混合变分-半变分不等式的适定性与数值分析

Weimin Han，[1] Jianguo Huang[2] 和 Yuan Yao[3]

arXiv:2602.01529v1 [math.NA] 2 Feb 2026

摘要。 本文致力于研究一类一般椭圆型混合变分-半变分不等式的适定性分析与数值解。文献中的各种混合变分方程、混合变分不等式和混合半变分不等式，都是混合变分-半变分不等式的特例。本文通过投影迭代技术研究混合变分-半变分不等式的适定性及其数值近似，并给出数值方法的误差分析。研究结果应用于分析不可压缩流体流动的 Stokes 方程中的变分-半变分不等式，其中流体受摩擦型滑移条件约束，该条件既包括单调情形，也包括非单调情形。在一定的解正则性假设下，针对若干稳定有限元空间对推导出最优阶误差估计。数值结果验证了理论预测的收敛阶。

关键词。 混合变分-半变分不等式，适定性，投影迭代，数值方法，误差估计，Stokes方程

AMS学科分类：65N30, 35J50, 49J40, 74M10, 74M15。

1 引言

混合公式经常出现在涉及约束的应用问题中。一个众所周知的混合公式实例是对流体流动问题中不可压缩性约束的处理。此外，混合公式有助于发展高效的数值方法，以计算基础偏微分方程中除原未知变量之外的其他物理量。为求解应用中的混合问题，需要采用数值方法。关于混合问题数值解的出版物数量众多。著作 [4] 是通过混合公式求解各种边值问题的混合有限元方法的标准参考文献。大多数关于混合数值方法的出版物都致力于求解混合变分方程。不过，也有一些关于利用混合有限元方法求解混合变分不等式的参考文献，例如 [6, 21, 32]。

[1]数学系，爱荷华大学，美国爱荷华州爱荷华城，邮编 52242-1410；电子邮箱：weimin-han@uiowa.edu[2]数学科学学院及 MOE-LSC，上海交通大学，中国上海，邮编 200240；电子邮箱：jghuang@sjtu.edu.cn。该作者的工作部分得到了国家自然科学基金委员会资助（项目编号：12571390）。[3]应用数学与计算科学项目，爱荷华大学，美国爱荷华州爱荷华城，邮编 52242-1410；电子邮箱：yuan-yao@uiowa.edu

混合变分不等式描述了非光滑现象的数学模型，其中假设非光滑泛函为凸函数；而混合半变分不等式则是非光滑问题的数学模型，其中非光滑泛函可以是非凸的。关于混合半变分不等式，或更一般的混合变分-半变分不等式的适定性分析，已有不少论文。在 [2, 3, 25, 30],中，通过对集值映射应用抽象不动点原理，证明了混合变分-半变分不等式的解的存在性结果。相比之下，在 [17], 中，对于一个秩为 (1,1) 的特定混合变分-半变分不等式（沿用 [15, 第 5.1 节、第 7], 章，参见第 2 节中的术语），建立了极小极大原理，并通过等价的鞍点表述研究了该不等式问题。在 [18], 中，将 [17] 中建立的结果与 Banach不动点论证相结合，得到了秩为 (1,1) 和秩为 (2, 1) 的一般混合变分-半变分不等式的适定性结果。在 [34], 中，针对一个混合半变分不等式发展了一种投影迭代技术；按照[15]中的术语，该不等式可称为秩为 (0,1) 的混合变分-半变分不等式。本文将投影迭代技术推广到秩为 (1,1) 和秩为 (2,1) 的一般混合变分-半变分不等式的适定性分析中。与 [17, 18], 中的结果相比，在抽象层面上可以建立两个未知变量的唯一性（在不可压缩流体流动的应用中，即速度和压力的唯一性），但代价是需要对混合变分-半变分不等式采用更精细的设定。随后，我们将对一般混合变分-半变分不等式进行数值分析。

半变分不等式适用于物理量之间存在非光滑、非单调和集值关系的应用。自四十年前 Panagiotopoulos 的开创性工作以来（[31]），半变分不等式的建模、分析、数值解及其应用日益受到研究界的关注。近年来，与半变分不等式相关的出版物数量显著增加。关于变分-半变分不等式适定性分析结果的近期代表性文献，可参见 [33] ，该文基于伪单调算子抽象满射性结果的应用；也可参见 [15] ，该文基于泛函分析的基本知识，采用了易于理解的方法。此外，关于变分-半变分不等式数值分析的最新综述，可参见 [19, 16]。

本文的显著特点是：（1）所研究的混合变分-半变分不等式具有相当一般的形式，并且包含文献中出现的各种混合公式作为特殊情形（参见第 2 节问题 2.1 的陈述之后的评论）；（2）混合变分-半变分不等式及其数值近似的适定性分析采用了一种易于理解的方法，无需使用许多关于半变分不等式或变分-半变分不等式的参考文献中所采用的伪单调算子抽象理论。

在研究半变分不等式时，我们需要 Clarke（[8]）意义下的广义方向导数和广义次微分的概念。设 $\Psi\colon V \to \mathbb{R}$ 是定义在实 Banach 空间 V 上的局部 Lipschitz 连续泛函。那么，它的广义（ Clarke ）

在 $u \in V$ 沿方向 $v \in V$ 的方向导数定义为

$$\Psi^0(u;v) := \limsup_{w \to u,\, \lambda \downarrow 0} \frac{\Psi(w+\lambda v) - \Psi(w)}{\lambda},$$

且 Ψ 在 $u \in V$ 处的广义次微分定义为

$$\partial \Psi(u) := \left\{ \eta \in V^* \mid \Psi^0(u;v) \geq \langle \eta, v \rangle \ \forall\, v \in V \right\}.$$

在特殊情形下，若 $\Psi\colon V \to \mathbb{R}$ 局部Lipschitz连续且为凸函数，则按照 Clarke 的意义，$\partial\Psi(u)$ 在任意 $u \in V$ 处的次微分与凸次微分 $\partial\Psi(u)$ 相一致。因此，Clarke 次微分的概念可视为凸次微分概念的一种推广。对于所有 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和所有 $u \in V$，有

$$\partial(\lambda\, \Psi)(u) = \lambda\, \partial \Psi(u).$$

此外，对于局部 Lipschitz 连续函数 Ψ_1，$\Psi_2\colon V \to \mathbb{R}$，有包含关系

$$\partial(\Psi_1 + \Psi_2)(u) \subset \partial \Psi_1(u) + \partial \Psi_2(u) \quad \forall\, u \in V \tag{1.1}$$

成立，这等价于不等式

$$(\Psi_1 + \Psi_2)^0(u;v) \leq \Psi_1^0(u;v) + \Psi_2^0(u;v) \quad \forall\, u, v \in V. \tag{1.2}$$

关于局部 Lipschitz 连续泛函的广义方向导数和广义次微分的详细讨论及其性质，可参见若干参考文献，例如 [8, 29]。

本文其余部分安排如下。第 2 节讨论混合变分-半变分不等式的适定性，先研究秩为 (2，1) 的情形，再研究秩为 (1，1) 的情形。第 3 节对混合变分-半变分不等式进行数值分析。第 4 节将第 2 节和第 3 节的结果应用于研究具有摩擦型无渗漏滑移边界条件的 Stokes 方程的变分-半变分不等式。第 5 节报告若干数值算例的计算机模拟结果。

2 混合变分-半变分不等式的适定性

从现在起，设 V 和 Q 为两个实希尔伯特空间。它们的对偶空间分别记为 V^*和 Q^*。符号 $\langle \cdot,\ \cdot \rangle$ 表示 V^* 与 V之间，或 Q^* 与 Q之间的对偶配对；根据上下文，应该可以清楚地判断这里指的是哪一种对偶配对 $\langle \cdot,\ \cdot \rangle$。设 $K_V \subset V$和 $K_Q \subset Q$。给定算子和泛函 $A\colon V \to V^*$, $b\colon V \times Q \to \mathbb{R}$, $\Phi\colon V \times V \to \mathbb{R}$, $\Psi\colon V \to \mathbb{R}$，以及 $f \in V^*$。我们考虑一个一般的混合变分-半变分不等式。

问题 2.1 求 $(u, p) \in K_V \times K_Q$，使得

$$\langle Au, v-u\rangle + b(v-u, p) + \Phi(u, v) - \Phi(u, u) + \Psi^0(u; v-u) \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall\, v \in K_V, \tag{2.1}$$

$$b(u, q-p) \leq 0 \quad \forall\, q \in K_Q. \tag{2.2}$$

我们指出，问题 2.1 的形式相当一般，它将文献中出现的多种混合问题作为特例包含在内。例如，[32] 中研究的混合问题对应于选取 $\Phi \equiv 0$、$\Psi \equiv 0$以及 A 为线性（对于 [32], 中的混合问题，(2.2)的右端被一个连续线性泛函所替代，这不会给该问题的分析与数值解带来任何复杂性）。对于 [20] 中研究的混合问题以及 [9]中研究的Stokes变分不等式，A 是线性的，$\Psi \equiv 0$、$K_V = V$ 以及 $K_Q = Q$，后者意味着(2.2)被简化为一个更简单的方程。[22]中研究的问题比 [20] 中的问题更简单，因为 Φ 仅依赖于一个变量。对于 [12] 和 [24]中研究的问题，A 是线性的，$\Phi \equiv 0$、$K_V = V$ 以及 $K_Q = Q$。在$\Phi \equiv 0$、$\Psi \equiv 0$、$K_V = V$、$K_Q = Q$以及 A 为线性的非常特殊情形下，问题 2.1 退化为文献中广泛研究的常见混合变分方程（参见 [4]）。

在研究问题 2.1 时，我们将对问题数据采用以下条件。

- $H(K_V)$ V是实希尔伯特空间，$K_V \subset V$非空、闭且凸，并且包含一个子空间 V_0。
- $H(K_Q)$ Q 是实希尔伯特空间，$K_Q \subset Q$ 非空、闭且凸。
- $H(A)$ $A\colon\ V \to V^*$ 是Lipschitz连续且强单调的。
- $H(b)$ $b\colon\ V \times Q \to \mathbb{R}$ 是双线性且有界的。此外，满足inf-sup条件：

$$\alpha_b \|q\|_Q \leq \sup_{w \in V_0} \frac{b(w, q)}{\|w\|_V} \quad \forall\, q \in Q. \tag{2.3}$$

- $H(\Phi)_2$ $\Phi\colon\ V \times V \to \mathbb{R}$；对于任意 $u \in V$, $\Phi(u, \cdot)\colon\ V \to \mathbb{R}$在某个非空开集上是凸的且有上界；并且存在一个常数 $\alpha_\Phi \geq 0$ 使得

$$\Phi(u_1,\ v_2) - \Phi(u_1,\ v_1) + \Phi(u_2,\ v_1) - \Phi(u_2,\ v_2) \leq \alpha_\Phi \|u_1 - u_2\|\, \|v_1 - v_2\| \qquad \forall\, u_1, u_2, v_1, v_2 \in V. \tag{2.4}$$

此外，

$$\Phi(u, v+w) = \Phi(u, v) \quad \forall\, u, v \in K_V,\ w \in V_0 \tag{2.5}$$

- $H(\Psi)$ $\Psi\colon\ V \to \mathbb{R}$ 是局部Lipschitz连续的，并且存在一个常数 $\alpha_\Psi \geq 0$ 使得

$$\Psi^0(v_1; v_2 - v_1) + \Psi^0(v_2; v_1 - v_2) \leq \alpha_\Psi \|v_1 - v_2\|_V^2 \quad \forall\, v_1, v_2 \in V. \tag{2.6}$$

此外，

$$\Psi^0(v; w) = 0 \quad \forall\, v \in K_V,\ w \in V_0. \tag{2.7}$$

- H（f） $f \in V^*$。

按照 [15], 中使用的术语，问题 2.1 是一个秩为 (2，1) 的混合变分-半变分不等式，因为函数 Φ 依赖于两个变量，而函数 Ψ 依赖于一个变量。当 $\Psi \equiv 0$时，问题 2.1 化为混合变分不等式。当$\Phi \equiv 0$时，问题 2.1 可视为一个“纯”混合半变分不等式。

我们指出，在假设 H（K_V）下，对于任意 $v \in K_V$ 和任意 $w \in V_0$， $v + w \in K_V$（引理 2.1]）。

与条件 H（A）相关，我们将 $M_A > 0$ 用作 Lipschitz 常数:

$$\|Av_1 - Av_2\|_{V^*} \leq M_A\|v_1 - v_2\|_V \quad \forall\, v_1, v_2 \in V, \tag{2.8}$$

并将 $m_A > 0$ 用作强单调性常数:

$$\langle Av_1 - Av_2, v_1 - v_2\rangle \geq m_A\|v_1 - v_2\|_V^2 \quad \forall\, v_1, v_2 \in V. \tag{2.9}$$

与 条件 H（b）相关，我们将 $M_b > 0$ 用作有界性常数 t:

$$|b(v, q)| \leq M_b\|v\|_V\|q\|_Q \quad \forall\, v \in V,\, q \in Q. \tag{2.10}$$

Ass假设 $H(b)$ 使我们能够通过关系定义算子 $B \in \mathcal{L}(V; Q)$ n

$$(Bv, q)_Q = b(v, q) \quad \forall\, v \in V,\, q \in Q.$$

不等式 (2.10) 等价于

$$\|B\| \leq M_b.$$

注意，假设 $\Phi(u, \cdot)$: $V \to \mathbb{R}$ 在非空开集上是凸且有上界的，这意味着 $\Phi(u, \cdot)$ 在 V 上连续（参见 [10]）。假定凸函数 $\Phi(u, \cdot)$: $V \to \mathbb{R}$ 连续，而非仅下半连续。正如 [13, 14] 或 [15, 第 5 节 1], 中所解释的，对于绝大多数应用，采用更强的连续性假设并不会造成任何损失。$H(\Phi)_2$ 中的下标 2 提醒读者，这是针对 Φ 依赖于两个变量的情形所作的条件。(2.6) 中的常数 $\alpha_\Psi \geq 0$ 衡量了 Ψ 的非凸性强弱: α_Ψ 的值越小， Ψ 的非凸性越弱；特别地，在 Ψ 为凸函数的退化情形下，(2.6) 在 $\alpha_\Psi = 0$ 时成立。

分析问题 2.1 的第一步是将不等式 (2.2) 转化为等式形式。令 P_{K_Q}: $Q \to K_Q$ 为从 Q 到 K_Q 的正交投影算子。

引理 2.2 在假设 $H(b)$ 下，(2.2) 等价于

$$p = P_{K_Q}(p + \rho\, Bu) \quad \forall\, \rho > 0. \tag{2.11}$$

证明。 利用算子 B，我们可以将 (2.2) 改写为

$$(Bu, q - p)_Q \leq 0 \quad \forall\, q \in Q.$$

对于任意 $\rho > 0$，这等价于

$$((p + \rho\, Bu) - p, q - p)_Q \leq 0 \quad \forall\, q \in Q,$$

即，(2.11) 成立。 ■

定理 2.3 假设 $H(K_V)$、 $H(K_Q)$、 $H(A)$、 $H(b)$、 $H(\Phi)_2$、 $H(\Psi)$、 $H(f)$，以及

$$\alpha_\Phi + \alpha_\Psi < m_A. \tag{2.12}$$

那么，问题 *2.1* 有唯一解 $(u, p) \in K_V \times K_Q$。

证明。 任取但固定 $p_0 \in V_Q$。参数 $\rho > 0$ 将在证明中稍后选取得足够小。定义序列 $\{(u_n, p_n)\}_{n\geq 0} \subset K_V \times K_Q$ 如下：

$$\begin{aligned} &\langle Au_n, v - u_n\rangle + \Phi(u_n, v) - \Phi(u_n, u_n) + \Psi^0(u_n; v - u_n) \\ &\qquad \geq \langle f, v - u_n\rangle - b(v - u_n, p_n) \quad \forall\, v \in K_V, \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$p_{n+1} = P_{K_Q}(p_n + \rho\, Bu_n). \tag{2.14}$$

在上述假设下，给定 $p_n \in K_Q$，变分-半变分不等式 (2.13) 有唯一解 $u_n \in K_V$（例如参见 [15, 定理 5.9]）。在 (2.13) 中取 $v = u_{n-1}$，并在 (2.13) 中取将 n 替换为 $(n-1)$ 的 $v = u_n$：

$$\begin{aligned} &\langle Au_n, u_{n-1} - u_n\rangle + \Phi(u_n, u_{n-1}) - \Phi(u_n, u_n) + \Psi^0(u_n; u_{n-1} - u_n) \\ &\qquad \geq \langle f, u_{n-1} - u_n\rangle - b(u_{n-1} - u_n, p_n) \\ &\langle Au_{n-1}, u_n - u_{n-1}\rangle + \Phi(u_{n-1}, u_n) - \Phi(u_{n-1}, u_{n-1}) + \Psi^0(u_{n-1}; u_n - u_{n-1}) \\ &\qquad \geq \langle f, u_n - u_{n-1}\rangle - b(u_n - u_{n-1}, p_{n-1}). \end{aligned}$$

将两个不等式相加，得到

$$\begin{aligned} \langle Au_n - Au_{n-1}, u_n - u_{n-1}\rangle \leq\ & \Phi(u_n, u_{n-1}) - \Phi(u_n, u_n) + \Phi(u_{n-1}, u_n) - \Phi(u_{n-1}, u_{n-1}) \\ & + \Psi^0(u_n; u_{n-1} - u_n) + \Psi^0(u_{n-1}; u_n - u_{n-1}) \\ & - b(u_n - u_{n-1}, p_n - p_{n-1}). \end{aligned}$$

应用 $H(A)$、 $H(\Phi)_2$ 和 $H(\Psi)$,

$$m_A\|u_n - u_{n-1}\|_V^2 \leq \alpha_\Phi\|u_n - u_{n-1}\|_V^2 + \alpha_\Psi\|u_n - u_{n-1}\|_V^2 - b(u_n - u_{n-1}, p_n - p_{n-1}).$$

因此,

$$(m_A - \alpha_\Phi - \alpha_\Psi)\,\|u_n - u_{n-1}\|_V^2 \leq -b(u_n - u_{n-1}, p_n - p_{n-1}). \tag{2.15}$$

由（2.15）可推得

$$(m_A - \alpha_\Phi - \alpha_\Psi)\,\|u_n - u_{n-1}\|_V^2 \leq M_b\|u_n - u_{n-1}\|_V\|p_n - p_{n-1}\|_Q,$$

即,

$$\|u_n - u_{n-1}\|_V \leq c_0\|p_n - p_{n-1}\|_Q, \quad c_0 := \frac{M_b}{m_A - \alpha_\Phi - \alpha_\Psi}. \tag{2.16}$$

接下来，根据定义 根据 p_{n+1} 和 p_n 的定义 (2.14)，以及 P_{K_Q} 的非扩张性，我们有

$$\begin{aligned} \|p_{n+1} - p_n\|_Q^2 &\leq \|(p_n + \rho\, Bu_n) - (p_{n-1} + \rho\, Bu_{n-1})\|_Q^2 \\ &= \|p_n - p_{n-1}\|_Q^2 + \rho^2\|B(u_n - u_{n-1})\|_Q^2 + 2\,\rho\, b(u_n - u_{n-1}, p_n - p_{n-1}). \end{aligned}$$

由 (2.15) 可得,

$$b(u_n - u_{n-1}, p_n - p_{n-1}) \leq -\left(m_A - \alpha_\Phi - \alpha_\Psi\right) \|u_n - u_{n-1}\|_V^2.$$

此外,

$$\|B(u_n - u_{n-1})\|_Q \leq M_b \|u_n - u_{n-1}\|_V.$$

因此,

$$\begin{aligned} \|p_{n+1} - p_n\|_Q^2 &\leq \|p_n - p_{n-1}\|_Q^2 + \rho^2 M_b^2 \|u_n - u_{n-1}\|_V^2 - 2\,\rho\,\left(m_A - \alpha_\Phi - \alpha_\Psi\right) \|u_n - u_{n-1}\|_V^2 \\ &= \|p_n - p_{n-1}\|_Q^2 - \theta\,\|u_n - u_{n-1}\|_V^2, \end{aligned}$$

其中

$$\theta = 2\,\rho\,\left(m_A - \alpha_\Phi - \alpha_\Psi\right) - \rho^2 M_b^2.$$

选取充分小的 $\rho > 0$ ，使得 $\theta > 0$。于是,

$$\|p_{n+1} - p_n\|_Q^2 \leq \|p_n - p_{n-1}\|_Q^2 - \theta\,\|u_n - u_{n-1}\|_V^2. \tag{2.17}$$

利用假设 (2.5) 和 (2.7)，由 (2.13) 可得以下等式

$$\langle Au_n, w\rangle + b(w, p_n) = \langle f, w\rangle \quad \forall\, w \in V_0. \tag{2.18}$$

因此,

$$b(w, p_n - p_{n-1}) = -\langle Au_n - Au_{n-1}, w\rangle \quad \forall\, w \in V_0.$$

应用 inf-sup条件 (2.3),

$$\alpha_b \|p_n - p_{n-1}\|_Q \leq \sup_{w \in V_0} \frac{b(w, p_n - p_{n-1})}{\|w\|_V} = \sup_{w \in V_0} \frac{-\langle Au_n - Au_{n-1}, w\rangle}{\|w\|_V} \leq M_A \|u_n - u_{n-1}\|_V,$$

or,

$$\|u_n - u_{n-1}\|_V \geq \frac{\alpha_b}{M_A}\,\|p_n - p_{n-1}\|_Q. \tag{2.19}$$

结合 (2.17) 和 (2.19),

$$\|p_{n+1} - p_n\|_Q \leq \kappa\,\|p_n - p_{n-1}\|_Q.$$

其中，当 $\theta > 0$ su 足够小时；当 $\rho > 0$ 足够小时即可保证这一点，我们有

$$\kappa := \left(1 - \theta\,\frac{\alpha_b^2}{M_A^2}\right)^{1/2} < 1.$$

于是,

$$\|p_{n+1} - p_n\|_Q \leq \kappa^n \|p_1 - p_0\|_Q. \tag{2.20}$$

对于 $m > n$，我们反复应用 (2.20) 得到

$$\begin{aligned} \|p_m - p_n\|_Q &\leq \|p_m - p_{m-1}\|_Q + \cdots + \|p_{n+1} - p_n\|_Q \\ &\leq \left(\kappa^{m-1} + \cdots + \kappa^n\right) \|p_1 - p_0\|_Q \\ &\leq \frac{\kappa^n}{1 - \kappa}\,\|p_1 - p_0\|_Q. \end{aligned}$$

由于 $\kappa < 1$，我们有

$$\|p_m - p_n\|_Q \to 0 \quad \text{as } m, n \to \infty,$$

即， $\{p_n\}$ 是一个柯西序列。由于 Q 是完备的，因此存在一个元素 $p \in Q$ ，使得

$$p_n \to p \quad \text{in } Q.$$

此外，由于 K_Q 是闭的，极限 $p \in K_Q$。

由（2.16）和（2.20），

$$\|u_n - u_{n-1}\|_V \le c_0 \kappa^{n-1} \|p_1 - p_0\|_Q.$$

因此，对于 $m > n$,

$$\|u_m - u_n\|_V \le \|u_m - u_{m-1}\|_V + \cdots + \|u_{n+1} - u_n\|_V \le \frac{c_0 \kappa^n}{1-\kappa} \|p_1 - p_0\|_Q.$$

因此， $\{u_n\}$ 是完备空间 V中的柯西序列，故其有极限 $u \in V$。由于 $u_n \in K_V$和 K_V是闭的， $u \in K_V$。

注意

$$\begin{aligned}
&|(\Phi(u_n, v) - \Phi(u_n, u_n)) - (\Phi(u, v) - \Phi(u, u))| \\
&\quad \le |\Phi(u_n, v) - \Phi(u_n, u_n) - \Phi(u, v) + \Phi(u, u_n)| + |\Phi(u, u) - \Phi(u, u_n)| \\
&\quad \le \alpha_\Phi \|u_n - u\|_V \|v - u_n\|_V + |\Phi(u, u) - \Phi(u, u_n)| \\
&\quad \to 0,
\end{aligned}$$

并且（参见 [29, 命题 3.23 (ii)]）

$$\limsup_{n \to \infty} \Psi^0(u_n; v - u_n) \le \Psi^0(u; v - u).$$

对 (2.13) 两边取上极限，得到 (2.1)。

由于 P_{K_Q}的连续性，我们在 (2.14) 中取极限，得到

$$p = P_{K_Q}(p + \rho\, Bu).$$

由引理 2.2 可知，这意味着 (2.2)。

因此，极限 $(u,\ p) \in K_V \times K_Q$ 是问题 2.1 的一个解。

为证明唯一性，设 $(u_1, p_1) \in K_V \times K_Q$ 和 $(u_2, p_2) \in K_V \times K_Q$ 是问题 2.1 的两个解。于是,

$$\langle Au_1, u_2 - u_1 \rangle + b(u_2 - u_1, p_1) + \Phi(u_1, u_2) - \Phi(u_1, u_1) + \Psi^0(u_1; u_2 - u_1) \ge \langle f, u_2 - u_1 \rangle, \tag{2.21}$$

$$b(u_1, p_2 - p_1) \le 0 \tag{2.22}$$

and

$$\langle Au_2, u_1 - u_2 \rangle + b(u_1 - u_2, p_2) + \Phi(u_2, u_1) - \Phi(u_2, u_2) + \Psi^0(u_2; u_1 - u_2) \ge \langle f, u_1 - u_2 \rangle, \tag{2.23}$$

$$b(u_2, p_1 - p_2) \le 0. \tag{2.24}$$

将 (2.22) 和 (2.24) 相加，得到

$$-b(u_1-u_2,p_1-p_2)\le 0. \tag{2.25}$$

然后，将 (2.21) 和 (2.23) 相加，得到

$$\begin{aligned}\langle Au_1-Au_2,u_1-u_2\rangle \le{}& \Phi(u_1,u_2)-\Phi(u_1,u_1)+\Phi(u_2,u_1)-\Phi(u_2,u_2)\\ &+\Psi^0(u_1;u_2-u_1)+\Psi^0(u_2;u_1-u_2)-b(u_1-u_2,p_1-p_2).\end{aligned} \tag{2.26}$$

因此，利用 $H(A)$、 $H(\Phi)_2$、 $H(\Psi)$ 和 (2.25),

$$m_A\|u_1-u_2\|_V^2\le \alpha_\Phi\|u_1-u_2\|_V^2+\alpha_\Psi\|u_1-u_2\|_V^2, \tag{2.27}$$

即,

$$(m_A-\alpha_\Phi-\alpha_\Psi)\,\|u_1-u_2\|_V^2\le 0.$$

由 小量条件 (2.12)，我们推得 $\|u_1-u_2\|_V=0$ 和 $u_1=u_2$。

与 (2.19) 类似，我们有

$$\|p_1-p_2\|_Q\le \frac{\alpha_b}{M_A}\,\|u_1-u_2\|_V=0,$$

从而推出 p的唯一性： $p_1=p_2$。 ■

现在我们给出解对右端的Lipschitz 连续依赖性。

定理 2.4 保持定理 *2.3*中所述的假设。则存在常数 $c>0$，使得对于带有 $f=f_1$、 $f_2\in V^*$的问题 *2.1*的解(u_1,p_1)、$(u_2,p_2)\in K_V\times K_Q$，下列不等式成立:

$$\|u_1-u_2\|_V+\|p_1-p_2\|_Q\le c\,\|f_1-f_2\|_{V^*}. \tag{2.28}$$

证明。 我们从(2.21)–(2.24)出发，其中在(2.21)中将 f 替换为 f_1 ，在(2.23)中替换为 f_2 。于是，(2.26)被修改为

$$\begin{aligned}\langle Au_1-Au_2,u_1-u_2\rangle \le{}& \Phi(u_1,u_2)-\Phi(u_1,u_1)+\Phi(u_2,u_1)-\Phi(u_2,u_2)\\ &+\Psi^0(u_1;u_2-u_1)+\Psi^0(u_2;u_1-u_2)\\ &-b(u_1-u_2,p_1-p_2)+\langle f_1-f_2,u_1-u_2\rangle\end{aligned}$$

而(2.27)被修改为

$$m_A\|u_1-u_2\|_V^2\le \alpha_\Phi\|u_1-u_2\|_V^2+\alpha_\Psi\|u_1-u_2\|_V^2+\|f_1-f_2\|_{V^*}\|u_1-u_2\|_V.$$

Then

$$\|u_1-u_2\|_V\le \frac{1}{m_A-\alpha_\Phi-\alpha_\Psi}\,\|f_1-f_2\|_{V^*}. \tag{2.29}$$

类似于 (2.18)，我们有

$$\begin{aligned}\langle Au_1,w\rangle+b(w,p_1)&=\langle f_1,w\rangle \quad \forall\, w\in V_0,\\ \langle Au_2,w\rangle+b(w,p_2)&=\langle f_2,w\rangle \quad \forall\, w\in V_0.\end{aligned}$$

将这两个方程相减，得到

$$b(w, p_1 - p_2) = \langle f_1 - f_2, w\rangle - \langle Au_1 - Au_2, w\rangle \quad \forall\, w \in V_0.$$

根据 inf-sup条件 (2.3),

$$\alpha_b \|p_1 - p_2\|_Q \le \sup_{w\in V_0} \frac{1}{\|w\|_V} [\langle f_1 - f_2, w\rangle - \langle Au_1 - Au_2, w\rangle] \le \|f_1 - f_2\|_{V^*} + M_A\|u_1 - u_2\|_V.$$

这个不等式与 (2.29) 一起推出 (2.28)。 ∎

现在我们引入问题 2.1 的一个变体，它与应用直接相关。为简化记号，对于 $\Delta\ \Omega$ 的子集或其边界的子集，我们用 $I_\Delta(g)$ 表示可积函数 g 在 Δ上的积分。在应用问题中，混合变分-半变分不等式通常具有秩 (2，1) 的形式，即问题 2.1 中的 $\Psi^0(u; v-u)$ 被 Δ上的积分所替代： $I_\Delta(\psi^0(\gamma u;\ \gamma v - \gamma u))$。这里，对于正整数 m， ψ: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 是局部Lipschitz连续的；对于 Δ上的函数空间 V_ψ ，算子 γ: $V \to V_\psi$ 满足：对于所有 u， $v \in V$， $\psi^0(\gamma u; \gamma v) \in L^1(\Delta)$。换句话说，对于应用问题，我们采用问题 2.1 的以下变体。

问题 2.5 求 $(u, p) \in K_V \times K_Q$ 使得

$$\begin{aligned} &\langle Au, v-u\rangle + b(v-u, p) + \Phi(u, v) - \Phi(u, u) + I_\Delta(\psi^0(\gamma u; \gamma v - \gamma u)) \\ &\qquad \ge \langle f, v-u\rangle \quad \forall\, v \in K_V, \end{aligned} \tag{2.30}$$

$$b(u, q-p) \le 0 \quad \forall\, q \in K_Q. \tag{2.31}$$

对于应用中与二阶偏微分方程相关的混合变分-半变分不等式，我们令 $V_\psi = L^2(\Delta)$，并用 $c_\Delta > 0$ 表示该不等式中的最小常数

$$I_\Delta(|\gamma v|^2_{\mathbb{R}^m}) \le c_\Delta^2 \|v\|_V^2 \quad \forall\, v \in V. \tag{2.32}$$

我们将 $H(\Psi)$ 替换为关于 ψ 的如下假设。

- $H(\psi)$ 对整数 $m \ge 1$, ψ: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 是局部Lipschitz连续的，且存在常数 $c_\psi \ge 0$ 和 $\alpha_\psi \ge 0$ 使得

$$|\partial\psi(z)|_{\mathbb{R}^m} \le c_\psi\,(1 + |z|_{\mathbb{R}^m}) \quad \forall\, z \in \mathbb{R}^m, \tag{2.33}$$

$$\psi^0(z_1; z_2 - z_1) + \psi^0(z_2; z_1 - z_2) \le \alpha_\psi |z_1 - z_2|^2_{\mathbb{R}^m} \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{R}^m. \tag{2.34}$$

我们由定理 2.3 和定理 2.4 推出关于问题 2.5 的如下结果。

定理2.6 假设 $H(K_V)$， $H(K_Q)$， $H(A)$， $H(b)$， $H(\Phi)_2$， $H(\psi)$， $H(f)$，且

$$\alpha_\Phi + \alpha_\psi c_\Delta^2 < m_A. \tag{2.35}$$

那么，问题 *2.5* 有唯一解 $(u, p) \in K_V \times K_Q$。此外，存在一个常数$c > 0$，使得对于问题 *2.5* 的解 (u_1, p_1)、$(u_2, p_2) \in K_V \times K_Q$，若 $f = f_1, f_2 \in V^*$，则以下不等式成立：

$$\|u_1 - u_2\|_V + \|p_1 - p_2\|_Q \le c\,\|f_1 - f_2\|_{V^*}.$$

证明。引入一个辅助泛函 $\Psi\colon V \to \mathbb{R}$，定义为

$$\Psi(v) = I_\Delta(\psi(\gamma v)), \quad v \in V.$$

接下来，见 [29, 第 3 节 。3]， Ψ 定义良好，且在 V 上局部Lipschitz连续。此外，

$$\Psi^0(u; v) \le I_\Delta(\psi^0(\gamma u; \gamma v)) \quad \forall\, u, v \in V, \tag{2.36}$$

and

$$\Psi^0(v_1; v_2 - v_1) + \Psi^0(v_2; v_1 - v_2) \le \alpha_\psi c_\Delta^2 \|v_1 - v_2\|_V^2 \quad \forall\, v_1, v_2 \in V.$$

因此， $H(\psi)$推出 $H(\Psi)$，其中 $\alpha_\Psi = \alpha_\psi c_\Delta^2$。由定理 2.3 和定理 2.4 可知，问题 2.1 存在唯一解 $(u,\ p) \in K_V \times K_Q$，且该解关于$f$Lipschitz连续依赖。根据性质 (2.36)，$(u,\ p)$也是问题 2.5 的一个解。此外，只需稍微修改定理 2.3 证明最后部分中关于问题 2.1 解唯一性的论证，即可证明问题 2.5 的解唯一性。因此，定理2.6关于问题 2.5 的结论成立。

■

最后，我们考虑问题 2.1 和问题 2.5 的退化特殊情形，其中 Φ 仅依赖于一个变量。令 $\Phi\colon\ V \to \mathbb{R}$。

问题 2.7 求 $(u, p) \in K_V \times K_Q$ 使得

$$\langle Au, v - u\rangle + b(v - u, p) + \Phi(v) - \Phi(u) + \Psi^0(u; v - u) \ge \langle f, v - u\rangle \quad \forall\, v \in K_V, \tag{2.37}$$

$$b(u, q - p) \le 0 \quad \forall\, q \in K_Q. \tag{2.38}$$

按照 [15], 中所用的术语，问题 2.7 被称为秩为 (1,1) 的混合变分-半变分不等式，因为函数 Φ 和 Ψ 都只依赖于一个变量。在研究问题 2.7 时，我们将假设 $H(\Phi)_2$ 替换为 $H(\Phi)_1$。

- $H(\Phi)_1$ $\Phi\colon\ V \to \mathbb{R}$ 是凸且连续的，并且

$$\Phi(v + w) = \Phi(v) \quad \forall\, v \in K_V,\, w \in V_0. \tag{2.39}$$

作为定理 2.3 和定理 2.4 的推论，我们得到关于问题 2.7 的如下结果。

定理 *2.8* 假设 $H(K_V)$、$H(K_Q)$、$H(A)$、$H(b)$、$H(\Phi)1$、$H(\Psi)$、$H(f)$ 以及 $\alpha_\Psi < m_A$。则问题 *2.7* 有唯一解 $(u, p) \in K_V \times K_Q$。此外，存在常数 $c > 0$，使得对于满足 $f = f_1$、$f_2 \in V^*$ 的问题 *2.7* 的解 (u_1, p_1)、$(u_2, p_2) \in K_V \times K_Q$，下列不等式成立：

$$\|u_1 - u_2\|_V + \|p_1 - p_2\|_Q \le c\,\|f_1 - f_2\|_{V^*}.$$

与问题 2.5 类似，我们引入问题 2.7 的一个变体。

问题 2.9 求$(u, p) \in K_V \times K_Q$ 使得

$$\langle Au, v-u\rangle + b(v-u,p) + \Phi(v) - \Phi(u) + I_\Delta(\psi^0(\gamma u; \gamma v - \gamma u)) \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall\, v \in K_V, \tag{2.40}$$

$$b(u, q-p) \leq 0 \quad \forall\, q \in K_Q. \tag{2.41}$$

定理 *2.10* 假设 $H(K_V)$、$H(K_Q)$、$H(A)$、$H(b)$、$H(\Phi)1$、$H(\psi)$、$H(f)$ 和 $\alpha_\psi c_\Delta^2 < m_A$。那么，问题 *2.9* 有唯一解 $(u, p) \in K_V \times K_Q$。此外，存在一个常数$c > 0$，使得对于问题 *2.5* 的解 (u_1, p_1)、$(u_2, p_2) \in K_V \times K_Q$，当满足 $f = f_1, f_2 \in V^*$ 时，以下不等式成立：

$$\|u_1 - u_2\|_V + \|p_1 - p_2\|_Q \leq c\, \|f_1 - f_2\|_{V^*}.$$

3 数值分析

本节中，我们考虑问题 2.5 的数值解。我们沿用定理2.6中的假设，因此问题 2.5 有唯一解。设 $K_V^h \subset K_V$ 和 $K_Q^h \subset K_Q$ 为 K_V 和 K_Q的有限维近似。那么，数值方法如下。

问题3.1 求$(u^h, p^h) \in K_V^h \times K_Q^h$ 使得

$$\begin{aligned}&\langle Au^h, v^h - u^h\rangle + b(v^h - u^h, p^h) + \Phi(u^h, v^h) - \Phi(u^h, u^h) + I_\Delta(\psi^0(\gamma u^h; \gamma v^h - \gamma u^h)) \\ &\quad \geq \langle f, v^h - u^h\rangle \quad \forall\, v^h \in K_V^h, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$b(u^h, q^h - p^h) \leq 0 \quad \forall\, q^h \in K_Q^h. \tag{3.2}$$

记

$$V_0^h = V_0 \cap K_V^h$$

并假设有限元空间对 $V^h \times Q^h$ 满足离散 inf-sup 条件（Babuška-Brezzi 条件，或简称 BB 条件）

$$\alpha_b \|q^h\|_Q \leq \sup_{w^h \in V_0^h} \frac{b(w^h, q^h)}{\|w^h\|_V}, \tag{3.3}$$

其中 $\alpha_b > 0$ 是一个与 h无关的常数。

在定理2.6和（3.3）所述假设下，问题3.1存在唯一解。本节其余部分将对该数值方法进行误差分析。任取$(v^h, q^h) \in K_V^h \times K_Q^h$。我们将多次使用修正的柯西-施瓦茨不等式：

$$a\, b \leq \epsilon\, a^2 + \frac{1}{4\,\epsilon}\, b^2 \quad \forall\, \epsilon > 0,\ a, b \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

在 (2.1) 中取 $v = u^h$，在 (2.2) 中取 $q = p^h$，得到

$$\langle Au, u^h - u\rangle + b(u^h - u, p) + \Phi(u, u^h) - \Phi(u, u) + I_\Delta(\psi^0(\gamma u; \gamma u^h - \gamma u)) \geq \langle f, u^h - u\rangle, \tag{3.5}$$

$$b(u, p^h - p) \leq 0. \tag{3.6}$$

记

$$\langle Au - Au^h, u - u^h\rangle = \langle Au, u - u^h\rangle + \langle Au^h, u^h - v^h\rangle + \langle Au, v^h - u\rangle.$$

利用 (3.5) 和 (3.1) 得到

$$\langle Au - Au^h, u - u^h\rangle = I_A + I_R + I_b + I_\Phi + I_\psi, \tag{3.7}$$

其中

$$I_A = \langle Au - Au^h, u - v^h\rangle, \tag{3.8}$$

$$I_R = \langle Au, v^h - u\rangle + b(v^h - u, p) + \Phi(u, v^h) - \Phi(u, u) + I_\Delta(\psi^0(\gamma u; \gamma v^h - \gamma u)) - \langle f, v^h - u\rangle, \tag{3.9}$$

$$I_b = b(u^h - v^h, p - p^h), \tag{3.10}$$

$$I_\Phi = \Phi(u, u^h) - \Phi(u, v^h) + \Phi(u^h, v^h) - \Phi(u^h, u^h), \tag{3.11}$$

$$I_\psi = I_\Delta(\psi^0(\gamma u; \gamma u^h - \gamma u) + \psi^0(\gamma u^h; \gamma u - \gamma u^h) + \psi^0(\gamma u; \gamma u - \gamma v^h) + \psi^0(\gamma u^h; \gamma v^h - \gamma u)). \tag{3.12}$$

注意， I_R 是一个残差型量。

现在对 (3.7) 右端的各项进行估计。对于 I_A，利用 A 的利普希茨连续性:

$$I_A \le M_A \|u - u^h\|_V \|u - v^h\|_V.$$

对于 I_Φ，应用 (2.4)，然后利用三角不等式:

$$I_\Phi \le \alpha_\Phi \|u - u^h\|_V \|u^h - v^h\|_V \le \alpha_\Phi \|u - u^h\|_V \left(\|u - u^h\|_V + \|u - v^h\|_V\right).$$

然后，利用 (3.4),

$$\alpha_\Phi \|u - u^h\|_V \|u - v^h\|_V \le \epsilon \|u - u^h\|_V^2 + c \|u - v^h\|_V^2$$

其中常数 c 取决于 ϵ。因此,

$$I_\Phi \le (\alpha_\Phi + \epsilon) \|u - u^h\|_V^2 + c_\epsilon \|u - v^h\|_V^2.$$

对于 I_ψ，我们使用 $H(\psi)$ 和 (2.32)，得到

$$\begin{aligned} I_\psi &\le \alpha_\psi I_\Delta(|\gamma(u - u^h)|_{V_\psi}^2) + c\left(1 + \|\gamma u\|_{V_\psi} + \|\gamma u^h\|_{V_\psi}\right) \|\gamma(u - v^h)\|_{V_\psi} \\ &\le \alpha_\psi c_\Delta^2 \|u - u^h\|_V^2 + c\left(1 + \|\gamma u\|_{V_\psi} + \|\gamma(u - u^h)\|_{V_\psi}\right) \|\gamma(u - v^h)\|_{V_\psi} \\ &\le \alpha_\psi c_\Delta^2 \|u - u^h\|_V^2 + c\left(1 + \|\gamma u\|_{V_\psi}\right) \|\gamma(u - v^h)\|_{V_\psi} + c \|u - u^h\|_V \|u - v^h\|_V. \end{aligned}$$

应用修正的柯西-施瓦茨不等式 (3.4)，得到

$$c \|u - u^h\|_V \|u - v^h\|_V \le \epsilon \|u - u^h\|_V^2 + c \|u - v^h\|_V$$

不等式右端有一个取决于 ϵ 的常数 c。因此 ,

$$I_\psi \le \left(\alpha_\psi c_\Delta^2 + \epsilon\right) \|u - u^h\|_V^2 + c\left(1 + \|\gamma u\|_{V_\psi}\right) \|\gamma(u - v^h)\|_{V_\psi}.$$

关于 I_b，写作

$$I_b = b(u^h - u, p - q^h) + b(u - v^h, p - p^h) + b(u, p - q^h) + b(u^h, q^h - p^h) + b(u, p^h - p).$$

由（2.2）可得,

$$b(u, p^h - p) \leq 0.$$

由（3.2）,

$$b(u^h, q^h - p^h) \leq 0.$$

因此,

$$I_b \leq b(u^h - u, p - q^h) + b(u - v^h, p - p^h) + b(u, p - q^h), \tag{3.13}$$

由此,

$$I_b \leq M_b \left(\|u^h - u\|_V \|p - q^h\|_Q + \|u - v^h\|_V \|p - p^h\|_Q + \|u\|_V \|p - q^h\|_Q \right). \tag{3.14}$$

应用（3.4）, 可得

$$I_b \leq \epsilon \left(\|u - u^h\|_V^2 + \|p - p^h\|_Q^2 \right) + c \left(\|u - v^h\|_V^2 + \|p - q^h\|_Q^2 + \|p - q^h\|_Q \right).$$

综上, 由（3.7）及上述界, 可推得

$$\begin{aligned} (m_A - \alpha_\Phi - 3\epsilon) \|u - u^h\|_V^2 \leq{}& \epsilon \|p - p^h\|_Q^2 + I_R \\ &+ c \left(\|u - v^h\|_V^2 + \|\gamma(u - v^h)\|_{V_\psi} + \|p - q^h\|_Q^2 + \|p - q^h\|_Q \right). \end{aligned} \tag{3.15}$$

下面考虑关于 $p - p^h$ 的误差估计。对于任意 $q^h \in Q^h$, 根据三角不等式,

$$\|p - p^h\|_Q \leq \|p - q^h\|_Q + \|q^h - p^h\|_Q.$$

因此,

$$\|p - p^h\|_Q^2 \leq 2 \|p - q^h\|_Q^2 + 2 \|q^h - p^h\|_Q^2. \tag{3.16}$$

应用 BB 条件 (3.3),

$$\alpha_b \|q^h - p^h\|_Q \leq \sup_{w^h \in V_0^h} \frac{b(w^h, q^h - p^h)}{\|w^h\|_V}.$$

类似于 (2.18), 由假设 (2.5) 和 (2.7), 我们有等式

$$\langle Au, w \rangle + b(w, p) = \langle f, w \rangle \quad \forall\, w \in V_0.$$

此外, 由 (3.1) 可得

$$\langle Au^h, w^h \rangle + b(w^h, p^h) = \langle f, w^h \rangle \quad \forall\, w^h \in V_0^h.$$

由最后两个等式可得

$$b(w^h, p - p^h) = \langle Au^h - Au, w^h \rangle \quad \forall\, w^h \in V_0^h.$$

Now,

$$b(w^h, q^h - p^h) = b(w^h, q^h - p) + b(w^h, p - p^h) = b(w^h, q^h - p) + \langle Au^h - Au, w^h \rangle.$$

因此,

$$\alpha_b\|q^h-p^h\|_Q \le \sup_{w^h\in V_0^h}\frac{b(w^h,q^h-p)+\langle Au^h-Au,w^h\rangle}{\|w^h\|_V} \le M_A\|u-u^h\|_V+M_b\|p-q^h\|_Q.$$

这意味着

$$\|q^h-p^h\|_Q^2 \le \left[(M_A/\alpha_b)^2+1\right]\|u-u^h\|_V^2+c\,\|p-q^h\|_Q^2.$$

由上述不等式和（3.16）可得,

$$\|p-p^h\|_Q^2 \le 2\left[(M_A/\alpha_b)^2+1\right]\|u-u^h\|_V^2+c\,\|p-q^h\|_Q^2.$$

结合（3.15），当选取 $\epsilon>0$ 足够小时，存在两个正常数 c_1，$c>0$使得

$$\|u-u^h\|_V^2+\|p-p^h\|_Q^2 \le c_1 I_R+c\left(\|u-v^h\|_V^2+\|\gamma(u-v^h)\|_{V_\psi}+\|p-q^h\|_Q^2+\|p-q^h\|_Q\right). \quad (3.17)$$

接下来，考虑 K_Q 和 K_Q^h 为子空间的特殊情形。此时，（2.2）等价于

$$b(u,q)=0 \quad \forall\, q\in K_Q,$$

且（3.2）等价于

$$b(u^h,q^h)=0 \quad \forall\, q^h\in K_Q^h.$$

记

$$I_b=b(u^h-u,p-p^h)+b(u-v^h,p-p^h).$$

于是,

$$b(u^h-u,p-p^h)=b(u^h,p-p^h)=b(u^h,p-q^h)=b(u^h-u,p-q^h),$$

因此，我们不使用（3.13），而是
得到

$$\begin{aligned} I_b &= b(u^h-u,p-q^h)+b(u-v^h,p-p^h)\\ &\le M_b\left(\|u-u^h\|_V\|p-q^h\|_Q+\|u-v^h\|_V\|p-p^h\|_Q\right), \end{aligned}$$

并且，我们不使用（3.14），而是有

$$I_b \le M_b\left(\|u^h-u\|_V\|p-q^h\|_Q+\|u-v^h\|_V\|p-p^h\|_Q\right). \quad (3.18)$$

最终，（3.17）改进为

$$\|u-u^h\|_V^2+\|p-p^h\|_Q^2 \le c_1 I_R+c\left(\|u-v^h\|_V^2+\|\gamma(u-v^h)\|_{V_\psi}+\|p-q^h\|_Q^2\right). \quad (3.19)$$

综上，我们证明了以下结果。

定理3.2 保持定理*2.6*和(3.3)中所述的假设成立。则问题*3.1*有唯一解$(u^h,p^h)\in K_V^h\times K_Q^h$。对于任意$(\boldsymbol{v}^h,q^h)\in K_V^h\times K_Q^h$，有误差界(3.17)。此外，若 K_Q和 K_Q^h 为子空间，则对于任意$(\boldsymbol{v}^h,q^h)\in K_V^h\times K_Q^h$，有误差界(3.19)。

项 I_R 的一个粗略界为

$$|I_R| \le c\,(1+\|u\|_Q+\|p\|_Q+\|f\|_{V^*})\,\|u-v^h\|_V + c\left|\Phi(u,v^h)-\Phi(u,u)\right|.$$

那么我们得 出数值解由 (3.17) 或 (3.19) 收敛。

推论 3.3 保留定理*2.6*和(3.3)中所述的假设。若 $\cup_{h>0}K_V^h$ 关于 $\|\cdot\|_V$-范数在 K_V 中稠密，且 $\cup_{h>0}K_Q^h$ 关于 $\|\cdot\|_Q$-范数在 K_Q 中稠密，则有如下收敛性

$$\|u-u^h\|_V+\|p-p^h\|_Q\to 0 \quad \forall\, h\to 0.$$

4 Stokes 方程的变分-半变分不等式

本节考虑不可压缩流体流动所满足的 Stokes 方程的变分-半变分不等式。该流体占据区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \le 3$，并在边界的若干部分满足不同摩擦类型的无泄漏滑移边界条件。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \le 3$ 为有界开 Lipschitz 区域。其边界 $\Gamma=\partial\Omega$ 分为三部分： Γ_D, $\Gamma_{S,\,1}$ 和 $\Gamma_{S,\,2}$。在 Γ 上几乎处处存在单位外法向量，记为 $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1,\ \ldots\ldots,\ \nu_d)^T$。对于向量 $\boldsymbol{v}$，其在 Γ 上的法向分量和切向分量分别为 $v_\nu=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu}$ 和 $\boldsymbol{v}_\tau=\boldsymbol{v}-v_\nu\boldsymbol{\nu}$。

设 $\mu>0$ 为流体的黏度，并用 $\boldsymbol{u}$ 和 p 分别表示流体未知的速度场和压力场。记

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})=(\nabla\boldsymbol{u}+(\nabla\boldsymbol{u})^T)/2$$

为应变率张量,

$$\boldsymbol{\sigma}=2\,\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})-p\,\boldsymbol{I}$$

为应力张量，其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位张量。应力在边界上的法向分量和切向分量分别为 $\sigma_\nu=(\boldsymbol{\sigma\nu})\cdot\boldsymbol{\nu}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_\tau=\boldsymbol{\sigma\nu}-\sigma_\nu\boldsymbol{\nu}$。

给定源密度函数 $\boldsymbol{f}:\Omega\to\mathbb{R}^d$、凸函数 $\phi:\Gamma_{S,\,1}\to\mathbb{R}$以及非凸函数 $\psi:\Gamma_{S,\,2}\to\mathbb{R}$，该问题的逐点表述如下。

问题 4.1 求一个速度场 $\boldsymbol{u}:\Omega\to\mathbb{R}^d$和一个压力场 $p:\Omega\to\mathbb{R}$，使得

$$-\operatorname{div}(2\,\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))+\nabla p=\boldsymbol{f} \quad \text{in } \Omega, \tag{4.1}$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0 \quad \text{in } \Omega, \tag{4.2}$$
$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \quad \text{on } \Gamma_D, \tag{4.3}$$
$$u_\nu=0,\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau\in\partial\phi(\boldsymbol{u}_\tau) \quad \text{on } \Gamma_{S,1}, \tag{4.4}$$
$$u_\nu=0,\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau\in\partial\psi(\boldsymbol{u}_\tau) \quad \text{on } \Gamma_{S,2}. \tag{4.5}$$

我们将通过问题 4.1 的变分形式来研究该问题。为此，我们引入以下函数空间：

$$V = \left\{ \boldsymbol{v} \in H^1(\Omega)^d \mid \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ on } \Gamma_D,\, v_\nu = 0 \text{ on } \Gamma_S \right\}, \tag{4.6}$$

$$V_{\mathrm{div}} = \left\{ \boldsymbol{v} \in V \mid \mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0 \text{ in } \Omega \right\}, \tag{4.7}$$

$$V_0 = H_0^1(\Omega)^d, \tag{4.8}$$

$$Q = \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid (q,1)_\Omega = 0 \right\}, \tag{4.9}$$

其中 $\Gamma_S = \Gamma_{S,\,1} \cup \Gamma_{S,\,2}$。在空间 V 上，我们采用范数 $\|\boldsymbol{v}\|_V = \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\|_{L^2(\Omega)^{d\times d}}$，它等价于 V 上的标准 $H^1(\Omega)^d$ 范数。

问题 4.1 的约化弱形式如下。

问题4.2 求 $\boldsymbol{u} \in V_{\mathrm{div}}$，使得

$$\begin{aligned}\int_\Omega 2\,\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\,dx + \int_{\Gamma_{S,1}} [\phi(\boldsymbol{v}_\tau) - \phi(\boldsymbol{u}_\tau)]\,ds + \int_{\Gamma_{S,2}} \psi^0(\boldsymbol{u}_\tau; \boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{u}_\tau)\,ds \\ \geq (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in V_{\mathrm{div}}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

包含压力未知量 p 的问题 4.1 的完整弱形式如下。

问题4.3 求 $(\boldsymbol{u}, p) \in V \times Q$，使得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega 2\,\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\,dx - \int_\Omega p\,\mathrm{div}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\,dx + \int_{\Gamma_{S,1}} [\phi(\boldsymbol{v}_\tau) - \phi(\boldsymbol{u}_\tau)]\,ds \\ &\quad + \int_{\Gamma_{S,2}} \psi^0(\boldsymbol{u}_\tau; \boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{u}_\tau)\,ds \geq (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in V,\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\int_\Omega q\,\mathrm{div}\boldsymbol{u}\,dx = 0 \quad \forall\, q \in Q. \tag{4.12}$$

我们将应用前两节中的理论结果来研究问题4.3及其数值近似。令 $K_V = V$、$K_Q = Q$，并定义 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$和 $q \in Q$,

$$\begin{aligned}a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &= \int_\Omega 2\,\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\,dx, \\ b(\boldsymbol{v}, q) &= -\int_\Omega q\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}\,dx, \\ \Phi(\boldsymbol{v}) &= \int_{\Gamma_{S,1}} \phi(\boldsymbol{v}_\tau)\,ds, \\ (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}) &= \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,dx.\end{aligned}$$

众所周知，inf-sup条件（2.3）成立。

对于函数 ϕ 和 ψ，我们引入以下假设。

- $H(\phi)$ ϕ: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是凸且 Lipschitz连续的。
- $H(\psi)$ ψ: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是局部Lipschitz连续的，且存在常数 $c_\psi \geq 0$ 和 $\alpha_\psi \geq 0$,

$$|\partial\psi(\boldsymbol{z})|_{\mathbb{R}^d} \leq c_\psi\,(1 + |\boldsymbol{z}|_{\mathbb{R}^d}) \quad \forall\, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^d, \tag{4.13}$$

$$\psi^0(\boldsymbol{z}_1; \boldsymbol{z}_2 - \boldsymbol{z}_1) + \psi^0(\boldsymbol{z}_2; \boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2) \leq \alpha_\psi |\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2|^2_{\mathbb{R}^d} \quad \forall\, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \in \mathbb{R}^d. \tag{4.14}$$

定理 4.4 假设 $H(\phi)$、 $H(\psi)$以及 $\alpha_\psi < 2\,\mu\,\lambda_0$成立，其中 $\lambda_0 > 0$ 是该特征值问题的最小特征值

$$\boldsymbol{u} \in V, \quad \int_\Omega 2\,\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\,dx = \lambda \int_{\Gamma_{S,2}} \boldsymbol{u}_\tau \cdot \boldsymbol{v}_\tau\,ds \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in V.$$

那么，对任意$\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^d$，问题*4.2*和问题*4.3*均存在唯一解，且这两个问题在以下意义下等价：若 $\boldsymbol{u}$是问题*4.2*的一个解，则存在 p 使得$(\boldsymbol{u}, p)$ 是问题*4.3*的解；反之，若$(\boldsymbol{u}, p)$ 是问题*4.3*的一个解，则 $\boldsymbol{u}$ 是问题*4.2*的解。

证明。 首先，我们应用定理2.6，得知问题4.3存在唯一解。注意到$c_\Delta^2 = \lambda_0^{-1}$。根据 [15, 定理5.9], ，我们知道问题4.2存在唯一解。

假设 $(\boldsymbol{u}, p) \in V \times Q$ 是问题4.3的唯一解。于是，在（4.12）中取 $q = \mathrm{div}\boldsymbol{u} \in Q$ ，可得 $\boldsymbol{u} \in V_{\mathrm{div}}$。将 $\boldsymbol{v}$ 限制到 V_{div}，即可由（4.11）推出（4.10）。

反过来，假设 $\boldsymbol{u}$是问题4.2的唯一解。那么根据上一段，$\boldsymbol{u}$ 是问题4.3的唯一解 $(\boldsymbol{u}, p) \in V \times Q$ 的第一个分量。 ■

现在来讨论问题4.3的有限元近似。为简单起见，假设 Ω 是一个多边形/多面体区域。考虑 Ω 的一族正则有限元剖分 $\{\mathcal{T}^h\}_h$，其中剖分为三角形单元（若 $d = 2$）或四面体单元（若 $d = 3$）。我们假设每个剖分都与按边界条件类型进行的边界划分相容；也就是说，若某个单元的一条边或一个面与 Γ_D 或 $\Gamma_{S,1}$ 或 $\Gamma_{S,2}$有非平凡交集，则该边或该面包含于 Γ_D 或 $\Gamma_{S,1}$ 或 $\Gamma_{S,2}$。令 $V^h \times Q^h \subset V \times Q$ 为与剖分 $\mathcal{T}^h$对应的一对稳定有限元空间，即存在一个与 h无关的常数 $\beta_b > 0$，使得

$$\beta_b \|q^h\|_Q \leq \sup_{\boldsymbol{v}^h \in V_0^h} \frac{b(\boldsymbol{v}^h, q^h)}{\|\boldsymbol{v}^h\|_V} \quad \forall\, q^h \in Q^h, \tag{4.15}$$

其中

$$V_0^h = V^h \cap V_0.$$

那么，用于求解问题4.3的有限元方法如下。

问题 4.5 求$(\boldsymbol{u}^h, p^h) \in V^h \times Q^h$ 使得

$$\int_\Omega 2\,\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}^h - \boldsymbol{u}^h)\,dx - \int_\Omega p^h \,\mathrm{div}(\boldsymbol{v}^h - \boldsymbol{u}^h)\,dx + \int_{\Gamma_{S,1}} \left[\phi(\boldsymbol{v}_\tau^h) - \phi(\boldsymbol{u}_\tau^h)\right] ds$$
$$+ \int_{\Gamma_{S,2}} \psi^0(\boldsymbol{u}_\tau^h; \boldsymbol{v}_\tau^h - \boldsymbol{u}_\tau^h)\,ds \geq (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}^h - \boldsymbol{u}^h) \quad \forall\, \boldsymbol{v}^h \in V^h, \tag{4.16}$$

$$\int_\Omega q^h \,\mathrm{div}\boldsymbol{u}^h\,dx = 0 \quad \forall\, q^h \in Q^h. \tag{4.17}$$

在定理 4.4 所述假设下，我们可以应用定理 2.10，得出问题 4.5 存在唯一解。本节其余部分着重于数值方法的误差分析。由 (3.19),

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^h\|_V^2 + \|p - p^h\|_Q^2 \leq c_1 I_R + c\left(\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}^h\|_V^2 + \|\boldsymbol{u}_\tau - \boldsymbol{v}_\tau^h\|_{L^2(\Gamma_S)^2} + \|p - q^h\|_Q^2\right), \tag{4.18}$$

由 (3.9) 可得,

$$I_R = a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}^h - \boldsymbol{u}) + b(\boldsymbol{v}^h - \boldsymbol{u}, p) + I_{\Gamma_{S,1}}(\phi(\boldsymbol{v}_\tau^h) - \phi(\boldsymbol{u}_\tau)) + I_{\Gamma_{S,2}}(\psi^0(\boldsymbol{u}_\tau; \boldsymbol{v}_\tau^h - \boldsymbol{u}_\tau)) - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}^h - \boldsymbol{u}).$$

令 $\{\Gamma_i\}_{1\leq i\leq i_0}$ 为 $\Gamma_S = \Gamma_{S,1} \cup \Gamma_{S,2}$ 的平面分量。假设解具有正则性 s:

$$\boldsymbol{u} \in H^2(\Omega)^d, \quad \boldsymbol{u}_\tau|_{\Gamma_i} \in H^2(\Gamma_i)^d,\ 1 \leq i \leq i_0, \quad p \in H^1(\Omega). \tag{4.19}$$

如 [12], 中定理 4.5 的证明所示，可以证明问题4.3的解 $(\boldsymbol{u}, p) \in V \times Q$ 满足以下点态关系:

$$-\,\mathrm{div}(2\,\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})) + \nabla p = \boldsymbol{f} \quad \text{a.e. in } \Omega, \tag{4.20}$$
$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{a.e. in } \Omega. \tag{4.21}$$

此外，注意 $\boldsymbol{u} \in V$ 中的边界值以及空间 V 的定义:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \text{a.e. on } \Gamma_D, \tag{4.22}$$
$$u_\nu = 0 \quad \text{a.e. on } \Gamma_{S,1} \cup \Gamma_{S,2}. \tag{4.23}$$

通过分部积分并利用上述点态关系，我们得到

$$\begin{aligned} I_R &= \int_\Gamma \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{v}^h - \boldsymbol{u})\,ds + \int_\Omega \left[-\mathrm{div}(2\,\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})) + \nabla p - \boldsymbol{f}\right] dx \\ &\quad + I_{\Gamma_{S,1}}(\phi(\boldsymbol{v}_\tau^h) - \phi(\boldsymbol{u}_\tau)) + I_{\Gamma_{S,2}}(\psi^0(\boldsymbol{u}_\tau; \boldsymbol{v}_\tau^h - \boldsymbol{u}_\tau)) \\ &= \int_{\Gamma_S} \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\boldsymbol{v}_\tau^h - \boldsymbol{u}_\tau)\,ds + I_{\Gamma_{S,1}}(\phi(\boldsymbol{v}_\tau^h) - \phi(\boldsymbol{u}_\tau)) + I_{\Gamma_{S,2}}(\psi^0(\boldsymbol{u}_\tau; \boldsymbol{v}_\tau^h - \boldsymbol{u}_\tau)). \end{aligned}$$

于是,

$$I_R \leq c\,\|\boldsymbol{u}_\tau - \boldsymbol{v}_\tau^h\|_{L^2(\Gamma_S)^d}.$$

总之，由（4.18）可得

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h\|_V^2+\|p-p^h\|_Q^2\le c\left(\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}^h\|_V^2+\|\boldsymbol{u}_\tau-\boldsymbol{v}_\tau^h\|_{L^2(\Gamma_S)^2}+\|p-q^h\|_Q^2\right). \tag{4.24}$$

例如，若采用 P1b/P1 元素对（[1]），根据标准有限元逼近理论（参见 [5, 7, 11]），在满足解的正则性假设 (4.19) 的条件下，由 (4.24) 可得最优阶误差估计

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h\|_V^2+\|p-p^h\|_Q^2\le c\,h^2. \tag{4.25}$$

5 数值算例

在数值算例中，令

$$\phi(\boldsymbol{v}_\tau)=g\,|\boldsymbol{v}_\tau|,$$

其中 g 是正常数，并令

$$\psi(\boldsymbol{z})=\int_0^{|\boldsymbol{z}|}\omega(t)\,dt,\ \boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^d,\quad \omega(t)=(a-b)e^{-\beta t}+b,$$

其中 a，b，β均为正常数，且 $a>b$。由于 ω 在 $[0,+\infty)$ 上递减，ψ不是凸的。$\Gamma_{S,2}$ 上的滑移边界条件等价于

$$|\boldsymbol{\sigma}_\tau|\le\omega(0)\ \text{if}\ \boldsymbol{u}_\tau=\boldsymbol{0},\quad -\boldsymbol{\sigma}_\tau=\omega\left(|\boldsymbol{u}_\tau|\right)\frac{\boldsymbol{u}_\tau}{|\boldsymbol{u}_\tau|}\ \text{if}\ \boldsymbol{u}_\tau\neq\boldsymbol{0}.$$

定义两个拉格朗日朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}_1=-\boldsymbol{\sigma}_\tau/g$, $\boldsymbol{\lambda}_2=-\boldsymbol{\sigma}_\tau/\omega\left(|\boldsymbol{u}_\tau|\right)$，各集合的元素

$$\Lambda_1=\left\{\boldsymbol{\lambda}_1\in L^2\left(\Gamma_{S,1};\mathbb{R}^d\right)\mid|\boldsymbol{\lambda}_1|\le 1\ \text{a.e. on}\ \Gamma_{S,1}\right\},$$
$$\Lambda_2=\left\{\boldsymbol{\lambda}_2\in L^2\left(\Gamma_{S,2};\mathbb{R}^d\right)\mid|\boldsymbol{\lambda}_2|\le 1\ \text{a.e. on}\ \Gamma_{S,2}\right\},$$

分别　　地，并引入该问题弱形式的如下形式　　.

问题 5.1 求$(\boldsymbol{u},p,\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2)\in\mathcal{W}\times\mathcal{Q}\times\Lambda_1\times\Lambda_2$，使得

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-b(\boldsymbol{v},p)+\int_{\Gamma_{S,1}}g\,\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\boldsymbol{v}_\tau ds+\int_{\Gamma_{S,2}}\omega\left(|\boldsymbol{u}_\tau|\right)\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\boldsymbol{v}_\tau ds=\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle\quad\forall\,\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V},$$
$$b(\boldsymbol{u},q)=0\quad\forall\,q\in Q,$$
$$\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\boldsymbol{u}_\tau=|\boldsymbol{u}_\tau|\quad\text{a.e. on}\ \Gamma_{S,1},$$
$$\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\boldsymbol{u}_\tau=|\boldsymbol{u}_\tau|\quad\text{a.e. on}\ \Gamma_{S,2}.$$

我们对空间离散采用 P1b/P1有限元对。已知离散 inf-sup 条件成立（[1]）。令 $\boldsymbol{P}$：$\mathbb{R}^d \to B(0;1)$ 为到 $\mathbb{R}^d$ 中闭单位球上的正交投影算子。我们采用以下 Uzawa 算法求解问题 5.1 的数值解。

初始化。选取参数 $\rho > 0$、最大迭代次数 l_0 和误差容限 $\varepsilon > 0$，令近似初始速度为 $\boldsymbol{u}_0^h = \boldsymbol{0}$，并设置 $\boldsymbol{\lambda}_{1,0}^h = \boldsymbol{\lambda}_{2,0}^h = \boldsymbol{0}$。

迭代。对于 $l \geq 1$，求出 $\left(\boldsymbol{u}_l^h, p_l^h\right) \in \boldsymbol{V}^h \times Q^h$，使得

$$
\begin{aligned}
& a\left(\boldsymbol{u}_l^h, \boldsymbol{v}^h\right) - b\left(\boldsymbol{v}^h, p_l^h\right) \\
& \quad = \left\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}^h \right\rangle - \int_{\Gamma_{S,1}} g\, \boldsymbol{\lambda}_{1,l-1}^h \cdot \boldsymbol{v}_\tau^h ds - \int_{\Gamma_{S,2}} \omega\left(\left|\boldsymbol{u}_{l-1,\tau}^h\right|\right) \boldsymbol{\lambda}_{2,l-1}^h \cdot \boldsymbol{v}_\tau^h ds \quad \forall\, \boldsymbol{v}^h \in \boldsymbol{V}^h, \\
& b\left(\boldsymbol{u}_l^h, q^h\right) = 0 \quad \forall\, q^h \in Q^h
\end{aligned}
$$

并更新

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}_{1,l}^h &= \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{\lambda}_{1,l-1}^h + \rho \boldsymbol{u}_{l,\tau}^h\right) \quad \text{on } \Gamma_{S,1}, \\
\boldsymbol{\lambda}_{2,l}^h &= \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{\lambda}_{2,l-1}^h + \rho \boldsymbol{u}_{l,\tau}^h\right) \quad \text{on } \Gamma_{S,2}
\end{aligned}
$$

直到 $l = l_0$ 或 $\left\|\boldsymbol{u}_l^h - \boldsymbol{u}_{l-1}^h\right\|_{L^2(\Omega)^d} / \left\|\boldsymbol{u}_l^h\right\|_{L^2(\Omega)^d} < \varepsilon$。

该算法使用 FEniCS 软件包在 Python 中实现（[23]）。在数值算例中，令黏性系数为 $\mu = 1$，空间维数为 $d = 2$，$\rho = 10$。对于函数 $\omega(t)$，取 $\beta = 1, a = 0.35, b = 0.25$。对于函数 $\phi(t)$，取 $g = 0.2$。源函数定义为

$$
\boldsymbol{f}(x,y) = 2\begin{pmatrix} -10(1-6x+6x^2)y(1-y)(1-2y) + 30x^2(1-x)^2(1-2y) - (1-2y) \\ 10(1-6y+6y^2)x(1-x)(1-2x) - 30y^2(1-y)^2(1-2x) - (1-2x) \end{pmatrix}.
$$

对于停止准则，令 $l_0 = 200$ 和 $\varepsilon = 10^{-6}$。

例 5.1。在第一个例子中，我们对区域 $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ 采用一致三角剖分。单位区间 $[0,1]$ 被划分为 $1/h\,(h = 1/8, 1/16, \cdots)$ 个等长子区间。含有 $h = 1/16$ 的单位正方形三角剖分如图 1 所示。其边界被分成三部分 $\Gamma_D, \Gamma_{S,1}$ 和 $\Gamma_{S,2}$；Γ_D 是左边和右边的并集，$\Gamma_{S,1}$ 是上边，$\Gamma_{S,2}$ 是底边。

为计算数值误差，我们采用 $h = 1/256$ 的数值解作为参考解（$\boldsymbol{u}^*$，$\boldsymbol{\lambda}_1^*$，$\boldsymbol{\lambda}_2^*$）。我们报告 $\boldsymbol{u}^h - \boldsymbol{u}^*$ 在 $(L^2(\Omega))^2$-范数和 $(H^1(\Omega))^2$-范数下的数值收敛阶、$p^h - p^*$ 在 $L^2(\Omega)$-范数下的数值收敛阶、$\boldsymbol{\lambda}_1^h - \boldsymbol{\lambda}_1^*$ 在 $(L^2(\Gamma_{S,1}))^2$-范数下的数值收敛阶，以及 $\boldsymbol{\lambda}_2^h - \boldsymbol{\lambda}_2^*$ 在 $(L^2(\Gamma_{S,2}))^2$-范数下的数值收敛阶。

表1和表2展示了关于 h 的数值收敛阶。我们还报告了 Uzawa 算法所需的迭代次数。参考解 $\boldsymbol{u}^*$ 的 $(L^2(\Omega))^2$-范数和 $(H^1(\Omega))^2$-范数、p^* 的 $L^2(\Omega)$-范数、$\boldsymbol{\lambda}_1^*$ 的 $(L^2(\Gamma_{S,1}))^2$-范数，以及 $\boldsymbol{\lambda}_2^*$ 的 $(L^2(\Gamma_{S,2}))^2$-范数

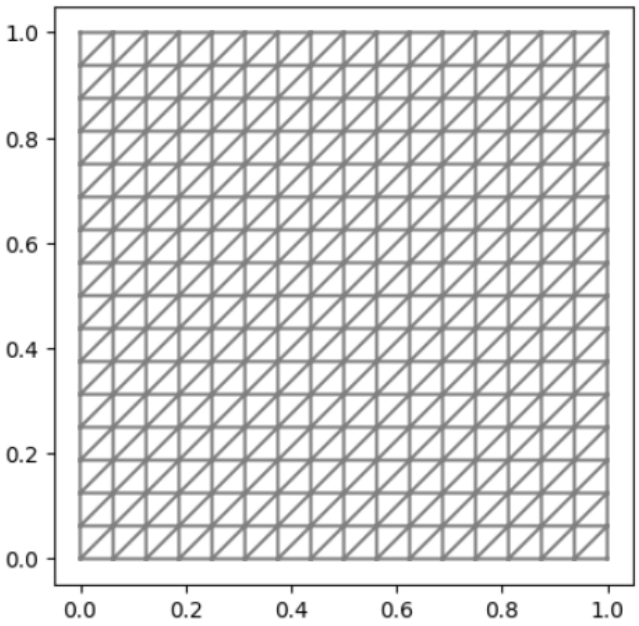

图 1：例 5.1 的三角剖分

为

$$\|\boldsymbol{u}^*\|_{L^2(\Omega)^2} \doteq 4.619 \times 10^{-2}, \quad \|\boldsymbol{u}^*\|_{H^1(\Omega)^2} \doteq 3.047 \times 10^{-1}, \quad \|p^*\|_{L^2(\Omega)} \doteq 2.340 \times 10^{-1}, \quad \|\boldsymbol{\lambda}_1^*\|_{L^2(\Gamma_{S,\,1})^2} \doteq 9.261 \times 10^{-1}, \quad \|\boldsymbol{\lambda}_2^*\|_{L^2(\Gamma_{S,\,2})^2} \doteq 8.533 \times 10^{-1}.$$

$h = 1/16$ 的数值结果如图2、图3和图4所示。为说明摩擦效应，图5、图6、图7和图8分别展示了参考解沿滑移边界 $\Gamma_{S,\,1}$ 和 $\Gamma_{S,\,2}$ 时的 $\boldsymbol{u}_\tau$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_\tau$。区域的顶边和底边是与x-轴平行的直线。因此，边上的切向速度 $\boldsymbol{u}_\tau$ 可等同于其第一分量，摩擦力 $\boldsymbol{\sigma}_\tau$也同理。

表1：例 5.1 中 $\boldsymbol{u}$ 和 p 的数值收敛阶

h	$\|\boldsymbol{u}^h - \boldsymbol{u}^*\|_{L^2}$	阶	$\|\boldsymbol{u}^h - \boldsymbol{u}^*\|_{H^1}$	阶	$\|p^h - p^*\|_{L^2}$	阶
$1/8$	6.505e-03	-	9.472e-02	-	7.661e-02	-
$1/16$	1.860e-03	1.81	4.750e-02	1.00	2.774e-02	1.47
$1/32$	4.877e-04	1.93	2.342e-02	1.02	8.712e-03	1.67
$1/64$	1.191e-04	2.03	1.149e-02	1.03	2.568e-03	1.76

例 5.2。在第二个例子中，该区域是单位正方形的曲边变体，其底边被一条由下式定义的曲线所替换

$$y = \frac{1}{10}\sin(2\pi x), \quad x \in [0, 1],$$

表 2：例 5.1 中 $\boldsymbol{\lambda}_1$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_2$ 的数值收敛阶

h	$\|\boldsymbol{\lambda}_1^h - \boldsymbol{\lambda}_1^*\|_{L^2(\Gamma_{S,1})}$	阶	$\|\boldsymbol{\lambda}_1^h - \boldsymbol{\lambda}_1^*\|_{L^2(\Gamma_{S,\ 1})}$	阶	迭代次数
$1/8$	3.395e-01	-	3.320e-01	-	89
$1/16$	2.125e-01	0.68	1.313e-01	1.34	149
$1/32$	7.304e-02	1.54	4.589e-02	1.52	144
$1/64$	2.489e-02	1.55	1.500e-02	1.61	159

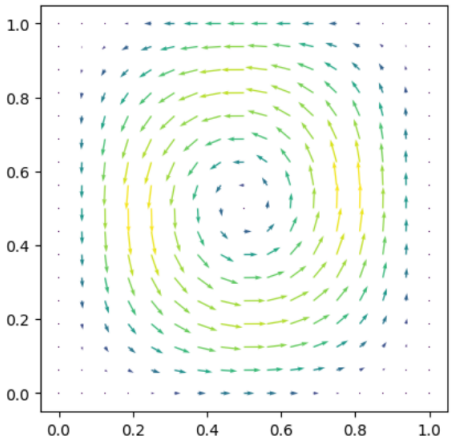

图 2：例 5.1 的速度场

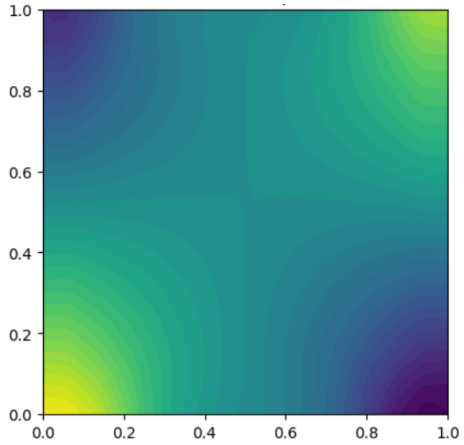

图 3：例 5.1 的压力等值线

我们从该区域中去除一个半径为0.2、中心位于$(0.5,0.6)^T$ 的圆盘，并选取该圆为$\Gamma_{S,1}$。此外， Γ_D 是上边、左边和右边的并集，而$\Gamma_{S,2}$ 是底边。我们应用Gmsh生成网格，Gmsh是一种三维有限元网格生成器，参见网站`https://gmsh.info/`，该网站由C. Geuzaine和J.-F. Remacle开发并维护。在Gmsh中，令单元尺寸因子分别为0.4、0.26、0.181、0.1264、0.06285，并在左、上、右边界上设置边长 $h = 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/256$ 。由此，我们分别得到单元总数$N_{cells} = 128$、511、2055、8187、131179。具有 $h = 1/16$的区域的三角剖分如图9所示。

与例 5.1 一样，我们使用 $h = 1/256$ 对应的数值解作为参考解（$\boldsymbol{u}^*$，$\boldsymbol{\lambda}_1^*$，$\boldsymbol{\lambda}_2^*$），以计算粗网格上数值解的误差。对于函数 $\omega(t)$，取 $\beta = 1$、 $a = 0.2$、 $b = 0.1$。表 3 和表 4 展示了随着 h 减小，数值收敛阶的变化。参考解的 $(L^2(\Omega))^2$-范数和 $(H^1(\Omega))^2$-范数的 $\boldsymbol{u}^*$、 p^*的 $L^2(\Omega)$-范数，以及 $\boldsymbol{\lambda}_1^*$ 和$\boldsymbol{\lambda}_2^*$ 的 $(L^2(\Gamma_S))^2$-范数：

$$\|\boldsymbol{u}^*\|_{L^2(\Omega)^2} \doteq 2.216 \times 10^{-2}, \quad \|\boldsymbol{u}^*\|_{H^1(\Omega)^2} \doteq 1.914 \times 10^{-1}, \quad \|p^*\|_{L^2(\Omega)} \doteq 5.499 \times 10^{-1},$$
$$\|\boldsymbol{\lambda}_1^*\|_{L^2(\Gamma_{S,1})^2} \doteq 1.104, \quad \|\boldsymbol{\lambda}_2^*\|_{L^2(\Gamma_{S,2})^2} \doteq 7.975 \times 10^{-1}.$$

当 $h = 1/16$ 时的数值结果见图 10、11 和 12。参考解在滑移边界上的切向速度和摩擦力的大小见图 13、14、15 和 16。在图 13 中，上曲线对应于上半圆孔上的 $|\boldsymbol{u}_\tau|$，而下曲线对应于下半圆孔上的 $|\boldsymbol{u}_\tau|$。从

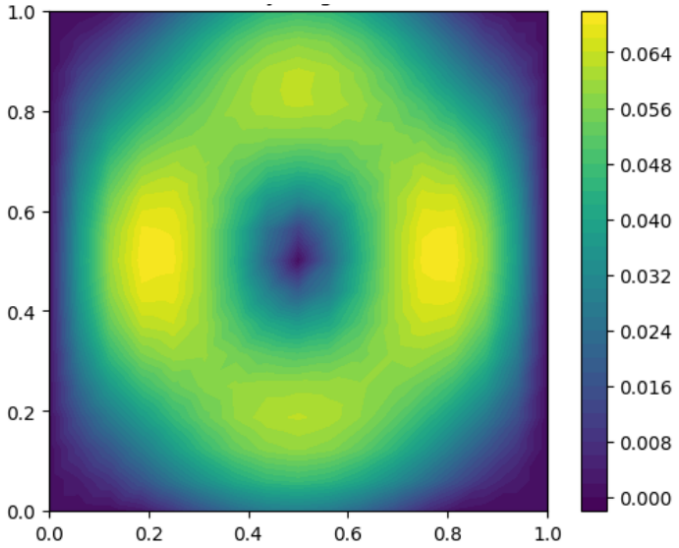

图4：例 5.1 中速度的大小 $|\boldsymbol{u}^h|$

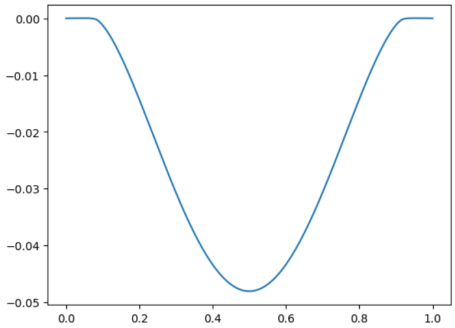

图5： $\boldsymbol{u}_\tau$ 沿着$\Gamma_{S,\ 1}$，例 5.1

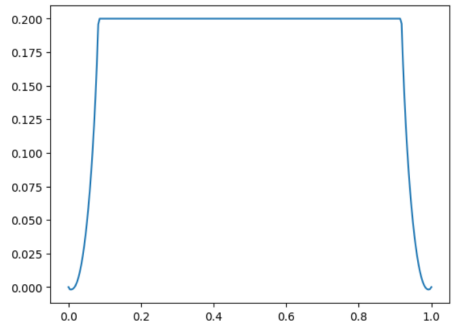

图6： $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ 沿着$\Gamma_{S,\ 1}$，例 5.1

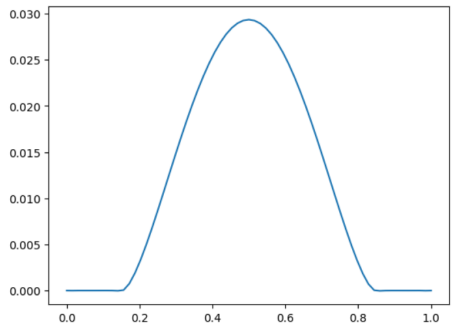

图7： $\boldsymbol{u}_\tau$ 沿着$\Gamma_{S,\ 2}$，例 5.1

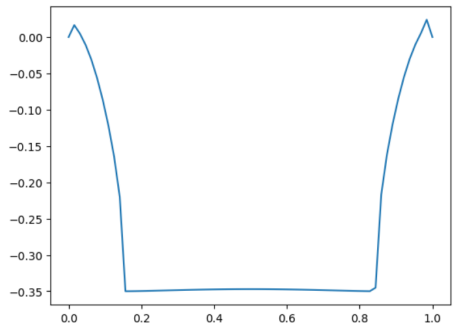

图8： $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ 沿着$\Gamma_{S,\ 2}$，例 5.1

从图13和图14可以观察到，在孔的下部，对于 $x \in (0.495076,\ 0.600568)$，有 $|\boldsymbol{u}_\tau| = 0$，对应于 $|\boldsymbol{\sigma}_\tau| < 0.2$。在孔的其余部分，有 $|\boldsymbol{\sigma}_\tau| = 0.2$，因此 $|\boldsymbol{u}_\tau| \neq 0$。

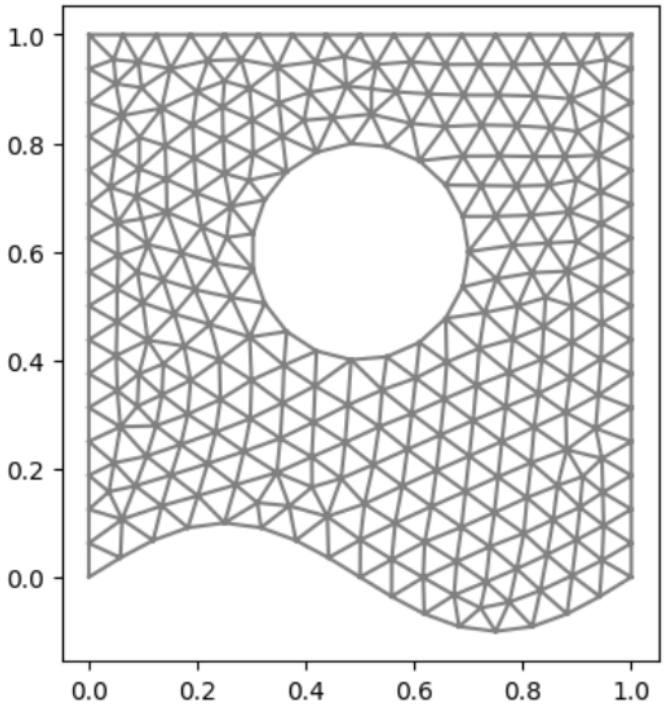

图9：例 5.2 的三角剖分

表 3：例 5.2 中 $\boldsymbol{u}$ 和 p 的数值收敛阶

h	$\|\boldsymbol{u}^h-\boldsymbol{u}^*\|_{L^2}$	阶	$\|\boldsymbol{u}^h-\boldsymbol{u}^*\|_{H^1}$	阶	$\|p^h-p^*\|_{L^2}$	阶
$1/8$	5.637e-03	-	8.980e-02	-	1.536e-01	-
$1/16$	2.053e-03	1.46	4.100e-02	1.13	5.337e-02	1.53
$1/32$	8.234e-04	1.32	2.017e-02	1.02	2.085e-02	1.36
$1/64$	3.236e-04	1.35	9.802e-03	1.04	8.486e-03	1.30

表 4：例 5.2 中 $\boldsymbol{\lambda}_1$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_2$ 的数值收敛阶

h	$\|\boldsymbol{\lambda}_1^h-\boldsymbol{\lambda}_1^*\|_{L^2(\Gamma_{S,\,1})}$	阶	$\|\boldsymbol{\lambda}_1^h-\boldsymbol{\lambda}_1^*\|_{L^2(\Gamma_{S,\,1})}$	阶	迭代次数
$1/8$	1.090e-01	-	6.712e-01	-	145
$1/16$	2.667e-02	2.03	4.032e-01	0.74	184
$1/32$	1.732e-02	0.62	2.058e-01	0.97	205
$1/64$	8.235e-02	1.07	1.005e-01	1.03	202

参考文献

[1] D. N. Arnold、F. Brezzi 和 M. Fortin, 《Stokes 方程的一个稳定有限元》, *Calcolo***21**（1984）, 337–344。

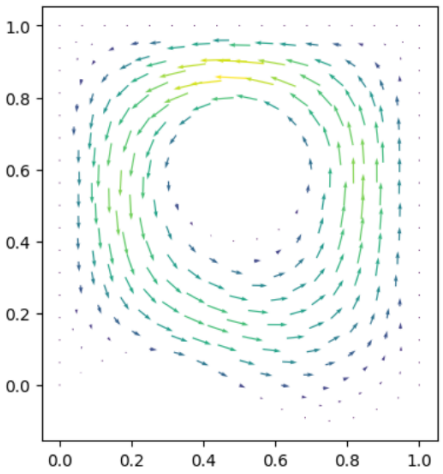

图 10：例 5.2 的速度场

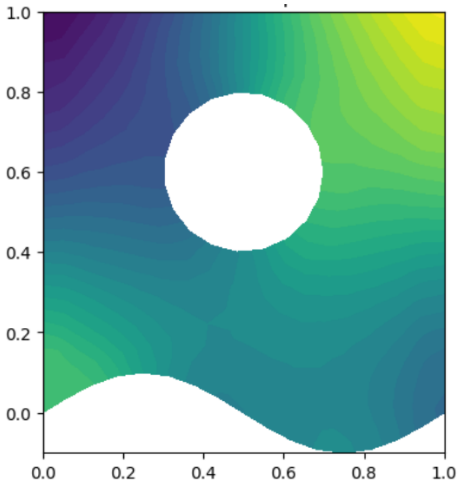

图 11：例 5.2 的压力等值线

[2] Y. Bai、S. Mig´orski 和 S. Zeng，《一类广义混合半变分—变分不等式的适定性》，非线性分析：实际应用 48 （2019），424–444。

[3] Y. Bai、S. Mig´orski 和 S. Zeng，广义混合变分-半变分不等式的一类 I：存在性与唯一性结果，计算机与数学及其应用79(2020), 2897–2911。

[4] D. Boffi、F. Brezzi 和 M. Fortin，混合有限元方法及其应用，Springer，海德堡，2013。

[5] S. C. Brenner 和 R. L. Scott，有限元方法的数学理论，第三版，Springer-Verlag，2008年。

[6] F. Brezzi、W. Hager 和 P. A. Raviart，变分不等式有限元解的误差估计，第二部分。数值数学 31(1978年), 1–16。

[7] P. G. Ciarlet，椭圆问题的有限元方法，North-Holland，阿姆斯特丹，1978年。

[8] F. H. Clarke，最优化与非光滑分析，Wiley，纽约，1983。[9] J.Djoko 和 J. Koko，阈值滑移边界条件驱动的 Stokes 方程和纳维-斯托克斯方程的数值方法，应用力学与工程中的计算机方法305（2016），936–958。[10] I. Ekeland 和 R. T´emam，凸分析与变分问题，North-Holland，阿姆斯特丹，1976年。[11] A. Ern 和 J.-L. Guermond，有限元 *I*：逼近与插值，Springer，2021。

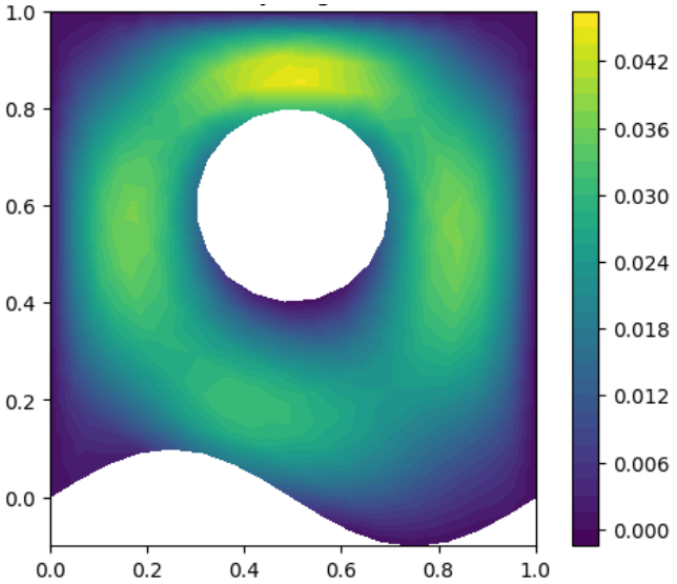

图 12：例 5.2 中速度 $|\boldsymbol{u}^h|$的大小

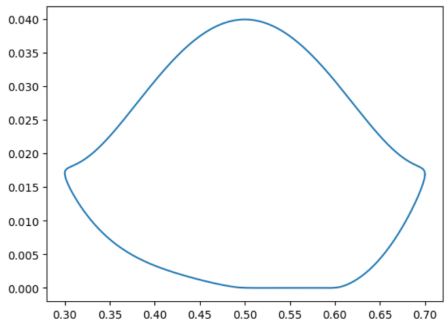

图 13： $|\boldsymbol{u}_\tau|$ 沿 $\Gamma_{S,\ 1}$，例 5.2

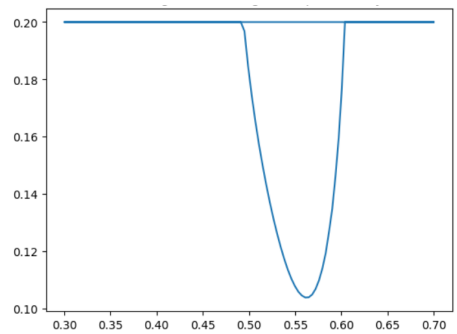

图 14： $|\boldsymbol{\sigma}_\tau|$ 沿 $\Gamma_{S,\ 1}$，例 5.2

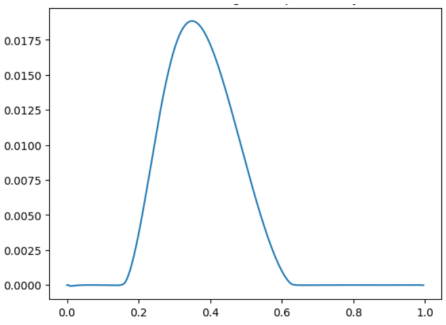

图 15： $|\boldsymbol{u}_\tau|$ 沿滑移边界$\Gamma_{S,\ 2}$

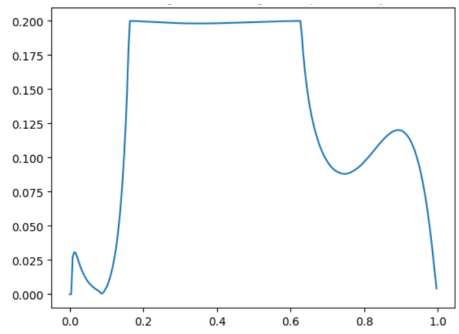

图 16： $|\boldsymbol{\sigma}_\tau|$ 沿 $\Gamma_{S,\ 2}$，例 5.2

[12] C. Fang、K. Czuprynski、W. Han、X.L. Cheng 和 X. Dai，《稳态 Stokes 半变分不等式滑移边界条件的有限元方法》，*IMA J. Numer.Anal.***40**（2020），2696–2716。

[13] W. Han，椭圆半变分不等式的极小化原理，Nonlinear Analysis: Real World Applications 54（2020），103114。[14] W. Han，椭圆变分-半变分不等式再探，数值泛函分析与最优化 42（2021），371–395。[15] W. Han，《定常变分-半变分不等式理论与应用导论》，Springer，纽约，2024。[16] W. Han、F. Feng、F. Wang 和 J. Huang，接触力学中半变分不等式的数值分析，应用力学进展 60（2025），113–178。[17] W. Han 和 A. Matei，椭圆混合半变分-变分不等式的极小极大原理，Nonlinear Analysis: Real World Applications 64（2022），文章编号103448。[18] W. Han 和 A. Matei，一般椭圆混合半变分-变分不等式类的适定性，Nonlinear Analysis: Real World Applications 66（2022），103553。[19] W. Han 和 M. Sofonea，接触力学中半变分不等式的数值分析，Acta Numerica 28（2019），175–286。[20] J. Haslinger、R. Kuˇcera、V. ˇS´atek 和 T. Sassi，具有依赖解的阈值滑移边界条件的Stokes系统：分析、逼近与实现，固体数学与力学 23（2017），294–307。[21] I. Hlav´aˇcek、J. Haslinger、J. Neˇcas 和 J. Lov´ıˇsek，《力学中变分不等式的解》，Springer-Verlag，纽约，1988。[22] R. Kuˇcera、J. Haslinger、V. ˇS´atek 和 M. Jaroˇsov´a，求解具有滑移边界条件的Stokes问题的高效方法，数学与计算机模拟 145（2018），114–124。[23] H. P. Langtangen 和 A. Logg，使用Python求解偏微分方程：FEniCS教程 I，Springer，2016。[24] M. Ling、W. Han 和 S. Zeng，Stokes半变分不等式的压力投影稳定化混合有限元方法，科学计算期刊 92（2022），文章编号13。[25] A. Matei，混合半变分-变分问题及其应用，Computers and Mathematics with Applications 77（2019），2989–3000。[26] S. Mig´orski、Y. Chao、J. He 和 S. Dudek，拟变分-半变分不等式分析及其在Bingham型流体中的应用，非线性科学数值仿真通讯 133（2024），论文编号107968。[27] S. Mig´orski 和 S. Dudek，一类适用于Bingham型流体的变分-半变分不等式，应用数学与最优化 85（2022），论文编号16。

[28] S. Mig´orski 和 S. Dudek，通过拟变分-半变分方法研究稳态Bingham型系统的适定性，当代数学**786**（2023），185–213。[29] S. Mig´orski、A. Ochal 和 M. Sofonea，《非线性包含与半变分不等式：接触问题的模型与分析》，Springer，2013。[30] S. Mig´orski、Y. Bai 和 S. Zeng，一类广义混合变分-半变分不等式II：应用，*Nonlinear Analysis: Real World Applications* **50**（2019），633–650。[31] P. D. Panagiotopoulos，非凸能量函数、半变分不等式与次驻定原理，*Acta Mechanica* **42**（1983），160–183。[32] L. Slimane、A. Bendali 和 P. Laborde，一类变分不等式的混合公式，*ESAIM*：数学建模与数值分析**38** （2004），177–201。[33] M. Sofonea 和 S. Mig´orski，《变分-半变分不等式及其应用》，第2版，CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达，2025。[34] X. Tan 和 M. Zhou，混合半变分不等式可解性的新方法，固体数学与力学 **30**（2025），2275–2284。