（以交通波的形式）的传播（Talebpour 和 Mahmassani，2016；Zhou 和 Ahn，2019；Van Arem 等人，2006）。然而，若干现场实验研究却得出了不同结论，报告了扰动放大的情况（Gunter 等人，2020；Stern 等人，2018；Shi 和 Li，2021；Makridis 等人，2021）。Makridis 等人（2021）指出，车头时距设置可能会影响扰动沿车队的传播（即弦稳定性）。这些发现表明，ACC设计会直接影响扰动的动态演变（Li，2022）。因此，自动驾驶车辆交通流中观察到的高阶动力学，可能与人工驾驶交通流中的情况显著不同；在人工驾驶交通流中，扰动放大十分常见（del Castillo，2001；Mahmassani，2016；Zhou 和 Ahn，2019；Li 等人，2025）。然而，一阶公式无法揭示这些由控制器驱动的效应。一旦基本图确定，LWR框架就会将所有扰动归结为波速 $\mathrm{d}(\rho_e v_e)/\mathrm{d}\rho_e$。因此，尽管底层控制动力学各不相同，任何仅在ACC反馈增益上存在差异的波都会被预测为以相同方式传播。这种内置的平衡假设掩盖了ACC实证研究（Makridis 等人，2024；Pu 等人，2024）如今所揭示的动态特征。因此，要准确描述自动驾驶车辆车流中的交通波，亟需一种既保留质量守恒、又明确体现控制律的高阶模型

。这凸显了采用高阶宏观交通模型的必要性：模型应明确纳入自动驾驶车辆跟驰控制律，以揭示控制参数如何塑造交通行为，尤其是高阶动力学方面的表现。

一些颇具影响力的研究探讨了自适应巡航控制交通流中的交通波特征或高阶特征，而非采用高阶交通流模型。例如，Levin 和 Boyles (2016) 以及 Qin 等人(2021年) 在给定平衡间距的情况下，通过自动驾驶基本图描述了波传播。然而，这些研究中的交通波是基于稳态交通特性推导的，忽略了支配高阶交通动力学的关键自适应巡航控制参数（例如反馈增益）。Jiang 等人(2024b) 在构建扩展基本图时纳入了线性反馈律，并将其与交通迟滞联系起来，但未详细分析由此产生的波动特性。Zhou 等人(2024年) 推导出了闭式波表达式，但仅适用于单频稳态振荡这一特殊情况。他们的方法无法处理复合频率扰动、非平稳振荡或自由流至拥堵相变。

为全面刻画纯ACC交通中的波传播，本文构建了一种二阶宏观模型，将线性ACC反馈律嵌入动量方程，同时保留经典的质量守恒定律，从而以闭式形式将微观跟驰行为映射为宏观波动力学。不同于依赖静态基本图或单一频率假设的现有方法，所提框架在连续体描述中保留了控制器增益，使波动直接源自ACC设计，而非仅由平衡曲线决定。这种增益感知表述给出了统一图景：扰动沿特征路径传播，过渡锋表现为Rankine–Hugoniot激波，而从自由流到拥堵的转变则由ACC介入准则明确界定。上述要素共同构成了一种全面且解析透明的替代方案，与现有方法相比，它与实证观察更加吻合。

本文其余部分安排如下。第2节推导嵌入自适应巡航控制的交通流模型及相应的交通波，并确立其双曲性和各向异性。第3节进一步给出交通波的闭式表达，并分析其在交通振荡下的相应性质。第4节讨论间断情况下的交通波，并给出激波条件和相变推导。第5节展示数值实验，以验证分析结果，并将所提模型与一阶LWR基准进行比较。第6节总结主要发现，并展望未来研究方向。

2 嵌入自适应巡航控制的交通流模型

宏观交通流模型以质量守恒原理为出发点，表示如下：

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

其中，$\rho(x,t)$ 表示交通密度，$q(x,t)$ 表示交通流率。交通流 q 通常表示为密度的函数，即 $q = \rho v(\rho)$，其中 $v(\rho)$ 表示速度-密度关系。在平衡态下，$v(\rho)$ 可表示为 $v_e(\rho)$。相应的基本图描述了交通流与密度之间的平衡关系，表示为 $q(\rho) = \rho v_e(\rho)$。

将平衡基本图代入守恒方程，可得 LWR模型：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_e(\rho))}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

尽管该模型能够捕捉拥堵形成与消散等关键现象，但它假设平衡速度 $v_e(\rho)$，且未明确考虑非平衡状态。当交通流处于非平衡状态时，加速流和减速流在 (ρ,v) 相平面中沿不同路径演变，这些路径通常会形成滞回环（Treiterer 和 Myers，1974年）。为弥补这一局限，高阶模型引入动量方程，使交通状态能够偏离平衡态。例如，ARZ模型在守恒定律的基础上补充了一个描述速度演变的动量方程：

$$v_t + vv_x = -c(\rho)v_x \tag{3}$$

其中，v_t 表示速度 v 对时间 t 的偏导数，即 $\partial v/\partial t$；v^x 表示 v 对位置 x 的偏导数。项 $c(\rho)$ 是交通密度 ρ 的函数（即 $c(\rho) = \rho v_e'(\rho)$），表示小扰动相对于交通流传播时的特征速度（或交通声速）。式（3）由跟驰模型 $\tau(s_n(t))\, a_n(t) = v_{n-1}(t) - v_n(t)$ 推导而来，其中 $\tau(\cdot)$ 表示驾驶员响应时间，并表示为间距 $s_n(t) = x_{n-1}(t) - x_n(t)$ 的函数。在该表达式中，$a_n(t)$ 和 $v_n(t)$ 分别表示第 n 辆车的加速度和速度。详细推导请参阅 Zhang（1998年、2002年）。

为了对纯ACC交通进行建模，必须考虑配备ACC的车辆的算法本质，即它们遵循预先编程的控制律，而非人工驾驶启发式策略。与人类驾驶员不同，ACC系统通常基于测得的间距和相对速度调节加速，且往往通过线性反馈控制实现（Li 等人，2024a；Jiang 等人，2024a，2025）。因此，我们将ARZ模型中的动量方程替换为一种广泛使用的线性反馈控制律，以体现ACC车辆独特的跟驰行为。该公式得到了现有研究标定结果的支持（Jiang 等人，2024a；Li 等人，2024a），这些结果表明，许多实际ACC实现与线性反馈结构高度吻合。此外，该控制律的闭式形式有助于解析可处理性，并使扰动衰减特性（如局部稳定性和弦稳定性）的理论推导成为可能（Zhou和 Ahn，2019年；Li，2022；Li 等人，2024b；Yue等人，2024年）。

根据 Yi 和 Horowitz (2006年)，配备自适应巡航控制的车辆以两种不同模式运行。当交通密度满足 $\rho < \rho_c$（即密度低于通行能力）且车辆以设定的自由流速度 v_f 巡航时，控制器保持不激活，不施加加速。当密度满足 $\rho_c \le \rho < \rho_j$（其中 ρ_j 表示拥堵密度），或者车辆速度偏离 v_f 时，自适应巡航控制控制器会激活线性反馈律，根据前车调节间距和相对速度。因此，控制律为

$$a_n(t) = k_s(\rho,v)\left[s_n(t) - s_n^*(t)\right] + k_v(\rho,v)\left[v_{n-1}(t) - v_n(t)\right], \tag{4}$$

其中 $s_n^*(t)$是第 n 辆车的期望间距，由恒定时距策略确定（Darbha 和 Rajagopal，1999年；Yi 和 Horowitz，2006年），即 $s_n^*(t) = \tau v_n(t) + L$。其中，$\tau$ 表示期望恒定时距，L 表示静止距离。

术语 $k_s(\rho, v)$ 和 $k_v(\rho, v)$ 分别表示与密度和速度相关的间距反馈增益及速度差反馈增益，其定义见式（5）。这种分段公式反映了自适应巡航控制系统的运行特征：在自由流状态（$0 < \rho \le \rho_c$）下，车辆处于巡航控制模式，一旦达到自由流速度，便保持恒定速度。在拥堵状态（$\rho_c < \rho < \rho_j$）下，或当 $v < v_f$ 时，自适应巡航控制系统会主动调节与紧邻前车的车间距和相对速度。

$$k_s(\rho,v)=\begin{cases}0, & 0<\rho\le\rho_c \text{ and } v=v_f\\ k_s, & \text{otherwise}\end{cases}\qquad k_v(\rho,v)=\begin{cases}0, & 0<\rho\le\rho_c \text{ and } v=v_f\\ k_v, & \text{otherwise}\end{cases} \tag{5}$$

明确自适应巡航控制的控制律后，我们接着推导相应的动量方程。

命题 1。 由式 (4) 中的线性反馈控制律推导出的动量方程为：

$$v_t + (v-k_v(\rho,v)s)v_x + (-s+v\tau+L)k_s(\rho,v) = 0. \tag{6}$$

证明。 记$v(x,t)$和$s(x,t)$分别为速度函数和间距函数，并令$v_n(t)=v(x_n(t),t)$以及$s_n(t)=s(x_n(t),t)$。假设$v(x,t)$和$s(x,t)$均足够光滑。控制律可改写为

$$\frac{d}{dt}v(x_n(t),t)=k_s(\rho,v)\left[s(x_n(t),t)-v(x_n(t),t)\,\tau-L\right]+k_v(\rho,v)\frac{d}{dt}\left[s(x_n(t),t))\right]. \tag{7}$$

于是得到下式，其中省略了（$x_n(t),t$）以提高可读性。

$$vv_x+v_t=k_s(\rho,v)\left[s-v\tau-L\right]+k_v(\rho,v)\left(vs_x+s_t\right). \tag{8}$$

结合车辆守恒 $s_t+vs_x=sv_x$，该关系由 $s=\frac{1}{\rho}$ 和守恒定律（式（1））推得，命题 1 由此得出。□

为进一步分析嵌入自适应巡航控制的交通流模型中的交通波，我们将交通流模型整理为向量形式 $\mathrm{U}_t+\mathrm{J(U)U}_x=\mathrm{S(U)}$，其中 $\mathrm{U}=[\rho,\mathrm{v}]^T$ 表示交通变量的状态向量，J(U)为通量雅可比矩阵，S(U)表示用于描述外部因素对交通流影响的源项。通量雅可比矩阵的特征值代表特征波，可揭示交通密度或速度中的微小扰动如何在交通流中传播（Newell，1993年a、2002年；Zhang，2002年）。本研究假设 $\rho>0$（即非真空），以确保 $\mathrm{s}=\frac{1}{\rho}$ 有明确定义。然而，当 $\rho=0$（即真空）时，这并不会造成问题，因为交通空隙将两个独立的偏微分方程问题分隔开来，从而确保其中一个问题的解不会影响另一个问题的解（Leclercq 等人，2007；Wagner，1987）。

通过代入 ng $q=\rho v$ 并应用乘积法则，质量守恒定律可展开为：

$$\rho_t+(\rho v)_x=\rho_t+\rho_x v+\rho v_x=0. \tag{9}$$

将质量守恒定律（式（9））和自适应巡航控制动量方程（式（6））耦合起来，并利用关系式 $s=\frac{1}{\rho}$，嵌入自适应巡航控制的交通流模型可写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\rho\\ v\end{bmatrix}_t+\begin{bmatrix}v & \rho\\ 0 & v-k_v(\rho,v)\frac{1}{\rho}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\rho\\ v\end{bmatrix}_x=\begin{bmatrix}0\\ \left(\frac{1}{\rho}-v\tau-L\right)k_s(\rho,v)\end{bmatrix}. \tag{10}$$

通量雅可比矩阵和源项为：

$$\mathbf{J}(\mathbf{U})=\begin{bmatrix}v & \rho\\ 0 & v-k_v(\rho,v)\frac{1}{\rho}\end{bmatrix},\qquad \mathbf{S}(\mathbf{U})=\begin{bmatrix}0\\ \left(\frac{1}{\rho}-\tau v-L\right)k_s(\rho,v)\end{bmatrix}. \tag{11}$$

雅可比矩阵的特征值为：

$$\lambda_1 = v > \lambda_2 = v - k_v(\rho, v)\frac{1}{\rho}. \tag{12}$$

相应的特征向量 r_1 和r_2 推导如下：

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{k_v(\rho, v)}{\rho^2} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

在自由流状态（$0 < \rho \leq \rho_c$，$v = v_f$）下，反馈增益k_s和k_v均为零，模型退化为一阶LWR模型。在拥堵状态下，交通流由严格双曲型二阶平衡律（引理1）支配，该模型能够更好地捕捉非平衡动力学。该模型是非平衡交通流过渡模型的一个特例（Colombo，2002年；Blandin等人，2011，2013），可写为：

$$\begin{cases} \rho_t + v_f \rho_x = 0 & \text{in free-flow } (\Omega_f) \\ \begin{cases} \rho_t + \rho_x v + \rho v_x = 0, \\ v_t + \left(v - k_v \dfrac{1}{\rho}\right) v_x + \left(-\dfrac{1}{\rho} + v\tau + L\right) k_s = 0 \end{cases} & \text{in congestion } (\Omega_c) \end{cases} \tag{14}$$

引理 1。所提嵌入自适应巡航控制的交通模型在拥堵状态（Ω_c）下是严格双曲型的。

这一结果源于通量雅可比矩阵的特征值均为实数且彼此不同（式（12））。在此状态下，严格双曲性确保交通波以定义明确的特征速度传播，使模型能够准确捕捉非平衡动力学。这一性质可避免波重叠等现象（多个波以相同速度传播并相互干扰），并排除负速度或无界增长等可能出现在病态系统中的非物理解。

引理 2. 所提的嵌入自适应巡航控制的交通流模型呈现各向异性行为。

在所提的嵌入自适应巡航控制的交通流模型（方程（10））中，特征速度始终小于或等于车辆速度，即 $k_v(\rho,v)\ \frac{1}{\rho} \geq 0$。这一不等式在非真空假设（$\rho > 0$）与自适应巡航控制律的局部稳定性准则共同满足时成立，该准则确保 $k_v(\rho,v)\ \geq 0$ (Zhou 和 Ahn，2019年）。因此，嵌入自适应巡航控制的交通流模型描述的是一种各向异性的非平衡交通系统。

注1. 式(5) 中的反馈增益采用分段定义，以反映*ACC*模式切换。因此，通量雅可比矩阵$\mathbf{J}(\mathbf{U})$ 在每个区域内光滑，但在巡航至控制边界处不连续（特别是在 $\rho = \rho_c$ 处，针对密度触发切换）。因此，该模型应被解释为双区域（相变）双曲问题，其中 Ω_f 与 Ω_c中的偏微分方程通过*ACC*切换逻辑相耦合。在第4节所研究的相变设定中，切换界面由启用条件$s = \tau v_f + L$（等价地为 $\rho = \rho_c$，在$s = 1/\rho$下）确定；跨越该界面时，守恒质量满足*Rankine–Hugoniot*跳跃条件。远离该界面时，波传播由各相特征速度支配。

注2. 式(10)中的源项$S(U)$源于自适应巡航控制的车头时距保持目标，且仅出现在动量方程中。在拥堵中，$k_s > 0$ 使$S(U)$成为朝向ACC 时距流形$s = s^*(v) = \tau v + L$（等价地，$1/\rho = \tau v + L$）的局部松弛强迫：正的间距误差$s - s^*(v)$引起加速，而负误差引起制动。这通过选择平衡集影响解的性质：与任意常状态均为稳态的齐次守恒律不同，Ω_c 中的稳态必须满足$S(U) = 0$，因此平衡态位于 $1/\rho = \tau v + L$上。由于$S(U)$不进入质量方程，车辆守恒保持不变。此外，Ω_c 中的特征结构仍由齐次通量雅可比矩阵决定：对于给定的局部状态(ρ, v)，特征速度仍为 $\lambda_1 = v$和 $\lambda_2 = v - k_v/\rho$。源项影响(ρ, v)如何演化（从而通过演化状态影响 $\lambda_1(\rho, v)$与 $\lambda_2(\rho, v)$在空间和时间上如何变化），而并非重新定义特征速度本身。

请注意，附录A 比较了嵌入自适应巡航控制的交通流模型与相变模型（Blandin等人，2011年，2013），附录B 则比较了该模型与 LWR+ARZ公式（Goatin，2006年；Benyahiaand Rosini，2016）。

经典相变守恒律模型已建立全局适定性结果Colombo等人（2007）及相应的数值格式，包括 Godunov 型方法 Chalons和Goatin （2008）和中心迎风构造Chu等人 （2025）。然而，我们的嵌入自适应巡航控制模型有所不同：（i）拥堵状态下的动力学构成带有非零源项的双曲型平衡律；（ii）通量雅可比矩阵在巡航到控制的切换边界处不连续。因此，现有针对相变守恒律模型的适定性理论和数值格式，在未经进一步分析和界面修正的情况下，无法直接适用。此外，为完整的相变系统开发一套完整的数值格式并非易事（Chalons和Goatin，2008），因为巡航到控制的切换会引入一个移动界面，需要专门处理界面（即制定耦合规则，以连接 Ω_f 与 Ω_c之间的边界状态和通量）。作为第一步，附录C 概述了 Ω_c的一种数值格式，并明确给出了 ACC 激活时平衡律动力学的离散化。

3 特征波分析

第2节推导了均质自适应巡航控制交通的宏观（欧拉）描述，其中包括巡航模式 Ω_f和主动控制模式 Ω_c。第3节将这一连续介质模型改写为以车辆为索引的（拉格朗日）形式，从而可以直接根据轨迹评估宏观波的描述。两者之间的桥梁是作为微观到宏观映射基础的连续介质近似 $s \approx 1/\rho$（等价地，$\rho \approx 1/s$）；沿轨迹利用 $\rho_i(t) \approx 1/s_i(t)$ 评估宏观波速 $\lambda(\rho, v)$，即可得到直接以车辆对状态 $(s_i(t), v_i(t))$ 表示的波路径。这与二阶交通模型的标准拉格朗日解释和粒子离散化相一致（Aw 等，2002；Moutari 和 Rascle，2007），并表明成对波路径分析就是以车辆为索引形式书写的宏观波描述。

3.1 车辆对波动力学

在嵌入自适应巡航控制的交通流模型（式（10））中，第一个特征速度 $\lambda_1 = v$ 表示以车辆速度传播的纯密度扰动。这类扰动只会随交通流平移，

无法捕捉车辆对之间的相互作用。向上游传播的特征波速$\lambda_2 = v - k_v(\rho,v)\frac{1}{\rho}$支配间距和速度扰动，因此描述了前车的驾驶行为如何影响其跟车车辆。因此，在车辆对层面，从车辆$n-1$传播到n的波是

$$w_{n-1\to n}(t) = v_{n-1}(t) - k_v\big(\rho_n(t), v_n(t)\big)\left[x_{n-1}(t) - x_n(t)\right]. \tag{15}$$

在自由流状态下，该模型退化为具有特征速度$\lambda = v_f$的一阶 LWR 方程。在拥堵状态下，当 $k_s(\rho,v) \equiv k_s > 0$且 $k_v(\rho,v) \equiv k_v > 0$时，嵌入 ACC 的模型仍为二阶模型，其特征速度为 $\lambda_1 = v$和 $\lambda_2 = v - k_v/\rho$。在接下来的分析中，我们聚焦于拥堵状态，因为只有在该状态下，自适应巡航控制才会主动影响交通波动力学。

对于一对跟驰车辆，给定自车 n 的初始状态以及紧邻前车 $n-1$的轨迹，我们通过线性反馈控制律（Li 等人，2024a）推导状态向量 $z_n(t) = [s_n(t) - s_n^*(t), v_{n-1}(t) - v_n(t)]^T$的连续时间演化，其表达式为：

$$z_n(t) = e^{A_d(t-t_0)}z_n(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A_d(t-\varphi)}D_d a_{n-1}(\varphi)d\varphi, \tag{16a}$$

其中：

$$A_d = \begin{bmatrix} -\tau k_s & 1-\tau k_v \\ -k_s & -k_v \end{bmatrix}, \quad D_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{16b}$$

然后，车辆对之间的间距为：

$$\begin{aligned} s_n(t) = x_{n-1}(t) - x_n(t) = (\mathbf{G_0} - \mathbf{G_1}\tau)\left(e^{A_d(t-t_0)}z_n(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A_d(t-\varphi)}D_d a_{n-1}(\varphi)d\varphi\right) \\ + \tau\left(v_{n-1}(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_{n-1}(\varphi)d\varphi\right) + L. \end{aligned} \tag{17}$$

其中，$\mathbf{G}$ 是列选择矩阵：$\mathbf{G_0} = [1,0]$，用于提取第一列；$\mathbf{G_1} = [0,1]$，用于提取第二列。

由方程15 和17可见，特征波速取决于多个因素，包括紧邻前车的状态$(v_{n-1}(t), a_{n-1}(t))$、车辆对的初始状态$(z_n(t_0))$以及控制参数(τ, k_s, k_v)。

备注 3。不同于*Zhou 等人(2024年)*仅关注单一频率下的稳态振荡情形，本研究通过放宽稳态振荡假设，将初始扰动纳入分析。值得指出的是，两种方法均为连续方法，能够对时间和空间进行描述性分析。

3.2 交通振荡中的波动动力学

为进一步分析ACC交通流中特征波的性质，将前车的位置分解为标称分量和振荡分量（Li 等人，2014）。

$$x_0(t) = v_e t + \hat{x}_0(t) = v_e t + \sum_{m=1}^{M} A_m \sin(\omega_m t + \phi_m) \tag{18}$$

其中，v_{et} 为标称分量，由平衡速度决定；而$\hat{x}_0(t)$为振荡分量，通过傅里叶变换分解为正弦波之和（Jiang 等人，2024b）。m 为振荡波的索引，A_m 为频率为 ω_m、相移为 ϕ_m的振荡波的振幅。我们还可以推导出前车的速度为：

$$v_0(t) = v_e + \hat{v}_0(t) = v_e + \sum_{m=1}^{M} A_m \omega_m \cos(\omega_m t + \phi_m) \tag{19}$$

根据方程 18和 19，通过拉普拉斯变换，对方程（n中的线性反馈控制进行变换，得到传递函数 $G(j\omega_m)$，进而求得后车的位置和速度。4 ）。

$$\begin{aligned} x_n(t) &= (v_e t - n x_e) + \Delta\hat{x}_n(t) \\ &= (v_e t - n x_e) + \sum_{m=1}^{M} A_m \left|G(j\omega_m)\right|^n \sin\left(\omega_m t + \phi_m + n\angle G(j\omega_m)\right), \end{aligned} \tag{20a}$$

$$\begin{aligned} v_n(t) &= v_e + \hat{v}_n(t) \\ &= v_e + \sum_{m=1}^{M} A_m \left|G(j\omega_m)\right|^n \omega_m \cos\left(\omega_m t + \phi_m + n\angle G(j\omega_m)\right). \end{aligned} \tag{20b}$$

其中：

$$G(s) = \frac{X_n(s)}{X_{n-1}(s)} = \frac{k_s + k_v s}{s^2 + k_s\tau^* s + k_v s}, \tag{21a}$$

给定$s = jw$，相应的范数和相移为：

$$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{\left(-k_s + k_v(k_s\tau^* + k_v)\right)^2 \cdot \omega^2 + \left[k_s(k_s\tau^* + k_v) + k_v\omega^2\right]^2}}{\omega \cdot \left[(k_s\tau^* + k_v)^2 + \omega^2\right]}, \tag{21b}$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{k_s(k_s\tau^* + k_v) + k_v\omega^2}{\omega\left[k_s - k_v(k_s\tau^* + k_v)\right]}\right). \tag{21c}$$

命题 2. 在稳态复合振荡情形下，波速由两部分组成：标称部分和振荡部分。振荡部分是各个单振荡情形的总和。若频率之间存在有理关系，则波速振荡的周期为 $T_m = \frac{2\pi}{\omega_m}$（对于 $1 \le m \le M$），即这些周期的最小公倍数。

证明。 在稳态复合振荡情形下（方程（20）），有：

$$x_{n-1}(t) - x_n(t) = x_e + \sum_{m=1}^{M} A_m \left(|G(j\omega_m)|^{n-1} - |G(j\omega_m)|^n\right) \sin\left(\omega_m t + \phi_m + (n-1)\angle G(j\omega_m)\right) \tag{22a}$$

$$v_{n-1}(t) = v_e + \sum_{m=1}^{M} A_m |G(j\omega_m)|^{n-1} \omega_m \cos\left(\omega_m t + \phi_m + (n-1)\angle G(j\omega_m)\right) \tag{22b}$$

由自适应巡航控制交通流模型推导出的波速见式15，由此可得

$$\begin{aligned} W_{n-1\to n}(t) = &\left[v_e + \sum_{m=1}^{M} A_m |G(j\omega_m)|^{n-1} \omega_m \cos\left(\omega_m t + \phi_m + (n-1)\angle G(j\omega_m)\right)\right] \\ &- k_v\left[x_e + \sum_{m=1}^{M} A_m \left(|G(j\omega_m)|^{n-1} - |G(j\omega_m)|^n\right) \sin\left(\omega_m t + \phi_m + (n-1)\angle G(j\omega_m)\right)\right] \end{aligned} \tag{23}$$

化简上述方程后，可得：

$$W_{n-1\to n}(t) = v_e - k_v x_e + \sum_{m=1}^{M} R_{n,m}\cos\left(\Theta_m(t) + \phi_{n,m}\right) \tag{24a}$$

其中：

$$R_{n,m} = \sqrt{\left(A_m|G(j\omega_m)|^{n-1}\omega_m\right)^2 + \left(k_v A_m\left(|G(j\omega_m)|^{n-1} - |G(j\omega_m)|^n\right)\right)^2} \tag{24b}$$

$$\phi_{n,m} = \tan^{-1}\left(\frac{-k_v\left(|G(j\omega_m)|^{n-1} - |G(j\omega_m)|^n\right)}{A_m|G(j\omega_m)|^{n-1}\omega_m}\right) \tag{24c}$$

$$\Theta_m(t) = \omega_m t + \phi_m + (n-1)\angle G(j\omega_m) \tag{24d}$$

波速振荡的周期是$T_m = \frac{2\pi}{\omega_m}$对于$1 \le m \le M$的最小公倍数，前提是频率之间存在有理关系。如果频率之间不存在有理关系，也就是说，任意两个频率 ω_i和ω_j的比值都无法表示为两个整数之比（即 $\frac{\omega_i}{\omega_j}$是无理数），那么系统将表现出准周期性，而不是具有一个明确的周期。在准周期系统中，振荡由多个频率构成，这些频率以一种使模式随时间永不完全重复的方式组合在一起。

□

引理3。 在单一稳态振荡情形下，波速表示为

$$W_{n-1\to n}(t) = v_e - k_v x_e + R_n\cos(\Theta(t) + \phi_n). \tag{25}$$

这一推导与Zhou 等人(2024年）的研究结果一致，反映了内部异质性和车辆间异质性。内部异质性是指单个领航-跟随车辆对的波速随时间变化的特性，而车辆间异质性则描述了车队中不同车辆对之间波形的差异。在这种振荡情形下，交通波还会在时间域内表现出振荡，并呈现出区别于传统方法的高阶动态特征。

嵌入自适应巡航控制的交通流模型中的弦稳定性决定了振荡扰动在车队中的传播，这由传递函数 $|G(j\omega)|$ 的范数决定（Zhou和Ahn，2019；Li等人，2024b）。本节分析 $|G(j\omega)| < 1$、$|G(j\omega)| = 1$ 和$|G(j\omega)| > 1$ 对拥堵状态下特征波速 $W_{n-1\to n}(t)$ 的影响。

弦稳定情形 $|G(j\omega)| < 1, \forall\omega > 0$**：** 当 $|G(j\omega_m)| < 1$时，振荡项 $A_m|G(j\omega_m)|^n$ 随着 n 增大而呈指数衰减，从而降低振幅 $R_{n,m}$。随着 $R_{n,m} \to 0$，交通流变得空间均匀，不再支持可辨识的传播扰动；换言之，弦稳定ACC控制律已完全衰减初始扰动，留下仅由平衡交通状态（x_e,v_e）决定的稳定车流。

临界稳定情形 $|G(j\omega)| = 1, \forall\omega > 0$**：** 当 $|G(j\omega_m)| = 1$时，自适应巡航控制律在动力学上等价于Newell跟驰模型；因此，公式（20）中的振荡振幅不会随车辆序号 n变化。由此产生的波速可表示为

$$W_{n-1\to n}(t) = v_e - k_v x_e + \sum_{m=1}^{M} A_m\omega_m\cos\left(\omega_m t + \phi_m + (n-1)\angle G(j\omega_m)\right). \tag{26}$$

波速在整个车队中持续振荡，且振幅保持恒定，从而形成既不增长也不衰减的周期性交通波。这会导致振荡波型持续存在，而持续的波动可能降低交通流效率。

弦不稳定情形 $|G(j\omega)| > 1$**：** </style>**当** $|G(j\omega_m)| > 1$ 时，项 $|G(j\omega_m)|^n$ 会呈指数增长，从而放大 $R_{n,\,m}$。这会导致$W_{n-1\to n}(t)$出现大幅波动，且振荡振幅沿上游方向不断增大。

4 间断的波传播

在上一节中，我们分析了车辆对中的特征波传播，并假设交通密度 $\rho(x,\ t)$ 和速度 $v(x,\ t)$ 平滑演变，这使我们能够追踪扰动沿特征方向的传播方式。然而，即使初始交通状态平滑，双曲型偏微分方程也可能产生间断，因此必须单独处理这些间断的传播。本节将考察所提嵌入自适应巡航控制的交通流模型中间断的形成与传播。

4.1 特征场的线性退化

我们首先分析线性退化，因为它能准确区分仅存在接触间断的特征场，以及可能陡化为激波或稀疏波的特征场。

定义 1。若特征场 i 对应的特征值 $\lambda_i(\mathbf{U})$满足

$$\nabla\lambda_i(\mathbf{U})\cdot r_i(\mathbf{U}) = 0 \quad \textit{for all admissible states } \mathbf{U},$$

其中，$r_i(\mathbf{U})$ 为对应的特征向量。否则，该特征场称为真正非线性的。

命题 3。自由流状态和拥堵状态下均存在线性退化。当车辆状态从自由流转变为拥堵状态时（即间距足够小时，自适应巡航控制便会启动），k_v 会发生不连续变化，使该特征场变为真正非线性，并产生激波或稀疏波。

回顾方程12–13中的特征值和特征向量。对于第一个特征场，

$$\nabla\lambda_1\cdot r_1 = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = 0. \tag{27}$$

因此，λ_1 是线性退化的：任何与该特征场对齐的扰动都以纯接触波的形式按车辆速度输运，既不会陡化为激波，也不会扩散为稀疏波。

对于第二特征场，我们有

$$\nabla\lambda_2\cdot r_2 = \begin{bmatrix}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial k_v}{\partial\rho}+\dfrac{k_v}{\rho^2}, & 1-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial k_v}{\partial v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-\dfrac{k_v}{\rho^2}\end{bmatrix} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial k_v}{\partial\rho}+\frac{k_v}{\rho^3}\frac{\partial k_v}{\partial v}. \tag{28}$$

对于第二特征场，由于k_v保持不变，因此在每个状态区间内均满足线性退化。然而，从自由流转变为拥堵时，k_v的不连续变化引入了真正非线性。

注 4. 根据命题 3，如果车辆状态保持在拥堵状态，平滑扰动不会产生激波（即不连续性）。在这种情况下，车辆对波速由方程 (15)给出，能够更好地描述波沿车辆队列传播的方式。

4.2 相变

分析相变的主要难点在于准确识别交通流何时离开自由流、随后的相变前沿如何传播，以及该前沿两侧分别适用哪种波描述——激波还是特征波。这个边界有一个直观的物理标志：每辆配备自适应巡航控制的车辆从巡航模式切换到主动间距调节的时刻。在时空图中，这些 接入点 （红点）构成一条断续曲线（红色曲线），将自由流状态 $(v_f \ 1/s_l)$ 与临界状态 $(v_f \ 1/s_c)$分隔开；见图 1（右图）。这条曲线各线段的斜率应各不相同，因为它表示接入波 （注 5）的速度。

接入时间。对于车辆 i，ACC控制器在实际间距$s_{i-1\to i}(t) = x_{i-1}(t) - x_i(t)$ 等于临界值 $s_c = \tau v_f + L$ 时首次介入。因此，接入时间 $t_i^\star$定义为

$$t_i^\star = \inf\{t > 0 : s_{i-1\to i}(t) = s_c\}. \tag{29}$$

设跟随车辆i处于自由流状态，其位置为$x_i(t) = x_i(0) + v_f t$。假设前车$i-1$的加速度为$a_{i-1}(t)$，初始速度相同，为v_f；因此其位置为

$$x_{i-1}(t) = x_{i-1}(0) + v_f t + \int_0^t (t-\sigma)\, a_{i-1}(\sigma)\, d\sigma, \tag{30}$$

接入时间满足隐式方程

$$s_i(0) + \int_0^{t_i^\star} (t_i^\star - \sigma)\, a_{i-1}(\sigma)\, d\sigma - s_c = 0, \tag{31}$$

对于任意可容许的加速度曲线$a_{i-1}(t)$，该方程都有唯一根。对于分段常数加速度，根可解析求得。一般情况下，则通过数值方法求得。

引理 4 (接入波前)。 设 $\left(t_i^\star, x_i(t_i^\star)\right)$ 和 $\left(t_{i-1}^\star, x_{i-1}(t_{i-1}^\star)\right)$ 是由式(29)–(31)确定的两辆相邻车辆的自适应巡航控制介入点。连接这两点的波以如下速度传播

$$c_{i-1\to i}^\star = \frac{x_{i-1}(t_{i-1}^\star) - x_i(t_i^\star)}{t_{i-1}^\star - t_i^\star}. \tag{32}$$

将车队中所有此类路段连接起来，即可描绘出从自由流到拥堵的相变前沿。

备注 5。 由于 $t_i^\star$ 通过式 (31)取决于初始间距和前车的加速度曲线，因此不同车辆的接入时间各不相同。因此，通常 $c_{i-1\to i}^\star \neq c_{i\to i+1}^\star$ ，且接入波在车队中并非均匀传播。

过渡结束时，自适应巡航控制车辆完全进入拥堵状态。我们将车辆间距达到 s_e的时刻定义为这一时刻。此处， s_e 由恒定时距策略根据平衡速度 v_e确定，其中 v_e 是从前车运动中通过振荡分解提取的平衡分量（见稳态振荡情形下的式（19））。此时，车辆被认为已完全进入拥堵状态，之后的扰动沿该状态的特征波传播。在图 1 （左）中，车辆状态逐渐从红色标记移动到紫色标记，随后保持在其平衡偏差包络（即迟滞）内。

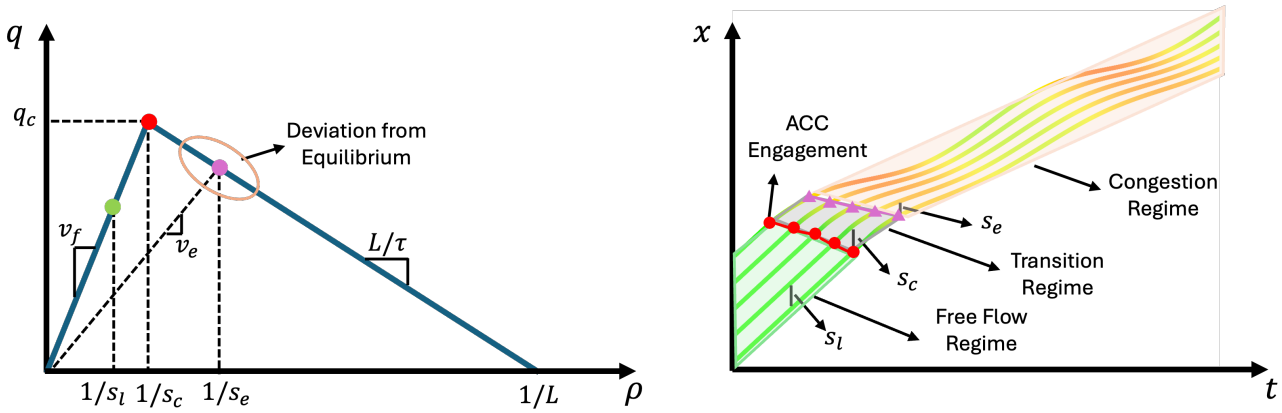

图1：相变下的波示意图：平衡基本图（左）与车辆轨迹（右）

备注6. 在巡航到控制的过渡过程中，交通状态从临界状态$(v_f \ \ 1/s_c)$移动到另一稳态$(v_e, 1/s_e)$，该稳态位于拥堵状态 Ω_c。跨越相变前沿时，该解可视为一个移动间断，其传播速度由质量守恒方程的*Rankine–Hugoniot*条件决定（*LeVeque*和*Leveque*，*1992*）。特别地，左、右状态(ρ_l, v_l)与(ρ_r, v_r)之间的激波速度满足

$$c = \frac{\rho_r v_r - \rho_l v_l}{\rho_r - \rho_l}. \tag{33}$$

利用连续对应关系 $\rho = 1/s$以及 Ω_c中的稳态关系，对于此处所考虑的过渡，该式可简化为$c = -L/\tau$。

因此，在相变情形下，我们使用自适应巡航控制介入事件来确定相变前沿（引理 4）。相变过程中，扰动以激波的形式传播（注 6）；当每辆车的间距达到 s_e时（如图 1 （右）中的紫色三角形点所示），车辆便完全进入拥堵状态，扰动则沿特征波传播（注 4）。

5 数值实验

本节通过以下案例开展多项数值实验，以全面验证推导得到的交通波：稳态单次振荡（案例1）、带有初始扰动（即切入操作）的稳态单次振荡（案例2）、稳态复合振荡（案例3），以及从自由流状态向拥堵状态的相变（案例4）。随后，我们将使用 OpenACC 数据集中的自适应巡航控制轨迹，展示所

提议的交通波的经验适用性，并通过校准后的线性反馈控制器对跟驰车辆进行仿真（Jiang 等人，2021年；Jiang 等人，2024b，2025）。

交通波描述了扰动如何在车辆队列中传播。有意义的传播路径应当跟踪不同车辆之间的同一扰动特征，因此沿路径采样的速度应当相对一致，并表现出较低的变异性（Laval，2011；Ahn 等人，2013；Taylor 等人，2015年；Pu 等人，2024年）。错误的路径可能会连接振荡的不同阶段（或扰动的不同部分），从而产生更大的速度变异性。因此，路径上的速度变异性越小（或连续速度差越小），就表明其与轨迹上观测到的扰动演化越一致。我们引入了一种基于沿各波路径测得的速度偏差的度量，如图 2 所示。考虑由所有波路径组成的集合 $\mathbf{P}$，其中每条路径都起始于前车轨迹上的一个点，并连接到跟随车辆的轨迹点。对于任意路径 $p \in \mathbf{P}$，我们将其采样位置处的速度收集为序列 $\mathbf{V}_p = \{v_{p,}1, v_{p,}2, \ldots, v_{p,n_p}\}$，其中 np 表示路径 p 上的样本总数。基于这些序列，我们构建集合 $\mathbf{Y}$，该集合包含所有路径上相邻点之间的每个速度偏差，其定义为

$$\mathbf{Y} = \bigcup_{p \in \mathbf{P}} \{ v_{p,i+1} - v_{p,i} : i = 1, \ldots, n_p - 1 \}, \tag{34}$$

其分布的均值和中位数较低，四分位距也较窄，表明沿波传播路径的速度变化较小。这说明识别出的路径与轨迹上的扰动传播更为一致，因为车辆对速度偏差仍然很小（Ahn 等人，2013；Pu 等人，2024）。

此外，为了直接进行宏观—微观验证，我们使用附录 Ω_c 中概述的有限体积格式，对 C中的拥堵状态平衡律进行数值求解。随后，我们将偏微分方程解与从微观自适应巡航控制仿真映射得到的欧拉场进行比较，并使用 v 和 ρ的均方根误差（RMSE）量化差异。完整流程和结果见附录 D。

在数值实验中，我们纳入了一个恒速波基线，该基线遵循 Laval (2011) 中采用的一阶（运动波）假设。该基线仅用作比较参考。相比之下，所提二阶宏观模型意味着特征速度依赖于交通状态且随时间变化，因此轨迹上的波传播也可能随时间变化。数值实验的默认参数见表 1。

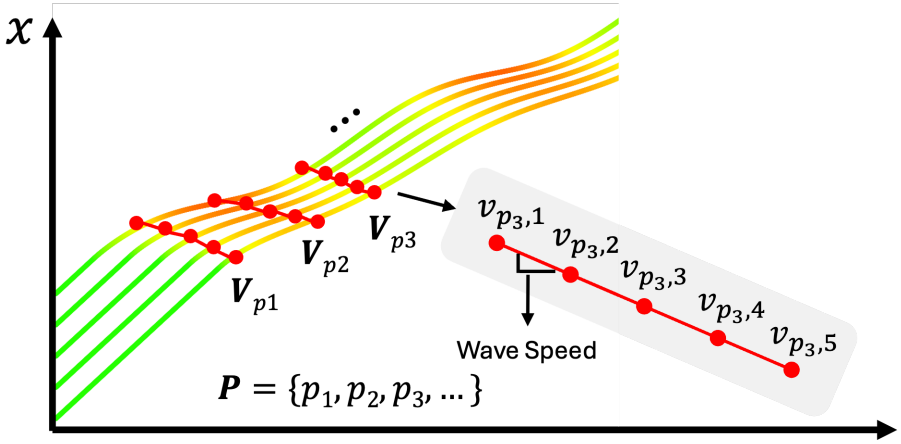

图 2：车辆对速度偏差示意图。

表1：数值实验的默认参数设置。

参数		数值	
车队中的车辆数量 N		4	
平衡速度 v_e		10 (m/s)	
期望时距 τ		1。2（秒）	
静止距离 L		5 (m)	
间距偏差增益k_s		0.8 (秒$^{-2}$)	
速度差增益k_v		1.4 (秒$^{-1}$)	
单振荡情况		**复合振荡情况**	
振幅 A	20（米）	A_1, A_2	20（米），10（米）
角频率 ω	0.16π (弧度/秒)	ω_1, ω_2	0.16π(弧度/秒) 0.32π (弧度/秒)
相移 ϕ	0 (弧度)	ϕ_1, ϕ_2	0 (弧度) 0.5π (弧度)

5.1 基于仿真的验证

总体结果汇总于表 2，其中列出了车辆对速度偏差的绝对值，并揭示了各案例之间的重要统计差异。对于每种情景，我们还绘制了速度偏差的概率密度函数，即式（**Y** ）中定义的 34。所提交通波能够适应不断变化的条件，且表现始终优于恒速波；在强烈振荡和切入扰动下（案例2和案例3），这一优势尤为明显。在案例4的相变过程中，自适应巡航控制介入使交通状态从自由流转为拥堵，此时模型同样能更准确地捕捉波传播，并使车辆对速度偏差达到最小。

表2：不同案例下的性能比较

	案例1		**案例2**		**案例3**		**案例4**	
	所提方法	一阶	所提方法	一阶	所提方法	一阶	所提方法	一阶
Mean	**1.02**	1.21	**0.80**	1.14	**1.27**	2.01	**0.89**	1.29
中位数	**0.99**	1.26	**0.72**	1.11	**1.76**	1.87	**0.85**	1.34
下四分位数	**0.54**	0.69	**0.40**	0.63	**0.56**	0.92	**0.48**	0.77
上四分位数	**1.44**	1.71	**1.12**	1.69	**1.76**	2.83	**1.29**	1.77
Max	**2.33**	2.56	**1.97**	2.87	**3.47**	5.81	**2.54**	2.79
Min	0.00	0.00	**0.00**	0.03	0.03	0.03	**0.00**	0.07

5.1.1 案例1：单一稳态振荡

在单一稳态振荡情形下，所提方法的交通波产生的车辆对速度偏差略小于恒速基准。由于所有跟随车辆均从平衡态跟车状态开始，并保持在拥堵状态，我们采用备注 4 中所述的时变特征速度来跟踪扰动。我们的模型生成的波前会持续根据瞬时车速和间距进行调整，如图 3（左）所示，从而能够更准确地沿着扰动路径传播。图 3（右）证实了这一行为：所提方法预测的速度偏差集中在零附近，而恒速模型预测的速度偏差则在约 $[-2, 2]$ m/s 范围内分布得更加均匀。

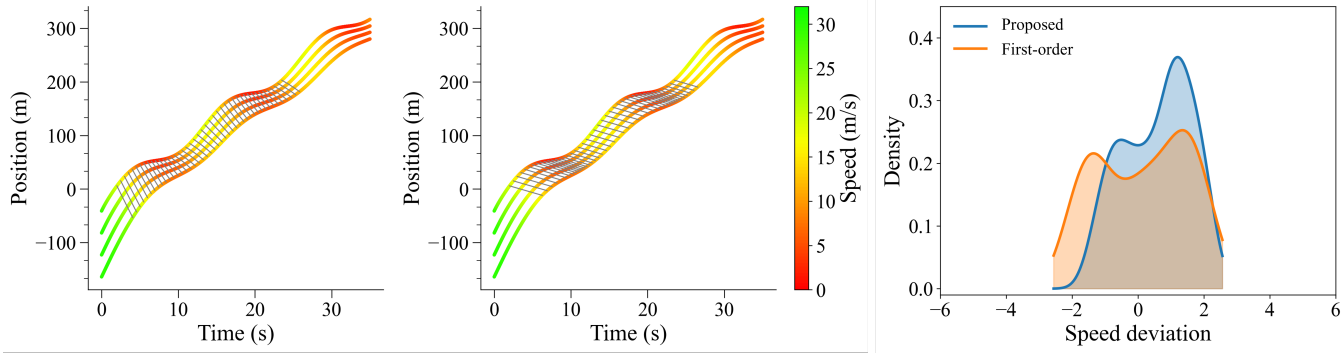

图3：案例1下车辆编队的所提波（左）和恒定速度波（中）的路径，以及车辆对速度偏差的概率密度函数（右）

5.1.2 案例2：具有初始扰动的单一振荡

在案例2中，自适应巡航控制车辆在$t = 10$ s时切入第二辆车前方，引入了初始扰动。切入车辆并入目标车道，并与其前车保持10 m的车间距。在此事件发生前，所有车辆均遵循自适应巡航控制控制律，并处于平衡条件下。由于所提方法的波速遵循质量守恒定律，且未考虑横向源项，因此仅适用于切入操作完成之后。车队对扰动作出反应时，会产生一个短暂的正波，类似于瓶颈消散时观测到的恢复波。图 4（左）和（中）显示，沿着所识别的波路径，所提方法得到的车辆对速度偏差始终低于恒速模型得到的结果，尤其是在初始扰动之后不久，这一点在放大视图中更加明显。

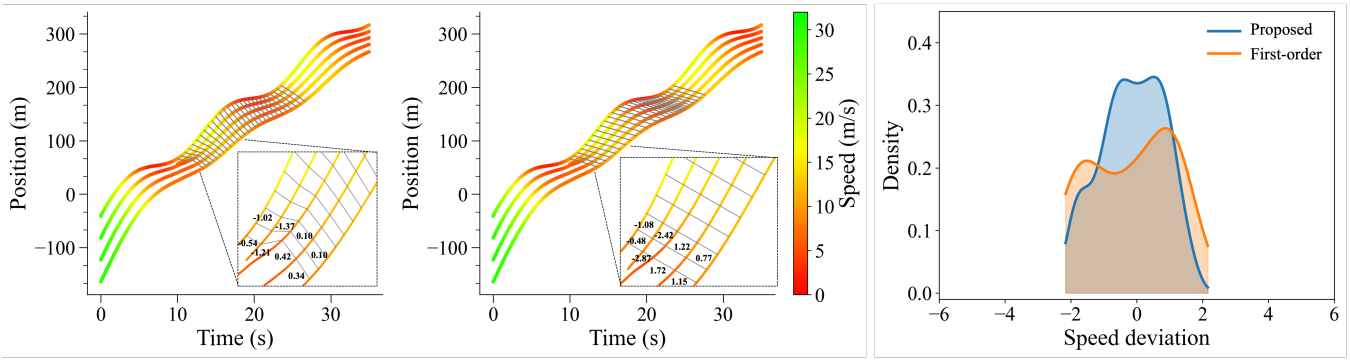

图4：案例2下车辆编队的所提波（左）和恒定速度波（中）的路径，以及车辆对速度偏差的概率密度函数（右）

5.1.3 案例3：复合稳态振荡

在复合稳态振荡情形下，振荡的振幅和频率均高于单振荡情况。图5（右）显示，两种模型的速度偏差均有所增加，但所提交通波仍优于恒定速度基准。采用我们的方法时，车辆对速度偏差的最大值为 3.47 米/秒（平均值为 1.27 米/秒），而恒定速度模型的最大值达到 5.81 米/秒（平均值为 2.07 米/秒）。较大的偏差源于嵌入自适应巡航控制的平衡律（式（10））中的源项，该源项刻画了车辆偏离平衡间距的情况。虽然由齐次通量雅可比矩阵定义的特征速度与不存在源项时相同，

但源项会持续扰动车辆加速度，导致状态不断演化，局部特征速度 $\lambda_2(\rho, v)$ 随时间变化。因此，振荡越大，速度偏差也越大。即便如此，所提波模型凭借其随时间变化的特征速度，仍比恒定速度模型保持更低的偏差。

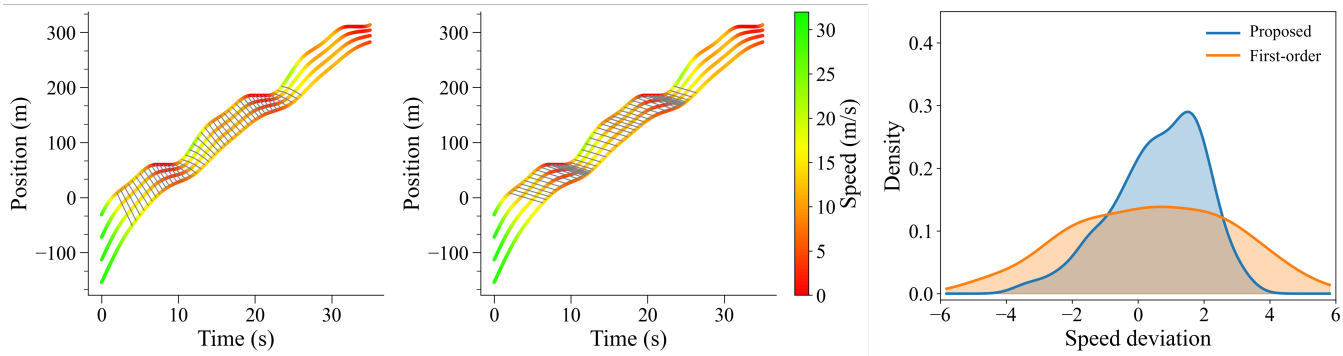

图5：案例3下车辆编队的所提方法波形（左）和恒定速度波（中）的路径，以及车辆对速度偏差的概率密度函数（右）

5.1.4 案例4：相变

案例4考察从自由流到拥堵的转变，在这一交通状态下，特征波和激波都会参与扰动传播。车辆以自由流速度 v_f 行驶，直至车辆间距降至 ACC 激活阈值 $s_c = \tau v_f + L$。此时，ACC控制器接入，产生间距不连续性并触发激波。过渡区间始于接入时间 $t^\star$，当间距达到 $s_e(v) = \tau v_e + L$ 时结束。这是振荡分解得到的给定平衡速度 v_e 下，恒定时距策略规定的稳态间距。在过渡期间，扰动以备注6所述的激波速度传播；在过渡区间之外，扰动则以特征速度 $\lambda_2(\rho, v)$ 传播。图6（左）显示了激波和特征波。当激波追上特征波时，后者便停止传播。在这些条件下，所提模型使车辆对速度偏差紧密聚集在零附近，平均值为 0.89 m/s；相比之下，恒定速度模型的平均值为 1.29 m/s，降低约 31%。这一结果证实，所提交通波模型在多种交通条件下均具有可靠性。

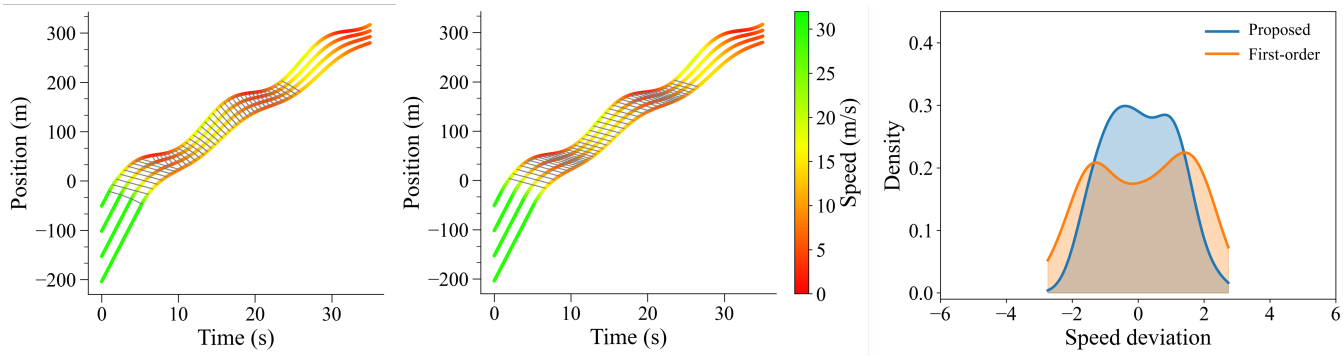

图6：案例4下车辆编队的所提方法波形（左）和恒定速度波（中）的路径，以及车辆对速度偏差的概率密度函数（右）

5.2 实证验证

为进行实证验证，我们使用 OpenACC数据集（Makridis 等人，2021年），该数据集记录了真实的商用自适应巡航控制行为。我们选取了一条速度骤降明显的轨迹，这种现象在拥堵交通的振荡中十分常见（图7 （a））。商用自适应巡航控制所用的确切控制律并未公开，而我们的框架是针对线性反馈控制器推导的。因此，我们通过校准控制参数来重现跟驰轨迹。自适应巡航控制参数采用近似贝叶斯计算进行校准；详情见（Jiang 等人，2024a，b）。我们从由此得到的（τ，k_s，k_v，L）联合分布中随机抽样，以生成真实的随机自适应巡航控制轨迹，并据此评估所提交通波模型。

图 7 展示了所选控制参数组下的跟驰速度曲线 (a)，以及所提交通波 (c) 和恒速波 (d) 产生的波路径。(c) 和 (d) 中的统计结果对应同一参数组。由于车队始终处于拥堵状态，我们仅展示特征波（注 4）。即使存在现实中的振荡，所提交通波的波路径也与恒速波的波路径显著不同。

为避免单一参数组造成的偏差，我们从校准后的联合分布中随机抽取 200 个样本，并模拟了随机自适应巡航控制轨迹。基于车辆对速度偏差得到的分布如图 7(b) 所示。在这些模拟中，所提公式下的速度偏差紧密聚集在零附近。绝对速度偏差的均值、中位数、下四分位数和上四分位数分别为 0。35、0。24、0。11 和 0。45 m/s；相比之下，恒速波对应的数值分别为 0。51、0。45、0。26 和 0。70 m/s。这些统计结果进一步证实，所提交通波能够更准确地捕捉扰动传播。

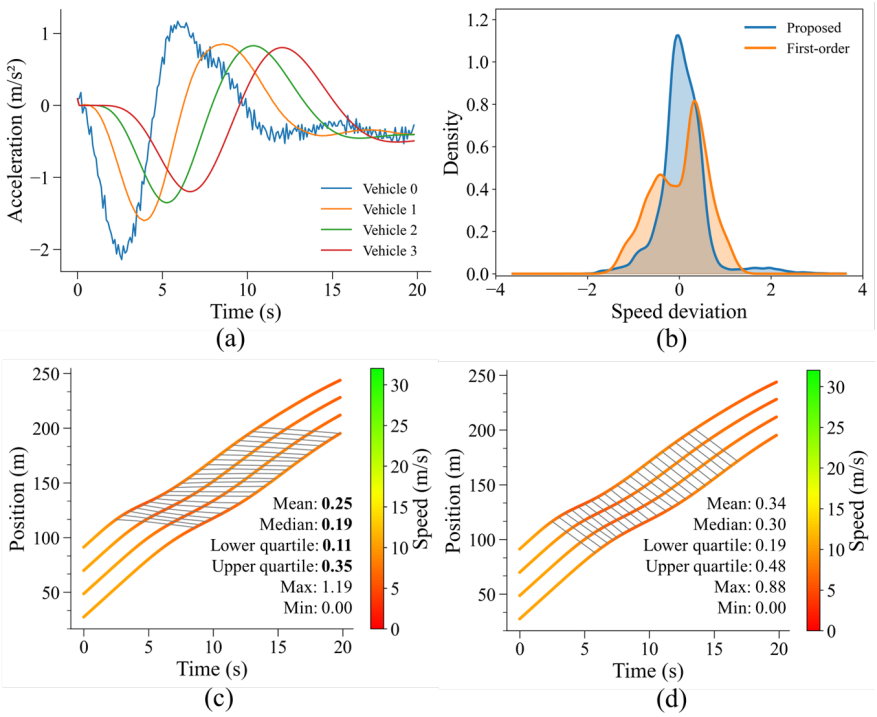

图 7：OpenACC 轨迹中的扰动传播（(a)、(c)、(d) 的控制参数为 τ =1.0883 s、L = 9.655 m、k_s = 0.3134、k_v = 0.4629）

6 结论

本研究提出了一种宏观交通流模型，将自适应巡航控制律嵌入质量守恒框架。由此得到的系统是非平衡模型相变族的一个特例；研究证明，在拥堵状态下，该系统严格双曲且具有各向异性，从而避免了早期高阶模型表述所存在的非物理伪影。对通量雅可比矩阵进行特征值分析，可得到闭式形式的特征波，其振幅同时取决于初始条件和 ACC 控制增益。这些波控制拥堵状态下的扰动传播；而在自由流到拥堵的转变过程中，模型预测的激波前沿轨迹则由自适应巡航控制介入事件确定。一旦每辆车后方的间距达到其平衡值，系统便恢复为特征波传播。

综合数值实验，包括稳态单频振荡、复合频率振荡、非稳态切入扰动，以及从自由流到拥堵的相变，验证了理论，并表明，与一阶LWR基准相比，所提模型沿交通波表现出更小的车辆对速度偏差。在实证OpenACC数据集中也观察到了类似优势。由于所提交通波随局部间距和速度演化，该模型能够有效捕捉多种交通条件下的扰动传播，包括从自由流到拥堵的相变，其中激波和特征波均发挥作用。通过将宏观波动行为与微观控制器参数明确联系起来，该框架提供了一种便于处理的工具，能够以分析且可预测的方式评估ACC设计对交通拥堵及其传播的影响，进而有助于制定利用自动驾驶车辆能力的交通管理策略。未来的工作将把该框架从纯均质自适应巡航控制交通扩展到包含人工驾驶车辆的混合交通，以及其他ACC设置和动力学，并将进一步为完整的相变模型建立适定性和界面感知数值格式。

致谢

我们感谢 Shuo Yang博士和 Liangze Yang博士就数值格式展开的有益讨论。我们也感谢匿名审稿人提供的宝贵反馈，这些意见有助于提升稿件质量。

与相变模型的比较

相变交通流模型最初由Colombo （2002年、2003）提出。随后，Blandin等人（2011，2013）对这些模型进行了扩展。他们采用固定的自由流速度，并在拥堵状态下纳入多个基本图，以捕捉经验数据中观察到的密度与交通流关系的变化。扩展基本图表示为：

$$v(u) = \begin{cases} v_f, & \text{in free-flow } (\Omega_f) \\ v(\rho)(1+p), & \text{in congestion } (\Omega_c) \end{cases} \tag{35}$$

其中，u =(ρ，p) 和 ρ 为交通密度。p 是一个实值参数，独立于 ρ，用于量化相对于平衡流的偏差。$v(\rho)$ 表示拥堵状态下的平衡速度。因此，

相应的相变模型表述如下：

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0 & \text{in free-flow } (\Omega_f) \\ \begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0 \\ p_t + (pv)_x = 0 \end{cases} & \text{in congestion } (\Omega_c) \end{cases} \tag{36}$$

其在拥堵相中的特征向量为

$$r_1(u) = \begin{pmatrix} \rho \\ p \end{pmatrix}, \qquad r_2(u) = \begin{pmatrix} v(\rho) \\ -(1+p)v'(\rho) \end{pmatrix}. \tag{37}$$

相应的特征值为

$$\lambda_1(u) = v(u) + (1+p)V'(\rho)\rho + V(\rho)p, \qquad \lambda_2(u) = v(u). \tag{38}$$

第一特征场 λ_1是真正非线性的，而第二特征场 λ_2是线性退化的；详细证明请参见（Blandin等人，2013）。利用 ACC模型（式（12））和相变模型（式（38））的特征值，当两者的非平凡特征值相等时，这两个系统便一致，即 $\lambda_1^{\text{PTM}} = \lambda_{\text{ACC2}}$，因为两个模型已经共享接触特征 $\lambda = v$。

我们引入双射

$$C : (\rho, v) \mapsto (\rho, p), \qquad p = \frac{v}{V(\rho)} - 1, \tag{39}$$

它将一个 ACC状态 $(\rho,\ v)$ 映射到扩展基本图 $v = V(\rho)(1+p)$（式（35））。将该关系代入相变模型的特征值并令其等于 λ_2^{ACC}，可得反馈增益

$$k_v = -\rho\left[v + \frac{\rho V'(\rho)}{V(\rho)}v - V(\rho)\right]. \tag{40}$$

在此k_v的选择下，两种特征结构相同。然而，在实际ACC实现中，控制增益k_v 通常在拥堵状态下取为常数，而式（40）所规定的增益则是 ρ 与v两者的显式函数。

B　Co与LWR+ARZ相变模型的比较

若干相变交通流模型将用于自由流交通的LWR模型与用于拥堵状态的二阶ARZ模型相结合（Goatin，2006年；Benyahia和Rosini，2016）。我们进一步考察我们所提出的模型与这些LWR结合ARZ表述之间的联系和差异，尤其是在拥堵状态下。

将式（6）中的自适应巡航控制动量方程与式（3）中的 ARZ 动量方程进行比较，可以发现二者存在明显的对应关系：若令间距反馈增益 $k_s = 0$，并将“声速” $c(\rho) = -k_v/\rho$，则式（6）就与式（3）完全相同。换言之，当移除间距反馈增益时，ARZ 动量方程可视为本文自适应巡航控制动量方程的特例。尽管在结构上相似，这两个模型的特征场却存在根本差异。在 ARZ 模型中，一个特征场保持线性退化，而另一个则为真正非线性

，可产生激波和稀疏波（Zhang，2002年）。如果自适应巡航控制嵌入模型中的控制增益是密度的函数，则第二特征场将变为真正非线性，而第一特征场仍保持退化。例如，在式（28）中，令 $k_v = k_v(\rho)$。那么

$$\lambda_2(\rho, v) = v - \frac{k_v(\rho)}{\rho}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{k_v(\rho)}{\rho^2} \end{pmatrix}, \tag{41}$$

在这种情况下，$\nabla\lambda_2 = \left(-k_v'(\rho)/\rho + k_v(\rho)/\rho^2, \quad 1\right)^{\mathsf{T}}$，因此 $\nabla\lambda_2 \cdot r_2 = -k_v'(\rho)/\rho \neq 0$ 只要 k_v 依赖于 ρ。

C 嵌入自适应巡航控制的交通流模型在拥堵状态下的数值格式

本附录概述了嵌入自适应巡航控制的交通流模型在拥堵状态下（Ω_c 自适应巡航控制启用）的数值格式。我们考虑光滑解，并在均匀网格上采用一阶有限体积（Godunov 型）离散化（Toro，2013）。令 (ρ_i^n, v_i^n) 表示时刻 $\rho(x, t)$ 密度 (x, t) 和速度的单元平均近似，其中 t^n，空间步长和时间步长分别为 Δx 和 Δt。

在 Ω_c 中，控制系统为

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0, \\ v_t + \left(v - \dfrac{k_v}{\rho}\right) v_x = k_s \left(\dfrac{1}{\rho} - \tau v - L\right), \end{cases} \tag{42}$$

其中，τ 是　期望时间车头时距，L 是拥堵间距参数，而 k_s,k_v 是自适应巡航控制增益 s.

对于质量守恒方程，我们采用 Rusanov（局部 Lax–Friedrichs）数值通量（Toro，2013）

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}\left(F(\rho_i^n, v_i^n) + F(\rho_{i+1}^n, v_{i+1}^n)\right) - \frac{1}{2}\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n \left(\rho_{i+1}^n - \rho_i^n\right), \tag{43}$$

其中，$F(\rho, v) = \rho v$ 是物理质量通量。界面耗散速度 $\alpha^n{}_{i+\frac{1}{2}}$ 取为局部波速界，

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n = \max\left(|\lambda_1(\rho_i^n, v_i^n)|, |\lambda_2(\rho_i^n, v_i^n)|, |\lambda_1(\rho_{i+1}^n, v_{i+1}^n)|, |\lambda_2(\rho_{i+1}^n, v_{i+1}^n)|\right), \tag{44}$$

其特征速度为

$$\lambda_1(\rho, v) = v, \qquad \lambda_2(\rho, v) = v - \frac{k_v}{\rho}. \tag{45}$$

对于采用非守恒输运形式书写的速度方程，对流项是作用于 v 的平流算子，其系数乘以 v_x。因此，我们将平流速度定义为

$$a(\rho, v) = v - \frac{k_v}{\rho}, \tag{46}$$

并采用一阶迎风通量离散对流部分：给定 $a_i^n = a(\rho_i^n, v_i^n)$ 和界面速度 $a^n{}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(a_i^n + a_{i+1}^n)$，若 $a^n{}_{i+\frac{1}{2}} \geq 0$，则 v 的界面状态取自左单元；否则取自右单元。

源项通过算子分裂引入（LeVeque，2002年）：完成齐次（通量）更新后，使用更新后的密度，对 v 逐单元采用显式步进求解源项常微分方程（ODE），

$$v_i^{n+1} = v_i^{\star} + \Delta t\, k_s\Big(\frac{1}{\rho_i^{n+1}} - \tau v_i^{\star} - L\Big), \tag{47}$$

其中，$v_i^{\star}$ 表示完成对流更新、尚未应用源项时的速度。时间步长根据相同的波速界，按照 CFL 条件选取，

$$\Delta t = \mathrm{CFL}\,\frac{\Delta x}{\max_i \max\big(|\lambda_1(\rho_i^n, v_i^n)|,\ |\lambda_2(\rho_i^n, v_i^n)|\big)}, \tag{48}$$

并采用预设的 CFL 数 $\in (0,\ 1)$。

本附录仅介绍拥堵状态 Ω_c (自适应巡航控制启用)下的数值格式，此时系统动力学构成带有非零源项的双曲型平衡律。完整的嵌入 ACC 的模型数值格式更为复杂，因为它还需要追踪移动的巡航到控制切换界面，并为界面两侧提供一致的耦合规则；也就是说，需要规定当解在 Ω_f 和 Ω_c之间转换时，左右状态及其相应通量如何衔接。

D 拥堵状态数值格式与微观模拟的验证

本附录报告了两者之间的直接数值比较：(i) 在环形道路上进行的微观自适应巡航控制跟驰模拟，以及 (ii) Ω_c 附录 C 中的宏观拥堵状态平衡律，该平衡律由中的数值格式求解。目标是验证，在设置匹配且处于 Ω_c (自适应巡航控制启用)的条件下，宏观偏微分方程能否重现微观动力学所隐含的欧拉场。

我们采用环形道路（周期）设定，使微观ACC仿真与宏观偏微分方程共享相同的周期边界条件，从而使比较不受流入或流出边界处理的影响（Orosz等人，2010；Kesting和Treiber，2013；Ntousakis等人，2015年）。空间域为 $[0,L_x)$，并在$x = 0$ 与$x = L_x$处作周期等同。环形道路长度L_x 由初始微观配置确定：我们将车辆初始化于ACC 时距流形$s_i(0) = \tau v_i(0) + L_0$ 上，并设定

$$L_x = \sum_{i=1}^{N} s_i(0), \tag{49}$$

从而使偏微分方程与 微观模型在总间距一致的同一闭合环路上演化 .

在微观仿真中，N 辆车辆在环形道路上运行，并采用环绕式前车识别。每个微观时间步中，车辆按位置排序；每辆车将环形道路上紧邻其前方的车辆作为前车；车间距通过周期性环绕计算；并在 Ω_c 中应用线性 ACC 控制律，使用期望时距间距 $s^*(v) = \tau v + L_0$。状态通过显式时间步推进。为了与欧拉偏微分方程进行比较，微观状态被转换为均匀网格 $x_m \in [0,L_x)$ 上的欧拉场。每辆车 i 对应一个长度为 $s_i(t)$ 的道路区段（采用周期性环绕），由微观数据得到的欧拉场分段定义如下

$$\rho_{\mathrm{micro}}(x,t) = \frac{1}{s_i(t)}, \qquad v_{\mathrm{micro}}(x,t) = v_i(t), \qquad x \in \text{segment of vehicle } i. \tag{50}$$

T这会在用于 PDE 输出的时刻 t 生成 $\rho_{\text{micro}}(t\ \cdot)$ 和 $v_{\text{micro}}(t\ \cdot)$。

对于宏观模拟，我们在同一条环形道路上求解拥堵状态平衡律 $[0,L_x)$，采用附录C中的有限体积离散，并施加周期边界条件。偏微分方程的初始条件直接取自 $t=0$ 时的微观数据推导出的欧拉场，

$$\rho(x,0)=\rho_{\text{micro}}(x,0),\qquad v(x,0)=v_{\text{micro}}(x,0),\qquad x\in[0,L_x), \tag{51}$$

因此，两种模型在同一计算域上从相同的欧拉状态开始。偏微分方程采用 CFL 时间步长推进；质量方程使用 Rusanov 通量，速度方程的对流部分使用基于$a(\rho,v)=v-k_v/\rho$的迎风离散，源项则按照附录C中的说明，通过算子分裂处理。为量化整个时间范围内的一致性，我们通过对整个欧拉场（t,x）上的差异平方取平均，计算时空均方根误差（RMSE）；该欧拉场在时间网格 $\{t^n\}_{n=1}^{N_t}$ 和空间网格 $\{x^m\}_{m=1}^{n_x}$上采样，

$$\text{RMSE}_\psi=\sqrt{\frac{1}{N_t\,n_x}\sum_{n=1}^{N_t}\sum_{m=1}^{n_x}\Big(\psi_{\text{PDE}}(t^n,x_m)-\psi_{\text{micro}}(t^n,x_m)\Big)^2},\qquad \psi\in\{v,\rho\}. \tag{52}$$

案例 1–3 的比较结果见图 8–10，它们均处于 Ω_c 中。在这些案例中，所提偏微分方程生成的欧拉速度和密度热图，无论在时空结构还是波形传播方面，都与微观基准高度吻合。定量而言，时空均方根误差较小，其中均方根误差$_v$ 范围为 0.45 至 0.71 米/秒，均方根误差$_\rho\approx 0.002$米$^{-1}$。未纳入案例4，因为其中涉及巡航到控制的相变，需要在 Ω_f 和 Ω_c 之间进行界面感知耦合处理。

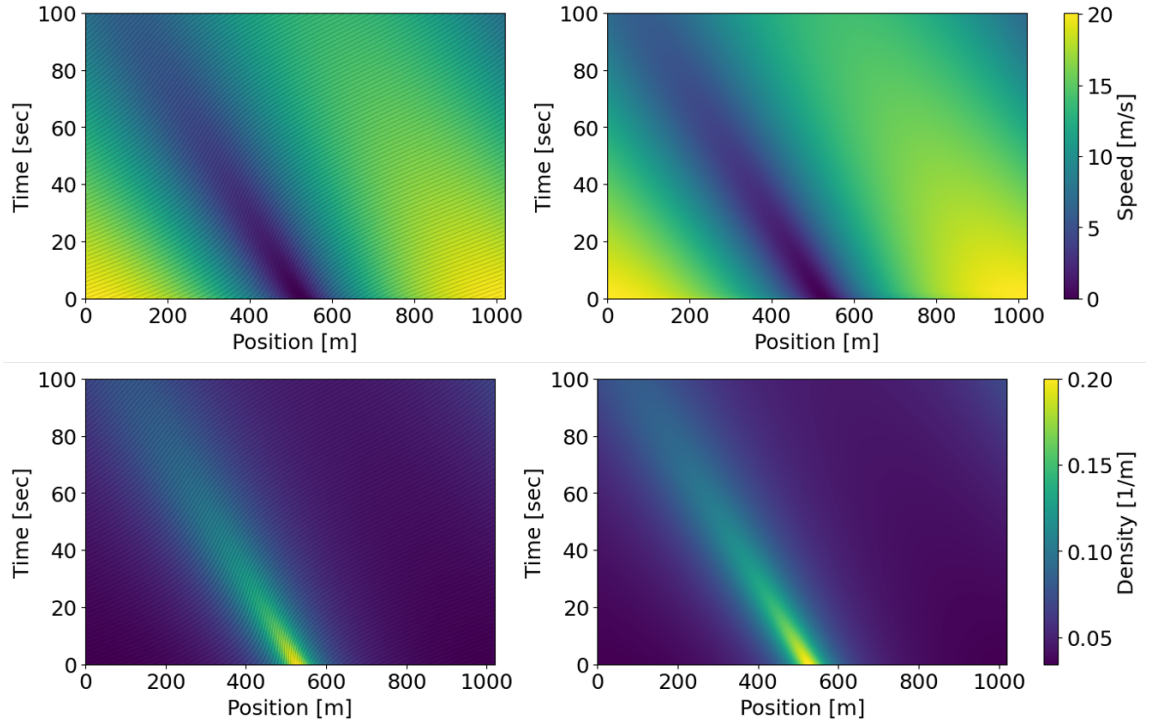

图 8：案例1的速度场和密度场：映射到欧拉坐标的微观轨迹（左）与所提偏微分方程解（右）（均方根误差$_v=0.45$米/秒，均方根误差$_\rho=0.002$米$^{-1}$）。

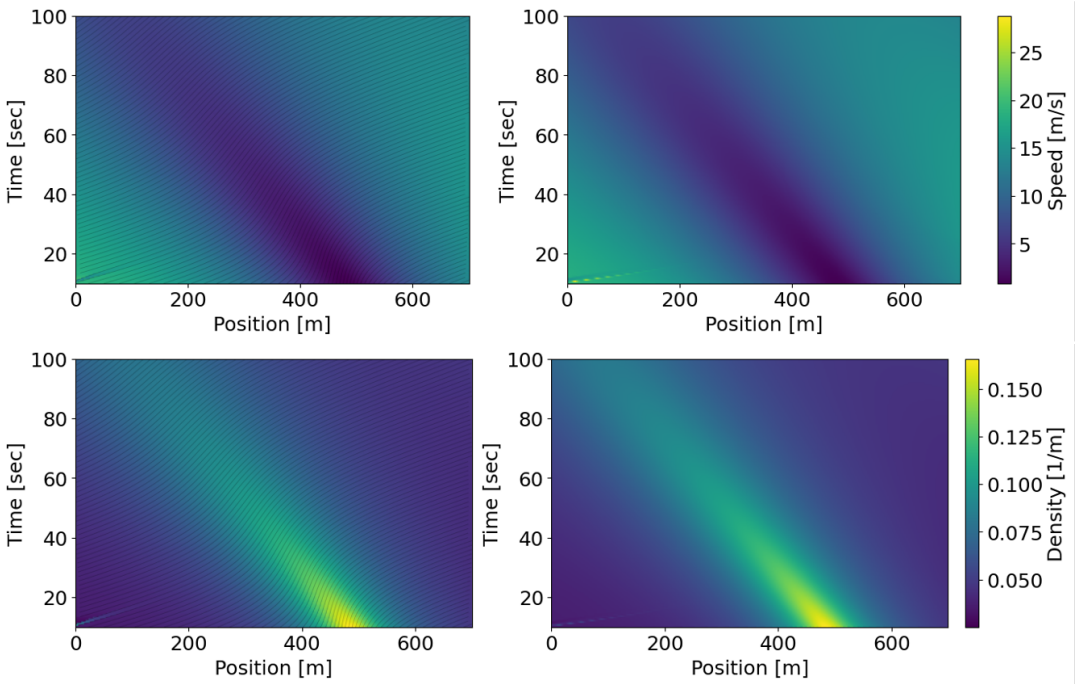

图9：案例2的速度与密度场：映射到欧拉坐标的微观轨迹（左）与所提偏微分方程解（右）（$\mathrm{RMSE}_v = 0.50\mathrm{m/s}$，$\mathrm{RMSE}_\rho = 0.002\mathrm{m}^{-1}$）。

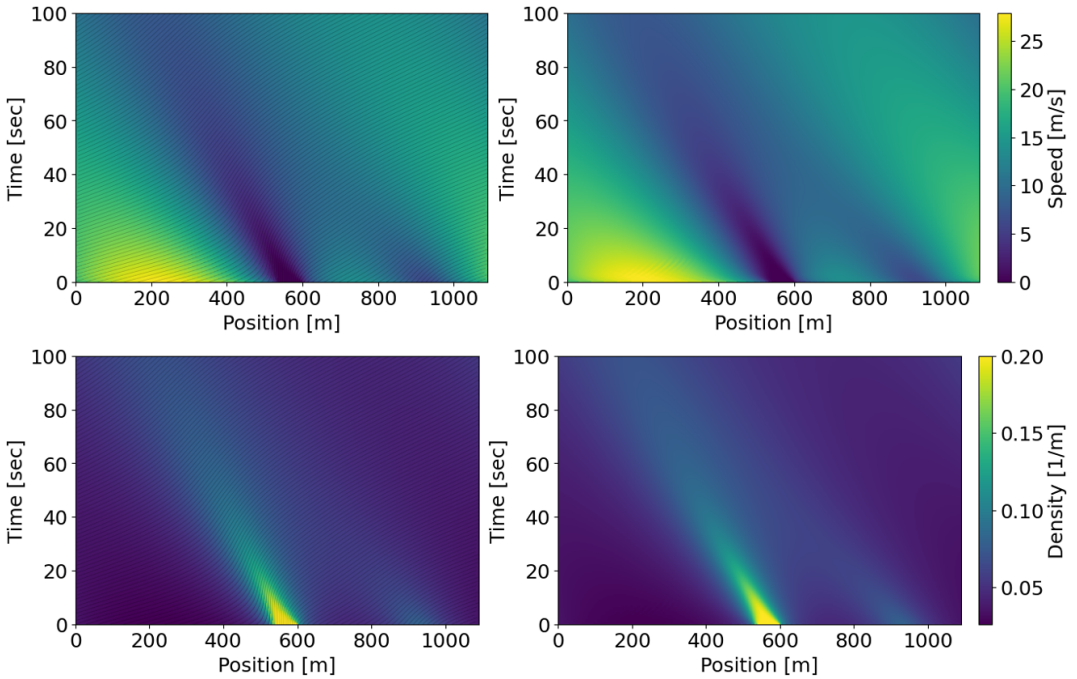

图10：案例3的速度与密度场：映射到欧拉坐标的微观轨迹（左）与所提偏微分方程解（右）（$\mathrm{RMSE}_v = 0.71\mathrm{m/s}$，$\mathrm{RMSE}_\rho = 0.002\mathrm{m}^{-1}$）。

由于 OpenACC 速度曲线并非天然具有周期性，直接重复会在周期边界处产生不连续。因此，在环形道路场景中，我们采用基于快速傅里叶变换 (FFT) 的滤波方法，构造平滑的周期近似。所得傅里叶重构在保持整体趋势和主要振荡的同时确保周期性，并用于初始化基准扰动（图11）。采用这种源自 OpenACC 的周期性初始化后，所提偏微分方程在速度场和密度场方面仍与微观基准相符。所得热力图在波结构和演变方面仍高度一致，整体差异较小，均方根误差$_v = 0.11\,\mathrm{m/s}$，均方根误差$_\rho = 0.003\mathrm{m}^{-1}$（见图。12）。

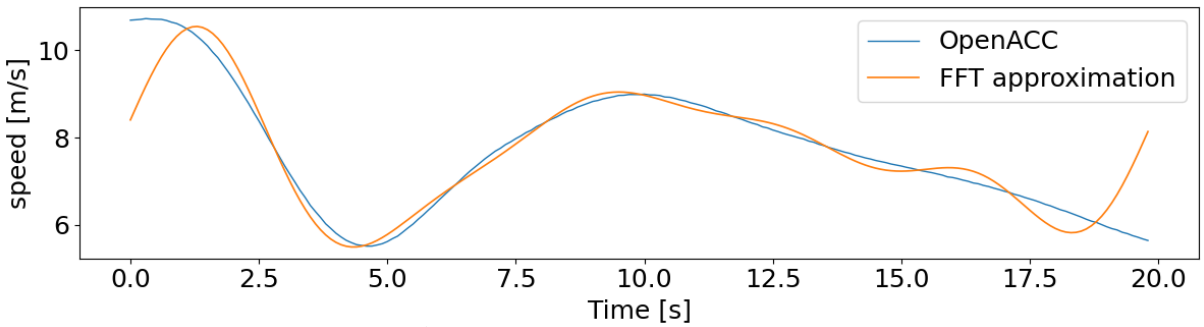

图11：环形道路实测数据集：速度曲线与傅里叶重构（均方根误差 $= 0.60$ m/s）。

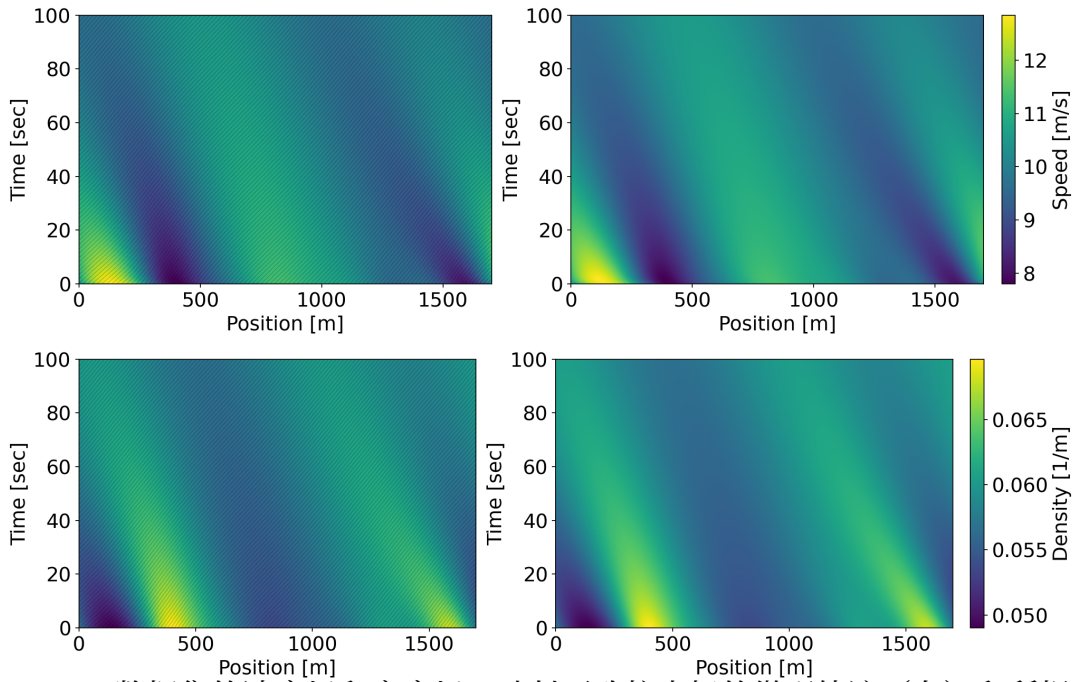

图12：OpenACC数据集的速度场和密度场：映射至欧拉坐标的微观轨迹（左）和所提方法的偏微分方程解（右）（均方根误差$_v = 0.11$米/秒，均方根误差$_\rho = 0.003$米$^{-1}$）。

参考文献

Ahn, S., Vadlamani, S., and Laval, J. (2013). 一种在测量交通迟滞时考虑非稳态条件的方法。《交通研究*C*辑：新兴技术》, 34:138–147.

Aw, A., Klar, A., Rascle, M., and Materne, T. (2002). 从微观跟驰模型推导连续交通流模型。《工业与应用数学学会应用数学杂志》, 63(1):259–278. Aw, A. and Rascle, M. (2000). 交通流“二阶”模型的复兴。《工业与应用数学学会应用数学杂志》, 60(3):916–938. Benyahia, M. and Rosini, M. D. (2016). 含相变交通模型的熵解。《非线性分析：理论、方法与应用》, 141:167–190. Blandin, S., Argote, J., Bayen, A. M., and Work, D. B. (2013). 非稳态交通流的相变模型：定义、性质与求解方法。《交通研究*B*辑：方法论》, 52:31–55. Blandin, S., Work, D., Goatin, P., Piccoli, B., and Bayen, A. (2011). 车辆交通的一般相变模型。《工业与应用数学学会应用数学杂志》, 71(1):107–127. Chalons, C. and Goatin, P. (2008). 用于计算交通流建模中相变的Godunov格式与采样技术。《界面与自由边界》, 10(2):197–221. Chu, S., Kurganov, A., Mohammadian, S., and Zheng, Z. (2025). 相变交通流模型的中心迎风格式。*arXiv*预印本 *arXiv:2504.12153*. Colombo, R. M. (2002). 一种 2×2 双曲交通流模型。《数学与计算机建模》, 35(5-6):683–688. Colombo, R. M. (2003). 交通流中的双曲相变。《工业与应用数学学会应用数学杂志》, 63(2):708–721. Colombo, R. M., Goatin, P., and Priuli, F. S. (2007). 含相变交通流模型的全局适定性。《非线性分析：理论、方法与应用》, 66(11):2413–2426. Daganzo, C. F. (1995). 二阶交通流体近似模型的挽歌。《交通研究*B*辑：方法论》, 29(4):277–286. Darbha, S. and Rajagopal, K. (1999). 智能巡航控制系统与交通流稳定性。《交通研究*C*辑：新兴技术》, 7(6):329–352. del Castillo, J. M. (2001). 密集交通流中扰动的传播：模型及其影响。《交通研究*B*辑：方法论》, 35(4):367–389. Goatin, P. (2006). 含相变的Aw–Rascle车辆交通流模型。《数学与计算机建模》, 44(3-4):287–303. Gunter, G., Gloudemans, D., Stern, R. E., McQuade, S., Bhadani, R., Bunting, M., Delle Monache, M. L., Lysecky, R., Seibold, B., Sprinkle, J., et al. (2020). 商用自适应巡航控制系统是否具有弦稳定性？《*IEEE*智能交通系统汇刊》, 22(11):6992–7003. Jiang, J., Zhou, Y., Jafarsalehi, G., Wang, X., Ahn, S., and Lee, J. D. (2025). 自动驾驶车辆跟驰控制的随机标定：一种近似贝叶斯计算方法。《*IEEE*智能交通系统汇刊》.

Jiang, J., Zhou, Y., Wang, X. 和 Ahn, S.（2024a）。基于近似贝叶斯计算的通用随机混合跟驰模型。《交通研究*C*辑：新兴技术》，167:104799。Jiang, J., Zhou, Y., Wang, X. 和 Ahn, S.（2024b）。关于动态基本图：对自动驾驶车辆的启示。《交通研究*B*辑：方法论》，第102979页。Kesting, A. 和 Treiber, M.（2013）。《交通流动力学：数据、模型与仿真》。第*1*册，专著）（*Springer Berlin Heidelberg*，柏林，海德堡。K¨uhne, R.（1984）。密集交通中启停波与事故检测的宏观高速公路模型。交通运输与交通理论，9:21–42。Laval, J. A.（2011）。重新审视交通流迟滞：一种改进的测量方法。《交通研究*B*辑：方法论》，45(2):385–391。Laval, J. A. 和 Leclercq, L.（2010）。一种描述拥堵高速公路交通中启停波形成与传播的机制。《伦敦皇家学会哲学汇刊*A*辑：数学、物理与工程科学》，368(1928):4519–4541。Leclercq, L., Laval, J., Chevallier, E., 等（2007）。拉格朗日坐标及其对一阶交通流模型的意义。交通运输与交通理论，第735–753页。LeVeque, R. J.（2002）。双曲型问题的有限体积法，第31卷。剑桥大学出版社。LeVeque, R. J. 和 Leveque, R. J.（1992）。守恒律数值方法，第132卷。Springer。Levin, M. W. 和 Boyles, S. D.（2016）。人类驾驶与自动驾驶车辆共用道路的多类别元胞传输模型。《交通研究*C*辑：新兴技术》，62:103–116。Li, X.（2022）。自动驾驶车辆跟驰控制中安全性、机动性与稳定性之间的权衡：一种解析方法。《交通研究*B*辑：方法论》，166:1–18。Li, X., Cui, J., An, S. 和 Parsafard, M.（2014）。启停交通流分析：理论特性、环境影响与振荡缓解。《交通研究*B*辑：方法论》，70:319–339。Li, Z., Zhou, Y., Chen, D. 和 Zhang, Y.（2024a）。切入场景下线性自适应巡航控制的扰动与安全性分析：理论框架。《交通研究*C*辑：新兴技术》，第104576页。Li, Z., Zhou, Y., Jiang, J., Zhang, Y. 和 Kulkarni, M. M.（2025）。威胁下的自适应巡航控制：混合交通中感知攻击的随机主动安全性分析。《事故分析与预防》，209:107813。Li, Z., Zhou, Y., Zhang, Y. 和 Li, X.（2024b）。通信网络攻击下提升车辆队列稳定性：一种可靠的纵向协同控制策略。《交通研究*C*辑：新兴技术》，163:104660。

Lighthill, M. J. 和 Whitham, G. B.（1955年）。关于运动学波II：拥挤长路上的交通流理论。《伦敦皇家学会会刊*A*辑：数学与物理科学》，229(1178):317–345。Mahmassani, H. S.（2016）。50周年特邀论文——自动驾驶车辆与网联车辆系统：交通流与运行考量。《交通科学》，50(4):1140–1162。Makridis, M., Mattas, K., Anesiadou, A. 和 Ciuffo, B.（2021年）。OpenACC：用于研究商用自适应巡航控制系统特性的跟驰实验开放数据库。《交通研究*C*辑：新兴技术》，125:103047。Makridis, M. A., Kouvelas, A. 和 Laval, J. A.（2024年）。车队基本图估计可能具有马尔可夫性质：来自人类驾驶与自动驾驶车辆轨迹的证据。*arXiv*预印本 *arXiv:2401.17065*。Michalopoulos, P. G., Yi, P. 和 Lyrintzis, A. S.（1993年）。拥堵高速公路交通动力学的连续介质建模。《交通研究*B*辑：方法论》，27(4):315–332。Moutari, S. 和 Rascle, M.（2007）。基于Aw–Rascle交通流模型的混合拉格朗日模型。《工业与应用数学学会应用数学杂志》，68(2):413–436。Newell, G. F.（1993年）。公路交通运动学波的简化理论，第一部分：一般理论。《交通研究*B*辑：方法论》，27(4):281–287。Newell, G. F.（1993b）。公路交通运动学波的简化理论，第二部分：高速公路瓶颈处的排队。《交通研究*B*辑：方法论》，27(4):289–303。Newell, G. F.（2002年）。简化的跟驰理论：一个低阶模型。《交通研究*B*辑：方法论》，36(3):195–205。Ntousakis, I. A., Nikolos, I. K. 和 Papageorgiou, M.（2015年）。自适应巡航控制系统的微观建模。《交通研究程序刊》，6:111–127。Orosz, G., Wilson, R. E. 和 St´ep´an, G.（2010）。交通拥堵：动力学与控制。Payne, H. J.（1971年）。高速公路交通与控制模型。《公共系统数学模型》，第51–61页。Pu, F., Zhou, Y., Ahn, S., Li, S., Kontar, W. 和 Wang, X.（2024年）。交通振荡下交通流迟滞的最优测量：一种二元整数规划方法。*SSRN 5019798*。Qin, Y., Wang, H. 和 Ni, D.（2021年）。混有协同自适应巡航控制车辆的交通流Lighthill-Whitham-Richards模型。《交通科学》，55(4):883–907。Richards, P. I.（1956年）。公路上的激波。《运筹学》，4(1):42–51。Ross, P.（1988年）。交通动力学。《交通研究*B*辑：方法论》，22(6):421–435。Shi, X. 和 Li, X.（2021年）。不同车头时距设置下商用自动驾驶车辆跟驰特性的实证研究。《交通研究*C*辑：新兴技术》，128:103134。

Stern, R. E., Cui, S., Delle Monache, M. L., Bhadani, R., Bunting, M., Churchill, M., Hamilton, N., Pohlmann, H., Wu, F., Piccoli, B., 等（2018）。通过控制自动驾驶车辆消散启停波：实地实验。《交通研究*C*辑：新兴技术》，89：205–221。Talebpour, A. 和 Mahmassani, H. S.（2016）。网联自动驾驶车辆对交通流稳定性和通行能力的影响。《交通研究*C*辑：新兴技术》，71：143–163。Taylor, J., Zhou, X., Rouphail, N. M. 和 Porter, R. J.（2015）。利用车辆轨迹数据研究驾驶员内部异质性的方法：一种动态时间规整方法。《交通研究*B*辑：方法论》，73：59–80。Toro, E. F.（2013）。《黎曼求解器与流体动力学数值方法：实用导论》。Springer Science & Business Media。Treiterer, J. 和 Myers, J.（1974）。交通流中的滞后现象。《交通运输与交通理论》，6：13–38。Van Arem, B., Van Driel, C. J. 和 Visser, R.（2006）。协同自适应巡航控制对交通流特征的影响。《*IEEE*智能交通系统汇刊》，7(4)：429–436。Wagner, D. H.（1987）。气体动力学中欧拉方程与拉格朗日方程弱解的等价性。《微分方程杂志》，68(1)：118–136。Whitham, G. B.（2011）。《线性波与非线性波》。John Wiley & Sons。Yi, J. 和 Horowitz, R.（2006）。自适应巡航控制车辆的宏观交通流传播稳定性。《交通研究*C*辑：新兴技术》，14(2)：81–95。Yu, H., Jiang, R., He, Z., Zheng, Z., Li, L., Liu, R. 和 Chen, X.（2021）。自动驾驶车辆参与的交通流研究：对假设、模型、推测和观点的综述。《交通研究*C*辑：新兴技术》，127：103101。Yue, X., Shi, H., Zhou, Y. 和 Li, Z.（2024）。面向网联自动驾驶车辆的混合跟驰控制：结合线性反馈与深度强化学习以稳定混合交通。《交通研究*C*辑：新兴技术》，167：104773。Zhang, H.（1999）。新型连续介质交通理论的稳定性与波动特性分析。《交通研究*B*辑：方法论》，33(6)：399–415。Zhang, H.（2000）。非平衡交通流理论所产生解的结构特性。《交通研究*B*辑：方法论》，34(7)：583–603。Zhang, H. 和 Jin, W.（2002）。混合交通的运动波交通流模型。《交通研究记录》，1802(1)：197–204。Zhang, H. M.（1998）。一种非平衡交通流理论。《交通研究*B*辑：方法论》，32(7)：485–498。Zhang, H. M.（2002）。一种摒弃类气体行为的非平衡交通模型。《交通研究*B*辑：方法论》，36(3)：275–290。

Zhou, Y. 和 Ahn, S.（2019）。面向网联自动驾驶车辆的分散式跟驰控制策略的鲁棒局部稳定性与弦稳定性。《交通研究*B*辑：方法论》，125：175–196。

Zhou, Y., Li, S., Kontar, W., Pu, F., Srivastava, A.和Ahn, S.（2024年）。通过解析近似研究交通振荡期间自动驾驶车辆的交通波特性。*arXiv*预印本 *arXiv:2411.16937*。