arXiv:2602.01514v1 [math.MG] 2 Feb 2026

格拉斯曼流形骨架、投影闭包算子与直径扫掠

Alexandru Chirvasitu

摘要

对于正整数 $r < d < n$，在n维希尔伯特空间的 r平面格拉斯曼流形的幂集 $2^{\mathbb{G}(r,V)}$ 上赋予一种闭包算子：对于一个由 r平面组成的集合，该算子将其扩张为最小的超集，使得该超集与任意两个 r 平面一起，还包含将其中一个 r维正交投影到任何包含另一个的 d平面上所得的所有结果。在 $2r \leq d$ 的情形下，$\mathbb{G}(r,\ V)$ 中闭子集的分类具有刚性；这些闭子集恰好是包含某个固定 $(\leq r)$ 平面的 r平面集合。该结果推广了其 $(r,\ d,\ n) = (1,\ 2,\ 3)$ 情形；这一情形应用于近期受矩阵保持问题启发的几何刚性结果中。

一个辅助结果将以 $p_0 \in \mathbb{R}$ 为中心的球刻画为该动力系统的紧不动点：该动力系统将 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ 变换为其基于 p_0 的直径扫掠，即所有直径为 p_0p 且满足 $p \in K$ 的球的并集。

关键词：格拉斯曼流形；正交投影；射影几何；刚性现象；饱和；子空间几何；三元关系；*Wigner*型定理

2020年数学主题分类：51A05；46C05；51A20；15A04；51M15；15A86

引言

本文重点讨论的结果，源于对若干相互交织的主题的思考，并由此衍生而来：

- 保持问题，例如，遵循 [4, 5, 9, 14, 17]（浩瀚文献仅略举一斑）的研究思路：保持各种不变量（尤其是谱和交换性）的矩阵空间之间的映射，往往只能归入若干受到严格约束的类别：共轭变换、转置共轭，以及根据问题具体情况而定的少数其他可分类的“奇异”类型；

- *Wigner*型结果 [13, 第 4], 章 [2, §3.1]（如）所示，这些结果源自量子力学的奠基性研究，并沿此脉络不断拓展：它们遵循共同的思路，对保持各种具有量子力学意义的不变量（例如正交性，可解释为观察者的可共同测量性 [11, §2-2], ，或角度，可表述为态跃迁概率 [2, (2.8)]）的射影化希尔伯特空间自映射进行分类；而这类映射同样可以被严格分类（例如由酉算子或共轭酉算子诱导）；

- 以及射影关联几何；从某种意义上说，它是刚刚提到的两个主题的基础，而其典型体现便是射影几何基本定理 [8, 定理 3.1]：保结构映射由半线性变换诱导，作用于射影空间之间。

[3, 定理 0.1] 将作为后续内容的具体切入点： $\mathbb{G}V \xrightarrow{\Psi}\mathbb{G}W$ 在 (≥ 3) 维希尔伯特空间的格拉斯曼流形之间，保持空间维数以及可比较空间对的格运算的映射，由半线性单射诱导。

此处的可共测性是指，所讨论的两个空间都是在同一正交归一基上取值的元素的张成，即可以解释为共享一个量子力学情境[7, §B.1]（因此该术语意在使人联想到可观测量测量）。在该结果的证明过程中，可以明显看出

- 问题的关键在于所讨论的射影空间映射的直线上的单射性 $\ell \in \mathbb{P}V$，$\dim V = \dim W = 3$；

- 并且，若单射性经由 $\Psi\ell = \Psi\ell'$、$\ell \neq \ell'$而失效，则上述情境性将迫使所有与 $\ell \oplus \ell''$ 及 $\ell' \oplus \ell''$ 可共测的 ℓ'' 取相同的 Ψ值。

正是在这一点上，下述构造变得相关。

在域 $\Bbbk$ 上工作，并常特化为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$，记 $\mathbb{G}(r, V)$为 r维子空间（属于向量空间 V）的格拉斯曼流形 [13,§1.2]，并记 $\mathbb{P}V := \mathbb{G}(1, V)$为其中直线的射影空间。假设 V 一个有限维实数或复数希尔伯特空间，按如下方式在 $\mathbb{G}(r, V)$上定义三元关系

$$\tau_d\left(\zeta, \zeta' \mid \zeta''\right) \Longleftrightarrow \exists\left(d\text{-plane } \pi \geq \zeta\right)\left(\zeta'' = P_\pi \zeta'\right), \quad 1 \leq d \leq \dim V,$$

$P_\bullet$ 表示投影到空间 $\bullet \leq V$上的正交投影。我们还需要：

定义 0.1 子集 $S \subseteq \mathbb{G}(r, V)$ 称为 τ_d-饱和，或称 关于 τ_d 饱和，如果

$$\forall\left(\zeta, \zeta' \in S \subseteq \mathbb{G}(r, V)\right) \forall\left(\zeta'' \in \mathbb{G}(r, V)\right)\left(\tau_d\left(\zeta, \zeta' \mid \zeta''\right) \Longrightarrow \zeta'' \in S\right).$$

或者： S 只要包含其定义域中的相关元素，就包含 τ_d 陪域中的元素。♦

前面的讨论可以概括为以下观察：一旦 $\Psi\ell = \Psi\ell'$，Ψ 就在整个 τ_2-饱和集 $\{\ell, \ell'\}$上取相同的值；因此自然会问，饱和集究竟能有多大。下面的刚性结果表明，这样的集合相当少见。

定理 0.2 设 $1 < d < n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ 和 V 是一个 n维实数或复数希尔伯特空间。
唯一的 τ_d-饱和子集是 $\mathbb{P}V$ 中的单元素集，以及 $\mathbb{P}V$ 本身。

尽管定理 0.2中的离散二分（饱和意味着集合要么是单元素集，要么是全集）在其定义域内或许已构成完整分类，却掩盖了这一分类背后刚性现象更深层的本质。例 1.7指出，更一般地，包含同一个固定r维($\leq r$)维核心的所有r维平面（即本文标题所说的格拉斯曼流形骨架）构成一个 τ_d 饱和集。其逆命题是定理 0.2的高维类比：根据下文的定理 1.8，这些骨架恰好就是满足 τ_d饱和条件的集合，且只需满足显而易见的必要维数要求。

在闭包算子的语境下，秉持几何/度量刚性的相同精神，定理 0.2 还有一个辅助结果。该结果虽然本质上很简单，却暗示了若干深远的影响。固定 $p_0 \in \mathbb{R}^d$后，考虑这样一个集值离散动力系统：对于子集 $K \subseteq \mathbb{R}^d$，赋予其 p_0-基础的直径扫掠：取所有直径为 p_0p、$p \in K$ 的球的并集。 命题 1.2提炼出与 τ-饱和相关的部分初等几何内容，并将该动力系统的紧不动点准确刻画为 p_0-中心球。

致谢
感谢 I. Bárány 和 R. Schneider 提供的富有启发性的评论。

1 态空间上的正交性导向关系

以下低维结果是证明定理 0.2的辅助结果，后者随后将取代它。

命题 1.1 对于一个3维实数或复数希尔伯特空间 V， $\mathbb{P}V$ 的唯一 τ_2-饱和子集是单元素集和 $\mathbb{P}V$ 本身。

简要绕道一下有助于构建一些辅助工具。我未能找到以下结果以目前这种确切形式出现；在此记录下来，以供完整性、将来使用，也因其本身可能具有的趣味。

命题 1.2 设 $p_0 \in \mathbb{R}^d$。若紧子集 $K \subset \mathbb{R}^d$ 包含所有直径为p_0p 、任意 $p \in K$ 的球 $\mathbb{B}_{p_0,\ p}$，则它是一个以 p_0为中心的球。

注 1.3 命题 1.2 可以用动力系统术语表述为一个集值不动点结果。具体来说，定义集合 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ 的（p_0-基）直径变换为

$$\Delta_{p_0} K := \bigcup_{p\in K} \mathbb{B}_{p_0,p}, \quad \mathbb{B}_{p_0,p} := \text{ball with diameter } p_0p.$$

这类由几何动机驱动、往往适合迭代的变换，在数学形态学文献中屡见不鲜（例如对 [16, §II.B]中的膨胀/腐蚀/连通分量提取变换）。

在当前语境下，命题 1.2 将 Δ_{p_0} 的紧不动点刻画为 p_0-心为中心的球。♦

例 1.4 根据 [1, 引理 2 及后续段落], ，圆 $\mathbb{S}^1 \ni p_0$ 的直径变换 $\Delta_{p_0}\mathbb{S}^1$ 是（由其围成的区域）心形线，其尖点位于 p_0 ，并在 $\mathbb{S}^1$ 的对跖点处与之相切。♦

命题 1.2 的证明 **命题 1.2** 只需论证 $d = 2$这一情形：若所有 $K\cap\pi$ 二维平面$\pi \ni p_0$ 的交集 p_0都是以 K为中心的球，那么 K也如此。

(I) **：凸包 $\operatorname{cvx} K$ 是严格凸的。** 回顾 [6, 第一章，定理后定义 1] ， 严格 凸性，对于诸如 $\operatorname{cvx} K$ 这样的凸集，恰好意味着其边界$\partial \operatorname{cvx} K$ 不包含任何非退化线段。

否则，就会有极端 点 $p^+ \neq p^- \in K \cap \partial \operatorname{cvx} K$ （按通常的凸性术语 [15, 定理 1.4 后的2]含义）由一条线段 $p^+p^- \subset \partial \operatorname{cvx} K$连接。至少有一个球（即圆盘）$B_{p_0,\ p^\pm}$ 会与由 $\operatorname{cvx} K$-支撑直线 [15, §1.3] p^+p^-切出的两个半平面都相交。

- 当然，如果 $p_0 \in \{p^\pm\}$，因为此时所讨论的唯一一条直线包含这个唯一非退化圆盘的直径；

- 并且当 $p_0 \notin \{p^\pm\}$ 时也是如此，因为在这种情况下，分别在 $p^\pm$ 处唯一的 $\mathbb{B}_{p_0,\ p^\pm}$-支撑直线与不同的直线 $p_0p^\pm$ 正交，因此不可能同时与 p^+p^- 重合。

这与圆盘包含假设矛盾，从而完成当前步骤 (I)。还要注意，由此可知，事实上 $K = \operatorname{cvx} K$ <style id='11'}本身是（严格）凸的。

(II)： ∂K **在** p_0**之外可微**。换言之，除非 $q = p_0$（我们尚未排除这种可能性，但在论证过程中它将不再构成问题），否则每个 $q \in \partial K$ 都与唯一一条 K-支撑直线关联。事实上，圆盘 $\mathbb{B}_{p_0,\ q}$本身是光滑的，因此在 q处有唯一的支撑直线；于是，任何两条在 $q \in \partial K$ 处相交的 K-支撑直线，其中一条

。必须穿过内部 $\mathbb{B}_{p_0,\ q}$。

(III)：结论。将曲线 $\partial K \setminus \{p_0\}$ 参数化为以 p_0为中心的坐标系中的$\mathbf{r}(t)$。每个圆盘 $\mathbb{B}_{p_0,\ q:\ =\mathbf{r}(t)}$ 都必须由经过 q的 K-支撑直线支撑，因此 $\dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0$。由此可知 $|\mathbf{r}(t)|$为常数，证明完毕。■

注 1.5 证明过程中指出的可微性，其背后的简单观察是：对于紧凸 K，点 $p \in \partial K$ 正则（即 [15,§2.2] 与唯一一条 K-支撑超平面关联），只要某个正则紧凸 K_p 包含于 K：显然，所有 K-支撑超平面也必须在 K_p处成为 p的支撑超平面。♦

命题 命题 1.1 换言之，包含至少两条不同直线的饱和集必定是全集。注意，为方便起见，我们可以不失一般性地在 $\mathbb{R}$上进行讨论：固定两个$\ell \neq \ell' \in \mathbb{P}V$ 属于饱和集 S的元素后，总能选取一个实结构 [10, 定义 18.5]20于 V，使之与两者均 ℓ 相容，且 ℓ'。

那么，考虑属于 τ_2-饱和集 $S \subseteq \mathbb{P}V$的直线 $\ell,\ \ell'$ 它们位于实三维 V中，彼此不同且不正交（事实上，ℓ' 会有某个投影 $P_\pi \ell'$, $\ell \leq \pi \in \mathbb{G}(2,\ V)$与 ℓ不正交）。固定 $0 \neq p' \in \ell'$ 时，正交投影轨迹

$$\left\{P_\pi p' \ :\ \ell \leq \pi \in \mathbb{G}(2, V)\right\}$$

是圆 C_0，其直径为 pp', $p := P_\ell p' \neq 0$，位于仿射平面 $\ell^\perp + p$中：该平面包含 p（以及p'）且与 ℓ 正交。刚才进行的步骤适用于 ℓ 以及任意一条直线

$$\ell'' := 0p_0, \quad p_0 \in C_0 \neq p$$

代替 ℓ'，从而对于所有属于 q_1 区域 $D_1 \subset \ell^\perp + p$ 的成员——该区域由直径为 pp_0的圆（等价地，圆盘）扫掠而成—— $p_0 \in C_0$ 直线 $0q_1$ 都属于 S。用注 1.3的说法，$D_1 = \Delta_p C_0$（这些 Δ 构造是在仿射平面 $\ell^\perp + p$中进行的）。现在我们可以无限迭代：

$$\forall\, (q \in D_\infty)\, (0q \in S)\,, \quad D_\infty := \bigcup_{n \geq 1} D_n, \quad D_{n+1} := \Delta_p D_n.$$

由上文的命题 1.2 可知，$D_\infty \subset \ell^\perp + p$ 是该仿射平面内半径为pp'、以 p为圆心的圆盘，并包含该圆盘的内部。因此：对于形成角度为 $\ell \neq \ell' \in S$ 的直线$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，绕着$\ell$ 旋转 ℓ' 所形成的圆锥（顶角为2θ）内部的直线，再次属于 S。这足以得出结论：

- $S \subseteq \mathbb{P}V$一方面是开放的，正如我们刚才论证的那样，它与 $\ell \neq \ell'$ 一起包含一个围绕 ℓ的完整旋转圆锥；

- 另一方面， S 也是闭合的：如果

$$S \ni \ell_n \xrightarrow[n]{} \ell \in \mathbb{P}V$$

那么某个 $\ell_m \neq \ell$ 将与 ℓ形成一个$\left(< \frac{\pi}{2}\right)$角，并将 ℓ_m 绕 ℓ_n 旋转到足够接近ℓ 的位置，即可生成一个其内部包含 ℓ的圆锥。

由于 $\mathbb{P}V$ 是连通的，其中的非空开闭子集必然是全集。 ■

注 1.6 在 命题 1.1所处理的小维数情形中，关系 τ_2在 $\mathbb{P}V$其前两个变量中是对称的：对于 $\ell \neq \ell'$

$$\tau_2(\ell, \ell' \mid \ell'') \iff \ell'' = \left(\pi := \operatorname{spn}\{\ell, \ell''\} = \ell \oplus \pi^{\perp}\right) \cap \left(\pi' := \operatorname{spn}\{\ell', \ell''\} = \ell' \oplus \pi'^{\perp}\right),$$

但需注意，张成 $\{\ell, \ell''\}$ 在 $\ell \oplus (\ell \oplus \ell')^{\perp}$这一退化情形下应解释为 $\ell = \ell''$，对于对 ℓ'， ℓ''替代 ℓ, ℓ''的情形也同样如此（参见 [3, 定理 0 的证明。1]）。

即使这种部分对称性一般也不成立，因为对于 τ_d在 $\mathbb{G}(r, V)$上：当 $P_\pi \eta' = \eta$时，可能有 $\tau_d(\eta, \eta' \mid \eta)$, 但与此同时 $\dim(\eta + \eta') > d$，因此不存在任何 d平面能够同时包含 η和 η'，这意味着 $\tau_d(\eta', \eta \mid \eta)$不成立。取 $r = 2$ 和 $d = 3$即可轻易构造出例子。♦

证明：定理 0.2。 命题 1.1 完成了大部分工作，其余部分是一个归纳论证，用以消除与维数相关的干扰。将该陈述的断言记为$\mathcal{P}_{d,\ n}$（每当使用该符号时，始终假定 $1 < d < n$）。

(I)： $\mathcal{P}_{d,\ n} \Rightarrow \mathcal{P}_{d+1,\ n+1}$。 对于一个饱和集

$$\mathbb{P}V \supseteq S \ni \ell \neq \ell', \quad \ell, \ell' \in \mathbb{P}V, \quad \dim V = n + 1,$$

替换

- 代替 V，一个包含 ℓ的超平面 $H \leq V$， ℓ' 以及任意第三条直线 ℓ'';
- ，并且对于 V中包含 ℓ的任意$(d+1)$-子空间，代之以 H 中具有相同性质的 d-子空间。

最后，注意到将 H 中的任意直线投影到维数为$\pi = d$ 的 $\pi \leq H$ 上，所得到的直线与投影到$(d+1)$-空间 $\pi \oplus H^{\perp}$上的直线相同。

(II)： $\mathcal{P}_{d,\ n} \Rightarrow \mathcal{P}_{d+1,\ n}$。 同样的论证实际上也能得出这一结论：环境空间 V可以保持不变，同时仍投影到形如 $\pi \oplus \kappa$ 的 $(d+1)$ 维子空间上，其中直线 κ与 ℓ、 ℓ' 正交，而 ℓ'' 是任意另一条直线（确保后者属于饱和集 S）。

结合起来，(I)和(II) 以及归纳法已将问题归结为已解决的命题1.1。 ■

还有一个更一般的定理 0.2版本，适用于任意格拉斯曼流形。不过，该表述不能完全 相同。

例 1.7 固定 $1 \leq r < d < n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$，一个 n 维希尔伯特空间，并固定

$$\pi \in \mathbb{G}(\leq r, V) := \bigsqcup_{1 \leq r' \leq r} \mathbb{G}(r', V).$$

子集

$$\pi^{\uparrow} = \pi^{\uparrow}_{\mathbb{G}(r,V)} := \left\{\pi' \in \mathbb{G}(r,V) \ : \ \pi' \geq \pi\right\} \subseteq \mathbb{G}(r,V) \tag{1-1}$$

（ π的 r-脊）于是是 τ_d-饱和的。 ♦

例 1.7中所记录的现象，事实上在适当的维数约束下解释了所有饱和。

定理 1.8 对于 $1 \leq r < d < n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$，下列条件等价。

(a) $2r \leq d$。

(b) 对于任意 n维实或复希尔伯特空间 V，一个 τ_d-饱和子集 $S \subseteq \mathbb{G}(r,V)$具有如下形式

$$S = \left(\bigcap S\right)^{\uparrow} \quad (\textit{in the notation of (1-1)}) .$$

因此，

$$\mathbb{G}(\leq r, V) \ni \pi \longmapsto \pi^{\uparrow} \in 2^{\mathbb{G}(r,V)}$$

是 $\mathbb{G}(\leq r, V)$ 与 r-维平面所成的 τ_d-饱和集族之间的双射。

(c) 对于 n 维实数或复数希尔伯特空间 V，格拉斯曼流形 $\mathbb{G}(r,V)$ 不含 *2* 元 τ_d-饱和子集。

将证明模块化，把形式上不显然的推论分别记录下来，会很方便。我们先处理稍后将纳入(c) $\Rightarrow$ (a)推论的定理 1.8。

引理 1.9 设 $1 \leq r < d < n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ 和 V 是实数或复数 n 维希尔伯特空间。若$2r > d$ 格拉斯曼流形 $\mathbb{G}(r,V)$ 含有 *2* 元 τ_d-饱和子集。

证明 首先注意到，只要 $2r > d$（因此也有 $r > d - r$），我们就有

$$n \geq 1 + d = 1 + (d - r) + r \geq 2 + 2(d - r),$$

因此存在 ζ，$\zeta' \in \mathbb{G}(r, V)$，使得

$$\eta = \zeta \oplus \beta, \quad \eta' = \zeta' \oplus \beta, \quad \dim \zeta = \dim \zeta' > d - r$$

对于两两正交的 ζ、ζ' 和 β。这意味着 ζ'（因而 η'）将与每个 $(n-d)$-子空间 $\pi^{\perp} \leq \eta^{\perp}$ 都有非平凡交集，因此 P_π 无法在 η' 上单射。交换 η 和 η' 的角色后，这一结论同样成立，因此二元集合 $\{\eta, \eta'\}$ 是 τ_d-饱和的。■

证明 定理1.8 的主要工作在于处理 (a) $\Rightarrow$ (b) 这一蕴含关系，现将其单独列为以下结果。

命题 1.10 设 $1 \leq r < 2r \leq d < n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ 和 V 是一个 n维实数或复数希尔伯特空间。

τ_d 饱和子集 $S \subseteq \mathbb{G}(r, V)$ 具有如下形式

$$S = \left(\bigcap S\right)^{\uparrow} \quad (in\ the\ notation\ of\ (1\text{-}1)),$$

因此

$$\mathbb{G}(\leq r, V) \ni \pi \longmapsto \pi^{\uparrow} \in 2^{\mathbb{G}(r,V)}$$

是 $\mathbb{G}(\leq r, V)$ 与所有 r 平面的 τ_d 饱和集之间的双射。

证明 任意 子集 $S \subseteq \mathbb{G}$ 都包含在其附属的 $(\bigcap S)^{\uparrow}$ 中，这是显然的，因此关键在于证明反向包含关系 $S \supseteq (\bigcap S)^{\uparrow}$（假设其饱和）。

这里大部分内容仍将通过对大小进行归纳法来证明，因此，与定理 0.2的证明一样，使用简写 $\mathcal{P}_{r,d,n}$ 表示所需结论会很方便。该证明中的 $\mathcal{P}_{d,n}$ 现在是 $\mathcal{P}_{1,d,n}$，它们都可作为归纳基例，因此可以假设 $r > 1$ 以及所有 $\mathcal{P}_{r',d',n'}$ 对于 $r' < r$均成立。

(I) **我们有**

$$\forall\, (S' \subseteq S) \left(\bigcap S' \neq \{0\} \Longrightarrow S \supseteq \left(\bigcap S'\right)^{\uparrow}\right).$$

确实：用“$\ominus$”表示正交补，我们只需研究包含π 的空间：$= \bigcap S'$；或者等价地，将所有涉及的空间 $\bullet$ 都替换为 $\bullet \ominus \pi$。这样就把问题化归为

$$\mathcal{P}_{r',d',n'}, \quad n - n' = d - d' = r - r' = \dim \bigcap S' \neq 0 \quad \left(\text{note: } 2r' \leq d'\right),$$

由此便可继续运用归纳法。如果 $\bigcap S \neq \{0\}$，问题便已解决，因此从现在起可以假设 $\bigcap S$是平凡的，并试图证明 S必定是 $\mathbb{G}$的全体（r, V）。

(II) **对于 $\eta \neq \eta' \in S$，交集$(P_\pi \eta') \cap \eta$ 可以是 η 的任意子空间，唯一的限制是它必须包含 $\eta \cap \eta'$，这是显而易见的必要条件**。换言之，在指定交集$(P_\pi \eta') \cap \eta$时，具有最大自由度。

指定一个 d维平面 $\pi \geq \eta$，相当于指定

$$\pi^{\perp} \in \mathbb{G}(n - d, \eta^{\perp}).$$

后一个空间在 $d - r \geq r$ 中的余维数为$(n - r)$维的 $\eta^{\perp}$，且其维数大于 η'的维数，因此 $\eta' \cap \pi^{\perp} = \{0\}$ 在一般情况下（在稠密的*Zariski*开 [12, §2.1] 集上）成立。依此类推，对于 $0 \leq r' \leq r$ 以及一个固定的($r - r'$)维的 $\zeta' \leq \eta^{\perp} \ominus P_{\eta^{\perp}} \eta'$，有

$$\mathbb{G}\left(r', P_{\eta^{\perp}} \eta'\right) \ni \zeta \longmapsto \left(P_{(\zeta \oplus \zeta')^{\perp}} \eta'\right) \cap \eta \in \left(\eta \cap \eta'\right)^{\uparrow}_{\mathbb{G}(r' + \dim \eta \cap \eta',\ \eta)}$$

将 r'-维空间在 $P_{\eta^{\perp}} \eta'$ 中的集合与 $(r' +$维 $\eta \cap \eta')$-子空间的集合对应起来，这些子空间属于 η 且包含交集 $\eta \cap \eta'$，其中 $0 \leq r' \leq r$。这就是重新表述后的 (II) 所声称的目标。

(III) **若** $\eta,\ \eta' \in S$ **交集平凡，则对所有直线** $\ell \leq \zeta$ **都有** $\ell^{\uparrow}_{\mathbb{G}(r,\ V)} \subseteq S$。 或者：所有$r$包含 ℓ 的平面都是 S-成员。对于任意直线 $\ell \leq \eta$，我们可以找到 π 使得 $(P_\pi \eta') \cap \eta = \ell$，依据 (II)，因此确实有

$$\forall\, (\ell \in \mathbb{P}\eta)\, \forall \left(\eta'' \in \ell^{\uparrow}_{\mathbb{G}(r,V)}\right) \left(\eta'' \in S\right)$$

依据 (I)上文。

(IV) 每个 $\eta \in S$ **都与某个** $\eta' \in S$ **相交于平凡子空间。** 假设交集 $\eta' \cap \eta$, $\eta' \in S$ 的最小维数为 $0 < r' < r$。我们假设 $\bigcap S \neq \{0\}$，因此某个 $\eta'' \in S$ 会与η 相交于一个非零真子空间，且该子空间不包含 $\eta \cap \eta'$。现在，

$$\left(\eta \cap \eta'\right)^{\uparrow}_{\mathbb{G}(r,V)}, \quad \left(\eta \cap \eta''\right)^{\uparrow}_{\mathbb{G}(r,V)} \overset{\text{(I)}}{\subseteq} S,$$

并且两个 **(•)**$^{\uparrow}$ 集合中分别有某两个 r维空间 ζ' 和 ζ''，它们相交于一个维数为 $< r'$的子空间。此外，任一集合中的某个元素——或者 $(\zeta' \cap \zeta'')^{\uparrow}_{\mathbb{G}(r,V)} \subseteq S$（若 $\zeta' \cap \zeta' \neq \{0\}$，则通过 **(I)**），或者 $\ell^{\uparrow}_{\mathbb{G}(r,V)} \subseteq S$（若 $\zeta' \cap \zeta'' = \emptyset$，则改用 **(III)**）——会沿一个 **(**$< r'$**)**维空间切割 η，从而产生矛盾。

(V) **结论。** 根据 (III)和 (IV)，

$$\forall\, (\eta \in S)\, \forall\, (\ell \in \mathbb{P}\eta)\, \left(\ell^{\uparrow}_{\mathbb{G}(r,V)} \subseteq S\right).$$

这意味着 $S = \mathbb{G}(r,\ V)$ 这一点可由 格拉斯曼图 $\mathbb{G}(r,\ V)$ [13,命题 2。11], 其中 r维平面为顶点，当且仅当两个顶点的交集在二者中都是超平面时，它们之间才有边。 ■

现在，各个组成部分已可汇总。

定理 1.8 的 证明 只需注意到

$$\text{(a)} \xrightarrow{\text{Proposition 1.10}} \text{(b)} \xrightarrow{\text{formal}} \text{(c)} \xrightarrow{\text{Lemma 1.9}} \text{(a)}$$

从而完成证明。 ■

参考文献

[1] Arseniy V. Akopyan. 心形线的几何学。《美国数学月刊》，122(2):144–150，2015。3[2] Leslie E. Ballentine。量子力学：现代发展。新加坡：世界科学出版社，第2版，2015。1[3] Alexandru Chirvasitu。标架反转与上下文几何刚性，2026。http://arxiv.org/abs/2601.11455v2。2，5[4] Alexandru Chirvasitu、Ilja Gogić 和 Mateo Tomašević。连续谱收缩映射及其在保持问题中的应用，2025。http://arxiv.org/abs/2501.06840v2。1[5] Alexandru Chirvasitu、Ilja Gogić 和 Mateo Tomašević。奇异矩阵的 ˇSemrl 保持定理的一种变体。《线性代数及其应用》，724:298–319，2025。1[6] Joseph Diestel。巴拿赫空间几何：精选主题，《数学讲义》第485卷《数学讲义》施普林格，Cham，1975。3

[7] Andreas Döring 和 Markus Frembs。情境性与量子力学基本定理。《数学物理杂志》，63(7):论文编号072103，20页，2022。2[8] Claude-Alain Faure。射影几何基本定理的一个初等证明。《几何专论》，90:145–151，2002。1[9] Ilja Gogić、Tatjana Petek 和 Mateo Tomašević。通过保持性质刻画分块上三角子代数之间的 Jordan 嵌入。《线性代数及其应用》，704:192–217，2025。1[10]Vaughan F. R. Jones。冯·诺依曼代数，2015。讲义，可通过 https://cdn.vanderbilt.edu/t2-my/my-prd/wp-content/uploads/sites/3392/2020/10/vonNeumann2015.pdf 获取（访问日期：2026-01-26）。4[11] George W. Mackey。量子力学的数学基础：讲义集。W. A. Benjamin, Inc.，纽约—阿姆斯特丹，1963。1[12] Mateusz Michałek 和 Bernd Sturmfels。非线性代数导论，《研究生数学丛书》第211卷。普罗维登斯，罗得岛：美国数学学会（AMS），2021。7[13] Mark Pankov。希尔伯特格拉斯曼流形的 Wigner 型定理，《伦敦数学学会讲义丛书》第460卷。剑桥：剑桥大学出版社，2020。1，2，8[14] Tatjana Petek。厄米矩阵上保持谱与交换性的映射。《线性代数及其应用》，290(1-3):167–191，1999。1[15] Rolf Schneider。凸体：Brunn-Minkowski理论，《数学应用百科全书》第151卷。剑桥：剑桥大学出版社，第2版增订版，2014。3，4[16] J. Serra。图像分析与数学形态学。Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers],伦敦，1984。英文版由 Noel Cressie 修订。3[17] Peter ˇSemrl。通过保持性质刻画矩阵代数的 Jordan 自同构。《算子矩阵》，2(1):125–136，2008。1

布法罗大学数学系，美国纽约州布法罗市 14260-2900电子邮件地址：achirvas@buffalo.edu