通过竞争输运标记函数对多相二维欧拉方程进行正则化

Trinh T. Nguyen

上海交通大学数学科学学院q0004349@sjtu.edu.cn

arXiv:2602.01569v1 [math.AP] 2 Feb 2026

摘要

我们为二维不可压缩欧拉方程提出了一种新颖的正则化框架，能够精确保留多相涡量场的输运结构。关键步骤是将多相涡斑数据改写为有限个被动输运的标量标记函数：在每个点处，局部涡量由这些标记函数相互竞争所产生的光滑逐点选择规则确定。该方案不引入空间扩散或光滑化；所有正则化均仅源于标记函数的选择机制。随着锐度参数 $\beta \to \infty$，我们证明了被输运标记函数在有限时间区间上的一致收敛。此外，在底层欧拉界面网络满足几何非退化条件的情况下，我们证明了演化界面结构的豪斯多夫收敛，并证明正则化涡量在平局集之外以关于 β 的指数速度逐点收敛至相应的锐界多相涡斑解。最后，我们证明，逐点收敛性的丧失恰好与欧拉界面动力学中几何退化的出现相吻合。

1 引言

分段常值涡量场（通常称为涡斑）的演化，是二维不可压欧拉方程分析中的一个经典且核心课题。在最简单的情形下，涡斑由一块常值涡量区域构成，并通过尖锐界面与其补集分隔。除其数学意义之外，这类斑块型构型为在广泛的无黏流中观测到的相干涡结构提供了理想化模型 [21, 12, 65, 64, 75, 59, 19, 27, 26, 7]。当涡量场由若干具有不同涡量水平的不同斑块组成时，会出现更为复杂的动力学。在近无黏二维流动的数值模拟与实验室实验中，均已观测到长寿命的胞状涡旋构型。特别地，实验已表明所谓涡旋晶体会自发形成；它们由有限个相干涡旋组成，排列成规则的类晶格图案，并在极长的时间区间内持续存在 [35]。这些状态由湍流初始条件动态产生，其特征是嵌入较弱背景中、被尖锐分隔的近乎均匀涡量区域。这些观测促使人们在不可压缩欧拉框架内，对多相涡量构型及其界面的演化进行数学研究 [79, 50, 25, 78, 1]。

边界正则的涡斑动力学在过去几十年中得到了广泛研究，研究始于奠基性工作 [9, 16, 17] ，并延续至大量关于轮廓动力学和边界正则性的文献。另请参阅 [13, 48, 32, 55, 87, 28, 33, 73, 31, 49]及其中的参考文献。这些结果表明，当初始涡量由一个或多个具有 $C^{1,\,\alpha}$ 边界的涡斑组成时，界面会随流动输运，并在尤多维奇类中始终保持正则。因此，演化完全可以通过涡斑边界的运动来描述，从而导出封闭的轮廓动力学表述。在这一框架下，涡量表示为有限个特征函数之和，其支集随欧拉流演化，从而精确描述界面动力学。

另一方面，当人们试图对界面问题进行正则化时——无论是为了获得解析近似、进行数值计算，还是为了在无黏动力学与更微观的描述之间建立严格联系——都会面临另一项挑战。希尔伯特第六问题的某些方面尤为突出地涉及这类正则性缺失问题 [47, 76, 5, 3, 4, 39], ，该问题关注从动力学或分子模型过渡到连续介质流体方程。在这一背景下，希尔伯特展开及相关渐近方法需要采用尊重流动底层几何结构的正则化框架 [45, 51, 84, 80, 52, 53]。标准的正则化技术（例如与磨光函数进行卷积）通常会引入交换子误差，破坏欧拉方程内在的输运结构：正则化后的涡量不再能用随流输运量表示，所得平滑化也无法与演化界面对齐。因此，正则化后的

动力学变得难以与原始界面运动联系起来，而对尖锐界面极限的定量控制也变得不明确。另一种正则化方法是考察纳维–斯托克斯方程的消失黏性极限。沿着这一思路已取得重大进展，包括对无黏动力学的严格推导，以及针对Yudovich解和相关构型的稳定性结果；例如，参见[23, 24, 18, 66, 81, 20] 及其中的参考文献。对于其他涡旋模型，也取得了密切相关的消失黏性和奇异极限结果，包括点涡 [64, 63, 15, 36]，涡旋–波系统[70, 10]，和涡环 [8, 11, 14, 37]。从物理角度看，基于扩散的正则化既自然又根本，其分析处于流体力学奇异摄动理论的核心 [74, 58, 83, 72, 54, 69, 68, 71, 29, 6, 43, 40, 46, 42, 41, 77, 38, 61, 34, 57, 56, 22, 82, 67]。然而，在多斑块构型中还会出现更为微妙的问题，因为其中存在两个以上的涡量水平。在这类情形下，流动分解为多个区域，这些区域由界面网络分隔；界面网络可能形成胞状模式，原则上也可能在交汇点相接。黏性虽使方程正则化，却也同时平滑了无黏几何中的界面和角点。因此，即使能够证明解收敛到无黏解 L^p，界面网络的极限演化仍不明确。这类多界面构型自然出现在周期区域中，作为有序涡量场的粗粒化描述，也出现在涡旋晶体或相干态的理想化模型中。

一个自然且引人深思的问题是，能否在这两种视角之间建立一种插值式视角 ——在这种视角下，界面几何仍然有意义，同时涡量由正则化的光滑场描述。

问题。 能否针对真正的多相涡量构型构造一种二维不可压欧拉方程的正则化，使其保留无黏流动的精确输运结构，并能连贯地描述演化界面与交汇点的几何？更准确地说，能否以尊重底层相分区并忠实追踪输运界面几何的方式，对多相涡旋斑块数据进行正则化？此外，能否纯粹从几何角度，通过欧拉界面网络的退化来刻画这种正则化的逐点收敛失效?

本文提出一种二维不可压欧拉方程的正则化方法，该方法直接在物理空间中运作，专为真正的多相涡量构型设计。此构造不引入空间磨光或扩散。我们不再通过区域的固定划分来规定涡量并显式追踪其界面的演化，而是引入有限个由流动被动输运的标量标记函数，并通过光滑门控规则确定局部涡量；该规则产生涡量相的凸混合，其权重取决于标记函数的相对大小。该正则化由锐度参数 $\beta > 0$ 控制。此构造的一个核心特征是结构不变性：对于每个固定的 β，涡量 ω^β 满足欧拉方程，并在所有时刻保持如下函数形式

$$\omega^\beta(t,\cdot) = F_\beta\big(\varphi_1^\beta(t,\cdot),\dots,\varphi_K^\beta(t,\cdot)\big), \qquad (\partial_t + u^\beta\cdot\nabla)\varphi_k^\beta = 0,$$

从而使所有弥散界面几何都完全由流动输运的标量所编码。这种精确的输运表示在整个演化过程中得以保留，而这恰恰是标准正则化过程（如与磨光函数进行卷积）通常会破坏的结构。对于合适的标记函数选择，该构造可对胞状涡量模式进行 C^∞ 正则化，包括理想化涡旋晶体模型中出现的此类模式。

论文结构。第 2 节中，我们以涡量形式 (1) 表述二维不可压欧拉方程，并引入多相涡旋斑块数据 (2)。随后，我们从竞争标记的角度重新表述多相斑块数据，使其形式适用于欧拉输运：有限个标记函数 $\{\varphi_k^{\mathrm{in}}\}_{k=1}^K$ 随流动输运，并通过逐点极大化将区域划分为若干区域 Ω_k，其界面由相应的平局集描述。这种重新表述直接通过输运标量场刻画演化的多相几何。基于这种表示，我们将正则化初始涡量定义为各相的凸混合 (5)。第 3 节中，我们证明正则化拟设在欧拉演化下封闭（定理 3.1 和命题 3.3）。第 4 节中，我们对平局集提出几何非退化假设，并证明其在输运下保持。我们还推导出以 L^1 为误差的正则化涡量 ω_0^β 对初始斑块数据的逼近（命题4.1），并证明在任意有限时间区间 $[0,T]$ 上，输运标记函数一致收敛（定理 4.4）。第 5 节中，我们研究演化界面的豪斯多夫收敛，并证明收敛可持续至最大时间 $T_\star$；该时间定义为欧拉界面网络首次发生几何退化的时刻（定理 5.1 和 5.2）。最后，我们推导出平局集之外的尖锐逐点涡量估计，其误差随 β 指数衰减（定理 6.5 和 6.3），并证明逐点收敛的丧失恰好与底层欧拉界面动力学中奇异几何的出现同步。

2 Multi-相划分：竞争标记观点

我们考虑涡量形式的不可压缩欧拉方程

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0, \qquad u = \nabla^\perp \psi, \qquad -\Delta \psi = \omega - \langle \omega \rangle, \tag{1}$$

在二维环面 $\mathbb{T}^2$上提出。这里$\langle \omega \rangle$ 表示 ω的空间平均。初始涡量定义为

$$\omega_0(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k \, \mathbf{1}_{\Omega_k}(x), \tag{2}$$

其中 $c_k \in \mathbb{R}$ 表示赋予相$\Omega_k \subset \mathbb{T}^2$的涡量水平，且 $K \geq 2$ 是自然数。Yudovich理论给出尤多维奇类 [85, 86, 62]中解的全局存在性与唯一性。

涡量相作为竞争区域。我们并不通过区域的固定划分来规定涡量并显式追踪其界面的后续运动，而是采用一种不同的几何观点。我们用有限族竞争区域Ω_k来表示该区域，每一区域都关联一个给定的涡量水平，并由一组标量标记函数逐点确定。在每个空间位置，涡量根据主导标记值选取，从而使标记函数编码相应相的局部优势。在这一表述中，界面边界并非先验地施加，而是动态地显现为两个或多个标记函数达到平衡之处；我们将这些集合称为平局集。由于标记函数由欧拉流输运，所诱导的相分区及其界面与底层流体运动协调演化。这一重新表述以基于竞争的描述取代了显式界面追踪，其中界面几何通过输运标量场被隐式编码。

通过标记函数进行的区域划分。设 $K \geq 2$ 与 $\alpha \in (0,1)$，并设 $\{\varphi_k^{\mathrm{in}}\}_{k=1}^K \subset C^{1,\alpha}(\mathbb{T}^2)$ 为一组标量函数，我们称之为标记函数。在每个点 $x \in \mathbb{T}^2$ 处，比较值 $\varphi_1^{\mathrm{in}}(x), \ldots, \varphi_K^{\mathrm{in}}(x)$，并将 x 分配给对应于最大标记函数值的相 Ω_k 。因此，可以选择标记函数，使环面被划分为 K 个互不相交的开区域

$$\Omega_k := \big\{ x \in \mathbb{T}^2 : \ \varphi_k^{\mathrm{in}}(x) > \varphi_j^{\mathrm{in}}(x) \text{ for all } j \neq k \big\}, \qquad k = 1, \ldots, K, \tag{3}$$

其并集覆盖 $\mathbb{T}^2$ ，至多相差一个测度为零的集合。在此表示中，每个相 Ω_k 由相应标记函数 φ_k^{in}的占优所刻画。相之间的边界由平局集给出

$$\Gamma_{ij} := \big\{ x \in \mathbb{T}^2 : \ \varphi_i^{\mathrm{in}}(x) = \varphi_j^{\mathrm{in}}(x) \geq \varphi_\ell^{\mathrm{in}}(x) \text{ for all } \ell \big\},$$

从而形成一个网　　络，由分隔各区域的界面曲线组成。当 $K \geq 3$ 时，这些界面可能交会于交汇点，其中三个　　或更多标记函数值重合。

将涡量正则化视为竞争加权。给定锐度参数 $\beta > 0$，我们定义权重

$$\pi_k^\beta(x) = \frac{e^{\beta \varphi_k^{\mathrm{in}}(x)}}{\sum_{j=1}^K e^{\beta \varphi_j^{\mathrm{in}}(x)}}, \qquad k = 1, \ldots, K. \tag{4}$$

我们通过2对初始涡量（进行正则化）

$$\omega_0^\beta(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k \, \pi_k^\beta(x). \tag{5}$$

这种构造可以用颜色混合来解释。常数 $\{c_k\}_{k=1}^K$ 可视为有限颜色调色板（或涡量水平），而标记函数 $\{\varphi_k^{\mathrm{in}}\}_{k=1}^K$ 则编码了在每个位置 $x \in \mathbb{T}^2$，该点对每种颜色的“偏好”程度。给定标记函数得分 $\{\varphi_1^{\mathrm{in}}(x), \ldots, \varphi_K^{\mathrm{in}}(x)\}$，点 x 随后根据权重 (4) 对可用颜色进行凸混合。等价地， x 为颜色c_k 赋予概率 $\pi_k^\beta(x)$，并取平均涡量值

$$\omega_0^\beta(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k \, \pi_k^\beta(x).$$

参数 $\beta > 0$ 控制这种选择的果断程度。事实上，对于任意 k， ℓ，

$$\frac{\pi_k^\beta(x)}{\pi_\ell^\beta(x)} = \exp\big(\beta(\varphi_k^{\mathrm{in}}(x) - \varphi_\ell^{\mathrm{in}}(x))\big),$$

因此，随着 β 增大，标记函数得分中的比值会被指数级放大。因此，当某个得分严格高于其他得分时，相应的权重趋近于 1，而其余权重则会呈指数级变小。在奇异极限 $\beta \to \infty$下，这种颜色混合会收敛为清晰着色：每个点 x 都取其得分 $\varphi_k^{\mathrm{in}}(x)$ 最大的单一颜色 c_k，而颜色之间的过渡仅限于平局集附近的薄层，在这些平局集中，两个或多个得分相等。这一初始正则化配置将精确的界面几何纳入欧拉方程。

与磨光器正则化的比较。

- 一种对涡斑数据进行正则化的常见方法是对初始涡量进行磨光，

$$\omega_0^\varepsilon := \rho_\varepsilon * \omega_0,$$

并以初始数据 ω_0^ε 求解欧拉方程。这一过程相当于非局部的欧拉平滑：每个点都被替换为邻近值的平均值，无论该点位于相内部深处还是靠近界面。因此，尖锐边界会被均匀地模糊，正则化后的涡量也不再能够用输运水平集来描述。尤其是，这种平滑化与演化界面几何并不相符。

相比之下，在本文的构造（5）中，标记函数 $\{\varphi_k^{\mathrm{in}}\}$ 由欧拉流精确输运。正则化仅通过标记函数之间的逐点竞争实现，因此局限于两个或多个相相互作用的区域附近。在远离界面的地方，单个标记函数占主导地位，涡量基本保持恒定。因此，弥散过渡层被限制在输运平局集的狭窄邻域内，并且在所有时刻都与流动保持几何上的一致。

- 若初始标记函数 $\{\varphi_{\text{属于}k}\}$ $C^{1,\alpha}(\mathbb{T}^2)$，则正则化初始涡量（5）具有相同的 $C^{1,\alpha}$ 正则性。从这个意义上说，该构造为多相涡斑数据提供了一种 $C^{1,\alpha}$–相容的正则化，符合经典欧拉适定性理论 [60, 44], ，而非施加人为的 C^∞ 平滑化。若选取光滑的标记函数，该方案自然会产生 C^∞正则化。

- 与基于边界的正则化不同，后者在涉及交汇点或相交界面的真正多相构型中会变得不具典范性；标记函数表述则通过单一的全局表示同时对所有相进行正则化。这避免了在交汇点处附加相容条件，并保持了整个界面网络的几何连贯性。此外，所得涡量在平局集之外逐点收敛，且误差随锐度参数 β 增大而指数衰减。

3 解的构造

定理 3.1。设 (ω^β, u^β) 是具有初始数据 (5)的欧拉方程 (1) 的解。对每个 $k \in \{1, \dots, K\}$，令 φ_k^β 为具有公共速度场 u^β, 的输运方程的解，

$$\partial_t \varphi_k^\beta + u^\beta \cdot \nabla \varphi_k^\beta = 0, \tag{6}$$

具有初始条件

$$\varphi_k^\beta\big|_{t=0} = \varphi_k.$$

则涡量 ω^β 具有如下表示

$$\omega^\beta(t,x) = \sum_{k=1}^K c_k \, \pi_k^\beta(t,x), \tag{7}$$

其中系数 π_k^β 由下式给出

$$\pi_k^\beta(t,x) = \frac{e^{\beta \varphi_k^\beta(t,x)}}{\sum_{j=1}^K e^{\beta \varphi_j^\beta(t,x)}}, \qquad k = 1, \dots, K.$$

证明。定义

$$\widetilde{\omega}(t,x) := \sum_{k=1}^K c_k \, \pi_k^\beta(t,x), \qquad \pi_k^\beta(t,x) = \frac{e^{\beta \varphi_k^\beta(t,x)}}{\sum_{j=1}^K e^{\beta \varphi_j^\beta(t,x)}}.$$

我们证明 $\widetilde{\omega}$ 满足与 ω^β 相同的输运方程和相同的初始条件，对于给定的速度场 u^β。由于每个评分场 φ_k^β 满足（6），链式法则给出

$$\partial_t e^{\beta\varphi_k^\beta} + u^\beta \cdot \nabla e^{\beta\varphi_k^\beta} = \beta e^{\beta\varphi_k^\beta}\big(\partial_t\varphi_k^\beta + u^\beta\cdot\nabla\varphi_k^\beta\big) = 0.$$

对 k求和，分母

$$S(t,x) := \sum_{j=1}^{K} e^{\beta\varphi_j^\beta(t,x)}$$

满足

$$\partial_t S + u^\beta \cdot \nabla S = 0.$$

应用商法则，我们得到

$$(\partial_t + u^\beta\cdot\nabla)\pi_k^\beta = \frac{(\partial_t + u^\beta\cdot\nabla)e^{\beta\varphi_k^\beta}}{S} - \frac{e^{\beta\varphi_k^\beta}}{S^2}(\partial_t + u^\beta\cdot\nabla)S = 0, \qquad k = 1,\dots,K.$$

因此，每个权重 π_k^β 都由速度场 u^β输运。由线性性，

$$(\partial_t + u^\beta\cdot\nabla)\widetilde{\omega} = \sum_{k=1}^{K}\omega_k\,(\partial_t + u^\beta\cdot\nabla)\pi_k^\beta = 0.$$

在 $t=0$处，我们有 $\varphi_k^\beta(0,\ \cdot\ ) = \varphi_k(\cdot)$，因此

$$\pi_k^\beta(0,x) = \pi_k^\beta(x),$$

因此

$$\widetilde{\omega}(0,x) = \sum_{k=1}^{K} c_k\,\pi_k^\beta(x) = \omega_0^\beta(x).$$

因此， ω^β 和 $\widetilde{\omega}$ 满足相同的线性输运方程，且具有相同的速度场 u^β 和相同的初始数据。根据 Yudovich（对数 Lipschitz ）速度场下输运方程有界解的唯一性，我们得出

$$\omega^\beta(t,x) = \widetilde{\omega}(t,x) \quad \text{for all } t\in[0,T],\ x\in\mathbb{T}^2,$$

这就证明了（7）。 □

注 3.2 （通过输运标记实现结构嵌入）。 更一般地说，欧拉动力学可以通过输运标量标记实现结构嵌入。具体而言，多相涡量构型可以表示为一组有限个被动输运函数的非线性观测量，其相对排序编码了相几何。在这一表示中，所有界面结构都隐式地由输运量之间的竞争决定，而非通过显式的界面追踪来确定。我们在此记录这一观察，因为它为多相欧拉流提供了一种有用的几何重参数化，而且似乎本身也具有独立的研究价值。

命题 3.3 （多相拟设的闭合性）。 设 $K\geq 2$ 为一个自然数，并给定 $\{\varphi_k\}_{k=1}^K \subset C^{1,\,\alpha}(\mathbb{T}^2)$ 这些标量标记函数。假设 $F\colon\ \mathbb{R}^K\to\mathbb{R}$ 是一个光滑函数，并由下式定义初始涡量

$$\omega_0(x) = F\big(\varphi_1^{in}(x),\dots,\varphi_K^{in}(x)\big).$$

令(ω,u) 为二维欧拉方程的 *Yudovich*解

$$\partial_t\omega + u\cdot\nabla\omega = 0, \qquad u = K*\omega, \tag{8}$$

其初始数据为 ω_0。那么涡量可表示为

$$\omega(t,x) = F\big(\varphi_1(t,x),\dots,\varphi_K(t,x)\big),$$

其中每个 φ_k 都满足输运方程

$$\partial_t\varphi_k + u\cdot\nabla\varphi_k = 0, \qquad \varphi_k|_{t=0} = \varphi_k^{in}.$$

证明。令

$$\widetilde{\omega}(t,x) := F\big(\varphi_1(t,x),\dots,\varphi_K(t,x)\big),$$

其中$\{\varphi_k\}$ 由速度场 u 输运。根据链式法则，

$$\partial_t\widetilde{\omega} + u\cdot\nabla\widetilde{\omega} = \sum_{k=1}^{K}\partial_k F(\varphi_1,\dots,\varphi_K)\big(\partial_t\varphi_k + u\cdot\nabla\varphi_k\big) = 0,$$

由于每个 φ_k 都满足输运方程。因此 $\widetilde{\omega}$ 是方程（8）的解，初始数据为 $\widetilde{\omega}(0,\ x)\ = \omega_0\ (x)$。根据与对数 Lipschitz 速度场 u相关的输运方程解的唯一性，我们得出 $\omega = \widetilde{\omega}$，从而证明了这一断言。

□

4 输运标记函数的一致收敛

极限输运标记与平局几何。 设 ω 为方程（1）在尖锐多相初始数据 $\omega_0 = \sum_{k=1}^{K} c_k \mathbf{1}_{\Omega_k}$下的 Yudovich 解，令 u 和 X 分别表示相应的速度场和流映射。对每个 $k \in \{1, \ldots, K\}$，我们定义沿着 u输运的极限标记演化：

$$(\partial_t + u \cdot \nabla)\varphi_k(t,x) = 0, \qquad \varphi_k|_{t=0} = \varphi_k^{\mathrm{in}}.$$

等价地，$\varphi_k(t, x) = \varphi_k^{\mathrm{in}}\big(X(t, \cdot)^{-1}(x)\big)$。相应的平局集定义如下：

$$\Gamma_{ij}(t) := \{x \in \mathbb{T}^2 : \ \varphi_i(t,x) = \varphi_j(t,x)\}, \qquad i \neq j,$$

它们表示与初始竞争标记划分相关联的输运界面几何。

活跃界面附近的局部非退化性。我们仅在活跃两相界面上施加非退化条件。具体而言，我们假设存在常数 $\delta > 0$ 和 $m > 0$，使得对于每一对$i \neq j$,

$$|\nabla(\varphi_i^{\mathrm{in}} - \varphi_j^{\mathrm{in}})(x)| \geq m \quad \text{for all } x \in \big\{|\varphi_i^{\mathrm{in}}(x) - \varphi_j^{\mathrm{in}}(x)| \leq \delta\big\} \cap \mathcal{T}_{ij}, \tag{9}$$

其中$\mathcal{T}_{ij}$ 表示前两名竞争区域,

$$\mathcal{T}_{ij} := \Big\{x \in \mathbb{T}^2 : \ \varphi_i^{\mathrm{in}}(x) \geq \varphi_\ell^{\mathrm{in}}(x) \text{ and } \varphi_j^{\mathrm{in}}(x) \geq \varphi_\ell^{\mathrm{in}}(x) \text{ for all } \ell \neq i, j\Big\}.$$

条件（9）确保差值的零水平集 $\varphi_i^{\mathrm{in}} - \varphi_j^{\mathrm{in}}$（它们定义了活跃竞争相之间的界面）在相应平局集的管状邻域内一致非退化。这一局部要求排除了与动力学相关界面之外的退化情况，可视为经典非退化条件的自然多相推广；该经典条件是涡旋斑图轮廓动力学的基础[9]。

Pr命题 4.1 (L^1 初始数据的逼近)。 回顾正则化初始涡量 (5)

$$\omega_0^\beta(x) := \sum_{k=1}^{K} c_k \, \pi_k^\beta(x), \qquad c_k \in \mathbb{R}.$$

Let

$$\omega_0(x) := \sum_{k=1}^{K} c_k \, \mathbf{1}_{\Omega_k}(x).$$

其中 $\{\Omega_k\}_{k=1}^K$ 由(3)给出。因此，存在 $C > 0$（取决于 K、δ、m 以及$^{\alpha}\Omega_k$的几何性质），使得对所有 $\beta \geq 1$,

$$\|\omega_0^\beta - \omega_0\|_{L^1(\mathbb{T}^2)} \leq \frac{C}{\beta} \max_{1 \leq i,j \leq K} |c_i - c_j|. \tag{10}$$

证明。 固定 $x \in \mathbb{T}^2$，并令 $k^*(x) \in \{1, \ldots, K\}$ 为取得最大值的指标

$$M(x) := \max_{1 \leq j \leq K} \varphi_j^{\mathrm{in}}(x), \qquad \varphi_{k^*(x)}^{\mathrm{in}}(x) = M(x).$$

定义局部间隙

$$\Delta(x) := M(x) - \max_{j \neq k^*(x)} \varphi_j^{\mathrm{in}}(x) \ > 0.$$

对于任意 $j \neq k^*(x)$，我们有 $\varphi_j^{\mathrm{in}}(x) \leq M(x) - \Delta(x)$，因此

$$\sum_{j \neq k^*(x)} e^{\beta \varphi_j^{\mathrm{in}}(x)} \leq (K-1) e^{\beta(M(x) - \Delta(x))}.$$

因此,

$$1 - \pi_{k^*(x)}^\beta(x) = \frac{\sum_{j \neq k^*(x)} e^{\beta \varphi_j^{\mathrm{in}}(x)}}{e^{\beta M(x)} + \sum_{j \neq k^*(x)} e^{\beta \varphi_j^{\mathrm{in}}(x)}} \leq (K-1) e^{-\beta \Delta(x)}.$$

由于 $\sum_k \pi_k^\beta \equiv 1$，这意味着

$$\sum_{j \neq k^*(x)} \pi_j^\beta(x) \leq (K-1) e^{-\beta \Delta(x)}.$$

因此，逐点误差满足

$$\begin{aligned}|\omega_0^\beta(x)-\omega_0(x)| &= \left|\sum_{j\neq k^*(x)}\big(c_j-c_{k^*(x)}\big)\pi_j^\beta(x)\right| \\ &\le \max_{i\neq j}|c_i-c_j|\sum_{j\neq k^*(x)}\pi_j^\beta(x) \\ &\le C_0\,e^{-\beta\Delta(x)},\end{aligned}$$

其中 $C_0=(K-1)\max_{i\neq j}|c_i-c_j|$。对 $\mathbb{T}^2$ 积分，得到

$$\|\omega_0^\beta-\omega_0\|_{L^1(\mathbb{T}^2)} \le C_0\int_{\mathbb{T}^2} e^{-\beta\Delta(x)}\,dx.$$

现在估计右侧的积分。根据定义，$\Delta(x)\le s$ 意味着存在一对 (i,j)，使得

$$|\varphi_i^{\mathrm{in}}(x)-\varphi_j^{\mathrm{in}}(x)|\le s.$$

因此，对于任意 $s\in(0,\delta)$，

$$\{\Delta\le s\}\subset\bigcup_{1\le i<j\le K}\{\,|\varphi_i^{\mathrm{in}}-\varphi_j^{\mathrm{in}}|\le s\,\}.$$

固定一对 (i,j) 并令 $f_{ij}:=\varphi_i^{\mathrm{in}}-\varphi_j^{\mathrm{in}}$。在带状区域 $\{|f_{ij}|\le\delta\}$ 上应用余面积公式，并利用非退化条件 (9)，得到

$$|\{|f_{ij}|\le s\}|=\int_{-s}^{s}\left(\int_{\{f_{ij}=r\}}\frac{1}{|\nabla f_{ij}|}\,d\mathcal{H}^1\right)dr\le C_{ij}\,s,\qquad s\in(0,\delta),$$

其中 C_{ij} 取决于 n m,δ 以及平局曲线 $\{f_{ij}=0\}$ 的 $C^{1,\alpha}$ 几何性质。对所有 $\binom{K}{2}$ 对求和，得到

$$|\{\Delta\le s\}|\le C\,s,\qquad s\in(0,\delta),$$

对于一个仅取决于 K、δ、m 和两两界面几何的常数 C，我们现在使用层蛋糕表示：

$$\int_{\mathbb{T}^2}e^{-\beta\Delta(x)}\,dx=\int_0^\infty e^{-\beta s}\,d|\{\Delta\le s\}|.$$

将积分在 $s=\delta$ 处分开可得

$$\int_{\mathbb{T}^2}e^{-\beta\Delta(x)}\,dx\le\int_0^\delta \beta e^{-\beta s}|\{\Delta\le s\}|\,ds+e^{-\beta\delta}|\mathbb{T}^2|.$$

利用 $|\{\Delta\le s\}|\le Cs$ 在 (0，δ) 上的性质，我们得到

$$\int_0^\delta \beta e^{-\beta s}|\{\Delta\le s\}|\,ds\le C\int_0^\delta \beta s e^{-\beta s}\,ds\le\frac{C}{\beta}.$$

剩余项按指数衰减，可以将其吸收。因此，

$$\int_{\mathbb{T}^2}e^{-\beta\Delta(x)}\,dx\le\frac{C}{\beta},$$

从而

$$\|\omega_0^\beta-\omega_0\|_{L^1(\mathbb{T}^2)}\le\frac{C}{\beta}\max_{1\le i,j\le K}|c_i-c_j|.$$

证明完毕。 □

注4.2。 非退化条件（9）仅用于获得 $O(\beta^{-1})$ 近似中的定量收敛速率。对于仅要求 L^1 收敛的情形，可以将其替换为一个实质上更弱的假设，即平局集的勒贝格测度为零，也就是

$$\left|\Big\{x\in\mathbb{T}^2:\ \exists\, i\neq j\ \text{such that}\ \varphi_i^{\mathrm{in}}(x)=\varphi_j^{\mathrm{in}}(x)=\max_\ell\varphi_\ell^{\mathrm{in}}(x)\Big\}\right|=0. \tag{11}$$

在此假设下，指数权重点态地几乎处处收敛到相应的硬分配，并且该收敛

$$\|\omega_0^\beta-\omega_0\|_{L^1(\mathbb{T}^2)}\longrightarrow 0\qquad\text{as }\beta\to\infty$$

这直接由控制收敛定理得出。然而，在这种情况下，一般无法得到显式收敛速率。为简洁起见，我们省略细节。

我们在下述引理中回顾一个稳定性结果；证明可见于 [62, 85] （另见 [2, 30]）。

引理4.3 （涡量与流映射的Yudovich稳定性）。 设 $\omega^{(1)}$， $\omega^{(2)}$ 是满足以下条件的方程 （1）在 $\mathbb{T}^2$上的 *Yudovich*解，初始数据为 $\omega_0^{(1)}$， $\omega_0^{(2)} \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{T}^2)$ ，满足

$$\|\omega_0^{(1)}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} + \|\omega_0^{(2)}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \le M.$$

令 $X^{(1)}, X^{(2)}$ 表示相应的流映射。那么对每个 $T>0$ ，都存在递增函数

$$\Theta_T,\ \Phi_T : [0,\infty) \to [0,\infty), \qquad \Theta_T(r) \to 0,\ \Phi_T(r) \to 0 \quad as\ r \to 0,$$

它们仅依赖于 M 和 T，使得

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\omega^{(1)}(t) - \omega^{(2)}(t)\|_{L^1(\mathbb{T}^2)} \le \Theta_T\Big(\|\omega_0^{(1)} - \omega_0^{(2)}\|_{L^1(\mathbb{T}^2)}\Big), \tag{12}$$

and

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{x\in\mathbb{T}^2} |X^{(1)}(t,x) - X^{(2)}(t,x)| \le \Phi_T\Big(\|\omega_0^{(1)} - \omega_0^{(2)}\|_{L^1(\mathbb{T}^2)}\Big). \tag{13}$$

定理 4.4。 假设 $\{\varphi_k^{\mathrm{in}}\}_{k=1}^K \subset W^{1,\infty}(\mathbb{T}^2)$ 。令 $\{\varphi_k^\beta\}$ 和 $\{\varphi_k\}$ 为由 u^β和 u在 $[0,T]$上驱动的输运标记。则对每个 k,

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\varphi_k^\beta(t) - \varphi_k(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \to 0 \qquad as\ \beta \to \infty.$$

证明。固定 $T>0$和 $k\in\{1, \ldots\ldots, K\}$。对每个 $t\in[0,T]$ 和 $a\in\mathbb{T}^2$，输运恒等式给出

$$\varphi_k^\beta\big(t, X^\beta(t,a)\big) = \varphi_k^{\mathrm{in}}(a), \qquad \varphi_k\big(t, X(t,a)\big) = \varphi_k^{\mathrm{in}}(a).$$

因此，

$$\varphi_k^\beta\big(t, X^\beta(t,a)\big) - \varphi_k\big(t, X^\beta(t,a)\big) = \varphi_k\big(t, X(t,a)\big) - \varphi_k\big(t, X^\beta(t,a)\big). \tag{14}$$

由于 $\varphi_k^{\mathrm{in}} \in C(\mathbb{T}^2)$ 和 φ_k 由 Yudovich流输运，函数 φ_k 在 $[0,T]\times\mathbb{T}^2$上连续。因此，族 $\{\varphi_k(t,\cdot)\}_{t\in[0,T]}$ 一致等度连续：存在一个递增的模量 $\Omega_{k,T}:[0,\infty)\to[0,\infty)$，其中 $\Omega_{k,T}(r)\to 0$ 当 $r\to 0$ 时，满足

$$|\varphi_k(t,x) - \varphi_k(t,y)| \le \Omega_{k,T}(|x-y|) \qquad \text{for all } t\in[0,T],\ x,y\in\mathbb{T}^2. \tag{15}$$

将（15）应用于（14）右端，得到

$$\big|\varphi_k^\beta\big(t, X^\beta(t,a)\big) - \varphi_k\big(t, X^\beta(t,a)\big)\big| \le \Omega_{k,T}\big(|X^\beta(t,a) - X(t,a)|\big).$$

对 $a\in\mathbb{T}^2$ 取上确界，并利用 $X^\beta(t,\cdot)$ 是满射，得到

$$\|\varphi_k^\beta(t) - \varphi_k(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \le \Omega_{k,T}\big(\|X^\beta(t,\cdot) - X(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}\big), \qquad t\in[0,T].$$

取 上确界$_{t\in[0,T]}$ 并应用引理 4.3中的流稳定性估计，得出

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\varphi_k^\beta(t) - \varphi_k(t)\|_{L^\infty} \le \Omega_{k,T}\Big(\Phi_T\big(\|\omega_0^\beta - \omega_0\|_{L^1}\big)\Big).$$

将复合项 $\Omega_{k,T}\circ\Phi_T$吸收到一个新的模量中（仍记为 Φ_T），即可得到定量界，尤其是当 $\beta\to\infty$时的收敛。 □

5 界面的豪斯多夫收敛

一个自然的问题是，标记场的收敛是否蕴含相应界面的豪斯多夫收敛

$$\Gamma_{ij}^\beta(t) := \{\, x\in\mathbb{T}^2 :\ \varphi_i^\beta(t,x) = \varphi_j^\beta(t,x)\,\}, \qquad \Gamma_{ij}(t) := \{\, x\in\mathbb{T}^2 :\ \varphi_i(t,x) = \varphi_j(t,x)\,\}.$$

这样的结论颇为微妙，并且敏感地取决于平局集 $\Gamma_{ij}(t)$ 的几何形状。虽然标记函数 φ_i^β 一致收敛到 φ_i，但仅有一致收敛并不能控制相应零水平集的精细几何形状，尤其无法排除界面发生高频振荡。如果豪斯多夫

收敛 $\Gamma_{ij}^{\beta}(t)$ 在某个时刻 T_*失效，那么这必然反映了极限界面 $\Gamma_{ij}(t)$ 本身存在更深层的几何机制。特别是，当界面失去 C^1 正则性时，就可能发生这种失效；众所周知，在欧拉演化下，涡斑边界可能出现这一现象 [23]。即使初始标记函数 φ_k 取自 C^∞，极限尖锐多相欧拉速度通常也仅为对数-利普希茨连续；因此，若无额外假设，就无法指望对输运标记 C^1 进行控制 $\varphi_k(t,\cdot)$，也就无法对平局集进行定量的几何控制。定理 5.1和定理 5.2 刻画了能够保证这种收敛的一种情形。

定理 5.1。 假设标记场 $\{\varphi_k\}_{k=1}^K$ 在时间区间 $[0,T]$上一致满足两两非退化条件 (9)，也就是说，存在常数 $\delta>0$ 和 $m>0$，使得 (9) 对所有 $t\in[0,T]$均成立。此外，假设

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\nabla\varphi_k(t,\cdot)\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^2)}<\infty \qquad \textit{for each } k=1,\dots,K.$$

那么，对于每一对 $i\neq j$，相应的弥散界面 $\Gamma_{ij}^{\beta}(t)$ 在 $[0,T]$ 上随时间一致地收敛到尖锐界面 $\Gamma_{ij}(t)$，且收敛是按豪斯多夫距离度量的。更精确地说，

$$\sup_{t\in[0,T]} d_H\Big(\Gamma_{ij}^{\beta}(t),\,\Gamma_{ij}(t)\Big)\;\longrightarrow\;0 \qquad \textit{as } \beta\to\infty,$$

其中， d_H 表示 $\mathbb{R}^2$ 上的豪斯多夫距离。

证明。令

$$f_{ij}^{\beta}:=\varphi_i^{\beta}-\varphi_j^{\beta}, \qquad f_{ij}:=\varphi_i-\varphi_j.$$

它们的零水平集恰好是 $\Gamma_{ij}^{\beta}(t)$ 和 $\Gamma_{ij}(t)$。由标记函数的一致收敛可得，

$$\|f_{ij}^{\beta}(t)-f_{ij}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}\le\|\varphi_i^{\beta}(t)-\varphi_i(t)\|_{L^\infty}+\|\varphi_j^{\beta}(t)-\varphi_j(t)\|_{L^\infty}\;\longrightarrow\;0, \tag{16}$$

对 $t\in[0,T]$一致地成立，其中 $\beta\to\infty$。固定 $\varepsilon\in(0,\frac{\delta}{2})$。对于 β充分大时，(16) 蕴含

$$\|f_{ij}^{\beta}(t)-f_{ij}(t)\|_{L^\infty}<\varepsilon \qquad \text{for all } t\in[0,T_\star].$$

步骤 *1*： $\Gamma_{ij}^{\beta}(t)$ 位于 $\Gamma_{ij}(t)$附近。令 $x\in\Gamma_{ij}^{\beta}(t)$。则 $f_{ij}^{\beta}(t,x)=0$，因此

$$|f_{ij}(t,x)|=|f_{ij}(t,x)-f_{ij}^{\beta}(t,x)|<\varepsilon.$$

非退化条件 (9给出

$$|\nabla f_{ij}(t,x)|\ge m$$

只要 $|f_{ij}(t,x)|\le\varepsilon$。由于 $f_{ij}(t,\cdot)\in C^{1,\,\alpha}$且 $\nabla f_{ij}(t,\cdot)\neq0$在 $\Gamma_{ij}(t)$附近，隐函数定理表明 $\Gamma_{ij}(t)$ 局部是一条 C^1 曲线。令 y 为 x 在 $\Gamma_{ij}(t)$上的投影，从而

$$|x-y|=\operatorname{dist}\big(x,\Gamma_{ij}(t)\big), \qquad f_{ij}(t,y)=0.$$

令 $n(y):=\nabla f_{ij}(t,y)/|\nabla f_{ij}(t,y)|$为 $\Gamma_{ij}(t)$ 在 y处的单位法向量。将 $x=y+h\,n(y)$ 写成 $h=|x-y|$，沿线段 $\gamma(s):=y+s(x-y)$应用微积分基本定理，得到

$$f_{ij}(t,x)=\nabla f_{ij}(t,y)\cdot(x-y)+R(x),$$

其中

$$R(x)=\int_0^1\big(\nabla f_{ij}(t,\gamma(s))-\nabla f_{ij}(t,y)\big)\cdot(x-y)\,ds.$$

利用 ∇f_{ij} 的赫尔德连续性，

$$|R(x)|\le\frac{1}{1+\alpha}[\nabla f_{ij}(t,\cdot)]_{C^{0,\alpha}}\,|x-y|^{1+\alpha}.$$

当 $|x-y|$ 充分小时，这就得到

$$|f_{ij}(t,x)|\ge\frac{m_T}{2}\,|x-y|,$$

因此

$$\operatorname{dist}\big(x,\Gamma_{ij}(t)\big)\le C\,\frac{|f_{ij}(t,x)|}{m_T}\le C_T\,\varepsilon.$$

步骤 2： $\Gamma_{ij}(t)$ 位于 0 附近。固定 $t \in [0,T]$，并令 $y \in \Gamma_{ij}(t)$。于是 $f_{ij}(t,y) = 0$ 且 $|\nabla f_{ij}(t,y)| \geq m_{T_\star}$。令 $n(y)$ 表示 y 处的单位法向量。与上文类似，当 $|h|$ 足够小时，

$$f_{ij}(t, y \pm hn) = \pm h\,|\nabla f_{ij}(t,y)| + R_{\pm}(h),$$

with

$$|R_{\pm}(h)| \leq \frac{1}{1+\alpha}[\nabla f_{ij}(t,\cdot)]_{C^{0,\alpha}}\,|h|^{1+\alpha}.$$

选择足够小的 $h_0 > 0$，我们得到

$$f_{ij}(t, y + hn) \geq \tfrac{m_T}{2} h, \qquad f_{ij}(t, y - hn) \leq -\tfrac{m_T}{2} h.$$

Let

$$\delta_\varepsilon := \min\left\{h_0,\ \frac{3\varepsilon}{m_T}\right\}.$$

利用 f_{ij}^β 到 f_{ij}的一致收敛，当 β 足够大时，我们有

$$f_{ij}^\beta(t, y + \delta_\varepsilon n) > 0, \qquad f_{ij}^\beta(t, y - \delta_\varepsilon n) < 0.$$

由连续性，存在一点 $z \in [y - \delta_\varepsilon n,\ y + \delta_\varepsilon n]$ 使得 $f_{ij}^\beta(t,z) = 0$，即 $z \in \Gamma_{ij}^\beta(t)$，并且

$$|z - y| \leq \delta_\varepsilon \leq \frac{3\varepsilon}{m_{T_\star}}.$$

结合这两个包含关系可得

$$d_H\big(\Gamma_{ij}^\beta(t),\, \Gamma_{ij}(t)\big) \leq C\,\varepsilon \qquad \text{for all } t \in [0,T],$$

其中 C 与 β无关。由于 ε 是任意的，豪斯多夫收敛随即成立。 □

定理 5.2。设 $\varphi_k^{\text{in}} \in C^{1,\alpha}$。若存在 $T_\star > 0$ 和指标 $i \neq j$，使得

$$\sup_{t \in [0,T_\star]} d_H\Big(\Gamma_{ij}^\beta(t),\, \Gamma_{ij}(t)\Big) \not\longrightarrow 0 \qquad as\ \beta \to \infty,$$

那么必然

$$\int_0^{T_\star} \big(\|\nabla u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} + \|\nabla u(t)\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^2)}\big)\, dt = \infty.$$

证明。 由命题 7.1，对任意满足 $t,\ x)$ 的 $|(\varphi_i - \varphi_j)(t,\ x)| \leq \delta$，我们有

$$|\nabla(\varphi_i - \varphi_j)(t,x)| \ \geq\ m\,\exp\Big(-\int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}\, ds\Big). \tag{17}$$

因此，输运标记 $\{\varphi_k\}_{k=1}^K$ 在 9 上一致满足两两非退化条件（ $[0,T_\star]$，从而验证了定理 5.1 的第一个假设。此外，每个 φ_k 都满足输运方程

$$\partial_t \varphi_k + u \cdot \nabla \varphi_k = 0.$$

若 $\nabla u \in L^1(0,T_\star; C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^2))$，则标准输运估计给出 $\nabla \varphi_k \in L^\infty(0,T_\star; C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^2))$。因此，定理 5.1 的所有假设均得到满足，从而可知 $d_H(\Gamma_{ij}^\beta(t)\ \Gamma_{ij}(t))$ 在 $[0,T_\star]$ 上一致成立，矛盾。命题得证。

□

6 涡量的逐点估计

由于我们处于尤多维奇范围，因此立即可得

$$\|\omega^\beta(t) - \omega(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^2)} \longrightarrow 0 \qquad \text{for all } p \in [1,\infty).$$

然而，本节的目的并非研究平均范数意义下的收敛，而是分析保几何正则化涡量 ω^β 与尖锐多相欧拉解之间的逐点 差异

$$\omega(t) = \sum_{k=1}^K c_k\, \mathbf{1}_{\Omega_k(t)}.$$

为了利用这一几何结构，我们定义如下

定义 **在 6.1 节**（远离平局集的固定时间间隙）。固定 $t \geq 0$ 和 $\delta > 0$。定义全局平局集 et

$$\Gamma(t) := \bigcup_{1 \leq i < j \leq K} \{x \in \mathbb{T}^2 : \ \varphi_i(t,x) = \varphi_j(t,x)\}.$$

对每个 $x \in \mathbb{T}^2$，令

$$k(t,x) \in \arg\max_{1 \leq \ell \leq K} \varphi_\ell(t,x),$$

并定义获胜相位间隙

$$\Delta(t,x) := \varphi_{k(t,x)}(t,x) - \max_{j \neq k(t,x)} \varphi_j(t,x) \geq 0.$$

时刻 δ–间隙为 t

$$c_\delta(t) := \inf_{\{x:\ \mathrm{dist}(x,\Gamma(t)) \geq \delta\}} \Delta(t,x). \tag{18}$$

注 6.2. 量 $c_\delta(t)$ 衡量远离界面网络时竞争相之间的分离程度。若 $c_\delta(t) > 0$，则每个距 $\Gamma(t)$ 至少 δ 的粒子都能明确归属于某个单一相，而相位竞争仅限于狭窄的界面区域。若 $c_\delta(t)$ 发生塌缩，则即使远离界面，相分离也会恶化，并且 ω^β 到 ω 的逐点收敛甚至可能在 $\{x : \mathrm{dist}(x,\Gamma(t)) \geq \delta\}$ 上失效，定理 6.3 已对此有所提示。从这一视角看，在多相区域中，相位竞争区域构成了一个真正随时间变化的边界层，类似于纳维–斯托克斯方程 [69] 消失黏性极限下出现的普朗特边界层。

定理 6.3. 固定 $t \geq 0$ 和 $\delta > 0$。定义标记函数近似误差

$$E_\beta(t) := \max_{1 \leq k \leq K} \|\varphi_k^\beta(t,\cdot) - \varphi_k(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}.$$

于是，以下一致估计成立：

$$\sup_{dist(x,\Gamma(t)) \geq \delta} \left|\omega^\beta(t,x) - \omega(t,x)\right| \ \leq \ (K-1) \max_{1 \leq i,j \leq K} |c_i - c_j| \, e^{-\beta\,(c_\delta(t) - 2E_\beta(t))}. \tag{19}$$

其中 $\omega(t,x) = \sum_{k=1}^K c_k \, \mathbf{1}_{\Omega_k(t)}(x)$ 是多相涡量。

证明。 固定 x，使得 $\mathrm{dist}(x,\Gamma(t)) \geq \delta$，并令 $k = k(t,x)$。根据 $c_\delta(t)$ 的定义，

$$\varphi_k(t,x) - \max_{j \neq k} \varphi_j(t,x) \geq c_\delta(t).$$

因此，对任意 $j \neq k$，

$$\varphi_k^\beta(t,x) - \varphi_j^\beta(t,x) \geq \big(\varphi_k(t,x) - \varphi_j(t,x)\big) - 2E_\beta(t) \geq c_\delta(t) - 2E_\beta(t).$$

因此，

$$\frac{\pi_j^\beta(t,x)}{\pi_k^\beta(t,x)} = \exp\big(-\beta(\varphi_k^\beta(t,x) - \varphi_j^\beta(t,x))\big) \leq \exp\Big(-\beta\big(c_\delta(t) - 2E_\beta(t)\big)\Big).$$

对 $j \neq k$ 求和可得

$$\sum_{j \neq k} \pi_j^\beta(t,x) \leq (K-1) \exp\Big(-\beta\big(c_\delta(t) - 2E_\beta(t)\big)\Big).$$

由于 $\omega(t,\ x) = c_k$ 和 $\sum_j \pi_j^\beta(t,\ x) = 1$，我们得出结论

$$|\omega^\beta(t,x) - \omega(t,x)| = \left|\sum_{j \neq k} (c_j - c_k)\pi_j^\beta(t,x)\right| \leq \max_{i,j} |c_i - c_j| \sum_{j \neq k} \pi_j^\beta(t,x),$$

这就得到了所需的估计。 □

注 6.4。 逐点界（19）不再具有意义，因为 c_δ（t）$\lesssim E_\beta$（t），也就是说，当竞争标记之间的最小间隔与内在正则化尺度相当时，就会出现这种情况。这一区域对应于输运平局集的几何退化，其中标记间隙相对于门控机制的尖锐程度不断缩小，导致竞争相实际上无法区分。因此，相关界面网络可能会出现奇异特征，例如交汇角塌缩，或形成尖 cusp 状和夹断奇点；这类似于定义梯度消失处附近零点集的行为。因此，逐点收敛失效是由底层尖锐多相欧拉流的几何性质导致的，而非正则化过程本身所致。

然而，远离这一区域时，界面位置仍保持稳定，正则化产生的弥散界面会以 β中的指数速率收敛到其尖锐界面对应物，直至几何退化开始出现。特别是，对于 [9, 16, 17], 不会发生奇点形成的经典全局涡片解，这种指数收敛在整个时间范围内成立，但不包括涡斑边界。

定理 6.5。 假设两两非退化条件 (9) 在时间区间 $[0,T]$上一致成立：存在常数 $\delta_T > 0$ 和 $m_T > 0$ 使得 (9) 对所有 $t \in [0,T]$ 以及所有 $i \neq j$均成立。则 δ–间隙 $c_\delta(t)$由 (18) 定义，满足

$$\inf_{t\in[0,T]} c_\delta(t) = c_T > 0.$$

因此，存在与 β 无关的常数 C、$c > 0$，使得

$$\sup_{\substack{t\in[0,T]\\ dist(x,\Gamma(t))\geq\delta}} \left|\omega^\beta(t,x) - \omega(t,x)\right| \;\leq\; Ce^{-c\beta}.$$

证明。 令 $\delta > 0$ 为 (18) 中的空间排除半径。由于两两非退化条件 (9) 对输运标记 $[0,T]$ $\{\varphi_k(t,\cdot)\}$在 $[0,T]$ 上一致成立，因此存在常数 $\delta_T > 0$和 $m_T > 0$，使得对任意 $t \in [0,T]$ 以及任意 $i \neq j$,

$$|\nabla(\varphi_i - \varphi_j)(t,x)| \geq m_T \qquad \text{whenever} \qquad |(\varphi_i - \varphi_j)(t,x)| \leq \delta_T \;\text{ and }\; x \in \mathcal{T}_{ij}(t). \tag{20}$$

(这里，$\mathcal{T}_{ij}(t)$ 表示输运的前两名竞争区域，其定义与 $\mathcal{T}_{ij}$ 在 $t = 0$ 处的定义类似。取 $t \in [0,T]$和 x，使得 $\mathrm{dist}(x,\Gamma(t)) \geq \delta$。令 $k = k(t,x) \in \arg\max_\ell \varphi_\ell(t,x)$，并令 $j = j(t,x) \in \arg\max_{\ell\neq k} \varphi_\ell(t,x)$ 为所选的第二名。则根据前两名区域的定义，$x \in \mathcal{T}_{kj}(t)$，且

$$\Delta(t,x) = \varphi_k(t,x) - \varphi_j(t,x) =: f(t,x) \geq 0.$$

令 $\Gamma_{kj}(t) = \{f(t,\cdot) = 0\}$ 为相应的平局集。由于 $\Gamma(t)$ 是所有两两平局集的并，假设 $\mathrm{dist}(x,\Gamma(t)) \geq \delta$ 特别意味着

$$\mathrm{dist}(x,\Gamma_{kj}(t)) \geq \delta. \tag{21}$$

我们声称

$$f(t,x) \;\geq\; \min\{\delta_T,\; m_T\,\delta\}. \tag{22}$$

确实，若 $f(t,x) \geq \delta_T$，则 (22) 显然成立。反之，假设 $f(t,x) < \delta_T$。令 $y \in \Gamma_{kj}(t)$ 为距 x 最近的点（极小值点存在，因为 $\Gamma_{kj}(t)$ 在 $\mathbb{T}^2$ 中是闭集）。设 $\ell := |x-y| = \mathrm{dist}(x,\Gamma_{kj}(t))$，并考虑线段

$$\gamma(s) := y + s\frac{x-y}{|x-y|}, \qquad s \in [0,\ell].$$

由连续性，对于所有 $s \in [0,\ell]$，都有 $f(t,\gamma(s)) \in [0, f(t,x)] \subset [0,\delta_T]$。此外，由于只要 f 足够小，k 和 j 沿这条线段始终是前两名竞争者，因此对于所有 $s \in [0,\ell]$，都有 $\gamma(s) \in \mathcal{T}_{kj}(t)$。因此，(20) 在线段上适用，并给出对于 $s \in [0,\ell]$，$|\nabla f(t,\gamma(s))| \geq m_T$。令 $n := \frac{x-y}{|x-y|}$，由微积分基本定理可得

$$f(t,x) - f(t,y) = \int_0^\ell \nabla f(t,\gamma(s)) \cdot n\, ds.$$

由于 $f(t,y) = 0$且 $|\nabla f| \geq m_T$，我们得到

$$f(t,x) \;\geq\; \int_0^\ell |\nabla f(t,\gamma(s))|\, ds \;\geq\; m_T\,\ell.$$

结合 (21) 可得 $f(t,x) \geq m_T\delta$，从而证明了 (22)。由于按第二名 j 的选取有 $\Delta(t,x) = f(t,x)$，我们得出，对每一个 $t \in [0,T]$ 以及每一个满足 $\mathrm{dist}(x,\Gamma(t)) \geq \delta$ 的 x，

$$\Delta(t,x) \;\geq\; c_T, \qquad c_T := \min\{\delta_T,\; m_T\delta\} > 0.$$

对 x 取下确界可得

$$c_\delta(t) \;\geq\; c_T \qquad \text{for all } t \in [0,T], \tag{23}$$

因此 下确界$_{t\in[0,T]}\, c_\delta(t) \geq c_T > 0$。由定理 4.4,

$$\sup_{t\in[0,T]} E_\beta(t) \longrightarrow 0 \qquad \text{as } \beta \to \infty,$$

因此，我们可以将 β_0 选得足够大，使得

$$\sup_{t\in[0,T]} E_\beta(t) \le \frac{c_T}{4} \qquad \text{for all } \beta \ge \beta_0.$$

那么对于 $\beta \ge \beta_0$，（23）意味着 $c_\delta(t) - 2E_\beta(t) \ge c_T/2$ 在 $t \in [0,T]$上一致成立。应用定理 6.3 可得，对于所有 $t \in [0,T]$ 以及所有 x 满足 $\operatorname{dist}(x, \Gamma(t)) \ge \delta$,

$$|\omega^\beta(t,x) - \omega(t,x)| \le (K-1)\max_{i,j}|c_i - c_j| \exp\Big(-\beta\frac{c_T}{2}\Big).$$

证明完成。 □

7 附录

命题 7.1。设 $f_0 \in C^{1,\alpha}(\mathbb{T}^2)$，并设 $b \in L^1([0,T]; C^1(\mathbb{T}^2;\mathbb{R}^2))$。设 $f(t,x)$ 为输运方程的唯一解

$$\partial_t f + b\cdot\nabla f = 0, \qquad f|_{t=0} = f_0.$$

假设存在常数 $\delta > 0$ 和 $m > 0$ 使得

$$|\nabla f_0(x)| \ge m \quad \textit{for all } x \in \{\,|f_0(x)| \le \delta\,\}. \tag{24}$$

那么对于所有 $t \in [0,T]$,

$$|\nabla f(t,x)| \ge m \exp\Big(-\int_0^t \|\nabla b(s)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}\,ds\Big) \quad \textit{whenever } |f(t,x)| \le \delta. \tag{25}$$

特别地，对于每个 t，水平集 $\{f(t) = 0\}$ 在非空时是一条 C^1 曲线。

证明。令 $X(t;a)$ 表示与 u 相关联的流映射，即

$$\frac{d}{dt}X(t;a) = b(t,X(t;a)), \qquad X(0;a) = a.$$

由于 f 满足输运方程，我们有

$$f(t,X(t;a)) = f_0(a) \qquad \text{for all } t \in [0,T].$$

因此，

$$|f(t,x)| \le \delta \iff |f_0(a)| \le \delta, \qquad x = X(t;a).$$

对输运方程关于空间变量求导，得到

$$\partial_t\nabla f + (b\cdot\nabla)\nabla f = -(\nabla b)^T\nabla f.$$

沿轨迹，

$$\frac{d}{dt}\nabla f(t,X(t;a)) = -(\nabla b)^T(t,X(t;a))\,\nabla f(t,X(t;a)).$$

取范数可得

$$\frac{d}{dt}|\nabla f(t,X(t;a))| \ge -\|\nabla b(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}\,|\nabla f(t,X(t;a))|.$$

由格朗沃尔不等式，

$$|\nabla f(t,X(t;a))| \ge |\nabla f_0(a)| \exp\Big(-\int_0^t \|\nabla b(s)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}\,ds\Big).$$

现在令 x 满足 $|f(t,x)| \le \delta$，并记 $x = X(t;a)$。则 $|f_0(a)| \le \delta$，由假设（24），

$$|\nabla f_0(a)| \ge m.$$

代入上面的不等式可得（25）。 □

推论 7.2。 设 $\{\varphi_k^{\mathrm{in}}\}_{k=1}^K \subset C^{1,\alpha}(\mathbb{T}^2)$ 满足非退化条件 (9) 其中常数为 (δ, m)。设 φ_k^β 满足

$$(\partial_t + u^\beta \cdot \nabla)\varphi_k^\beta = 0 \qquad on\ [0,T].$$

那么存在 $m_\beta > 0$，使得对于每个 $i \neq j$ 及所有 $t \in [0,T]$,

$$|\nabla(\varphi_i^\beta - \varphi_j^\beta)(t,x)| \geq m_\beta \quad whenever \quad |(\varphi_i^\beta - \varphi_j^\beta)(t,x)| \leq \delta.$$

因此，对于每个 $t \in [0,T]$，界面

$$\Gamma_{ij}^\beta(t) := \{x \in \mathbb{T}^2 : \varphi_i^\beta(t,x) = \varphi_j^\beta(t,x)\}$$

在非空处是一条 C^1 曲线。

证明。 该结论可由将输运标量的非退化性的保持的一般结果应用于 $\varphi_i^\beta - \varphi_j^\beta$ 得出； $\varphi_i^\beta - \varphi_j^\beta$ 满足一个速度为 u^β 的线性输运方程。由于初始涡量属于 $C^{1,\,\alpha}$，相应的速度场满足 $\nabla u^\beta \in L^1([0,T];\, L^\infty(\mathbb{T}^2))$，对任意有限的 $T > 0$ 均成立，从而确保下界随时间传播。

□

致谢。 Trinh T. Nguyen 的研究得到上海交通大学数学科学学院、国家自然科学基金优秀青年科学家基金（海外）以及上海 BYL 人才计划的支持。

参考文献

[1] H. Aref, P. K. Newton, M. A. Stremler, T. Tokieda, and D. L. Vainchtein. 涡旋晶体. 应用力学进展, 39:1–79, 2003.[2] H. Bahouri, J.-Y. Chemin, and R. Danchin. 傅里叶分析与非线性偏微分方程, 第343卷，收录于数学科学基础丛书. 施普林格, 柏林, 2011.[3] C. Bardos, F. Golse, and C. D. Levermore. 动力学方程的流体动力学极限。II. 玻尔兹曼方程的收敛性证明.《纯粹与应用数学通讯》, 46(5):667–753, 1993.[4] C. Bardos, F. Golse, and C. D. Levermore. 玻尔兹曼方程的声学极限.《理性力学与分析档案》, 153(3):177–204, 2000.[5] C. Bardos, F. Golse, and D. Levermore. 动力学方程的流体动力学极限。I. 形式推导.《统计物理学杂志》, 63(1-2):323–344, 1991.[6] C. W. Bardos, T. T. Nguyen, T. T. Nguyen, and E. S. Titi. 有界区域内二维纳维–斯托克斯方程的无黏极限.《动力学与相关模型》, 15(3):317–340, 2022.[7] J. Bedrossian and V. Vicol. 不可压缩欧拉方程与纳维–斯托克斯方程的数学分析：导论, 第225卷，收录于数学研究生教材. 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 美国, 2022.[8] D. Benedetto, E. Caglioti, and C. Marchioro. 涡量高度集中的涡环运动.《应用科学中的数学方法》, 23:147–168, 2000.[9] A. L. Bertozzi and P. Constantin. 涡斑的整体正则性.《数学物理通讯》, 152(1):19–28, 1993.[10] C. Bjorland. 单涡旋作为欧拉方程极限时的涡旋波方程.《数学物理通讯》, 305(1):131–151, 2011.[11] E. Brunelli and C. Marchioro. 集中涡量烟圈的消失黏性极限.《数学流体力学杂志》, 13:421–428, 2011.[12] J. Burbea. 涡斑运动.《数学物理快报》, 6(1):1–16, 1982.[13] T. F. Buttke. 常值涡量涡斑边界上奇点的观测.《流体物理学 *A*》, 1(8):1283–1285, 1989.[14] D. Cao, J. Wan, and W. Zhan. 三维欧拉流中涡环的去奇异化.《微分方程杂志》, 270:1258–1297, 2021.

[15] S. Ceci and C. Seis. 二维黏性流中涡旋的动力学. 《数学年刊》, 388(2):1937–1967, 2024.[16] J.-Y. Chemin. 二维不可压缩流体中几何结构的保持. 《高等师范学校科学年刊》 (4), 26(4):517–542, 1993.[17] J.-Y. Chemin. 不可压缩理想流体. 《Astérisque》, (230):177, 1995.[18] J.-Y. Chemin. 关于二维不可压缩流体无黏极限的一点注记. 《偏微分方程通讯》, 21(11-12):1771–1779, 1996.[19] S. Childress. 理论流体力学导论, 第19卷, 收录于库朗数学讲义. 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2009.[20] P. Constantin, T. D. Drivas, and T. M. Elgindi. 尤多维奇类涡量分布的无黏极限. 《纯粹与应用数学通讯》, 75(1):60–82, 2022.[21] P. Constantin and C. Foias. 纳维–斯托克斯方程. 芝加哥大学出版社, 芝加哥, 1988.[22] P. Constantin, I. Kukavica, and V. Vicol. 关于纳维–斯托克斯方程的无黏极限. Proc. Amer. Math. Soc., 143(7):3075–3090, 2015.[23] P. Constantin and J. Wu. 涡斑的无黏极限. 《非线性》, 8(5):735–742, 1995.[24] P. Constantin and J. Wu. 非光滑涡量的无黏极限. 《印第安纳大学数学杂志》, 45(1):67–81, 1996.[25] P. C. Di Leoni, A. Alexakis, L. Biferale, and M. Buzzicotti. 旋转湍流中的相变与通量环亚稳态. 《物理评论：流体》, 5(10):104603, 2020.[26] T. D. Drivas and T. M. Elgindi. 不可压缩欧拉方程中的奇点形成：有限时间与无限时间情形. 《EMS数学科学综述》, 10:1–100, 2023.[27] T. D. Drivas, T. M. Elgindi, and I.-J. Jeong. 哈密顿流与理想流体中的扭转. 《数学新进展》, 238(1):331–370, 2024.[28] T. D. Drivas, T. M. Elgindi, and J. La. 奥斯古德向量场以及二维无黏不可压缩流体中的奇点传播. 《数学年刊》, 387:1691–1718, 2023.[29] T. D. Drivas, S. Iyer, and T. T. Nguyen. 边界层的费曼–拉格斯特伦判据. 《理性力学与分析档案》, 248:55, 2024.[30] T. M. Elgindi. 奥斯古德引理及略超临界二维不可压缩流动欧拉方程的一些结果. 《理性力学与分析档案》, 211(3):965–990, 2014.[31] T. M. Elgindi and Y. Huang. Bahouri–Chemin 涡斑附近二维不可压缩欧拉方程的正则与奇异稳态. 《理性力学与分析档案》, 249(2), 2025.[32] T. M. Elgindi and I.-J. Jeong. 《奇异涡斑 I：适定性问题》, 第283卷, 收录于《美国数学会回忆录》. 美国数学会, 2023.[33] T. M. Elgindi and M. J. Jo. 涡斑中的尖 cusp 形成, 2025. arXiv:2504.02705.[34] M. Fei, C. Gao, Z. Lin, and T. Tao. 圆盘上的普朗特–巴切勒流. 《数学物理通讯》, 397(3):1103–1161, 2023.[35] K. S. Fine, A. C. Cass, W. G. Flynn, and C. F. Driscoll. 二维湍流向涡旋晶体的弛豫. 《物理评论快报》, 75:3277–3280, 1995年10月.[36] T. Gallay. 弱黏性平面流中涡旋的相互作用. 《理性力学与分析档案》, 200(2):445–490, 2011.[37] T. Gallay and V. Sverak. 轴对称涡环的消失黏性极限. 《数学新进展》, 237(1):275–348, 2024.[38] D. Gérard-Varet, Y. Maekawa, and N. Masmoudi. 二维纳维–斯托克斯流普朗特展开的盖弗雷稳定性. 《杜克数学杂志》, 167(13):2531–2631, 2018.[39] F. Golse and C. D. Levermore. 玻尔兹曼方程的斯托克斯–傅里叶极限与声学极限：收敛性证明. 《纯粹与应用数学通讯》, 55(3):336–393, 2002.

[40] E. Grenier. 欧拉方程与普朗特方程的非线性不稳定性. 《纯粹与应用数学通讯》, 53(9):1067– 1091, 2000.
[41] E. Grenier, Y. Guo, and T. T. Nguyen. 特征边界层流的谱不稳定性. 《杜克数学杂志》, 165(16):3085–3146, 2016.[42] E. Grenier, Y. Guo, and T. T. Nguyen. 二维通道中一般对称剪切流的谱不稳定性. 数学进展, 292:52–110, 2016.[43] E. Grenier and T. T. Nguyen. L^∞ 普朗特层的不稳定性. 偏微分方程年刊, 5(2):论文编号18, 36, 2019.[44] N. Günther. 运动容器中流体的运动. 苏联科学院院刊, 物理与数学辑, 20:1323–1348, 1927.[45] Y. Guo. 超越纳维–斯托克斯近似的玻尔兹曼扩散极限. 纯粹与应用数学通讯, 59(5):626–687, 2006.[46] Y. Guo and T. T. Nguyen. 运动平板上定常纳维–斯托克斯流的普朗特边界层展开. 偏微分方程年刊, 3(1):文章10, 58, 2017.[47] D. Hilbert. 数学问题. 今日数学, 36(1):14–17, 2000. 1900年于巴黎举行的国际数学家大会上的演讲。由 Mary Winston Newson 从德文翻译。[48] T. Hmidi, J. Mateu, and J. Verdera. 旋转涡斑的边界正则性 . 《理性力学与分析档案》, 209(1):171–208, 2013.[49] Y. Huang and C. Zhang. 一类奇异稳态收敛至 Bahouri–Chemin 涡斑的最优霍尔德收敛. 变分学与偏微分方程, 64:191, 2025.[50] A. K. M. F. Hussain. 相干结构与湍流. 流体力学杂志, 173:303–356, 1986.[51] J. Jang and C. Kim. 解析初值下具有漫反射边界条件的玻尔兹曼方程的不可压缩欧拉极限. 偏微分方程年刊, 7(2):论文编号22, 103, 2021.[52] C. Kim and T. T. Nguyen. 相空间中亥姆霍兹–基尔霍夫点涡的渐近行为. 数学物理通讯, 406(4):论文编号90, 49, 2025.[53] C. Kim and T. T. Nguyen. 玻尔兹曼理论中的普朗特边界层有效性, 2025.[54] S.-C. Kim and S. Childress. 高雷诺数下二维定常流中多涡旋的涡量选择. SIAM 应用数学杂志, 61(5):1605–1617, 2001.[55] A. Kiselev and X. Luo. C^2 涡斑的适定性问题. 《理性力学与分析档案》, 247(3):57, 2023.[56] I. Kukavica, T. T. Nguyen, V. Vicol, and F. Wang. 关于纳维–斯托克斯方程的欧拉+普朗特展开. 数学与流体力学杂志, 24(2):论文编号47, 46, 2022.[57] I. Kukavica, V. Vicol, and F. Wang. 初值仅在边界附近解析时纳维–斯托克斯方程的无黏极限. 《理性力学与分析档案》, 237(2):779–827, 2020.[58] P. A. Lagerstrom and R. G. Casten. 奇异摄动技巧的基本概念. SIAM 综述, 14(1):63–120, 1972.[59] H. Lamb. 流体动力学. 剑桥大学出版社, 剑桥, 第6版, 1932.[60] L. Lichtenstein. 关于流体动力学中的若干存在性问题. 数学杂志, 23:89–154, 1925.[61] Y. Maekawa. 半平面内黏性不可压缩流的涡量方程无黏极限问题. 《纯粹与应用数学通讯》, 67(7):1045–1128, 2014.[62] A. J. Majda and A. L. Bertozzi. 涡量与不可压缩流. 剑桥应用数学教材. 剑桥大学出版社, 2002.[63] C. Marchioro. 奇异初始数据下二维纳维–斯托克斯方程的消失黏性极限. 《应用科学中的数学方法》, 12:463–470, 1990.[64] C. Marchioro and M. Pulvirenti. 欧拉流中的涡旋与局部化. 《数学物理通讯》, 154(1):49–61, 1993.

[65] C. Marchioro and M. Pulvirenti. 不可压缩无粘流体的数学理论，应用数学科学丛书第96卷. 施普林格-弗拉格，纽约，1994.[66] N. Masmoudi. 关于纳维–斯托克斯方程组无黏极限的几点说明. 数学物理通讯, 270(3):777–788, 2007.[67] A. Mazzucato, D. Niu, and X. Wang. 与一类三维非线性平面平行槽道流相关的边界层. 《印第安纳大学数学杂志》, 60(4):1113–1136, 2011.[68] T. T. Nguyen. 解析初值下具有临界 Navier滑移边界条件的纳维–斯托克斯方程无黏极限. SIAM 数学分析杂志, 52(5):4616–4637, 2020.[69] T. T. Nguyen and T. T. Nguyen. 半空间上解析初值的纳维–斯托克斯方程无黏极限. 《理性力学与分析档案》, 230(3):1103–1129, 2018.[70] T. T. Nguyen and T. T. Nguyen. $\mathbb{R}^2$涡波数据下纳维–斯托克斯方程的无黏极限. SIAM 数学分析杂志, 51(3):2575–2598, 2019.[71] T. T. Nguyen and T. T. Nguyen. 外圆域中边界附近局部解析初值下纳维–斯托克斯方程的无黏极限. 数学物理通讯, 405(2):论文编号36, 40, 2024.[72] O. A. Oleinik and V. N. Samokhin. 边界层理论数学模型，应用数学与数学计算丛书第15卷. CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，1999.[73] J. Park. 均匀旋转涡斑的定量估计. 数学进展, 411:108779, 2022.[74] L. Prandtl. 极小摩擦下的液体运动. 收录于国际数学家大会，海德堡，页484–491，1904年。另见《论文集》第二卷，1961年，第575–584页。[75] P. G. Saffman. 涡动力学. 剑桥力学与应用数学专著. 剑桥大学出版社，剑桥，1992.[76] L. Saint-Raymond. 玻尔兹曼方程的流体动力学极限，数学讲义丛书第1971卷. 施普林格-弗拉格，柏林，2009.[77] M. Sammartino and R. E. Caflisch. 半空间上纳维–斯托克斯方程解析解的零粘性极限. II. 纳维–斯托克斯解的构造. 数学物理通讯, 192(2):463–491, 1998.[78] D. A. Schecter and D. H. E. Dubin. 背景涡量梯度驱动的涡旋运动. 《物理评论快报》, 83(11):2191–2194, 1999.[79] L. Siegelman, W. R. Young, and A. P. Ingersoll. 极涡晶体：形成与结构. 美国国家科学院院刊, 119(17):e2120486119, 2022.[80] J. Speck and R. M. Strain. 从玻尔兹曼方程到相对论流体的希尔伯特展开. 数学物理通讯, 304(1):229–280, 2011.[81] F. Sueur. 涡斑的粘性剖面. 《朱西厄数学研究所杂志》, 14(1):1–68, 2015.[82] C. Wang, Y. Wang, and Z. Zhang. 解析框架下纳维–斯托克斯方程的零粘性极限. 《理性力学与分析档案》, 224(2):555–595, 2017.[83] W. W. Wood. 流线闭合的边界层. 流体力学杂志, 2:77–87, 1957.[84] S.-H. Yu. 具有激波的玻尔兹曼方程流体动力学极限. 《纯粹与应用数学通讯》, 58(3):409–443, 2005.[85] V. I. Yudovich. 理想不可压缩液体的非定常流动. 计算数学与数学物理杂志, 3:1032–1066, 1963. 英译本：苏联计算数学与数学物理, 3 (1963), 1407–1456.[86] V. I. Yudovich. 理想不可压缩流体动力学中基本非定常问题的唯一性定理. 数学研究快报, 2(1):27–38, 1995.[87] N. J. Zabusky, M. H. Hughes, and K. V. Roberts. 二维欧拉方程的轮廓动力学 . 《计算物理学杂志》, 30:96–106, 1979.