arXiv:2602.01557v1 [math.AP] 2 Feb 2026

Va具有最小衰减和临界衰减的真空初始数据 y

Dawei Shen 和 Jingbo Wan

2026年2月3日

摘要

在本文中，我们证明，Mao-Tao 的圆锥解算子方法 [19] 适用于对真空渐近平坦初始数据进行简单构造，其衰减阈值为最小衰减和临界衰减，对应于第一作者在 [22, 23]证明的闵可夫斯基时空的整体稳定性和外部稳定性。

1 引言

爱因斯坦真空方程如下：

$$\mathbf{Ric}(\mathcal{M}, \mathbf{g}) = 0,$$

其中，$(\mathcal{M},\mathbf{g})$ 是一个洛伦兹流形，而 $\mathbf{Ric}(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ 是里奇曲率。将其限制在一个类空超曲面上，可得如下约束方程：

$$\begin{aligned} R + (\operatorname{tr} k)^2 - |k|^2 &= 0, \\ \operatorname{div}(k - (\operatorname{tr} k)g) &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

我们首先引入 (s, q)–尺度为 ε_0 的渐近平坦初始数据这一概念；密切相关的定义另见 [22, 23, 定义 1.2] 。[1]

定义 1.1。 给定 $s \geq 1$, $q \in \mathbb{N}$ 并令 $0 < \varepsilon_0 \ll 1$，若一个真空初始数据组(Σ_0, g, k) 满足 (s, q)–渐近平坦且尺度为 ε_0，即其满足 1.1，并且满足以下性质：

1. 存在一个坐标系 (x^1, x^2, x^3) ，定义在某个充分大的紧集之外，使得：[2]

$$g = \begin{cases} \delta + O_{q+1}\left(\dfrac{\varepsilon_0}{\langle x\rangle^{\frac{s-1}{2}}}\right), & k = O_q\left(\dfrac{\varepsilon_0}{\langle x\rangle^{\frac{s+1}{2}}}\right) \quad \text{if } s \in [1, 3), \\ g_m + O_{q+1}\left(\dfrac{\varepsilon_0}{\langle x\rangle^{\frac{s-1}{2}}}\right), & k = O_q\left(\dfrac{\varepsilon_0}{\langle x\rangle^{\frac{s+1}{2}}}\right) \quad \text{if } s \geq 3. \end{cases}$$

其中我们记 $\langle x\rangle := \sqrt{1 + |x|^2}$ ，而 g_m 表示质量 $m > 0$ 足够小的三维施瓦西度规。

[1]本文所用的 (s, q)–渐近平坦初始数据概念与 [22,23] 中的定义略有不同。具体而言，我们明确引入尺度参数 ε_0 ，并将 [22, 23] 中的小–o 衰减假设替换为大–O有界性条件。[2]记号 $f = O(1)$ 表示当 $r \to \infty$ 时， f 有界。此外，对于任意 $m \in \mathbb{R}$ 和 $q \in \mathbb{N}$，若对所有 $|\alpha| \leq q$ 均有 $\partial^\alpha f = O(r^{-m-|\alpha|})$，则记作 $f = O_q(r^{-m})$。

2. 以下 *b–Sobolev* 界成立：[3]

$$\begin{aligned} \|(g-\delta,k)\|_{H_b^{q+1,\frac{s-4}{2}}(\Sigma_0)\times H_b^{q,\frac{s-2}{2}}(\Sigma_0)} &\leq \varepsilon_0 \qquad \text{if } s\in[1,3), \\ \|(g-g_m,k)\|_{H_b^{q+1,\frac{s-4}{2}}(\Sigma_0)\times H_b^{q,\frac{s-2}{2}}(\Sigma_0)} &\leq \varepsilon_0 \qquad \text{if } s\geq 3. \end{aligned} \tag{1.2}$$

在 [22], 第一位署名作者证明了以下条件下闵可夫斯基空间的全局非线性稳定性：(s,q)–渐近平坦真空初始数据满足 $s>1$ 且 $q\geq 2$；而 [23] 则在临界衰减假设 $s=1$下证明了闵可夫斯基空间的外部稳定性，特别是对$(1,3)$–渐近平坦初始数据。Fang-Szeftel-Touati [8] 通过共形方法构造了(s,q)–渐近平坦真空初始数据，其中 $s>1$ 且 $q\in\mathbb{N}$ 足够大。

一个尚未解决的公开问题是：当 q 取较大值时，是否存在具有临界情形 $(1,q)$ 的渐近平坦真空初始数据，因为 [8] 中的共形构造无法推广到情形 $s=1$。本文的主要结果——定理 1.5——解决了这一问题：对于任意 $s\in[1,3)$ 和任意 $q\in\mathbb{N}$，构造出一个非平凡的 (s,q)–渐近平坦真空初始数据集。此外，在临界情形 $s=1$ 中，对于所有 $s'>1$ 和 $q\in\mathbb{N}$，所构造的初始数据按照定义 1.1 的意义并非 (s',q)–渐近平坦。特别地，这就构造出了满足 [23] 的假设、但不满足 [22]的假设的初始数据。

我们主要结果的证明——定理1.5——以真空约束方程的锥形局部化计划为蓝本。该计划旨在构造支撑于给定锥内的非平凡解，同时保留尖锐渐近衰减。这一研究方向由 Carlotto-Schoen [4], 开创，他们实现了锥形局部化，但代价是过渡区域内的衰减损失。Carlotto 后来猜想，无需损失衰减也应能实现这种局部化 [3, 公开问题 3。18]。Aretakis-Czimek-Rodnianski 解决了这一猜想 [1] ，方法是特征粘合。

Mao-Tao [19] 后来重新研究了锥形情形，并发展了一种类空方法，借助显式解算子处理具有指定锥形支集的线性化约束方程；关于具有环域支集的解算子，另见 [18]。在本文中，我们调整 Mao-Tao 框架，构造临界 $(1,q)$–渐近平坦初始数据，从而证明定理 1.5。还值得一提的是，Chen-Klainerman 最近提出了适用于球面叶状结构的类空初始数据椭圆-输运构造 [5]。

1.1 闵可夫斯基时空的稳定性

1.1.1 闵可夫斯基时空稳定性的先前研究

1993年，Christodoulou-Klainerman [6] 证明了爱因斯坦真空方程下闵可夫斯基时空的全局非线性稳定性。2003年，Klainerman-Nicolò [14] 采用双零超曲面分叶框架，在与 [6]相同的初始数据假设下，证明了闵可夫斯基空间在一个向外零锥外部的稳定性。此外，在比 [6, 14],中施加的渐近衰减和正则性条件更强的假设下，Klainerman-Nicolò [15] 证明渐近平坦初始数据会导出爱因斯坦真空方程的解，且这些解具有强剥离性质。

2007 年，Bieri [2] 为闵可夫斯基空间的全局稳定性提供了另一种证明。与 [6]中的方法相比，该证明所需的导数更少，使用的向量场也更少。随后，Lindblad-Rodnianski [16, 17] 引入了一种基于波坐标的证明，表明在这种规范下，爱因斯坦方程满足所谓的弱零

[3]参见定义 3.1 ，了解加权 *b*–Sobolev 空间 $H^{k,\delta}_b$ 的精确定义。

结构。Huneau 运用广义波坐标 [12] 证明了存在平移型 Killing 场时闵可夫斯基时空的非线性稳定性。利用 Melrose 的 b分析，Hintz-Vasy [11]得出了闵可夫斯基空间稳定性的另一种证明。另一方面，Graf [9] 在爱因斯坦真空方程的类空特征柯西问题背景下，确立了闵可夫斯基空间的全局非线性稳定性；结合 [14], ，即可得到 [6]的结果。

在 [14]建立的框架下，并利用 Dafermos-Rodnianski [7], 引入的 r^p 加权能量估计，第一作者 [21]重新证明了闵可夫斯基空间在外部区域中的稳定性。近来，Hintz [10]利用 [11]的解析框架建立了外部稳定性结果。此外，第一作者 [22] 利用 r^p 加权估计，将 Bieri [2]的结果推广到满足最小衰减假设的初始数据。随后，在 [23], 中，第一作者证明，若衰减假设相对于 [22]中所考虑的假设处于临界边界，闵可夫斯基空间的外部稳定性仍然成立。

除了真空情形外，关于与物质场耦合的爱因斯坦方程稳定性也有大量研究；参见 [21, 22] 的引言及其中的参考文献。

1.1.2 [22, 23]的主要结果

现在回顾 [22, 23]中的主要结果。

定理 1.2 （具有最小衰减的闵可夫斯基整体稳定性 [22]）。 固定 $s > 1$ 与 $0 < \varepsilon_0 \ll 1$。设 (Σ_0, g, k) 为 $(s, 2)$–渐近平坦真空初始数据，其大小为 ε_0，其意义见定义 *1.1*。则 (Σ_0, g, k) 在爱因斯坦真空方程下具有唯一的、整体双曲的、光滑的、测地完备的发展。此外，该发展是整体渐近平坦的，即黎曼曲率张量沿任意未来定向的因果测地线或类空测地线趋于零。

定理 *1.3*（具有临界衰减 [23] 的闵可夫斯基外部稳定性）。设 (Σ_0, g, k) 为大小为 ε_0 的 *(1, 3)* –渐近平坦真空初始数据，其意义见定义 *1.1*。设$K \subset \Sigma_0$ 为一个紧集，使得 $\Sigma_0 \setminus K$ 与 $\mathbb{R}^3 \setminus B_1$ 微分同胚。则闵可夫斯基的稳定性在一个向外零锥的外部成立。更精确地说，存在 $\Sigma_0 \setminus K$ 的唯一未来发展 *(M, g)*，具有如下性质：

- $(M, \mathbf{g})$ 可由双零叶状分解(C_u, C_u) 进行叶状化，其向外叶 C_u 是完备的。
- 我们对与时空的双零叶状结构相关的所有量都有细致的控制。

我们简要说明 [22, 23], 中证明的主要思想，以阐明引入(s, q)–渐近平坦初始数据这一概念的动机。

设$(\mathcal{M}, \mathbf{g})$表示$(s, q)$–渐近平坦初始数据的未来发展。对于$s \in [1, 3)$，在面积半径为 r的球面上，下列自举界代表所能期望的最优衰减率：

$$\mathbf{g} - \boldsymbol{\eta} = O\left(\frac{\varepsilon}{r^{\frac{s-1}{2}}}\right), \qquad \Gamma = O\left(\frac{\varepsilon}{r^{\frac{s+1}{2}}}\right), \qquad \mathbf{R} = O\left(\frac{\varepsilon}{r^{\frac{s+3}{2}}}\right),$$

其中 $\boldsymbol{\eta}$ 表示闵可夫斯基度规， Γ表示联络系数，$\mathbf{R}$ 表示 Weyl 曲率$_2$分量，而 $\varepsilon := \varepsilon_0^3$ 表示自举估计的大小。此外，由（1.2）可得

加权 Sobolev 界

$$\|\mathbf{R}\|_{H_b^{q-1,\frac{s}{2}}(\Sigma_0)} \lesssim \varepsilon_0.$$

Weyl 曲率满足示意性的 Bianchi 方程

$$\nabla_t \mathbf{R} = \nabla \mathbf{R} + \Gamma \cdot \mathbf{R}, \tag{1.3}$$

其中 ∇_t 表示时间导数，而 ∇ 表示沿球面的导数。应用 r^pDafermos-Rodnianski 的 [7],加权估计，可示意地得到

$$\int_{\Sigma_t} r^p |\mathbf{R}|^2 \lesssim \int_{\Sigma_0} r^p |\mathbf{R}|^2 + \int_{V_t} r^p |\mathbf{R} \cdot \Gamma \cdot \mathbf{R}|, \tag{1.4}$$

其中 t 是时间函数， V_t 表示由 Σ_0 和 Σ_t之间的时空区域。有关这一论证的更多细节，请参见 [22, 第 5] 节。

当 $s \in (1,3)$时，在 ($p = s$ 1.4) 中取，非线性项可估计为

$$\int_{V_t} r^s |\mathbf{R} \cdot \Gamma \cdot \mathbf{R}| \lesssim \int_{V_t} r^s \frac{\varepsilon}{r^{\frac{s+3}{2}}} \frac{\varepsilon}{r^{\frac{s+1}{2}}} \frac{\varepsilon}{r^{\frac{s+3}{2}}} \lesssim \int_{V_t} \frac{\varepsilon^3}{r^{\frac{s+7}{2}}} \lesssim \varepsilon_0^2,$$

它在时空中可积。因此，非线性项比线性项衰减得更快，并且可以在 r^s 加权能量通量的层次上闭合自举论证。

相反，在临界情形 $s = 1$ 下，同样的估计给出

$$\int_{V_t} \frac{\varepsilon^3}{r^4} = \infty,$$

由于 V_t 是一个四维时空区域。因此，为恢复可积性，必须取 $p = 1 - 2\delta$，其中 $0 < \delta \ll 1$ 在（1.4）中。这导致能量估计只能给出较弱的衰减率:

$$\Gamma = O\Big(\frac{\varepsilon_0}{r^{1-\delta}}\Big), \qquad \mathbf{R} = O\Big(\frac{\varepsilon_0}{r^{2-\delta}}\Big).$$

要恢复丢失的因子 r^δ 并获得最优衰减率，还必须利用入射零方向上的输运方程。这一机制解释了为什么（s，2）阶渐近平坦初始数据在 [22] 中针对 $s > 1$，而（1，3）阶渐近平坦初始数据则要求在 [23]中。关于通过输运方程恢复 [23, 节 6] 中对通过输运方程恢复 r^δ损失进行了详细讨论。

1.2 主定理的陈述

定理1.2 与1.3 的比较凸显了相应初始数据假设之间的一个自然差距。更确切地说，可以询问是否存在一个初始数据组（Σ_0， g， k），它是具有大小 ε_0的（1，3）阶渐近平坦数据，但对于任意 $s > 1$都不是（s，2）阶渐近平坦数据。这样的初始数据将满足定理1.3 的假设，同时不满足定理1.2的假设，因此将产生一个未来具有外部稳定性的时空，而整体稳定性的问题仍悬而未决。

为表述我们的主要结果，我们首先引入锥形支撑的概念 .

定义 1.4。 对于 $\omega \in \mathbb{S}^2$ 和 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$,–我们定义锥

$$\Omega_{\omega,\theta} := \big\{x \in \mathbb{R}^3 : \angle(x, \omega) \le \theta\big\},$$

也就是说， $\mathbb{R}^3$ 中顶点位于原点、轴为 ω且张角为 θ的锥。

现在我们可以陈述主定理，该定理构造$(s,\ q)$–渐近平坦初始数据，适用于任意 $s\in[1,3)$ 以及 $q\in\mathbb{N}$ （按定义1.1的意义）。

定理 1.5. 设 $s\in[1,3),\ q\in\mathbb{N}$，并设 $\varepsilon_0>0$ 充分小。则存在一个非平凡的 $(s,\ q)$渐近平坦初始数据组 $(\mathbb{R}^3,\ g,\ k)$，其大小为 ε_0。更确切地说，$(g,\ k)$满足方程 (1.1) 并具有以下性质：

1. 以下逐点衰减界成立：

$$g-\delta=O_{q+1}\left(\frac{\varepsilon_0}{\langle x\rangle^{\frac{s-1}{2}}}\right),\qquad k=O_q\left(\frac{\varepsilon_0}{\langle x\rangle^{\frac{s+1}{2}}}\right).\tag{1.5}$$

2. 扰动 $(g-\delta,k)$ 支撑于锥 $\Omega:=\Omega_{\omega,\theta}$，其中 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，且满足界

$$\|(g-\delta,k)\|_{H_b^{q+1,\frac{s-4}{2}}(\Omega)\times H_b^{q,\frac{s-2}{2}}(\Omega)}\lesssim\varepsilon_0.\tag{1.6}$$

3. 对任意 $s'>s$，有

$$(g-\delta,k)\notin H_b^{q+1,\frac{s'-4}{2}}(\Omega)\times H_b^{q,\frac{s'-2}{2}}(\Omega).\tag{1.7}$$

注 1.6. 在定理 $s=1$ 中取 $q\geq 3$，可得相应的临界初始数据*1.5*

$$(g,k)\in H_b^{q+1,-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)\times H_b^{q,-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3).$$

作为已建立的外部稳定性结果的直接推论，*[23]*, 该初始数据在一个向外零锥外部存在未来发展。然而，鉴于 (1.7)，*[22]* 的整体稳定性结果并不适用于这类数据。因此，对于定理 $(g,\ k)$ 中构造的初始数据，闵可夫斯基时空整体稳定性问题仍未解决。*1.5*

1.3 证明概要

我们概述定理1.5的证明思路。

1. **设置。** 令 $\omega\in\mathbb{S}^2$ 和 $\theta\in(0,\ \frac{\pi}{2})$，并固定一个锥 $\Omega=\Omega_{\omega,\ \theta}\subset\mathbb{R}^3$，记 $r:=|x|$。

2. **锥支撑线性种子。** 线性种子的作用是在保持严格位于线性化约束算子的核中的同时，使临界s–权达到饱和。令L 为一个可容许临界衰减权函数。[4] 选取标量势 $\phi_h,\ \phi_\pi$并应用截断函数，使得 $\mathrm{supp}(\phi_h,\ \phi_\pi)\subset\Omega$。固定一个子锥 $\Omega_o\subset\subset\Omega$，使截断函数在 $\Omega_o\cap\{r\geq 2\}$上等于 1。在 $\Omega_o\cap\{r\geq 2\}$上，令

$$\phi_h(x)=\varepsilon_0\frac{r^{\frac{5-s}{2}}}{L(r)},\qquad\phi_\pi(x)=\varepsilon_0\frac{r^{\frac{3-s}{2}}}{L(r)}.$$

定义

$$h_0^{ij}:=\partial^i\partial^j\phi_h-\delta^{ij}\Delta\phi_h,\qquad\pi_0^{ij}:=\partial^i\partial^j\phi_\pi-\delta^{ij}\Delta\phi_\pi.\tag{1.8}$$

那么 $\mathrm{supp}(h_0,\ \pi_0)\subset\overline{\Omega}$，并且种子张量满足线性化约束

$$\partial_i\partial_j h_0^{ij}=0,\qquad\partial_i\pi_0^{ij}=0.$$

[4]例如 $L(r)=\log(2+r)$，详见命题 4.2。

此外，对于每个 $\ell \geq 0$ 和 $x \in \Omega_o \cap \{r \geq 2\}$，

$$|\partial^\ell h_0(x)| \simeq_\ell \varepsilon_0 \frac{r^{-\frac{s-1}{2}-\ell}}{L(r)}, \qquad |\partial^\ell \pi_0(x)| \simeq_\ell \varepsilon_0 \frac{r^{-\frac{s+1}{2}-\ell}}{L(r)}.$$

对 L 的选择确保 (h_0, π_0) 属于权重为 s 的目标空间，但不属于任何权重为 $s' > s$ 的严格更强加权空间。

3. **通过锥形右逆进行非线性修正**。记 $(h, \pi) = (h_0 + h_1, \pi_0 + \pi_1)$，并令 $P(h, \pi) = \Phi(h, \pi)$。令 S 为命题 4.1 中构造的解算子，从而

$$PS(f, F^j) = (f, F^j), \qquad \operatorname{supp}(f, F^j) \subset \overline{\Omega} \implies \operatorname{supp} S(f, F^j) \subset \overline{\Omega}.$$

我们求解不动点问题

$$(h_1, \pi_1) = S\Phi(h_0 + h_1, \pi_0 + \pi_1) \quad \text{in} \quad H_b^{q+1, \frac{s-4}{2}}(\Omega) \times H_b^{q, \frac{s-2}{2}}(\Omega), \tag{1.9}$$

利用命题 Φ 中的光滑性和 Lipschitz 性质3.10，以及命题 S 中的有界性 4.1。当 ε_0 充分小时，(1.9) 存在唯一解，并满足 $\|(h_1, \pi_1)\| \lesssim \varepsilon_0^2$。因此，$(h, \pi)$ 满足 (4.10)，并且满足$\operatorname{supp}(h, \pi) \subset \Omega$。

4. **修正项的大小**。由于 Φ是二次的，源项在同一加权空间中的大小为 $O(\varepsilon_0^2)$。根据 S的映射性质，这使修正项获得更快的衰减：

$$|\partial^\ell h_1(x)| \lesssim_\ell \varepsilon_0^2 r^{1-s-\ell}, \qquad |\partial^\ell \pi_1(x)| \lesssim_\ell \varepsilon_0^2 r^{-s-\ell}, \qquad r \to \infty.$$

5. **权重的尖锐性**。根据构造，对于任意 $s' > s$ 我们都有

$$(h_0, \pi_0) \in \left(H_b^{q+1, \frac{s-4}{2}}(\Omega) \times H_b^{q, \frac{s-2}{2}}(\Omega)\right) \setminus \left(H_b^{q+1, \frac{s'-4}{2}}(\Omega) \times H_b^{q, \frac{s'-2}{2}}(\Omega)\right).$$

非改进性 (1.7) 可通过使用 Φ 的映射性质和解算子 S进行反证法证明：如果 (h, π) 具有更强的权重 s'，那么 $\Phi(h, \pi)$
将属于相应的 $H^{q-1, \frac{s'}{2}}_b$ 空间，因此 $(h_1, \pi_1) := S\Phi(h, \pi)$ 也将具有权重 s'，
从而迫使 $(h_0, \pi_0) = (h, \pi) - (h_1, \pi_1)$ 具有权重 s'，这与构造相矛盾。

1.4 致谢

作者感谢陈宣韬、Sergiu Klainerman、Jérémie Szeftel 和 Arthur Touati 对本文的关注以及有益的讨论。作者还感谢 Sung-Jin Oh 就 [19]进行的宝贵讨论。J.W. 获 ERC-2023 AdG 101141855 BlaHSt 资助。

2 解算子的构造

2.1 线性化问题

我们引入新变量 (h, π)，定义如下：

$$\begin{aligned} h_{ij} &= g_{ij} - \delta_{ij} - \delta_{ij} \operatorname{tr}_\delta(g - \delta), \\ \pi_{ij} &= k_{ij} - \delta_{ij} \operatorname{tr}_\delta k. \end{aligned} \tag{2.1}$$

逆变换定义如下：

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \delta_{ij} + h_{ij} - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_\delta\, h\, \delta_{ij}, \\ k_{ij} &= \pi_{ij} - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_\delta\, \pi\, \delta_{ij}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

接下来我们定义算子

$$P(h,\pi) := (\partial_i\partial_j h^{ij},\ \partial_i \pi^{ij}).$$

用变量 $(h,\ \pi)$表示时，约束方程 (1.1) 可写为

$$P(h,\pi) = \Phi(h,\pi), \tag{2.3}$$

其中 $\Phi(h,\ \pi) := (M(h,\ \pi)\ N^j(h,\ \pi))$ 且

$$\begin{aligned} M(h,\pi) &= h\cdot\partial^2 h + \partial h\cdot\partial h + \pi\cdot\pi, \\ N^j(h,\pi) &= h\cdot\partial\pi + \partial h\cdot\pi. \end{aligned}$$

此处及下文中，记号 $u\cdot v$ 表示 u 和 v 的缩并的线性组合。因此，我们需要研究线性化系统

$$P(h,\pi) = 0. \tag{2.4}$$

论证的核心 [19] 在于为 (2.4) 构造一个显式解算子，4.1命题给出了其显式公式和性质。

2.2 散度方程的基本核

我们回顾，线性算子 P 在（2.4）中由对称双重散度与对称散度组成。来自 [19] 的主要输入是这些算子的锥形基本核的存在性；这些核由射线法构造，然后对方向取平均。

定理 2.1 （锥形基本核 [19, 定理 4]）。设 $v\in\mathbb{S}^2$ 与 $\chi\in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ 使得 $\int_{\mathbb{S}}\chi = 1$。存在 K_χ, $L_{\chi,\ v}\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$ 使得

$$\partial_i\partial_j K_\chi^{ij} = \delta_0, \tag{2.5}$$

$$\partial_i L_{\chi,v}^{ij} = \delta_0 v^j. \tag{2.6}$$

此外，它们满足以下性质：

- K_χ 与$L_{\chi,\ v}$ 是对称2阶张量；
- K_χ 与$L_{\chi,\ v}$ 的支集包含于该锥的凸包中

$$\overline{\left\{x\in\mathbb{R}^3, \frac{x}{|x|}\in\mathrm{supp}\,\chi\right\}};$$

- K_χ 是 -1 次齐次的，而$L_{\chi,\ v}$ 是 -2次齐次的。
- K_χ 和 $L_{\chi,\ v}$ 在 $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ 上光滑。

注2.2. *[19]* 中的想法是沿射线积分来求解。沿一条固定射线 $\{r\omega : r>0\}$，散度与二重散度分别化为 $\frac{d}{dr}$ 与 $\frac{d^2}{dr^2}$，从而可通过在 r中直接积分来恢复未知量。对 ω 关于 χ 取平均（必要时再对称化）即得到锥形核 K_χ 与 $L_{\chi,v}$。这种针对散度型方程的锥形解算子观点起源于 *[20]*。最近，*[13]* 将这一想法推广为基于曲线上的恢复与有限维余核条件的欠定系统一般框架。

3 b–索博列夫空间的估计

3.1 b–索博列夫空间

本节回顾 b–Sobolev 空间的基本估计，并证明解算子在 b–Sobolev 空间上是有界的。

定义 3.1。 对于 $k \in \mathbb{N}$， b–索博列夫空间 H_b^k 由以下范数定义：

$$\|u\|_{H_b^k(\mathbb{R}^3)}^2 := \sum_{i=0}^{k} \|\langle x\rangle^i \partial^i u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

我们通过对偶和插值将定义扩展到 $k \in \mathbb{R}$ 。对于 $\delta \in \mathbb{R}$，我们进一步定义

$$H_b^{k,\delta} := \langle x\rangle^{-\delta} H_b^k.$$

注 3.2。 该 b–索博列夫空间刻画了函数在求导后衰减率提高 $\langle x\rangle^{-1}$ 的性质，这与定义 *1.1* 一致。然而，另一个有趣且困难的问题是考虑属于标准索博列夫空间$H^k(\mathbb{R}^3)$ 但不属于 $H_b^k(\mathbb{R}^3)$ 的初始数据。

命题 3.3。 对于任意 $\delta \in \mathbb{R}$，我们有以下性质：

1. 对于 $k > \frac{3}{2}$，以下不等式成立：

$$\|\langle x\rangle^{\frac{3}{2}+\delta} u\|_{L^\infty} \lesssim \|u\|_{H_b^{k,\delta}}. \tag{3.1}$$

2. 以下乘法估计成立：

$$\|uv\|_{H_b^{k,\delta}} \lesssim \|u\|_{H_b^{k_1,\delta_1}} \|v\|_{H_b^{k_2,\delta_2}}, \tag{3.2}$$

对于 $\delta_1 + \delta_2 = \delta - \frac{3}{2}$、 $k_1 + k_2 > 0$,

$$k = \begin{cases} \min(k_1, k_2), & \max(k_1, k_2) > \dfrac{3}{2}, \\ k_1 + k_2 - \dfrac{3}{2}, & \max(k_1, k_2) \le \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

证明。 注意，(3.1) 是标准的 Sobolev 性质。(3.2) 的证明基于通常的双线性估计（不带权），即 Sobolev 空间构成巴拿赫代数。更多细节请参见 [19,命题 2] 。 □

推论 3.4。 设 $k > \frac{3}{2}$ 和 $\delta \ge -\frac{3}{2}$。则有

$$\|uv\|_{H_b^{k,\delta}} \lesssim \|u\|_{H_b^{k,\delta}} \|v\|_{H_b^{k,\delta}}. \tag{3.3}$$

特别地， $H^{k,-\frac{3}{2}}_b$ 是一个巴拿赫代数。

证明。 由（3.2）直接得出结论，取 $(k_1, \delta_1) = (k, \delta)$ 以及 $(k_2, \delta_2) = (k, -\frac{3}{2})$，并结合假设 $\delta \ge -\frac{3}{2}$。 □

3.2 出射性质

定义 3.5。设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$，且 $K(x,y) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ 是某个算子的施瓦茨核，该算子也记作 K。假设 K 具有以下性质

$$u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3), \qquad \operatorname{supp} u \subset \overline{\Omega} \Longrightarrow \operatorname{supp} Ku \subset \overline{\Omega}.$$

我们称 K 在 outgoing 于 Ω，如果存在 $C = C(\Omega) > 1$ 使得

$$K(x,y) = 0, \quad on \quad \{x, y \in \Omega / \, |y| \geq C|x|\}.$$

命题 3.6。设 $\omega \in \mathbb{S}^2$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$，$\Omega = \Omega_{\omega,\theta}$ 和 $\chi \in C_c^\infty(\Omega \cap \mathbb{S}^2)$。积分核 $K(x,y) = K_\chi^{ij}(x-y)$ $L(x,y) = L_{\chi,e_k}^{ij}(x-y)$ 在 Ω 上是出射的，其中 e_k 表示沿 x_k 方向的单位向量。

证明。由定理 2.1 直接可知，K_χ^{ij} 和 L_{χ,e_k}^{ij} 的支集包含于 Ω 中。因此，只需证明存在一个仅依赖于 Ω 的常数 $C_\Omega > 0$，使得

$$x, y \in \Omega, \quad |y| \geq C_\Omega |x| \quad \Longrightarrow \quad x - y \notin \Omega.$$

设 $\Omega = \Omega_{\omega,\theta}$，其中 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$。对于 $x, y \in \Omega$，我们有

$$x \cdot \omega \leq |x|, \qquad y \cdot \omega \geq |y| \cos\theta.$$

因此

$$(x-y) \cdot \omega = x \cdot \omega - y \cdot \omega \leq |x| - |y| \cos\theta = (|x| \sec\theta - |y|) \cos\theta.$$

取 $C_\Omega := \sec\theta$，可得 $(x-y) \cdot \omega \leq 0$，因此 $x - y \notin \Omega$。我们得出

$$x, y \in \Omega, \quad |y| \geq C_\Omega |x| \quad \Longrightarrow \quad K_\chi^{ij}(x-y) = L_{\chi,e_k}^{ij}(x-y) = 0.$$

这证明解算子 S 在 Ω 上是出射的，符合定义 3.5。 □

注 3.7。命题 3.6 依赖于以下几何事实：若 $x, y \in \Omega_{\omega,\theta}$ 满足 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$，且当 C 充分大时 $|y| \geq C|x|$，则 $x-y$ 被 $-y$ 支配，因此指向凸锥 $\Omega_{\omega \text{之外} \theta}$。

相比之下，较弱的条件 $|y| > |x|$ 并不足够。为此，取 $\omega = (0,0,1)$ 和 $\theta \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$，并选取一个角度 $\alpha \in (\pi - 2\theta, \theta)$。令 $x = (0,0,1)$ 和 $y = r(\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$，其中 $r > 1$。于是 $x, y \in \Omega_{\omega,\theta}$ 且 $|y| > |x|$。此外，定义

$$F(r) := \frac{(x-y) \cdot \omega}{|x-y|} = \frac{1 - r\cos\alpha}{\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos\alpha}},$$

我们计算

$$F(1) = \sin\frac{\alpha}{2} > \cos\theta.$$

由 $F(r)$ 的连续性可知，对于所有满足条件的 $r \in (1, 1+\varepsilon]$，只要 $\varepsilon > 0$ 足够小，便有 $F(r) \geq \cos\theta$。因此，对于这样的 r，有 $x - y \in \Omega_{\omega,\theta}$。

我们记录出射齐次分布的如下映射性质。

命题 3.8. 设 $\sigma \in (0,3)$ 并设

$$K \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \cap \mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$$

为次数为 $\sigma - 3$ 的齐次分布。假设核 $K(x-y)$ 是出射的。那么，对于任意 $\delta < \frac{3}{2} - \sigma$ 和任意 $k > \frac{3}{2}$，卷积算子

$$u \longmapsto u * K$$

延拓为有界映射

$$H_b^{k-\sigma,\delta+\sigma} \longrightarrow H_b^{k,\delta}.$$

证明。 该结果推导于 [19, 命题 3]。具体而言，在 [19,命题3], 的证明中，对出射分量的估计仅需假设 $\delta < \frac{3}{2} - \sigma$。 □

引理 3.9. 设 $k > \frac{3}{2}$和 $\delta \geq -\frac{3}{2}$。那么，在 δ_{ij}的一个小邻域内，矩阵求逆映射

$$\begin{aligned} \delta_{ij} + H_b^{k,\delta} &\to \delta_{ij} + H_b^{k,\delta}, \\ g_{ij} &\mapsto g^{ij} \end{aligned}$$

是光滑的。

证明。 在假设 [19,下，结论已在 5]推论 $\delta > -\frac{3}{2}$中得到证明。我们简要说明为何同样的论证可以推广到端点情形 $\delta = -\frac{3}{2}$。 [19]中的证明基于两个要点。第一是 L^∞ 临界权重下索伯列夫嵌入所提供的控制 $\delta = -\frac{3}{2}$，见（3.1）。第二是加权空间 H^k中的乘法有界性，$_b{}^\delta$ 由（ $\delta \geq -\frac{3}{2}$ 3.3）可知，该性质对所有均成立。由于论证不需要额外的衰减，这两个性质足以确立端点处矩阵求逆映射的光滑性。因此， [19,推论 5] 的结论对$\delta \geq -\frac{3}{2}$仍然成立。

□

命题 3.10。 对于 $q > \frac{1}{2}$ 和 $\delta \geq -\frac{3}{2}$，算子

$$\begin{aligned} \Phi : H_b^{q+1,\delta} \times H_b^{q,\delta+1} &\longrightarrow H_b^{q-1,\delta+2}, \\ (h, \pi) &\longmapsto \left(h \cdot \partial^2 h,\ \partial h \cdot \partial h,\ \pi \cdot \pi,\ h \cdot \partial \pi,\ \partial h \cdot \pi\right) \end{aligned}$$

在(0,0)的一个小邻域内是光滑的。

证明。 由定义 3.1，这些假设

$$h \in H_b^{q+1,\delta}, \qquad \pi \in H_b^{q,\delta+1}$$

蕴含

$$\partial h \in H_b^{q,\delta+1}, \qquad \partial^2 h \in H_b^{q-1,\delta+2}, \qquad \partial \pi \in H_b^{q-1,\delta+2}.$$

因此， $\Phi(h, \pi)$ 的每个分量都是从以下各项中选出的两个因子的乘积

$$h, \quad \partial h, \quad \partial^2 h, \quad \pi, \quad \partial \pi.$$

我们使用双线性估计（3.2）来估计每个这样的乘积。在所有情形中，输出权重为

$$(\delta + 1) + (\delta + 1) + \frac{3}{2} \quad \text{or} \quad \delta + (\delta + 2) + \frac{3}{2},$$

二者均等于$2\delta + \frac{7}{2}$。由于 $\delta \geq -\frac{3}{2}$，我们有

$$2\delta + \frac{7}{2} \geq \delta + 2,$$

在端点$\delta = -\frac{3}{2}$处取等号。

对于索伯列夫阶数，会出现两种情形。若其中一个因子的索伯列夫阶数严格大于$\frac{3}{2}$（例如，$h \in H^{q+1}{}_b{}^\delta$），则适用（3.2）的最小值情形。否则，（3.2）给出索伯列夫阶数 $2q - \frac{3}{2}$，由于 $q > \frac{1}{2}$，它严格大于 $q - 1$。无论哪种情形， $\Phi(h, \pi)$的每个分量都属于 $H^{q-1}{}_b{}^{\delta+2}$，并且连续依赖于 (h, π)。

最后，由于 $\Phi(h, \pi) = (M(h, \pi)\ N^j(h, \pi))$ 在 (h, π) 上的依赖关系只涉及乘法和矩阵求逆映射，因此命题3.3 和引理3.9蕴含 Φ在 $(0, 0)$的某邻域内光滑。命题 3.10 的证明至此完成。 □

4 主定理的证明

证明分为三个部分。在第 4.1 节中，我们沿用 [19]，并利用定理 2.1 中的锥形核 K_χ 和 $L_{\chi、v}$，为线性系统 (2.4) 定义出射右逆 S，并证明它在相关的 H_b 空间上有界。在第 4.2 节中，我们构造 (2.4) 的显式种子解 (h_0, π_0)，使其具有指定的临界 H_b 行为。在第 1.5 节中，我们通过压缩映射论证，利用不动点表述 (4.11) 以及 S 和 Φ 的界，以 (4.10) 的形式求解完整的约束方程 (1.1)。最后，我们证明，尽管存在非线性修正，临界 H_b行为仍然保持。

4.1 散度方程的解算子

我们首先固定一个锥形区域，并将定理 2.1 中的核整合为（2.4）的解算子。

命题 4.1。设 $\omega \in \mathbb{S}^2$，$\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$，并固定一个锥 $\Omega = \Omega_{\omega,\theta} \subset \mathbb{R}^3$。设 $\chi \in C^\infty(\Omega \cap \mathbb{S}^2)$是一个截断函数，并设 K_χ^{ij}和 L_{χ,e_k}^{ij}是定理 2.1中构造的分布。对于分布 f，$F^j \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$，我们定义解算子 S如下

$$S(f, F^j) := \big(K_\chi^{ij} * f,\ L_{\chi,e_k}^{ij} * F^k\big), \qquad j = 1, 2, 3.$$

于是，以下性质成立：

1. 算子 S 在支撑于Ω的分布上为 P 的右逆，即

$$PS(f, F^j) = (f, F^j)$$

对所有 (f, F^j) 且 $\operatorname{supp}(f, F^1, F^2, F^3) \subset \Omega$。

2. 对任意 $s \geq 1$ 和 $q \in \mathbb{N}$，算子 S 可延拓为一个有界映射

$$S : H_b^{q-1,\frac{s}{2}}(\Omega) \longrightarrow H_b^{q+1,\frac{s-4}{2}}(\Omega) \times H_b^{q,\frac{s-2}{2}}(\Omega).$$

证明。由定理2.1，我们有

$$\begin{aligned}
\partial_i \partial_j K_\chi^{ij} * f &= \delta_0 * f = f, \\
\partial_i L_{\chi,e_k}^{ij} * F^k &= (e_k)^j \delta_0 * F^k = F^j, \qquad j = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$PS(f, F^j) = (f, F^j),$$

如所断言。此外，$\operatorname{supp} K_\chi, \operatorname{supp} L_{\chi,e_k} \subset \Omega$ 由定理 2.1 从而

$$\operatorname{supp}(K_\chi^{ij} * f) \subset \operatorname{supp} K_\chi + \operatorname{supp} f \subset \Omega, \operatorname{supp}(L_{\chi,e_k}^{ij} * F^k) \subset \operatorname{supp} L_{\chi,e_k} + \operatorname{supp} g \subset \Omega,$$

这里用到了 Ω 是一个锥这一事实，因此 $\Omega + \Omega \subset \Omega$。特别地，若 $\operatorname{supp}(f, F^j) \subset \Omega$，则

$$\operatorname{supp} S(f, F^j) \subset \Omega.$$

结合命题 3.6，可知 S 是定义 3.5 意义下的出射算子。最后，由于 K_χ^{ij} 和 L_{χ,e_k}^{ij} 分别是次数为 -1 和 -2 的齐次分布，我们应用命题 3.8，其中 $\delta = \frac{s-4}{2}$。这意味着卷积算子 $f \mapsto K_\chi^{ij} * f$是从 $H^{q-1,\frac{s}{2}}_b(\Omega)$ 到 $H^{q+1,\frac{s-4}{2}}_b(\Omega)$ 的有界算子，而 $F^j \mapsto L_{\chi,e_k}^{ij} * F^k$是从 $H^{q-1,\frac{s}{2}}_b(\Omega)$ 到 $H^{q,\frac{s-2}{2}}_b(\Omega)$ 的有界算子。因此，算子 S 可延拓为一个有界映射

$$H_b^{q-1,\frac{s}{2}}(\Omega) \longrightarrow H_b^{q+1,\frac{s-4}{2}}(\Omega) \times H_b^{q,\frac{s-2}{2}}(\Omega).$$

命题 4.1 的证明至此完成。 □

4.2 线性化方程解的构造

我们构造满足尖锐 b–Sobolev 权重的线性化约束（2.4）的显式锥支撑解。构造采用一般的临界衰减权函数 $L(r)$，假设其单调不减，并满足一定的可积性和导数界。可以考虑模型选取 $L(r)=\log(2+r)$；更多非平凡示例见注 4.3。

命题 4.2 (锥支撑种子，具有尖锐 s–权重)。 固定 $\varepsilon_0>0$, $s\in[1,3)$ 以及 $q\in\mathbb{N}$。设 $L\colon[0,\infty)\to(0,\infty)$ 为非减函数，并假设存在 $R_1\geq 1$ 使得:

$$\int_{R_1}^{\infty}\frac{dr}{r\,L(r)^2}<\infty,\qquad \int_{R_1}^{\infty}\frac{r^{\delta-1}}{L(r)^2}\,dr=\infty\quad\forall\,\delta>0, \tag{4.1}$$

并且存在 $C_k>0$ 使得

$$L\in C^{q+3}([R_1,\infty)),\qquad \left|(L^{-1})^{(k)}(r)\right|\leq\frac{C_k}{r^k\,L(r)}\quad(0\leq k\leq q+3,\ r\geq R_1). \tag{4.2}$$

此外，我们假设 $L(r)$满足

$$\lim_{r\to\infty} r\,\frac{L'(r)}{L(r)}=0. \tag{4.3}$$

Theorem，存在 (h_0,π_0) 支撑于 $\Omega=\Omega_{\omega,\theta}$ 满足 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，满足方程 (2.4) 使得 *t:*

1. （临界 s 界）

$$\|(h_0,\pi_0)\|_{H_b^{q+1,\frac{s-4}{2}}(\mathbb{R}^3)\times H_b^{q,\frac{s-2}{2}}(\mathbb{R}^3)}\lesssim\varepsilon_0. \tag{4.4}$$

2. （尖锐性）对于任意 $s'>s$ 和 $q\in\mathbb{N}$,

$$h_0\notin H_b^{q+1,\frac{s'-4}{2}}(\mathbb{R}^3),\qquad \pi_0\notin H_b^{q,\frac{s'-2}{2}}(\mathbb{R}^3).$$

证明。 对于锥 $\Omega=\Omega_{\omega,\,\theta}$ 并选择 $\chi\in C^\infty(\mathbb{S}^2)$、$\eta\in C^\infty([0,\infty))$，使得

$$\operatorname{supp}\chi\subset\Omega\cap\mathbb{S}^2,\quad \chi\equiv 1\text{ on }\Omega_o\cap\mathbb{S}^2,\quad \Omega_o:=\Omega_{\omega,\theta/2},\qquad \eta=0\text{ on }[0,1],\ \eta=1\text{ on }[R_1,\infty).$$

令 $r=|x|$，并定义标量函数

$$\rho_h(r):=\frac{r^{\frac{5-s}{2}}}{L(r)},\qquad \rho_\pi(r):=\frac{r^{\frac{3-s}{2}}}{L(r)},$$
$$\phi_h(x):=\varepsilon_0\,\eta(r)\rho_h(r)\chi\left(\frac{x}{|x|}\right),\qquad \phi_\pi(x):=\varepsilon_0\,\eta(r)\rho_\pi(r)\chi\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

线性种子数据 (h_0,π_0) 随后构造为

$$h_0^{ij}:=\partial^i\partial^j\phi_h-\delta^{ij}\Delta\phi_h,\qquad \pi_0^{ij}:=\partial^i\partial^j\phi_\pi-\delta^{ij}\Delta\phi_\pi. \tag{4.5}$$

于是容易验证 $\partial_i\partial_j h_0^{ij}=0$ 与 $\partial_i\pi_0^{ij}=0$，从而得到（2.4），并且$\operatorname{supp}(h_0,\ \pi_0)\subset\Omega$。 —

上界。在 $r \ge R_1$ 上，我们有 $\eta \equiv 1$，因此 $\phi_h = \varepsilon_0 \rho_h(r)\chi\left(\frac{x}{|x|}\right)$以及 $\phi_\pi = \varepsilon_0 \rho_\pi(r)\chi\left(\frac{x}{|x|}\right)$。我们断言，对所有整数 $m \ge 0$与 $r \ge R_1$,

$$\left|\partial_r^m \rho_h(r)\right| \le C_m \frac{r^{\frac{5-s}{2}-m}}{L(r)}, \qquad \left|\partial_r^m \rho_\pi(r)\right| \le C_m \frac{r^{\frac{3-s}{2}-m}}{L(r)}. \tag{4.6}$$

确实，$\rho_h(r) = r^{\frac{5-s}{2}} L(r)^{-1}$且 $\rho_\pi(r) = r^{\frac{3-s}{2}} L(r)^{-1}$；求导并应用莱布尼茨公式后，每一项都是 r^γ 的一个导数（得到 $r^{\gamma-\ell}$）与 L^{-1} 的一个导数的乘积。估计式 (4.2) 给出 $(L^{-1})^{(k)}(r) \lesssim r^{-k} L(r)^{-1}$，由此得到 (4.6)。

接下来，角导数满足 $|\partial^\alpha(\chi\left(\frac{x}{|x|}\right))| \le C_\alpha r^{-|\alpha|}$。结合 (4.6) 以及对 $\partial^m(\rho(r)\chi\left(\frac{x}{|x|}\right))$应用莱布尼茨公式，对于所有整数 $\ell \ge 0$和 $r \ge R_1$,

$$|\partial^\ell h_0(x)| \le C_\ell\, \varepsilon_0 \frac{r^{\frac{1-s}{2}-\ell}}{L(r)}, \qquad |\partial^\ell \pi_0(x)| \le C_\ell\, \varepsilon_0 \frac{r^{\frac{-1-s}{2}-\ell}}{L(r)}. \tag{4.7}$$

因此，对于 $0 \le \ell \le q+1$,

$$\langle x\rangle^{\frac{s-4}{2}+\ell} |\partial^\ell h_0(x)| \lesssim \varepsilon_0 \frac{r^{-\frac{3}{2}}}{L(r)} \quad (r \ge R_1),$$

并且在固定锥上的极坐标中,

$$\left\|\langle x\rangle^{\frac{s-4}{2}+\ell}\partial^\ell h_0\right\|_{L^2}^2 \lesssim \varepsilon_0^2 \int_{R_1}^\infty \frac{dr}{r\,L(r)^2} \lesssim \varepsilon_0^2,$$

其中最后一步用到了（4.1）。将 $\ell = 0$、……、$q+1$ 相加，并加上来自 $r \le R_1$ 的有限紧支集贡献，得到$\|h_0\|_{H^{q+1,\ \frac{s-4}{2}}_b} \lesssim \varepsilon_0$，由（4.1）可知。同理可得$\|\pi_0\|_{H^{q,\ \frac{s-2}{2}}_b} \lesssim \varepsilon_0$。这就证明了（4.4）。

下界与 $s' > s$ 散度。固定 $s' > s$ 并令 $\delta := s' - s > 0$。在 Ω_o 和$r \ge R_1$上，$\chi \equiv 1$ 和 $\eta \equiv 1$，因此 ϕ_h，ϕ_π 是径向的:

$$\phi_h(r) = \varepsilon_0 \frac{r^{\frac{5-s}{2}}}{L(r)}, \qquad \phi_\pi(r) = \varepsilon_0 \frac{r^{\frac{3-s}{2}}}{L(r)}.$$

对于径向的 ϕ，张量 $T^{ij}(\phi) := \partial^i\partial^j\phi - \delta^{ij}\Delta\phi$ 具有径向特征值 $-2\phi'(r)/r$，因此$|T(\phi)(x)| \ge 2|\phi'(r)|/r$。于是，在 Ω_o上有 $|h_0| \ge 2|\phi_h'|/r$ 和 $|\pi_0| \ge 2|\phi_\pi'|/r$。

求导:

$$\phi_h'(r) = \varepsilon_0 \frac{r^{\frac{5-s}{2}}}{L(r)}\Big(\frac{5-s}{2}\frac{1}{r} - \frac{L'(r)}{L(r)}\Big), \qquad \phi_\pi'(r) = \varepsilon_0 \frac{r^{\frac{3-s}{2}}}{L(r)}\Big(\frac{3-s}{2}\frac{1}{r} - \frac{L'(r)}{L(r)}\Big).$$

By (4.3)，选择 $R_2 \ge R_1$使得对于所有 $r \ge R_2$, $r\frac{L'(r)}{L(r)} \le \frac{1}{2}\min\{\frac{5-s}{2}, \frac{3-s}{2}\}$。这给出

$$|\phi_h'(r)| \gtrsim \varepsilon_0 \frac{r^{\frac{3-s}{2}}}{L(r)}, \qquad |\phi_\pi'(r)| \gtrsim \varepsilon_0 \frac{r^{\frac{1-s}{2}}}{L(r)} \qquad (r \ge R_2),$$

因此，在 $\Omega_o \cap \{r \ge R_2\}$ 上,

$$|h_0(x)| \gtrsim \varepsilon_0 \frac{r^{\frac{1-s}{2}}}{L(r)}, \qquad |\pi_0(x)| \gtrsim \varepsilon_0 \frac{r^{\frac{-1-s}{2}}}{L(r)}.$$

因此，将 L^2 范数限制在 $\Omega_o \cap \{r \geq R_2\}$ 上，

$$\big\|\langle x\rangle^{\frac{s'-4}{2}} h_0\big\|_{L^2}^2 \gtrsim \varepsilon_0^2 \int_{R_2}^{\infty} \frac{r^{\delta-1}}{L(r)^2}\, dr = \infty, \qquad \big\|\langle x\rangle^{\frac{s'-2}{2}} \pi_0\big\|_{L^2}^2 \gtrsim \varepsilon_0^2 \int_{R_2}^{\infty} \frac{r^{\delta-1}}{L(r)^2}\, dr = \infty,$$

由（4.1）。这证明了对所有 $s' > s$的尖锐性。 □

注4.3 （可容许临界衰减权函数 L的例子）。 定义迭代对数如下

$$\log_{(1)}(t) := \log t, \qquad \log_{(j+1)}(t) := \log(\log_{(j)}(t)), \quad j \geq 1.$$

固定 $m \geq 1$ 并令 $1 \leq j_0 \leq m$。我们如下引入指数（$\beta_1, \ldots, \beta_m$） ：

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{j_0-1} = \frac{1}{2}, \qquad \beta_{j_0} > \frac{1}{2}, \qquad \beta_{j_0+1}, \ldots \beta_m \in \mathbb{R}.$$

选取 $R_* \geq 2$ 使得

$$\log_{(j)}(2+r) \geq 2 \qquad \forall\, 1 \leq j \leq m, \quad \forall\, r \geq R_*, \tag{4.8}$$

并对 $r \geq R_*$令，

$$L(r) := \prod_{j=1}^{m} \Big(\log_{(j)}(2+r)\Big)^{\beta_j}. \tag{4.9}$$

将 L 延拓到 $[0, R_*]$ ，使其为任意正的非减 C^∞ 函数。容易验证 L 满足（4.1），（4.2）和（4.3）。特别地，这包括 $L(r) = (\log(2+r))^{\beta_1}$，其中 $\beta_1 > \frac{1}{2}$。 –

定理 1.5 的证明

记

$$P(h,\pi) = (\partial_i\partial_j h^{ij}, \partial_i \pi^{ij}), \quad \Phi(h,\pi) = \big(M(h,\pi), N^j(h,\pi)\big).$$

于是，(1.1) 变为

$$P(h,\pi) = \Phi(h,\pi). \tag{4.10}$$

设 $\Omega = \Omega_{\omega,\theta}$ 为一个锥，且 $(h_0, \pi_0) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ 由命题 4.2 定义，它求解$P(h_0, \pi_0) = 0$，且其支集包含于 Ω_o。设 S为命题 4.1 给出的解算子。考虑以下不动点问题

$$(h_1, \pi_1) = S\Phi(h_0 + h_1, \pi_0 + \pi_1). \tag{4.11}$$

定义

$$X := \left\{ (h,\pi) \Big/ \|(h,\pi)\|_{H_b^{q+1,\frac{s-4}{2}}(\Omega)\times H_b^{q,\frac{s-2}{2}}(\Omega)} \leq \|(h_0,\pi_0)\|_{H_b^{q+1,\frac{s-4}{2}}(\Omega)\times H_b^{q,\frac{s-2}{2}}(\Omega)} \right\}.$$

根据命题4.2

$$\|(h_0,\pi_0)\|_{H_b^{q+1,\frac{s-4}{2}}(\Omega)\times H_b^{q,\frac{s-2}{2}}(\Omega)} \lesssim \varepsilon_0.$$

根据命题3.10，我们有，对于 ε_0 足够小且$(h,\pi),(h',\pi') \in X$

$$\|\Phi(h_0+h, \pi_0+\pi)\|_{H_b^{q-1,\frac{s}{2}}(\Omega)} \lesssim \varepsilon_0^2,$$
$$\|\Phi(h_0+h, \pi_0+\pi) - \Phi(h_0+h', \pi_0+\pi')\|_{H_b^{q-1,\frac{s}{2}}(\Omega)} \lesssim \varepsilon_0 \|(h,\pi) - (h',\pi')\|_X.$$

根据命题4.1， S从 $H^{q-1,\frac{s}{2}}_b(\Omega)$到 $H^{q+1,\frac{s-4}{2}}_b(\Omega) \times H^{q,\frac{s-2}{2}}_b(\Omega)$是有界的。因此，当 ε_0足够小时，该映射

$$F(h,\pi) := S\Phi(h_0+h,\pi_0+\pi) : H^{q+1,\frac{s-4}{2}}_b(\Omega) \times H^{q,\frac{s-2}{2}}_b(\Omega) \to H^{q+1,\frac{s-4}{2}}_b(\Omega) \times H^{q,\frac{s-2}{2}}_b(\Omega)$$

是 X 上的压缩映射。根据巴拿赫不动点定理，存在唯一的不动点 $(h_1, \pi_1) \in X$，使得

$$\begin{aligned} S\Phi(h_0+h_1,\pi_0+\pi_1) &= (h_1,\pi_1), \\ \|(h_1,\pi_1)\|_{H^{q+1,\frac{s-4}{2}}_b(\Omega)\times H^{q,\frac{s-2}{2}}_b(\Omega)} &\lesssim \varepsilon_0^2. \end{aligned} \tag{4.12}$$

这意味着

$$P(h_1,\pi_1) = PS\Phi(h_0+h_1,\pi_0+\pi_1) = \Phi(h_0+h_1,\pi_0+\pi_1).$$

记 $h := h_0+h_1$ 以及 $\pi := \pi_0+\pi_1$，我们看到 (h, π) 满足 (2.3) 且满足 es

$$\|(h,\pi)\|_{H^{q+1,\frac{s-4}{2}}_b(\Omega)\times H^{q,\frac{s-2}{2}}_b(\Omega)} \lesssim \varepsilon_0.$$

现在证明 (1.7)。令 $s' > s$ 并反设

$$(h,\pi) \in H^{q+1,\frac{s'-4}{2}}_b(\Omega) \times H^{q,\frac{s'-2}{2}}_b(\Omega). \tag{4.13}$$

于是，由命题 3.10 可得 $\Phi(h, \pi) \in H^{q-1,\frac{s'}{2}}_b$。应用命题 4.1 并结合 (4.12)，我们推得

$$(h_1,\pi_1) = S\Phi(h,\pi) \in H^{q+1,\frac{s'-4}{2}}_b(\Omega) \times H^{q,\frac{s'-2}{2}}_b(\Omega).$$

回顾命题 4.2，有 $(h_0, \pi_0) \notin H^{q+1,\frac{s'-4}{2}}_b(\Omega) \times H^{q,\frac{s'-2}{2}}_b(\Omega)$，从而得到

$$(h,\pi) = (h_0+h_1,\pi_0+\pi_1) \notin H^{q+1,\frac{s'-4}{2}}_b(\Omega) \times H^{q,\frac{s'-2}{2}}_b(\Omega),$$

这与 (4.13) 矛盾。结合 (2.2)，我们得到 (1.7)。至此完成定理 1.5的证明。

注 4.4. 在定理 1.5的证明中，不动点 (h_1, π_1) 具有超出上文所用范围的额外正则性。更精确地说：对于 $s \in [1,3)$ 以及 $q \geq 4$，

$$(h_1,\pi_1) \in H^{q+1,\frac{s-4}{2}}_b \times H^{q,\frac{s-2}{2}}_b \implies (h_1,\pi_1) \in H^{\infty,\frac{s-4}{2}}_b \times H^{\infty,\frac{s-2}{2}}_b,$$

见 [19,命题 7]。

注 4.5. 与我们在命题 4.2中的线性种子数据构造不同，[19] 针对 Carlotto 猜想 [3, 公开问题 3.18] 的方法是构造一个紧支撑线性种子 $(h_0, \pi_0) \in C^\infty_c(\mathbb{R}^3)$。这样的选择使得 (h_1, π_1)的衰减得以改善。特别地，若 $s \in (1,3)$ 且 $q \geq 4$，则

$$(h_1,\pi_1) \in H^{q+1,\frac{s-4}{2}}_b \times H^{q,\frac{s-2}{2}}_b \implies (h_1,\pi_1) \in H^{\infty,-\frac{1}{2}}_b \times H^{\infty,\frac{1}{2}}_b,$$

更多细节见 [19, 命题 8]。这是因为，对于 $s > 1$，非线性项的齐次次数严格低于线性项，因此可以迭代提升正则性。相比之下，在临界情形 $s = 1$ 中，这一论证不再成立，因为非线性项与线性项的齐次次数相同。

参考文献

[1] *S. Aretakis*、*S. Czimek* 和 *I. Rodnianski*，《爱因斯坦方程的特征粘合问题及其应用》，《杜克数学杂志》*174 (2), 355–402, 2025*年。[2] *L. Bieri*，《广义相对论中闵可夫斯基空间稳定性定理的推广》，《微分几何杂志》*86 (1), 17–70, 2010*年。[3] *A. Carlotto*，《广义相对论约束方程》，《相对论综述》*24, no. 1, 1–170, 2021*年。[4] *A. Carlotto* 和 *R. Schoen*，《爱因斯坦约束方程解的局部化》，《数学发明》*205, no. 3, 559–615, 2016*年。[5]*X. Chen* 和 *S. Klainerman*，《求解一般自由数据下的约束方程》，*arXiv:2512.22704*。[6] *D. Christodoulou* 和 *S. Klainerman*，《闵可夫斯基空间的全局非线性稳定性》，普林斯顿数学丛书 *41, 1993*年。[7] *M. Dafermos* 和 *I. Rodnianski*，《波动方程衰减的全新物理空间方法及其在黑洞时空中的应用》，第十六届国际数学物理大会，*World Sci. Publ.*，新泽西州哈肯萨克，*2010*年，*421–432*。[8] *A. Fang*、*J. Szeftel* 和 *A. Touati*，《任意衰减下闵可夫斯基稳定性的初始数据》，《理论与数学物理进展》*29 (4), 933–1043, 2025*年。[9] *O. Graf*，《类空特征初始数据下闵可夫斯基空间的全局非线性稳定性》，法国数学会回忆录，*184, 2025*年。[10] *P. Hintz*，《广义调和规范下闵可夫斯基空间的外部稳定性》，*Arch. Rational Mech. Anal. 247 (99), 2023*年。[11] *P. Hintz* 和 *A. Vasy*，《闵可夫斯基空间的稳定性与度量的多齐次性》，《偏微分方程年刊》*6 (1): Art. 2, 146pp, 2020*年。[12] *C. Huneau*，《具有平移类空 *Killing* 场的闵可夫斯基时空的稳定性》，《偏微分方程年刊》*4 (1): Art. 12, 147 pp, 2018*年。[13] *P. Isett*、*Y. Mao*、*S.-J. Oh* 和 *Z. Tao*，《通过曲线上的恢复与有限维余核条件构造超定/欠定微分算子的积分公式 *I*：一般理论》，*arXiv:2509.04617*。[14] *S. Klainerman* 和 *F. Nicolo*，《广义相对论中的演化问题》，数学物理进展，第*25*卷，*2003*年。[15] *S. Klainerman* 和 *F. Nicolo*，《爱因斯坦真空方程渐近解的剥离性质》，《经典与量子引力》*20, 3215–3257, 2003*年。[16] *H. Lindblad* 和 *I. Rodnianski*，《波坐标下爱因斯坦真空方程的整体存在性》，《数学物理通讯》*256 (1), 43–110, 2005*年。[17] *H. Lindblad* 和 *I. Rodnianski*，《调和规范下闵可夫斯基时空的整体稳定性》，《数学年刊》*(2), 171 (3), 1401–1477, 2010*年。

[18] Y. Mao、S.-J. Oh 和 Z. Tao，通过具有指定支集性质的解算子，在渐近平坦区域进行初始数据粘合，arXiv:2308.13031。[19] Y. Mao 和 Z. Tao，爱因斯坦方程的局部化初始数据，arXiv:2210.09437v2。[20] S.-J. Oh 和 D.Tataru，任意拓扑类中联络的双曲杨–米尔斯方程，《数学物理通讯》**365** (2019年)，第 2 期，685–739。[21] D. Shen，外部区域中闵可夫斯基时空的稳定性，《纯粹与应用数学季刊》**20**(2)，757–868，2024年。[22] D. Shen，最小衰减下闵可夫斯基时空的整体稳定性，arXiv:2310.07483。[23] D. Shen，临界衰减下闵可夫斯基时空的外部稳定性，arXiv:2405.00735。