arXiv:2602.01571v1 [math.NT] 2 Feb 2026

模形式对称幂的高阶矩

JIONG YANG 和 ZHISHAN YANG

Abstract. 设 f 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上权为 k 的尖点特征形式，并令 $\lambda_{\mathrm{Sym}^d f}(n)$ 为其 d 次对称幂提升的归一化傅里叶系数。本文为所有正整数 d 和 l 建立了矩 $\sum_{n\le x}\lambda^l_{\mathrm{Sym}^d f}(n)$ 的渐近公式。我们还证明了对任意正定二元二次型 Q 的取值所对应的和的渐近公式。我们的结果推广并改进了先前的工作，后者仅限于 d 或 l 的较小取值。证明依赖于 ℓ-进伽罗瓦表示的分解，以及相关 L 函数的解析性质。

Contents

1. 引言 1
1.1. 主要定理 3
1.2. 证明概述 4
2. L-模形式韦伊模相关的函数 5
2.1. L-相容系统的函数 ℓ-进表示 5
2.2. 舒尔函子与韦伊模 6
2.3. 与模形式相关的韦伊模 7
2.4. 科斯塔数的计算 8
2.5. 二元二次型 10
3. 利用佩龙公式进行估计 11
3.1. 狄利克雷级数 11
3.2. L-函数的次凸性结果 11
3.3. 主要定理的证明 12
参考文献 14

1. Introduction

设 f 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上权为 k 的尖点特征形式，并设

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_f(n)n^{\frac{k-1}{2}}q^n$$

为其 q 展开。估计 $\lambda_f(n)$ 及其平均行为是数论中的基本问题。估计和式 $\sum_{n\le x}\lambda_f(n)$，由来已久，相关研究者包括

第一作者得到山东省自然科学基金（NO.ZR2022QA097）的资助。

来自 [12], [23], [26], [27], 等人。高次幂矩之和 $\sum_{n\le x}\lambda_f^l(n)$也引起了广泛关注。如果 $l=2$, 兰金 [22] 和塞尔伯格 [24] 已经研究过这个问题, 而黄近期的工作 [8] 给出了改进的估计

$$\sum_{n\le x}\lambda_f^2(n)=Cx+O\left(x^{\frac{3}{5}-\frac{1}{560}+\epsilon}\right).$$

对于 $l\ge 3$, 需要模形式的对称幂 L-函数。Kim 和 Kim 与 Shahidi [9], [10], [11] 证明了 $\mathrm{Sym}^l f$ 对于 $l\le 4$是自守的。利用这些结果, $l\le 8$ 的估计在 [13], [16] 和 [17]中得出。后来, 翟 [33] 考察了对两平方和的求和

$$\sum_{n_1^2+n_2^2\le x}\lambda_f^l(n_1^2+n_2^2),$$

并给出了 $l\le 8$的估计。

最近, Newton 与 Thorne [19], [20]证明了对于所有 $l\ge 1$, $\mathrm{Sym}^l f$的自守性和尖点性。基于这项著名成果, 徐 [28] 推导出了 $\sum\lambda_f^l(n)$ 的一般公式, 并且 $\sum_{n_1^2+n_2^2\le x}\lambda_f^l(n_1^2+n_2^2)$ 对每个 $l\ge 1$都成立。刘 [15] 后来将这一结果改进为

$$\sum_{n\le x}\lambda_f^l(n)=xQ_l(\log x)+O\left(x^{\theta_l+\epsilon}\right), \tag{1.1}$$

$$\sum_{n_1^2+n_2^2\le x}\lambda_f^l(n_1^2+n_2^2)=xQ_l'(\log x)+O\left(x^{\theta_l'+\epsilon}\right), \tag{1.2}$$

其中, Q_l 和 Q_l' 是次数为 $\binom{l}{m}-\binom{l}{m-1}-1$ 的多项式（若 $l=2m$ 成立）, 而当 l 为奇数时等于 0。这里, θ_l, θ_l' 是小于 1 的显式常数。

另一个研究方向关注 f的对称幂的傅里叶系数的平均行为。沿此方向已得到若干结果, 但它们仅针对某些特殊情形。例如, 在 [3]和 [4], 中, Fomenko证明了关于

$$\sum_{n\le x}\lambda_{\mathrm{Sym}^2 f}(n)\ \text{and}\ \sum_{n\le x}\lambda_{\mathrm{Sym}^2 f}^2(n).$$

在 [7] 和 [18],中的求和

$$\sum_{n\le x}\lambda_{\mathrm{Sym}^2 f}^l(n)\ \text{and}\ \sum_{n\le x}\lambda_{\mathrm{Sym}^d f}^2(n)$$

对带有 $d\ge 2$ 和 $l\le 8$ 的情形进行了研究。随后, 在 [14], 中, 刘得到了误差项更优的如下结果:

$$\sum_{n\le x}\lambda_{\mathrm{Sym}^2 f}^l(n)=xP_l(\log x)+O\left(x^{\theta_l+\epsilon}\right) \tag{1.3}$$

对于 $2\le l\le 8$, 以及

$$\sum_{n\le x}\lambda_{\mathrm{Sym}^d f}^2(n)=c_d x+O\left(x^{\tilde{\theta}_d+\epsilon}\right), \tag{1.4}$$

对任意 $d\ge 2$。此处 P_l 是次数已被显式计算的多项式, c_d 是常数~, 且 θ_l, θ_d 是小于1的正常数。

将这些结果推广到任意整数 $d \geq 1$和 $l \geq 1$会带来重大挑战，因为相应的狄利克雷级数会变得愈发复杂。本文通过研究其底层伽罗瓦表示，并应用有关其分解的组合结果来处理这一问题。我们的工作对平均公式（1.1）、（1.2）、（1.3）、（1.4）在以下方面作了推广。

- 我们得到了误差项有所改进的渐近公式。
- 我们建立了一个普适的渐近公式，适用于任意 $\sum_{n\leq x} \lambda^l{}_{\mathrm{Sym}^d f}(n)$，对任意 $d \geq 1$以及 $l \geq 1$均成立，它推广了（1.3）和（1.4）。
- 我们证明了一个关于二元二次型取值之和的平均公式，即Q $\sum_{n_1\, n_2(,\ )\leq x} \lambda^l{}_{\mathrm{Sym}^d f}(Q(n_1, n_2))$，适用于任意正定二元二次型 Q 以及任意 d，$l \geq 1$。

1.1. 主要定理。 现在我们陈述关于一般 d和 l的主要结果。

定理 1.1。 设 f 是定义在$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$上的权为 k 的尖点模形式。对于任意整数$l \geq 2$、$d \geq 1$ 和 $dl > 4$, 有

$$\sum_{n\leq x} \lambda^l_{\mathrm{Sym}^d f}(n) = xP_{d,l}(\log x) + O\left(x^{\theta_{d,l}+\epsilon}\right).$$

这里，$P_{d,\,l}$ 是一个次数为 $K_{0的d,\,l} - 1$多项式，其中 $K_{i,\,d,\,l}$ 表示第2.3 节和第2.4节中定义的科斯塔数。指数$\theta_{d,\,l}$ 由下式给出

$$\theta_{d,l} = 1 - 1/\left((d+1)^l/2 - 4K_{0,d,l}/21 - K_{1,d,l}/3 - 5K_{2,d,l}/14\right).$$

在推论 2.6 中，我们给出了科斯塔数$K_{i,d,l}$的显式公式，该公式决定了主项的次数以及误差项中的指数。公式为

$$K_{i,d,l} = \begin{cases} 0 & \text{if } 2 \nmid dl - i \\ \sum_{j=0}^{\lfloor (dl-i)/(2d+2)\rfloor} (-1)^j \binom{l}{j} \binom{(dl-i)/2 - j(d+1) + l - 2}{l-2} & \text{otherwise} \end{cases}.$$

注意，若 dl 为奇数，则 $K_{0,d,l} = 0$ 和 $P_{d,l}$ 均为 0。

一般情形下的估计是新的。并且，我们对误差项的估计优于 [14] 在较小的 d 和 l时的工作。我们在下表中列出 $d = 2$、$3 \leq l \leq 8$ 和$l = 2$，$3 \leq d \leq 8$ 对应的情形。

$d = 2, l =$	[14]中的指数	$\theta_{d,l}$
3	0.9193...	0.918287938
4	0.9737...	0.973534972
5	0.99136...	0.991304348
6	0.99714...	0.99713291
7	0.9990558...	0.999051362
8	0.9996868...	0.999685565

$l=2, d=$	[14] 中的指数	$\theta_{d,l}$
3	0.866...	0.865814696
4	0.9166...	0.916334661
5	0.9428...	0.942701228
6	0.9583...	0.958250497
7	0.96824 ...	0.968205905
8	0.97499...	0.974970203

我们还得到了以下关于二元二次型求和的定理。

定理 1.2. 设 f 是权为 k 的尖点模形式，定义在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$上。对于任意满足 $dl > 4$ 的整数$l \geq 2$、$d \geq 1$，以及任意二元二次型 $Q(n_1, n_2)$，有

$$\sum_{Q(n_1,n_2)\leq x} \lambda^l_{\mathrm{Sym}^d f}(Q(n_1,n_2)) = xP_{d,l,Q}(\log x) + O\left(x^{\theta_{d,l,Q}+\epsilon}\right).$$

这里$P_{d,l,Q}$ 是次数为 $K_{0,d,l}-1$ 的多项式。如果 Q 的类数不为 1，则

$$\theta_{d,l,Q} = 1 - \frac{3}{3(d+1)^l - K_{0,d,l}};$$

如果类数为 1，则

$$\theta_{d,l,Q} = 1 - 1/\left((d+1)^l - 8K_{0,d,l}/21 - 2K_{1,d,l}/3 - 5K_{2,d,l}/7\right).$$

1.2. **证明概述**。我们的定理证明遵循一个框架，可以将其视为 ℓ-进方法的类比；这些方法由 [31] , [32] 和 [30]针对阿廷表示发展而来。

出发点是佩龙公式，它将对和式 $\sum$的估计 $\sum_{n\leq x} \lambda^l_{\mathrm{Sym}^d f}(n)$ 转化为计算相关狄利克雷级数的围道积分 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^l_{\mathrm{Sym}^d f}(n)\, n^s$.

这个狄利克雷级数通过其Euler乘积与 L-函数 $L\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l}, s\right)$ 密切相关，它对应于 ℓ-进表示 $\mathrm{Sym}^d(\rho_f)^{\otimes l}$ （见命题 3.1）。

一个关键见解是，将这个高维张量表示分解为不可约构成成分的直和，并证明这些成分具有$\mathrm{Sym}^i\rho_f$的形式。因此， L-函数可分解为对称幂 L-函数的乘积:

$$L\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l}, s\right) = \prod_{i=0}^{ld} L\left(\mathrm{Sym}^i f, s\right)^{K_{i,d,l}}$$

这些对称幂 L-函数的自守性与整性由 Newton 和 Thorne 建立 [19], [20], ，在此至关重要。最终的渐近公式则通过将这一因式分解与相关 L-函数已知的次凸性界结合推导而得。

对于二元二次型 Q 取值的求和，方法类似，但还需要额外的要素。生成狄利克雷级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^l_{\mathrm{Sym}^d f}(n) r(n,Q)\, n^s$ ，其中$r(n, Q)$ 统计 n 被 Q 表示的次数。令 $F = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ 为相应的虚二次域。当类数 $h(D) = 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n,Q)}{n^s}$ 本质上就是

戴德金ζ函数 $\zeta_F(s)$。一般而言，它可以表示为有限个海克 L-函数之和，这些函数与 F 的类群特征相关。每个这样的 L-函数都对应一个权为 1 的模形式 f_χ 。因此，分析归结为研究形式为 $L\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l}\otimes\rho_{f_\chi},\ s\right)$ 的兰金–塞尔伯格型 L-函数；这些函数同样可以分解为若干较简单的 L-函数的乘积。该定理通过对这些分量应用次凸性估计得以证明。

注记1.3。本文已投稿并进入评审阶段时，我们注意到 Venkatasubbareddy 最近投稿了一篇论文 [25] ，研究了类似的问题，并得到了与我们的定理1.1类似的结果。但我们的工作与 [25] 在以下方面有所不同。首先，我们从表示的角度处理狄利克雷级数，这使我们能够将工作与组合学联系起来。类似的思路也见于我们的工作 [32] 和 [30]。这些方法可用于处理更复杂的情形，并在后续工作中发挥关键作用 [29]。其次，我们还考虑了关于二元二次型的平均结果，而 [25]并未考虑这一点。最后，两项工作中对误差项的估计方法不同。

2. L-functions associated to Weyl modules of modular forms

2.1. L相容系统的 ℓ进表示的 L 函数。固定一个整数$n\geq 1$。对于每个素数 ℓ，令 $\rho_\ell: G_{\mathbb{Q}}\to \mathrm{GL}(V_\ell)\simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_\ell)$ 为一个 ℓ 进伽罗瓦表示。若 $\rho=\{\rho_\ell\}$ 是一个 $\ell-$ 进表示的相容系统，则可与之关联一个 L 函数 $L(\rho,\ s)$。

设 ρ_1，ρ_2 为两个相容系统。则

$$L(\rho_1\oplus\rho_2,s)=L(\rho_1,s)L(\rho_2,s). \tag{2.1}$$

ℓ-进伽罗瓦表示最重要的例子之一来自模形式。设 f 为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上权为 k 的尖点模形式。根据德利涅的工作，我们可以将一个二维的 $\ell-$进表示相容系统 $\rho_f=\{\rho_{f,\ell}\}$与 f关联起来。设 $f(z)=\sum^{\infty}\lambda(n)n^{\frac{k-1}{2}}q^n$为 f的归一化 q-展开。对于任意素数$n=1p$，令 $\alpha_f(p)$ $\beta_f(p)$ 表示 f在 p处的归一化海克特征值，满足

$$\alpha_f(p)+\beta_f(p)=\lambda_f(p),\ \alpha_f(p)\beta_f(p)=1.$$

定义 f 的自守 L-函数为

$$L(f,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_f(n)}{n^s}=\prod_p(1-\lambda_f(p)p^{-s}+p^{-2s})^{-1}.$$

德利涅的工作表明， $\alpha_f(p)$ 和 $\beta_f(p)$ 也是 $V_\ell^{I_\ell}$上 $\rho_\ell(\mathrm{Frob}_p)$ 的特征值。因此，两类 L-函数相同:

$$L(f,s)=L(\rho_f,s).$$

我们也可以考虑模形式的对称幂。对任意 $d\geq 1$，令$\mathrm{Sym}^d\rho_f$表示 ρ_f的对称幂表示。$\mathrm{Sym}^d\rho_f$ 的模性在 [19] 和 [20], 中得到，并且我们有

$$L\left(\mathrm{Sym}^d f,s\right)=L\left(\mathrm{Sym}^d\rho_f,s\right),$$

其中$\mathrm{Sym}^d f$是 f到GL_{d+1}的对称幂提升。因此， L函数 $L(\mathrm{Sym}^d \rho_f, s)$在整个复平面上是整函数。

对于 $i=1$，2，设 $\rho_i=\{\rho_{i,\ell}\}$ 为 ℓ–进表示的相容系统。考虑狄利克雷级数

$$D\left(\rho_1 \otimes \rho_2, s\right):=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\rho_1}(n) \lambda_{\rho_2}(n)}{n^s}, \quad D\left(\mathrm{Sym}^d \rho_i, s\right):=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\rho_i}\left(n^d\right)}{n^s}.$$

定理 2.1. 我们有以下关系

$$L\left(\rho_1 \otimes \rho_2, s\right)=D\left(\rho_1 \otimes \rho_2, s\right) U_1(s), \tag{2.2}$$

$$L\left(\mathrm{Sym}^d \rho_i, s\right)=D\left(\mathrm{Sym}^d \rho_i, s\right) U_2(s), \tag{2.3}$$

其中 U_1 和 U_2 是 ***Euler***乘积，在 $\mathrm{Re}(s)>1/2$ 时绝对收敛，并且在区域 $\mathrm{Re}(s)>1/2+\epsilon$ 内对任意 $\epsilon>0$一致收敛。

证明. 证明与 [31]和 [32]中给出的阿廷表示情形的证明思路相同。 □

2.2. **舒尔函子与韦伊模**。 本节介绍本文中使用的韦伊模的性质。更多细节请参阅 [5]。设 d 为正整数，且设 $\mathfrak{S}_d$为对称群。设 $d=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_t$满足 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_t \geq 0$，是 d的一个分拆。通常将这样的分拆记作 $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t)$。若两个分拆仅相差末尾的零，我们就将它们视为相同。

$\lambda=(\lambda_1, \cdots, \lambda_t)$ 是 d 的一个分拆。我们为其关联一个杨对称化子 $c_\lambda \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_d$ toλ 。设 V 是一个维数为 m 的 ℓ-进表示。该 c_λ 作用于 $V^{\otimes d}$，其像也是一个 ℓ-进表示，记为 $\mathbb{S}_\lambda V$。这些表示称为 V 的韦伊模。例如，若 $\lambda=(d)$，则 $\mathbb{S}_\lambda V=\mathrm{Sym}^d V$ 是 d 次对称幂表示；若 $\lambda=(1, 1, \cdots, 1)$，则 $\mathbb{S}_\lambda V=\Lambda^d V$ 是 V 的楔积。

我们有以下结果。

命题2.2。 设 V 是一个维数为 m的 ℓ-进表示。

(1) 若对于某个 $i>m$ 有 $\lambda_i \neq 0$，则 $\mathbb{S}_\lambda V=0$。(2) 维数 $\mathbb{S}_\lambda V=\prod_{1 \leq i<j \leq m} \binom{\lambda_i-\lambda_j+j-i}{j-i}$。特别地，维数 $\mathrm{Sym}^d V=\binom{m+d-1}{d}$。

一个基本问题是描述 Weyl 模的张量积的分解。设 λ 是 d_1的一个分拆，且 μ 是 d_2的一个分拆，则

$$\mathbb{S}_\lambda V \otimes \mathbb{S}_\mu V \cong \bigoplus_\nu N_{\lambda \mu \nu} \mathbb{S}_\nu V. \tag{2.4}$$

这里， ν 遍历 d_1+d_2的所有分拆， $N_{\lambda\mu\nu}$ 是由利特尔伍德-理查森规则确定的非负整数。该规则指出， $N_{\lambda\mu\nu}$ 是将 λ 的杨图通过严格的 μ-扩展扩展为 ν 的杨图的方法数。

特别地，张量幂 $V^{\otimes d}$ 分解为

$$V^{\otimes d} \cong \bigoplus_\lambda \mathbb{S}_\lambda V^{\oplus m_\lambda}. \tag{2.5}$$

这里，λ 遍历 d 的所有分拆，而 m_λ 是通过 c_λ 在 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d$ 上的右乘作用于 $\mathfrak{S}_d$ 所得到的不可约表示的维数。这个 m_λ 可通过以下方式计算

$$m_\lambda = \frac{d!}{l_1! \cdots l_k!} \prod_{i<j} (l_i - l_j), \tag{2.6}$$

wh这里 k 是 λ 和 $l_i = \lambda_i + k$ –的杨图的行数 i.

另一个特殊情形是对称幂表示的张量积。假设$i \geq j \geq 0$，则

$$\mathrm{Sym}^i V \otimes \mathrm{Sym}^j V \cong \bigoplus_{t=0}^{j} \mathbb{S}_{(i+t,j-t)} V. \tag{2.7}$$

一般而言，我们有如下同构

$$\mathrm{Sym}^{\lambda_1} V \otimes \mathrm{Sym}^{\lambda_2} V \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{\lambda_k} V \cong \bigoplus_{\mu} (\mathbb{S}_\mu V)^{\oplus K_{\mu,\lambda}}. \tag{2.8}$$

这里 μ 遍历 $d = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$的所有分拆，而$K_{\mu,\ \lambda}$是科斯塔数。科斯塔数有几种定义方式。例如，它是形状为 μ 、类型为 λ的半标准杨表的数量。这意味着将 μ 的杨图中的方格填入 λ_1 个 1、 λ_2 个 2，……， λ_k 个 k的所有方法数，且每行中的元素弱递增、每列中的元素严格递增。一般而言，对于任意的 μ和 λ，没有$K_{\mu,\ \lambda}$ 的显式公式。

2.3. 与模形式相关的韦伊模。现在我们专门讨论模形式的情形。设 f 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上权为 k 的尖点特征形式，并设 ρ_f 是与之相关的 ℓ-进伽罗瓦表示。

命题 2.3。

(1) 若 λ 的杨图有两行以上，则 $\mathbb{S}_\lambda \rho_f = 0$。此外 $\dim \mathrm{Sym}^d \rho_f = d+1$。*(2)* 若 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ 是 d 的一个分拆，则 $\mathbb{S}_\lambda \rho_f \cong \mathrm{Sym}^{\lambda_1 - \lambda_2} \rho_f$。*(3)* $\rho_f^{\otimes l} \cong \bigoplus_{i=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} \mathrm{Sym}^{l-2i} \rho_f^{\oplus c_{l,i}}$。这里 $c_{l,i} = \binom{l}{i} - \binom{l}{i-1}$。*(4)* $\mathrm{Sym}^i \rho_f \otimes \mathrm{Sym}^j \rho_f \cong \mathrm{Sym}^{|i-j|} \rho_f \oplus \mathrm{Sym}^{|i-j|+2} \rho_f \oplus \cdots \oplus \mathrm{Sym}^{i+j} \rho_f$。*(5)* $(\mathrm{Sym}^d \rho_f)^{\otimes l} \cong \bigoplus_{i=0}^{dl} K_{i,d,l} \mathrm{Sym}^i \rho_f$，其中若 i 和 dl 具有不同的奇偶性，则 $K_{i,d,l} = 0$；否则 $K_{i,d,l} = K_{\mu,\lambda}$（科斯塔数）。这里 $\mu = (\frac{dl+i}{2}, \frac{dl-i}{2})$ 和 $\lambda = (d, d, \cdots, d)$ 是 dl 的分拆。

证明。(1) 中的结论直接由命题2.2得出，因为 ρ_f 的维数为 2。

设 α_f, β_f 是 Frob_p 作用于 ρ_f 上的特征值，相应的特征向量为 v_1, v_2。对于任意$j \geq 1$，$\mathrm{Sym}^j \rho_f$有一组基 $v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_j}$，其中 $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_j \leq 2$。$\mathrm{Frob}_p$ 作用于 $\mathrm{Sym}^j \rho_f$ 上的特征值为 $\alpha_f^{t_1} \beta_f^{t_2}$，其中 $t_1 + t_2 = j$。对于 $\mathbb{S}_\lambda \rho_f$，一组基由 $w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_d \in \rho_f^{\otimes d}$ 的像给出，其中 $w_i = v_1$ 或 v_2，且对于任意$1 \leq i \leq \lambda_2$， $w_i \neq w_{d-i}$。Frob_p 作用于这些元素上的特征值为 $(\alpha_f \beta_f)^{\lambda_2} \alpha_f^{t_1} \beta_f^{t_2} = \alpha_f^{t_1} \beta_f^{t_2}$，其中 $t_1 + t_2 = \lambda_1 - \lambda_2$。(2) 中的结论可通过比较弗罗贝尼乌斯特征值得出。

(3)、(4) 和 (5) 中的陈述分别由分解公式（2.5）、（2.7）和（2.8）以及 (2) 推出。□

由表示的张量积的分解，我们推导出 L-函数的因子分解。

命题 2.4。

$$L\left(f^{\otimes l}, s\right)=\prod_{i=0}^{\lfloor l/2\rfloor} L\left(\mathrm{Sym}^{l-2i} f, s\right)^{c_{l,i}}, \quad L\left(\left(\mathrm{Sym}^{d} f\right)^{\otimes l}, s\right)=\prod_{i=0}^{ld} L\left(\mathrm{Sym}^{i} f, s\right)^{K_{i,d,l}}.$$

第一个恒等式也在 [28] 中通过比较这些表示上的海克特征值推导出来。

2.4. **科斯塔数的计算**。本节给出一个显式公式，用于计算命题 $K_{i,d,l}$ 中出现在 $\left(\mathrm{Sym}^{d} V\right)^{\otimes l}$ 的分解中的科斯塔数2.3。

对于任意满足 i 且 dl 具有相同奇偶性的 $0 \leq i \leq dl$，令 $\lambda=(d, d, \cdots, d)$ $\mu=(\frac{dl+i}{2}, \frac{dl-i}{2})$ 为 dl 的两个分拆。科斯塔数 $K_{\mu,\lambda}$ 是以 μ 为形状的杨表的填法数：填入数字 1、2, $\cdots, l$，其中每个数字恰好出现 d 次，并且每行中的元素弱递增，每列中的元素严格递增。

现在我们给出这些 Kostka 数的另一种明确描述。令 $K_{i,\ d,\ l}=K_{\mu,\ \lambda}$（定义如上）。根据命题 2.3，$K_{i,\ d,\ l}$ 是二维表示 V 的 $\left(\mathrm{Sym}^{d} V\right)^{\otimes l}$ 中 $\mathrm{Sym}^{i} V$ 的重数。我们将 $K_{i,\ d,\ l}$ 的定义扩展到所有 $i \in \mathbb{Z}$，规定当 $i \notin[0, dl]$ 时，或 i 和 dl 的奇偶性不同时，$K_{i,\ d,\ l}=0$。由命题 2.3(4)，我们推导出 $K_{i,\ d,\ l}$ 的递归公式：

$$K_{i,d,l}=K_{i-d,d,l-1}+K_{i-d+2,d,l-1}+\cdots+K_{i+d,d,l-1}.$$

另一方面，考虑多项式：

$$(1+x+x^2+\cdots+x^d)^l=\sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_{j,d,l} x^j.$$

定义 $A_{i,d,l}=C_{\lfloor \frac{dl-i}{2} \rfloor,d,l}-C_{\lfloor \frac{dl-i-1}{2} \rfloor,d,l}$.

命题 2.5。我们有 $K_{i,d,l}=A_{i,d,l}$.

证明。我们只需证明$A_{i,d,l}$ 以及 $K_{i,d,l}$ 满足相同的递归公式和边界条件。首先，系数 $C_{i,d,l}$ 满足以下递推关系：

$$C_{i,d,l}=C_{i-d,d,l-1}+C_{i-d+1,d,l-1}+\cdots+C_{i,d,l-1}.$$

Thus

$$\begin{aligned} A_{i,d,l} =& C_{\lfloor \frac{dl-i}{2} \rfloor,d,l}-C_{\lfloor \frac{dl-i-1}{2} \rfloor,d,l} \\ =& \sum_{t=j-d}^{j} C_{t,d,l-1}-\sum_{t=j'-d}^{j'} C_{t,d,l-1}. \end{aligned}$$

其中 $j=\lfloor\frac{dl-i}{2}\rfloor, j'=\lfloor\frac{dl-i-1}{2}\rfloor$.另一方面,

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{d}A_{i-d+2t,d,l-1}&=\sum_{t=0}^{d}\left(C_{\lfloor\frac{dl-d-(i-d+2t)}{2}\rfloor,d,l-1}-C_{\lfloor\frac{dl-d-(i-d+2t)-1}{2}\rfloor,d,l-1}\right)\\&=\sum_{t=0}^{d}\left(C_{\lfloor\frac{dl-i-2t)}{2}\rfloor,d,l-1}-C_{\lfloor\frac{dl-i-2t-1}{2}\rfloor,d,l-1}\right)\end{aligned}$$

通过望远镜求和，此和等于 $A_{i,d,l}$。因此

$$A_{i,d,l}=A_{i-d,d,l-1}+A_{i-d+2,d,l-1}+\cdots+A_{i+d,d,l-1}.$$

对于边界条件 $l=1$:

- $K_{d,d,1}=1$ 以及 $K_{i,d,1}=0$，对于 $i\neq d$
- $A_{d,d,1}=C_{\lfloor\frac{d-d}{2}\rfloor,d,1}-C_{\lfloor\frac{d-d-1}{2}\rfloor,d,1}=C_{0,d,1}-C_{-1,d,1}=1-0=1$ 以及 $A_{i,d,1}=0$，对于 $i\neq d$。因此 $A_{i,d,d}$ 和 $K_{i,d,d}$ 满足相同的递推关系和边界条件，所以 $A_{i,d,l}=K_{i,d,l}$。

□

根据此命题，科斯塔数 $K_{i,d,l}$ 可以用二项式系数表示。由此得到以下公式。

推论 2.6。

$$K_{i,d,l}=\begin{cases}0 & if\ 2\nmid dl-i\\ \sum_{j=0}^{\lfloor(dl-i)/(2d+2)\rfloor}(-1)^j\binom{l}{j}\binom{(dl-i)/2-j(d+1)+l-2}{l-2} & otherwise\end{cases}.\tag{2.9}$$

证明。由于

$$(1+x+x^2+\cdots+x^d)^l=(1-x^{d+1})^l(1-x)^{-l},$$

系数 $K_{i,\ d,\ l}=A_{i,\ d,\ l}$ 可计算为

$$\begin{aligned}A_{i,d,l}=&\sum_{j=0}^{\lfloor(dl-i)/(2d+2)\rfloor}(-1)^j\binom{l}{j}\binom{\lfloor(dl-i)/2\rfloor-j(d+1)+l-1}{l-1}\\&-\sum_{j=0}^{\lfloor(dl-i-1)/(2d+2)\rfloor}(-1)^j\binom{l}{j}\binom{\lfloor(dl-i-1)/2\rfloor-j(d+1)+l-1}{l-1}.\end{aligned}$$

若 dl 和 i 的奇偶性不同，则 $A_{i,\ d,\ l}=0$。若 dl 和 i 的奇偶性相同，则 $\lfloor\frac{dl-i}{2}\rfloor=\frac{dl-i}{2}$ 和 $\lfloor\frac{dl-i-1}{2}\rfloor=\frac{dl-i}{2}-1$。将这些代入 $A_{i,\ d,\ l}$的表达式并化简（通过望远镜求和），即可得到所需公式。
□

例子。 $\left(\mathrm{Sym}^2\rho_f\right)^{\otimes l}$ 的分解为

$$\left(\mathrm{Sym}^2\rho_f\right)^{\otimes l}\cong\bigoplus\left(\mathrm{Sym}^i\rho_f\right)^{\oplus K_{i,2,l}}$$

其中 $K_{0,2,l}=0,1,1,3,6,15,36,91$ 分别对应 $l=1,\cdots,8$。此外，表示 $\left(\mathrm{Sym}^d\rho_f\right)^{\otimes 2}$ 可分解为

$$\left(\mathrm{Sym}^d\rho_f\right)^{\otimes 2}\cong\bigoplus_{i=0}^{d}\mathrm{Sym}^{2i}\rho_f.$$

2.5. 二元二次型。 设 $Q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ 满足 $a,b,c\in\mathbb{Z}$，且 $a>0$ 是一个正定二元二次型。令 $D<0$ 表示其判别式。对于任意 $n>0$，令 $r(n,Q)$ 表示方程 $Q(x,y)=n$ 的整数解 (x,y) 的数量。在经典情形 $Q(x,y)=x^2+y^2$ 中，数量 $r(n,Q)$ 统计 n 表示为两个平方数之和的方式数。

令 $F=\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ 表示与 Q 相关联的虚二次域。记 $\mathfrak{h}$ 为 F 的类群，记 $h(D)$ 为其类数。令 w_D 表示 F 中单位根的个数；具体而言，当 $D=-3$ 时为 $w_D=6$，当 $D=-4$ 时为 $w_D=4$，其他情况下为 $w_D=2$。二元二次型的等价类与理想类群 $\mathfrak{h}$ 一一对应。在这一对应下，数 $r(n,\ Q)$ 等于 w_D 乘以理想类 $\mathfrak{a}_Q$ 中范数为 n 的整理想的个数，其中 $\mathfrak{a}_Q$ 对应于 Q。应用群特征的正交关系，我们得到公式

$$r(n,Q)=\frac{w_D}{h(D)}\sum_{\chi}\overline{\chi(\mathfrak{a}_Q)}\sum_{\mathfrak{n}}\chi(\mathfrak{n}),\tag{2.10}$$

其中 χ 遍历 $\mathfrak{h}$ 的所有特征，内层求和遍历 F 中范数为 n 的所有整理想 $\mathfrak{n}$。

根据类域论，$\mathfrak{h}$ 的每个特征都对应于 F 的一个海克特征。对于这样的特征 χ，令 $V(\chi)=\mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\chi$ 表示从 F 诱导到 $\mathbb{Q}$ 的阿廷表示。我们注意到以下事实：

- 若 χ 是平凡的，则 $V(\chi)\cong 1_{\mathbb{Q}}\oplus\chi_F$，其中 χ_F 是与 F 相关联的二次狄利克雷特征。
- 若 χ 是非平凡的，则 $V(\chi)$ 是一个不可约的二维表示。根据朗兰兹纲领，它对应于一个复乘模形式 $f_\chi=\sum_{n=1}^{\infty}a_\chi(n)q^n$。

现在设 f 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上的尖点特征形式。对于任意整数 $d\geq 0$，对称幂提升 $\mathrm{Sym}^d f$ 是 GL_{d+1} 上的自守形式。对于 $\mathfrak{h}$ 的一个特征 χ，我们定义相应的 L 函数如下。若 χ 非平凡，令

$$L\left(\mathrm{Sym}^d f,\chi,s\right):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{\mathrm{Sym}^d f}(n)a_\chi(n)}{n^s}$$

为 Ra nkin-塞尔伯格 L 函数，它与 $\mathrm{Sym}^d f$ 和 f_χ 相关联。若 χ 是平凡的，则定义

$$L\left(\mathrm{Sym}^d f,\chi,s\right)=L\left(\mathrm{Sym}^d f,s\right)L\left(\mathrm{Sym}^d f,\chi_F,s\right).$$

类似地，通过纳入系数 $a_\chi(n)$，我们可以定义 L-函数 $L\left(f^{\otimes l},\ \chi,\ s\right)$ 和 $L\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l},\ \chi,\ s\right)$。利用前几节得到的张量积分解，我们得到以下因式分解：

$$L\left(f^{\otimes l},\chi,s\right)=\prod_{i=0}^{[l/2]}L\left(\mathrm{Sym}^{l-2i}f,\chi,s\right)^{c_{l,i}},\tag{2.11}$$

$$L\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l},\chi,s\right)=\prod_{i=0}^{dl}L\left(\mathrm{Sym}^i f,\chi,s\right)^{K_{i,d,l}}.\tag{2.12}$$

3. The estimations via Perron's formula

3.1. 狄利克雷级数。 设 f 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上权为 k 的尖点特征形式，设 Q 是一个二元二次型，设 χ 是 $\mathfrak{h}$的一个特征。我们定义以下在分析中至关重要的狄利克雷级数:

$$D\left(f^{\otimes l},s\right):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_f^l(n)}{n^s},\qquad D\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l},s\right):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{\mathrm{Sym}^d f}^l(n)}{n^s},$$

$$D\left(f^{\otimes l},Q,s\right):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_f^l(n)r(n,Q)}{n^s},\qquad D\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l},Q,s\right):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{\mathrm{Sym}^d f}^l(n)r(n,Q)}{n^s},$$

$$D\left(f^{\otimes l},\chi,s\right):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_f^l(n)a_\chi(n)}{n^s},\qquad D\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l},\chi,s\right):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{\mathrm{Sym}^d f}^l(n)a_\chi(n)}{n^s}.$$

根据 （$r(n,\ Q)$的表达式见（2.10），我们立即得到关系式 s

$$D\left(f^{\otimes l},Q,s\right)=\frac{w_D}{h(D)}\sum_{\chi}\overline{\chi(\mathfrak{a}_Q)}D\left(f^{\otimes l},\chi,s\right),$$

$$D\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l},Q,s\right)=\frac{w_D}{h(D)}\sum_{\chi}\overline{\chi(\mathfrak{a}_Q)}D\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l},\chi,s\right).$$

这些狄利克雷级数与完备的 L-函数之间的联系由下述命题给出，它是扭曲情形下定理 2.1 的类比。

命题 3.1。 以下恒等式成立:

$$D\left(f^{\otimes l},s\right)=L\left(f^{\otimes l},s\right)U_{f,l}(s),D\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l},s\right)=L\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l},s\right)U_{\mathrm{Sym}^d f,l}(s),$$

$$D\left(f^{\otimes l},\chi,s\right)=L\left(f^{\otimes l},\chi,s\right)U_{f,l,\chi}(s),D\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l},\chi,s\right)=L\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l},\chi,s\right)U_{\mathrm{Sym}^d f,l,\chi}(s).$$

其中每个 $U_*(s)$ 都是 ***Euler***乘积，在 $\mathrm{Re}(s)\ >1/2$时绝对收敛，并且在区域 $\mathrm{Re}(s)\ >1/2+\epsilon$ 内一致收敛，其中任意 $\epsilon>0$ 均成立。

3.2. 关于 L-函数的次凸性结果。 我们的主要定理的证明依赖于对各种 L-函数的次凸性估计。我们在此汇集所需的结果。

引理 3.2 （ [1]）。 对于任意 $\epsilon>0$ 以及任意狄利克雷特征 χ，有

$$\zeta(\sigma+it)\ll(1+|t|)^{\frac{13}{42}(1-\sigma)+\epsilon},\ L(\chi,\sigma+it)\ll(1+|t|)^{\frac{13}{42}(1-\sigma)+\epsilon}\tag{3.1}$$

对 $1/2\le\sigma\le1+\epsilon$ 和 $|t|\ge1$.一致成立

引理 3.3 （ [6]）。 设 f 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$上的模形式，对于任意 $\epsilon>0$，有

$$L(f,\sigma+it)\ll(1+|t|)^{\frac{2}{3}(1-\sigma)+\epsilon}$$

对 $1/2\le\sigma\le1+\epsilon$ 和 $|t|\ge1$.一致成立

引理 3.4 （ [2]）。 设 f 是一个模形式，对于任意 $\epsilon>0$，有

$$L(\mathrm{Sym}^2 f,\sigma+it)\ll(1+|t|)^{\frac{8}{7}(1-\sigma)+\epsilon},$$

对 $1/2\le\sigma\le1+\epsilon$ 和 $|t|\ge1$.一致

引理 3.5 ([21])。 设 $L(s)$ 是一个一般的 L-函数，其次数为 m，并假设 $L(s)$在 $\mathrm{Re}(s) > 1$时绝对收敛。此外，假设 $L(s)$ 除可能在 $s = 0$、1 处有简单极点外是整函数，并满足黎曼型函数方程。那么对于任意 $\epsilon > 0$， 有

$$L(\sigma + it) \ll (1 + |t|)^{\frac{m}{2}(1-\sigma)+\epsilon}$$

对 $1/2 \le \sigma \le 1 + \epsilon$ 和 $|t| \ge 1$一致成立。对于 $T \ge 1$，我们有

$$\int_T^{2T} |L(1/2 + it)|^2 dt \ll T^{m/2+\epsilon}.$$

3.3. **主要定理的证明**。 这些定理的证明采用通过佩龙反演公式的标准方法，详见 [31] 和 [32]。为简洁起见，我们仅给出定理 1.2的证明，其他情形类似。

我们从以下求和开始

$$S(x) := \sum_{Q(n_1,n_2)\le x} \lambda^l_{\mathrm{Sym}^d f}(Q(n_1, n_2)) = \sum_{n\le x} \lambda^l_{\mathrm{Sym}^d f}(n) r(n, Q).$$

利用 $r(n,\ Q)$ 在（2.10）中的表达式，可得

$$S(x) = \frac{w_D}{h(D)} \sum_{\chi} \overline{\chi(\mathfrak{a}_Q)} \sum_{n\le x} \lambda^l_{\mathrm{Sym}^d f}(n) a_\chi(n),$$

其中，求和遍历理想类群的所有特征。只需估计每个特征 χ对应的内层和。根据佩龙公式，对于 $b = 1 + \epsilon$和满足$1 \le T \le x$的参数 T，我们有

$$\sum_{n\le x} \lambda^l_{\mathrm{Sym}^d f}(n) a_\chi(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} D\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l}, \chi, s\right) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^b}{T}\right),$$

将积分围道移至 $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2} + \epsilon$ 这条直线后，应用柯西留数定理可得

$$\sum_{n\le x} \lambda^l_{\mathrm{Sym}^d f}(n) a_\chi(n) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\frac{1}{2}+\epsilon-iT}^{\frac{1}{2}+\epsilon+iT} + \int_{\frac{1}{2}+\epsilon+iT}^{b+iT} + \int_{b-iT}^{\frac{1}{2}+\epsilon-iT} \right\} D\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l}, \chi, s\right) \frac{x^s}{s} ds$$

$$+\mathrm{Res}_{s=1} D\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l}, \chi, s\right) \frac{x^s}{s} + \mathrm{O}\left(\frac{x^{1+\epsilon}}{T}\right).$$

由命题3.1，我们得到因式分解

$$D\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l}, \chi, s\right) = L\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l}, \chi, s\right) U_{\mathrm{Sym}^d f, l, \chi}(s),$$

其中 $U_{\mathrm{Sym}^d f,\ l,\ \chi}(s)$ 是全纯函数，且在 $\mathrm{Re}(s) > 1/2 + \epsilon$中由 $O(1)$ 控制。 $s = 1$ 处极点的阶由因式分解（2.12）确定：

$$\mathrm{ord}_{s=1} D\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l}, \chi, s\right) = \mathrm{ord}_{s=1} L\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l}, \chi, s\right) = \begin{cases} 0 & \text{if } \chi \text{ is not trivial.} \\ K_{0,d,l} & \text{if } \chi \text{ is trivial.} \end{cases}$$

因此，对于平凡特征 χ，留数 $\mathrm{Res}_{s=1} D\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l}, \chi, s\right) \frac{x^s}{s}$ 贡献了一个形式为 $xP_{0,d,l}(\log x)$ 的主项，其中 $P_{0,d,l}$ 是一个次数为 $K_{0,d,l}-1$. 的多项式。对于非平凡的 $\overline{\chi}$，在 $s=1$ 处没有极点，因此留数为 0。

我们定义沿围道不同线段的积分：

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \int_{\frac{1}{2}+\epsilon-iT}^{\frac{1}{2}+\epsilon+iT} D\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l}, \chi, s\right) \frac{x^s}{s} ds, \\
J_2 &= \int_{\frac{1}{2}+\epsilon+iT}^{b+iT} D\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l}, \chi, s\right) \frac{x^s}{s} ds, \\
J_3 &= \int_{b-iT}^{\frac{1}{2}+\epsilon-iT} D\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l}, \chi, s\right) \frac{x^s}{s} ds.
\end{aligned}
$$

现在我们继续估计这些积分，以确定误差项。**的估计：**若 χ是平凡的，则可得

$$
\begin{aligned}
J_1 &\ll x^{1/2+\epsilon} + x^{1/2+\epsilon} \int_1^T \left| L\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l}, \chi, 1/2+\epsilon+it\right)\right| t^{-1} dt \\
&\ll x^{1/2+\epsilon} + x^{1/2+\epsilon} \log T \max_{T_1 \le T} \left\{ T_1^{-1} \int_{T_1/2}^{T_1} \left| L\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l}, \chi, 1/2+\epsilon+it\right)\right| dt \right\} \\
&\ll x^{1/2+\epsilon} + x^{1/2+\epsilon} T^{-1} T^{2\left(\frac{13}{84}K_{0,d,l}+\frac{1}{3}K_{1,d,l}+\frac{4}{7}K_{2,d,l}+\sum_{i=3}^{\infty}\frac{i+1}{4}K_{i,d,l}\right)+\epsilon} \\
&\ll x^{1/2+\epsilon} + x^{1/2+\epsilon} T^{\frac{(d+1)^l}{2}-\frac{4}{21}K_{0,d,l}-\frac{1}{3}K_{1,d,l}-\frac{5}{14}K_{2,d,l}-1+\epsilon},
\end{aligned}
$$

这里我们用到了恒等式$\sum_{i=0}^{\infty} K_{i,d,l} = (d+1)^l$。若 χ 是非平凡的，则估计变为

$$
\begin{aligned}
J_1 &\ll x^{1/2+\epsilon} + x^{1/2+\epsilon} T^{-1} T^{\frac{1}{3}K_{0,d,l}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(i+1)}{2}K_{i,d,l}+\epsilon} \\
&\ll x^{1/2+\epsilon} + x^{1/2+\epsilon} T^{\frac{(d+1)^l}{2}-\frac{1}{6}K_{0,d,l}-1+\epsilon}.
\end{aligned}
$$

的估计：水平积分可由下式控制

$$
J_2 + J_3 \ll \sup_{1/2+\epsilon \le \sigma \le 1+\epsilon} x^{\sigma} T^{-1} \left| L\left(\left(\mathrm{Sym}^d f\right)^{\otimes l}, \chi, s\right)\right|.
$$

应用分解公式（2.12）和次凸性界，我们得到以下估计。

对于平凡的 χ：

$$
\begin{aligned}
J_2 + J_3 &\ll x^{\frac{1}{2}+\epsilon} T^{-1} T^{2\left(\frac{13}{84}K_{0,d,l}+\frac{1}{3}K_{1,d,l}+\frac{4}{7}K_{2,d,l}+\sum_{i=3}^{\infty}\frac{i+1}{4}K_{i,d,l}+\epsilon\right)} + \frac{x^{1+\epsilon}}{T} \\
&= x^{1/2+\epsilon} T^{\frac{(d+1)^l}{2}-\frac{4}{21}K_{0,d,l}-\frac{1}{3}K_{1,d,l}-\frac{5}{14}K_{2,d,l}-1+\epsilon} + \frac{x^{1+\epsilon}}{T}.
\end{aligned}
$$

对于非平凡的 χ:

$$J_2 + J_3 \ll x^{1/2+\epsilon} T^{-1} T^{\frac{1}{3}K_{0,d,l} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(i+1)}{2} K_{i,d,l} + \epsilon} + \frac{x^{1+\epsilon}}{T}$$
$$= x^{1/2+\epsilon} T^{\frac{(d+1)^l}{2} - \frac{1}{6}K_{0,d,l} - 1 + \epsilon} + \frac{x^{1+\epsilon}}{T}.$$

现选取参数 T 以平衡误差项。我们先考虑 Q的类数为 1 的情形。在这种情况下，只有平凡特征有贡献。取

$$T = x^{1/\left((d+1)^l - \frac{8}{21}K_{0,d,l} - \frac{2}{3}K_{1,d,l} - \frac{5}{7}K_{2,d,l}\right)},$$

我们得到渐近公式

$$\sum_{n \le x} \lambda^l_{\mathrm{Sym}^d f}(n) a_\chi(n) = x P_{0,d,l}(\log(x)) + O\left(x^{1 - 1/\left((d+1)^l - \frac{8}{21}K_{0,d,l} - \frac{2}{3}K_{1,d,l} - \frac{5}{7}K_{2,d,l}\right) + \epsilon}\right).$$

接下来假设类数大于 1。主项仅来自平凡特征，但误差项包含所有特征的贡献。取

$$T = x^{\frac{3}{3(d+1)^l - K_{0,d,l}}},$$

我们得到

$$\sum_{n \le x} \lambda^l_{\mathrm{Sym}^d f}(n) a_\chi(n) = x P_{0,d,l}(\log(x)) + O\left(x^{1 - \frac{3}{3(d+1)^l - K_{0,d,l}} + \epsilon}\right).$$

对.....求和 遍历所有特征 χ，并利用（2.10），即完成定理 1 的证明。 2.

References

[1]J. Bourgain. 解耦、指数和与黎曼ζ函数。美国数学会杂志, 30(1):205–224, 2017年。[2] A. Dasgupta, H. Leung, W, and P. Young, M. GL_3 标准L函数在临界线上的二阶矩。*arXiv* 预印本 *arXiv:2407.06962*, 2024年。[3] O.M. Fomenko. 关于自守L函数系数的恒等式。*J. Math. Sci.*, 133(6), 2006年。[4] O.M. Fomenko. 自守L函数的均值定理。圣彼得堡数学杂志, 19(5):853– 866, 2008年。[5] W. Fulton and J. Harris. 表示论：入门教程, 第129卷。施普林格科学与商业媒体, 2013年。[6] A. Good. 与尖点形式相关的狄利克雷级数的平方均值。*Mathematika*, 29(2):278–295, 1982年。[7] X. He. 对称平方 L函数傅里叶系数的整幂和。美国数学会会刊, 147(7):2847–2856, 2019年。[8] B. Huang. 关于Rankin–Selberg问题。数学年刊, 381(3):1217–1251, 2021年。[9] H. Kim. GL_4 的外平方及GL_2, 的对称四次幂的函子性。附录1由Dinakar Ramakrishnan撰写，附录2由Henry H. Kim和Peter Sarnak撰写。美国数学会杂志, 16:139– 183, 2003年。[10]H. H. Kim and F. Shahidi. 对称幂的尖点性及其应用。杜克数学杂志, 115(1):177–197, 2002年。[11] H. H. Kim and F. Shahidi. $GL_2 \times GL_3$ 的函子积以及GL_2的对称立方。数学年刊, 页837–893, 2002年。[12] H. D. Kloosterman. 关于整模形式傅里叶系数的渐近公式。载于汉堡大学数学研讨班论文集, 第5卷, 页337–352。施普林格, 1927年。[13] Y.-K. Lau, G. L¨u, and J. Wu. 海克特征值的整幂和。算术学报, 150(2):193–207, 2011年。

[14] H. Liu. 对称幂L函数傅里叶系数的平均行为。马来西亚数学科学学会通报, 46(6):193, 2023年。[15] H. Liu. 尖点形式傅里叶系数的渐近分布。巴西数学学会通报（新系列）, 54(2):21, 2023年。[16] G. L¨u. 尖点形式傅里叶系数的平均行为。美国数学会会刊, 137(6):1961–1969, 2009年。[17] G. L¨u. 全纯尖点形式傅里叶系数的高阶矩。加拿大数学杂志, 63(3):634– 647, 2011年。[18] S. Luo, H. Lao, and A. Zou. 对称幂L函数狄利克雷系数的渐近性质。算术学报, 199:253–268, 2021年。[19] J. Newton and J. A. Thorne. 全纯模形式的对称幂函子性。Publ.́Math., Inst. Hautes Etud. Sci., 134:1–116, 2021年。[20] J. Newton and J. A. Thorne. 全纯模形式的对称幂函子性。II. Publ.́Math., Inst. Hautes Etud. Sci., 134:117–152, 2021年。[21] A. Perelli. 一般 L 函数。纯粹与应用数学年刊, 130:287–306, 1982年。[22] R. A. Rankin. 关于拉马努金函数 $\tau(n)$及类似算术函数理论的贡献：II. 整模形式傅里叶系数的阶。载于剑桥哲学学会会刊, 第35卷, 页357–372。剑桥大学出版社, 1939年。[23] R. A. Rankin. 尖点形式系数的幂和。数学年刊, 263:227–236, 1983年。[24] A. Selberg. 关于一个与模形式理论密切相关的狄利克雷级数的评论。数学与自然科学档案, 43:47, 1940年。[25] K. Venkatasubbareddy. 对称幂 L函数傅里叶系数高阶矩的推广。预印本, arXiv:2601.17079 [math.NT] (2026), 2026年。[26] A. Weil. 关于某些指数和。美国国家科学院院刊, 34(5):204–207, 1948年。[27] J. Wu. 海克特征值的幂和及其应用。算术学报, 137(4):333–344, 2009年。[28] C. Xu. 尖点形式傅里叶系数在两个平方数之和上的一般渐近公式。数论杂志, 236:214–229, 2022年。[29] J. Yang. 与伽罗瓦表示相关的算术函数的生成狄利克雷级数及其应用。已投稿, 2026年。[30] J. Yang. 具有伽罗瓦群 A_d 和 S_d的非正规域的高阶矩。数论杂志, 280:370–389, 2026年。[31] J. Yang and Z. Yang. 戴德金ζ函数系数在完全幂上的平均值。预印本, 2025年。[32] J. Yang and Z. Yang. 与非正规域戴德金ζ函数相关的高阶矩。数论杂志, 278:547–569, 2026年。[33] S. Zhai. 尖点形式傅里叶系数在两个平方数之和上的平均行为。数论杂志, 133(11):3862–3876, 2013年。School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao, Shandong, 266000,People's Republic of China;电子邮箱: yangjiong@qdu.edu.cnSchool of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao, Shandong, 266000,People's Republic of China电子邮箱：zsyang@qdu.edu.cn