arXiv:2602.01573v1 [stat.ME] 2 Feb 2026

广义贝叶斯何时是贝叶斯方法? 基于损失的更新的决策论刻画

Kenichiro McAlinn*& K¯osaku Takanashi†

摘要

基于损失的更新包括广义贝叶斯方法、吉布斯方法和拟后验方法，它以用户选定的损失替代似然，并通过指数倾斜得到类似后验分布的分布。我们给出一种决策论刻画，将信念后验——在联合概率模型下，由 Savage 和安斯康姆-奥曼的理论基础所支持的条件信念——与决策后验——由关于决策规则的偏好所支持的随机化决策规则——区分开来。我们明确指出，当且仅当损失在尺度因子和仅依赖数据的项之外等于负对数似然时，基于损失的后验分布才与普通贝叶斯方法一致。接着我们证明，广义边际似然并非决策后验的证据，而且若无额外结构，贝叶斯因子并无明确定义。在决策后验框架下，非退化后验分布要求对决策规则具有非线性偏好。在序贯相干性和可分性的条件下，这些偏好会导出一种熵惩罚变分表示，并以广义贝叶斯方法作为最优规则。

关键词：广义贝叶斯、吉布斯后验、基于损失的更新、决策理论、动态一致性、边际似然、模型比较、学习率校准

*天普大学福克斯商学院统计、运营与数据科学系，美国宾夕法尼亚州费城。电子邮件：kenichiro.mcalinn@temple.edu

†理化学研究所先进智能项目中心 电子邮件：kosaku.takanashi@riken.jp

1 引言

大量且不断增长的文献通过对累积损失取指数来更新基准分布，由此得到通常所称的“广义后验”。这种基于损失的更新视角涵盖广义贝叶斯推断与广义贝叶斯（Bissiri 等人，2016 年）、吉布斯后验与准后验，以及相关的指数权重构造。此类方法广泛应用于稳健推断和模型设定错误下的推断（Bissiri 等人，2016 年；Lyddon 等人，2019年；Gr¨unwald 和 van Ommen，2017 年；Watson 和 Holmes，2016 年）、基于准则函数的计量经济学（Chernozhukov 和 Hong，2003）、学习理论分析（Catoni，2007 年）、决策综合（Tallman 和 West，2024），以及似然不可用或不可靠的逆问题。这些方法在实践中颇具吸引力，因为损失函数往往比抽样模型更容易设定，能与后续目标直接对齐，并且在似然模型难以成立时具有稳健性。

然而，将输出称为“后验分布”会引入一种在操作上至关重要的歧义。贝叶斯后验分布承载着一套特定的一致性叙事。它们是由联合概率模型导出的条件信念，支持人们熟悉的解释（投注赔率、可交换性、边际似然的证据性使用以及贝叶斯因子）。即便未指定抽样模型，基于损失的更新也常常使用这同一套信念语言来讨论。该领域的术语尚未标准化：基于损失的更新/吉布斯更新有时会用信念更新或后验信念度的语言来描述，或被称为“真正的后验分布”，即便该更新是由用户选定的损失驱动的。因此，我们要问：一旦似然被损失取代，贝叶斯一致性叙事中的哪些部分仍然成立?

本文通过区分两个常被混为一谈的对象，为基于损失的更新提供了一种决策论交通管控。一个信念后验 是关于不确定状态的条件信念，由 Savage/Anscombe–Aumann 框架中对行动的偏好导出（Savage，1954年；Anscombe 与 Aumann，1963年）。在条件选择公理下，动态一致性要求将无条件偏好与条件偏好联系起来，并选择贝叶斯条件化作为动态一致的更新（Ghirardato，2002年）。与之相对，决策后验是一种随机化决策规则：在观测到数据后，为优化指定的偏好泛函而选择的、依赖于数据的行动（或参数索引）分布。两者都可以是一致的——但含义不同。信念后验作为条件信念是一致的；决策后验作为最优随机化装置是一致的。我们的核心观点是：基于损失的更新自然地与决策后验相一致，并且仅在特殊情形下才与信念后验重合。明确这一点，有助于澄清“先验”在广义贝叶斯中的含义、所强制（以及未强制）的是何种形式的动态一致性、为何学习率参数不可避免，以及哪些贝叶斯性质（例如，作为信念约束的可交换性；似然原则论述；边际似然的证据性使用）在没有额外假设时无法获得。

这一区分具有操作性含义，并且在我们考虑模型比较时最为突出。在信念后验情形中，边际似然是归一化抽样模型下的先验预测概率，并支持贝叶斯因子解释。在该情形之外，并不存在这样的规范证据对象。这里的“规范”是指对那些使后验决策规则保持不变的损失变换具有不变性。基于损失的后验对于添加任意仅依赖于数据的项是不变的

到损失中；然而吉布斯归一化常数会重新缩放。基于广义边际似然的贝叶斯因子式比较在缺乏额外结构时并非良定义。

主要贡献。 我们提出四项贡献，旨在区分真正的贝叶斯信念更新与决策理论正则化。第一，我们给出明确的分界标准：当且仅当损失函数在相差一个仅依赖数据的项和一个尺度因子后等于负对数似然时，基于损失的后验才是普通贝叶斯信念后验。第二，我们指出，在信念范畴之外，广义边际似然并非规范的 证据量：后验决策规则对损失函数中仅依赖数据的平移保持不变，而吉布斯归一化常数却会随之缩放，因此，若要采用贝叶斯因子论述，就需要额外的识别结构；我们还给出一种基于适当预测评分规则、对平移不变的替代方案。第三，我们形式化了冯·诺伊曼–摩根斯坦期望效用对决策规则混合所蕴含的退化结果：最优随机化会退化为点质量选择，这意味着任何非退化的广义后验都必然依赖于决策规则上的非线性偏好。第四，我们为作为决策后验的广义贝叶斯方法提供了基于偏好的基础。借助经济学和信息论中的变分表示，我们表明，序贯相干性与独立子问题之间的可分性共同选出一种基于熵的偏离代价，从而使广义贝叶斯形式成为一种最优随机化决策规则；从生成式角度来看，这也提供了一套简单的设计方案，用于构建基于损失的更新，并判断何时 KL正则化广义贝叶斯并非规范选择。

除了这些结果之外，我们还提供了一份“一致性手册”，逐项列出哪些主张对信念后验有效，以及哪些主张对决策后验不成立。特别是，学习率的校准 η 从一种由似然尺度决定的建模细节，转变为原则性分析的结构性组成部分，从而阐明了为何一旦离开信念后验情形，损失似然自助法（Lyddon 等人，2019 年）和安全学习率选择（Gr¨unwald 和 van Ommen，2017 年）等校准程序就成为必要条件。

概要。 第2节将信念后验与决策后验形式化，并引入基于损失的更新所需的原始量。第 3 节给出贝叶斯等价分界，以及导向广义贝叶斯的偏好刻画。第 4 节阐述模型比较的结果。第 5节记录冯·诺伊曼–摩根斯坦退化的含义。第 6 节介绍一致性手册，并讨论实践意义。

2 信念后验与决策后验

本节将明确原始量和术语。我们的目标不是重新公理化贝叶斯决策理论，而是阐明一个关键区别：一旦用损失取代似然，“后验”对象究竟是（i）关于不确定结果的条件信念状态，还是（ii）观察到数据后所选择的随机化决策规则。

2.1 信念后验：来自对不确定行动的偏好的条件信念

在 Savage/Anscombe–Aumann传统中，原始量是在不确定性下针对（可能随机化的）行动的偏好关系（Savage，1954年；Anscombe and Aumann，1963年）。行动将不确定状态映射到某个结果，而偏好则必须与条件选择相容。在标准公理下，存在一个定义于结果之上的效用函数，以及一个关于状态的主观概率，使得行动按主观期望效用排序。动态一致性将无条件排序与条件排序联系起来：事前选择的计划，必须与获知相关信息事件后事后作出的选择一致。特别是，贝叶斯条件化是唯一具有动态一致性的更新方式（Ghirardato，2002年）。

在统计应用中，信念后验源于对数据和参数设定联合概率模型。先验分布表示对参数的信念，似然表示在给定该状态时对可观测结果的信念，而贝叶斯条件化则产生后验分布。该后验是一种信念对象：它可以被解释为一致的条件信念状态。

2.2 决策后验：数据后的随机化决策规则

基于损失的更新自然地通过一种不同的基本要素来表达。固定一个行动（或参数）空间Θ；我们仅将“参数”用作候选行动/预测器族的索引。观察到数据x后，决策者选择一个随机化决策规则 $q(\cdot|x) \in \Delta(\Theta)$，其中 $\Delta(\Theta)$表示 Θ上的概率测度。关键在于概念上的区分： $q(\cdot|x)$是一个选择变量，并不一定代表对某个潜在数据生成状态的信念。

为了评估随机化规则，我们假设分析者指定一个损失函数 $\ell(\theta; x)$，用于对已实现数据 x 上的行动 θ 进行评分。对于重复或序贯数据 $x_{1:n} = (x_1, \dots, x_n)$，我们将累积损失写作

$$L_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ell(\theta; x_i),$$

并将 L_n 视为依赖于数据的性能准则。 Θ 上的基准分布 π 充当参照规则，用以编码默认行为、复杂度正则化或数据前承诺；关键在于，它不必是关于结果的先验信念。

决策后验是指通过优化定义在 $\Delta(\Theta)$ 上的偏好泛函而选出的任意规则 $q(\cdot|x_{1:n})$。广义贝叶斯族对应于吉布斯形式

$$q(\theta|x_{1:n}) \propto \pi(\theta) \exp\{-\eta L_n(\theta)\}, \tag{1}$$

对于某个学习率 $\eta > 0$。当损失与负对数似然成正比时，这包括普通贝叶斯方法这一特例，但一般而言，其解释有所不同：（1）是由损失和基准导出的随机化决策规则。

2.3 基于损失的更新作为算子与序贯相干性

将基于损失的更新视为一个把原始量映射为 $\Delta(\Theta)$上的规则的算子很有用。令 Ψ 为一个更新映射，使得对于数据 $x_{1:n}$，

$$q(\cdot|x_{1:n}) = \Psi(\pi,\ L_n(\cdot))\,.$$

一个核心要求是序贯（分批）相干性：先使用 x_1 更新，再使用 x_2 更新，应当与一次性使用合并后的损失进行更新相一致：

$$\Psi(\Psi(\pi, L_m),\ L_{m+1:n}) = \Psi(\pi, L_n).$$

吉布斯形式（1）按其构造方式满足这一要求（Bissiri 等人，2016 年）。

与信念后验的一个关键区别在于尺度。在普通贝叶斯方法中，负对数似然的尺度由概率模型固定，相应的“温度”为 1。在基于损失的更新中，η 并未由概率语义决定，而是决策规范的一部分。这就是为什么 η 的校准属于结构性要求，而非表面修饰。

2.4 基本假设与范围

全文中，Θ 是一个可测空间，π 是定义在 Θ上的概率测度。损失 $\ell(\theta; x)$关于 θ 可测，对每个 x 均如此；并且在所关注的情形下，$L_n(\theta)$是良定义的。我们的研究结果涉及基于损失的更新所产生分布的解释及其决策理论地位：它们何时可解释为信念后验，何时必须解释为决策后验，以及在这两种解释下保留或失去了哪些相干性性质。

3 广义贝叶斯何时是贝叶斯方法?

本节给出两个刻画，为论文余下部分梳理思路。首先，我们将形式化说明，在何种条件下，基于损失的后验分布可以在某个似然模型下重新解释为普通的贝叶斯信念后验。其次，我们将为广义贝叶斯作为决策后验提供决策理论基础：它是在序贯相干性和跨独立子问题的可分离性不变性约束下的最优随机化规则。

3.1 广义贝叶斯与贝叶斯方法一致，当且仅当损失为对数似然

固定定义在 Θ 上的基准分布 π，以及损失 $\ell(\theta; x)$。对于单个观测 x （或对于表示数据集的 x），将广义贝叶斯更新写为

$$q(\theta|x) \ \propto\ \pi(\theta)\exp\{-\eta\ell(\theta; x)\}, \tag{2}$$

其学习率为 $\eta > 0$。我们要问：在什么情况下， $q(\cdot|x)$ 可以被解释为源自某个联合模型的贝叶斯后验分布，从而具有信念后验语义?

定理1 （贝叶斯等价）。 固定 $\eta > 0$、定义在 Θ 上的基准分布 π ，以及可测损失ℓ（θ； x）。以下条件等价：

（*i*）存在一个似然族 $\{p_\theta（x）\}_{\theta\in\Theta}$ ，使得对所有 x，广义更新 （2）等于普通贝叶斯后验， q（$\theta|x$） $\propto \pi$（θ） p_θ（x）。

（*ii*）存在一个似然族 $\{p_\theta（x）\}_{\theta\in\Theta}$ 以及一个不依赖于 θ 的函数 c（x），使得，对所有θ 和 x，

$$\ell(\theta; x) = -\frac{1}{\eta}\log p_\theta(x) \; + \; c(x). \tag{3}$$

尽管定理1 的变体已见于文献（例如，Bissiri 等人，2016 年；Catoni，2007 年；Gr¨unwald 和 van Ommen，2017 年），上述表述在我们的语境中提供了明确的界限。广义后验是信念后验——它可以解释为某个联合模型下的贝叶斯条件化——当且仅当损失在忽略仅依赖于数据的项及尺度后，等于负对数似然。在其他所有情况下，（2）都不是（也无法变成）Savage/Anscombe–Aumann 意义上的贝叶斯条件化：它必须被解释为决策后验。证明见补充材料S1.1。

例 *1*（准则函数损失破坏信念语义）。对于 $y_{1:n}$ 和尺度参数 $\sigma > 0$，考虑损失 $L_n(\sigma) = \sum_{i=1}^n y_i^2/(2\sigma^2)$，由此得到 $q(\sigma|y) \propto \pi(\sigma)\exp\{-\eta L_n(\sigma)\}$。在高斯抽样模型下，负对数似然与 $L_n(\sigma)$ 相差一个依赖于参数的项 $n\log\sigma$，因此定理*1*表明，这种更新不是信念后验。它必须被解释为决策后验。

那么，为什么不“将 $\exp\{-\eta\ell\}$归一化”? 一个自然的异议是，对于任意损失，都可以通过对 x归一化，定义一个形式上的族 $\tilde{p}_\theta(x) \propto \exp\{-\eta\ell(\theta; x)\}$ 。定理1说明了为什么这通常不能得到信念后验解释：使 $\tilde{p}_\theta$ 积分为 1 所需的归一化因子通常依赖于 θ ，因此无法将其吸收到式 (3) 中的 $c(x)$ 里。“关于 θ的吉布斯形式”是自动成立的，但要成为一个关于 x 的似然，且具有一个不依赖 θ的加性常数，则是一项实质性限制。

推论 1 (x-贝叶斯性诊断的归一化)。 假设样本空间 $\mathcal{X}$上带有一个控制测度 μ。固定 $\eta > 0$ 和一个可测损失 $\ell(\theta;\ x)$。定义

$$A(\theta) = \int_{\mathcal{X}} \exp\{-\eta\ell(\theta; x)\}\mu(dx) \in (0, \infty].$$

如果存在一个似然族 $\{p_\theta\}$，使得 $q(\theta|x) \propto \pi(\theta)p_\theta(x)$ 对所有 x都与 *(2)* 一致，那么 $A(\theta)$ 必须有限且独立于 θ。反之，如果 $A(\theta) \equiv A \in (0, \infty)$，那么 $p_\theta(x) = \exp\{-\eta\ell(\theta;\ x)\}/A$定义了一个有效似然，并且 *(2)* 是普通贝叶斯后验。

推论1 明确说明了定理1的实质内容：广义贝叶斯只有在对 $\exp\{-\eta\ell(\theta; x)\}$ 在 x 上作为密度进行归一化所需的“配分函数”不依赖于 θ时，才是信念后验。

3.2 从关于决策规则的偏好到广义贝叶斯

现在我们转向一个正向刻画：广义贝叶斯形式（2）何时是从公理化偏好设定中推导出的最优随机化决策规则？所有证明均见补充材料 S1.3。

观察到数据 x 后，决策者选择一个随机化规则 $q \in \Delta(\Theta)$。数据通过损失 $\ell(\theta; x)$发挥作用，而基准 π 代表默认规则或正则化项。我们寻求偏好条件，使得最优的 q 必须采取广义贝叶斯形式。

在 $\Delta(\Theta)$ 上，一类自然的决策准则是变分形式：决策者在基于 q 的期望损失与偏离 π 的惩罚之间进行权衡，

$$q^*(\cdot|x) \in \arg\min_{q\in\Delta(\Theta)} \left\{ \int \ell(\theta; x)\, q(d\theta) + \frac{1}{\eta} D(q\|\pi) \right\}, \tag{4}$$

其中 $D(\cdot\|\cdot)$ 是偏离成本，而 $\eta > 0$ 用于校准其强度。这与经济学中的熵惩罚选择相关，包括变分偏好和乘数偏好（Hansen and Sargent，2001；Maccheroni 等人，2006；Strzalecki，2011），以及随机选择的信息成本基础（Matˇejka and McKay，2015）。

公理（变分决策后验）。固定 x，并令 $\succeq_x$ 表示关于 $q \in \Delta(\Theta)$ 的条件偏好。我们施加以下结构：

（A1）弱序与正则性：$\succeq_x$ 是完备且传递的，并且在混合下连续。
（A2）损失单调性：若 $\int \ell(\theta; x)\, q(d\theta) \leq \int \ell(\theta; x)\, r(d\theta)$，则 $q \succeq_x r$；当不等式为严格不等式且其他条件均相同时，偏好也为严格偏好。

（A3）序贯（分批）一致性：对于损失可加的独立数据块 x 和 x'，观察到（x、x'）后所诱导的偏好，与序贯更新所诱导的偏好一致。

（A4）独立子问题之间的可分性：若行动空间和基准分别分解为 $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2$ 和 $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$，且损失可加，即 $\ell((\theta_1、\theta_2); x) = \ell_1(\theta_1; x) + \ell_2(\theta_2; x)$，则诱导出的最优规则可分解为 $q^* = q_1^* \otimes q_2^*$，且乘积规则的偏好排序仅取决于其各组成部分的排序。

可分性公理是关键的“独立子问题之间不存在相互作用”要求：当基准和损失函数不存在耦合时，它排除了引入虚假耦合的偏离惩罚。这是决策理论中乘积／递归条件的对应概念，而后者是稳健选择中基于熵的惩罚的基础（Strzalecki，2011；Matˇejka 和 McKay，2015）。

假设1（变分表示）。对于每个 x，存在 $\eta > 0$ 和一个泛函 $D(\cdot\|\pi)$：$\Delta(\Theta) \to [0, \infty]$，使偏好具有如下变分形式(4)。我们进一步假设 $D(\pi\|\pi) = 0$，并且 $D(\cdot\|\pi)$ 关于 q是严格凸且下半连续的。

假设 2 （f-散度偏离成本）。 对于每个基准 π，偏离成本具有可分形式 $D(q\|\pi) = \int_\Theta \varphi(dq/d\pi)\, d\pi$ 当 $q \ll \pi$ 时成立，而在其他情况下 $D(q\|\pi) = +\infty$，其中 $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$是凸的，且满足 $\varphi(1) = 0$。我们假设其关于 q 严格凸。

假设2 涵盖了决策理论与统计学中最广泛使用的惩罚项（包括相对熵），同时仍足够宽泛，使得下述识别结果并非平凡。

命题1（可分性蕴含乘积可加性）。设公理（*A4*）与假设*1*成立。则对于乘积空间 $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2$与乘积基准分布 $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$，可分性蕴含乘积可加性限制

$$D(q_1 \otimes q_2 \| \pi_1 \otimes \pi_2) = D(q_1\|\pi_1) + D(q_2\|\pi_2), \quad \textit{for all } q_1 \in \Delta(\Theta_1),\ q_2 \in \Delta(\Theta_2).$$

命题 2 （KL散度是唯一满足乘积可加性的 f散度）。设假设*2*。若 D 满足命题*1* 对所有乘积基准分布与乘积测度的乘积可加性性质，则D（$q\|\pi$）$= c\, D_{\mathrm{KL}}$（$q\|\pi$）对 $c > 0$，其中 c 可被吸收进 η，见（4）。

命题2 是在广泛的 f散度族中的一项识别结果：乘积可加性在尺度意义下唯一确定相对熵。

推论 2 （广义贝叶斯作为唯一最优决策后验）。 假设公理（*A1*）–（*A4*）和假设 *1*–*2*。那么，(4)的唯一最优解满足广义贝叶斯形式 (2)。

该推论为将广义贝叶斯视为决策后验提供了基于偏好的依据。基准 π 被解释为参考规则或默认规则，而熵惩罚则是在尊重独立子问题间可分性的前提下，偏离该默认规则所付出的代价。尺度 η 成为偏好设定的一项特征，而非似然模型的附带产物，因此其校准在应用中至关重要。

定理 1 和推论 2 共同呈现了“全貌”。定理 1指出了广义贝叶斯何时符合经典信念更新意义上的贝叶斯方法。在此情形之外，恰当的理解见推论 2：广义贝叶斯是在变分偏好设定下作为最优随机化决策规则而产生的。在我们的假设下，偏差惩罚项（除尺度因子外）为相对熵，从而得到广义贝叶斯（吉布斯）规则。

3.3 基于损失的更新的设计方案

上述结果可以从生成式的角度来解读：一旦分析者选定操作性的拟合概念以及更新应满足的一致性要求，这些结果便说明了如何构建更新规则。

步骤1：明确目标与损失。 选择一个行动/参数空间 Θ 和一个损失 $\ell(\theta; x)$，以此表述推断目标和拟合单位。这个选择决定了优化的对象（风险），因此也决定了最终得到的“后验分布”权重旨在实现什么。

步骤2：明确组合结构 判断问题能否合理地分解为独立子问题，以及是否要求损失和正则化在这些组成部分上均具有可加性（公理 A4）。这并非无关紧要的技术细节。它决定了偏离成本是否应当以可加方式组合。

步骤3：选择更新族并校准温度 在广义的熵正则化偏好表示（假设1）类别中，公理 A4 确定了 KL散度（命题2），从而得到吉布斯/广义贝叶斯更新。在该范围之外，KL正则化广义贝叶斯是一种建模选择，而非典范性结果，学习率/温度 η 必须通过明确的校准规则加以指定（例如安全贝叶斯、损失似然自助法或留出预测匹配；第 6节）。

诊断（KL散度缺乏依据时）。如果不存在可信的独立性结构，使目标函数能够加性分解——例如，存在全局约束、排序损失、相关时间序列、网络交互或其他耦合关系时——那么公理 A4 就不是合理的要求，KL惩罚项也不会因一致性而成为唯一选择。在这种情况下，适当的更新取决于预期采用的组合规则，也可以考虑其他正则项。

在信念后验情形中，后验不确定性反映了对潜在抽样模型 $p(\cdot|\theta)$ 以及先验 $\pi(\theta)$ 的不确定性，而损失只在决策阶段起作用。基于损失的更新将部分认知负担转移到了别处：在缺少联合抽样模型的情况下，更新取决于 (i) 损失的选择 $\ell(\theta; x)$，它编码了实际采用的拟合概念；(ii) 用于论证特定偏差惩罚项（例如公理 A4 下的 KL散度）的组合／可分离结构；以及 (iii) 学习率／温度 η 的校准。在信念贝叶斯中，其尺度由似然固定，而在这里则必须明确选择。因此，不应将广义贝叶斯视为“没有模型的贝叶斯”，而应将其视为“关于如何在明确指定的损失下进行选择的模型”，因此必须透明地说明损失选择和校准方式。

4 边际似然并非决策后验的规范性证据

一个长期存在的困惑源于对边际似然和贝叶斯因子的种种说法。在信念后验解释下，边际似然是观测数据在联合模型下一个定义良好的概率，并具有标准的证据解释。对于决策后验，吉布斯后验中起“归一化常数”作用的量无法由更新确定；若无额外结构，贝叶斯因子式的证据也没有明确定义。

4.1 信念证据与决策证据

信念后验。若后验分布由联合模型 $p_\theta(x)$ 与先验 $\pi(\theta)$ 产生，则边际似然 $m(x) = \int p_\theta(x)\pi(\theta)d\theta$ 是该模型下观测数据的预测概率，而贝叶斯因子则在标准意义上比较证据支持。

决策后验 对于基于损失 $\ell(\theta; x)$ 的广义贝叶斯（吉布斯）后验分布，

$$q(\theta|x) \propto \pi(\theta)\exp\{-\eta\ell(\theta; x)\}, \tag{5}$$

归一化常数 $Z(x) = \int \exp\{-\eta\ell(\theta; x)\}\pi(d\theta)$ 有时会以类似贝叶斯因子的方式使用。然而，除非 (5) 是信念后验，$Z(x)$不具有信念证据解释，也不是与决策后验本身相关联的对象。

规范性判据。两个损失函数 ℓ 和 $\tilde{\ell}$ 若仅相差一个仅依赖数据的项，$\ell(\theta; x) = \tilde{\ell}(\theta; x) + c(x)$则对任意固定的1，通过（1）诱导出相同的决策后验。任何被视为与决策后验相关联的证据量都应在这类损失等价变换下保持不变；我们称这样的证据量对于该决策后验是规范的。

4.2 广义边际似然的不可识别性

广义贝叶斯后验在损失函数仅依赖数据的平移下保持不变，而归一化常数则不然。

命题*3*（决策后验无法识别归一化常数）。固定 $\eta > 0$ 和 Θ上的一个基准分布 π。令 $\ell(\theta; x)$为一个损失函数，并通过（*5*）定义广义后验 $q(\theta|x)$，其归一化常数为 $Z(x)$。对于任意可测函数 $c(x)$，定义平移后的损失函数 $\ell_c(\theta; x) = \ell(\theta; x) + c(x)$。令 $q_c(\theta|x)$和 $Z_c(x)$分别表示对应的后验分布和归一化常数。则对所有 x，

$$q_c(\theta|x) = q(\theta|x), \quad \textit{but} \quad Z_c(x) = e^{-\eta c(x)} Z(x).$$

后验映射 $x \mapsto q(\cdot|x)$ 无法识别 $x \mapsto Z(x)$。

证明。 因子 $\exp\{-\eta c(x)\}$ 在对 θ 进行归一化时会抵消，但仍保留在定义 Z 的积分中。 □

例2 (经验似然/指数倾斜约定不改变 q，但会重新缩放 Z。)。 准后验分布通常通过对经验似然型准则取指数构造，而这类准则仅在相差只依赖于数据的常数的意义下定义；例如参见 *Owen(2001)* 以及 *Lazar(2003)* 中的贝叶斯变体；*Schennach (2005年)*。令$g(\theta; x_i) \in \mathbb{R}^k$ 为矩条件，并令 $\{p_i(\theta)\}_{i=1}^n$ 表示满足以下条件的经验似然（*EL*）权重

$$\max_{p_1,\ldots,p_n} \sum_{i=1}^n \log p_i \quad s.t \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1, \ \sum_{i=1}^n p_i g(\theta; x_i) = 0, \ p_i \geq 0.$$

一个标准的判据是（剖面）《经验似然》比率（*Owen*，*2001*）

$$\log R(\theta; x) = \sum_{i=1}^n \log\{n\, p_i(\theta)\},$$

而一种常见的准后验使用损失函数 $L(\theta;\ x) = -$对数 $R(\theta;\ x)$ -2对数 R（或其缩放版本，例如 -2对数 R）。另一种同样标准的约定是使用未取比率的*EL*目标函数 $-\sum_{i=1}^{n}$对数 $p_i(\theta)$，它与 $L(\theta;\ x)$的差别仅在于只依赖数据的常数 n对数 n：

$$-\sum_{i=1}^{n}\log p_i(\theta) = L(\theta;x) + n\log n.$$

同样，指数倾斜（*ET*）通过在满足相同矩条件的约束下，最小化相对于均匀权重的 $\{w_i(\theta)\}_{i=1}^{n}$ *KL*散度来选择权重（*Kitamura*和*Stutzer*，*1997*年；*Schennach*，*2005*年）：

$$\min_{w_1,\ldots,w_n}\sum_{i=1}^{n} w_i\log\left(\frac{w_i}{1/n}\right) \quad s.t \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1,\ \sum_{i=1}^{n} w_i g(\theta;x_i) = 0,\ w_i \geq 0.$$

由于 $\sum_i w_i = 1$，*ET* 目标函数满足

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\log\left(\frac{w_i}{1/n}\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i\log w_i + \log n,$$

因此，其他等价的 *ET* 约定只相差一个仅依赖于数据的常数 对数 n。

定义广义后验 $q(\theta|x) \propto exp\{-\eta L(\theta;\ x)\}\pi(\theta)$，其归一化常数为 $Z(x) = \int exp\{-\eta L(\theta;x)\}\pi(\theta)\ d\theta$。若在任意两种此类 *EL/ET* 约定之间切换（或者，更一般地，为了数值稳定性而对准则进行中心化），将 L 替换为 $L^c(\theta;x) = L(\theta;\ x) - c(x)$，其中 $c(x)$ 是任意仅依赖于数据的常数，则 $q^c(\cdot|x) = q(\cdot|x)$，但

$$Z^c(x) = \int \exp\{-\eta L^c(\theta;x)\}\pi(\theta)\,d\theta = e^{\eta c(x)}Z(x).$$

（这是命题 *4*，其识别为 $c_{Prop.4}(x) = -c(x)$。）因此，基于广义边际似然的类贝叶斯因子比值是非规范的：对于由 $m = 1$、2 索引的两种约定，

$$\frac{Z_1^c(x)}{Z_2^c(x)} = \exp\{\eta(c_1(x) - c_2(x))\}\frac{Z_1(x)}{Z_2(x)},$$

尽管决策后验 $q_1(\cdot|x)$与 $q_2(\cdot|x)$ 保持不变。

同样的非规范性源于损失缩放。若 $\ell'(\theta;x) = a\,\ell(\theta;\ x)$，且 $a > 0$与 $\eta' = \eta/a$，则广义后验映射保持不变，因为 $\exp\{-\eta'\ell'(\theta;x)\} = \exp\{-\eta\ell(\theta;x)\}$，从而$q'(\cdot|x) = q(\cdot|x)$。但归一化常数依赖于 (η,ℓ) 的绝对尺度，因此除非损失尺度（等价地，温度）由额外结构或外部校准加以固定，否则不能将其解释为内在信念证据。

推论3（广义贝叶斯因子并非定义良好的证据）。考虑由 $j \in \{0,1\}$ 索引的两个基于损失的更新。假设定义了 $BF_{10}(x) = Z_1(x)/Z_0(x)$。那么，对于任意严格正的

$g(x)$，存在仅依赖数据的平移，使得后验分布保持不变，$q'_j(\cdot|x) = q_j(\cdot|x)$，但 $BF'_{10}(x) = g(x)\,BF_{10}(x)$。在信念后验情形之外，$BF_{10}(x)$ 并非由更新规则决定的证据量。

推论 3 排除了将吉布斯归一化常数视为决策后验映射所固有的规范信念证据的做法，因为它会随某些约定（例如仅依赖数据的平移）而变化，而这些约定不会改变 $q(\cdot|x)$。这并不妨碍在固定特定损失尺度和约定后，将 $Z_m(x)$ 用作依赖模型的归一化因子；它所说明的是，贝叶斯因子式证据主张需要广义后验本身之外的额外识别结构。

下面通过一个简单例子说明，即使后验分布不变，证据主张也可能发生逆转。考虑两位分析者，他们针对每个模型 $q_m(\cdot|x)$ 采用相同的广义后验映射 m，<style id='but'>但使用数值上等价的不同稳定化处理，即相差仅依赖数据的常数的损失函数 $c_m(x)$。于是，他们基于 $Z_m(x)$ 报告的“广义贝叶斯因子”比值会相差一个乘数$\exp\{\eta(c_1(x) - c_2(x))\}$(例 2)，在实际样本量下，这个乘数可能极其巨大。因此，两种实现可以产生完全相同的后验分布和预测，却报告彼此不相容的证据结论；这凸显了在对数损失机制之外，$Z_m(x)$ 并非规范的信念证据。

对命题 3 的一种自然回应是从平移等价类 $\ell(\theta;\, x) \sim \ell(\theta; x) + c(x)$ 中选取 一个规范代表元，例如，通过固定损失来实现：

$$\tilde{\ell}(\theta; x) = \ell(\theta; x) - \inf_{\vartheta \in \Theta} \ell(\vartheta; x) \geq 0, \qquad \tilde{Z}(x) = \int \exp\{-\eta \tilde{\ell}(\theta; x)\}\, \pi(d\theta) \in (0, 1].$$

˜ ˜固定锚点可以消除仅由数据引起的平移歧义：若 $\ell'(\theta; x) = \ell(\theta; x) + c(x)$，则 $\ell' = \ell$ 因此˜ ˜$Z'(x) = Z(x)$。此外，根据引理1，

$$-\frac{1}{\eta} \log \tilde{Z}(x) = \min_{q \in \Delta(\Theta)} \left\{ \int \tilde{\ell}(\theta; x)\, q(d\theta) + \frac{1}{\eta} D_{\mathrm{KL}}(q \| \pi) \right\},$$

因此 $-\frac{1}{\eta}$ ˜$\log Z(x)$ adm 它相对于样本内最优值具有有限样本下的“复杂度/遗憾”解释 .

然而，锚定并不能恢复用于模型比较的贝叶斯因子类比。由于锚点 ˜ ˜是特定于模型的，ℓ_m 去除了样本内拟合项i $\mathrm{nf}_\theta\, \ell_m(\theta; x)$，因此 $Z_m(x)$度量的是模型 m内最佳拟合行动周围的集中度／复杂度，而非该最佳拟合在各˜ ˜模型之间的绝对质量。因此，任何“锚定贝叶斯因子” $Z_1(x)/Z_2(x)$比较的是曲率／正则化权衡，而不是信念后验意义上的证据。在决策后验机制中，模型比较必须转而通过预测评估，与所选损失／评分规则保持一致。广义后验映射的任何平移不变泛函都必须消去仅含数据的项，因而其本身无法保留贝叶斯因子式证据所要求的跨模型拟合成分。

4.3 一种构造性替代方案：平移不变预测评分

推论3 排除了在对数损失（信念后验）机制之外将吉布斯归一化常数视为典范信念证据的做法。一种自洽的替代方案是，按预测表现来比较各种程序，亦即对由更新所诱导的预测分布应用适当评分规则。

设 $S(P,\ y)$ 是针对结果 $y \in \mathcal{Y}$ 和预测分布 P on $\mathcal{Y}$ 的（严格）适当评分规则。为使符号与本文其他部分保持一致，用 x_t 表示时刻 t 的观测数据，并令 $y_t = y(x_t)$ 表示被预测的组成部分（可能是 $y_t = x_t$）。对于模型/程序 m，令 $q_{m,\ t}(\cdot) = q_m(\cdot|x_{1:t-1})$ 表示观测到 $x_{1:t-1}$ 后的决策后验，并定义由此得到的一步预测分布

$$P_{m,t}(\ \cdot|x_{1:t-1}) = \int p_m(\ \cdot|\theta)\, q_{m,t}(d\theta), \tag{6}$$

其中 $\{p_m(\cdot|\theta)\colon\ \theta \in \Theta_m\}$ 是由 θ 索引的预测族。（等价地，θ 可以索引 行动，而这些行动本身对应于预测分布；不需要针对 $x_{1:n}$ 的联合抽样模型。）序贯预测评分为

$$\mathrm{Score}_m(x_{1:n}) = \sum_{t=1}^{n} S(P_{m,t}(\cdot|x_{1:t-1}),\, y_t)\,, \tag{7}$$

相应的留出评分则通过将求和范围限制在测试集上得到。

命题 *4*（预测评分的平移不变性）。假设 $q_m(\cdot|x)$ 的更新规则基于损失且对仅依赖数据的平移不变：对于任意可测的 $c_m\colon\ \mathcal{X} \to \mathbb{R}$，将 $\ell_m(\theta; x)$ 替换为 $\ell'_m(\theta;\ x)\ = \ell_m(\theta; x)\ + c_m(x)$，不会改变 $q_m(\ \cdot|x)$（因此对每个 t，$q_{m,t}$ 也保持不变）。于是，由此得到的预测分布 *(6)* 以及 *(7)* 中的预测评分 $\mathrm{Score}_m(x_{1:n})$ 对此类平移不变。因此，基于预测评分的模型比较相对于平移等价 $\ell_m \sim \ell_m + c_m(x)$ 是规范的，这不同于基于 $Z_m(x)$ 的比较。

证明。平移不变性意味着$q'_{m,\ t} = q_{m,\ t}$ 对每个 t都成立。因此

$$P'_{m,t}(\cdot|x_{1:t-1}) = \int p_m(\cdot|\theta)\, q'_{m,t}(d\theta) = \int p_m(\cdot|\theta)\, q_{m,t}(d\theta) = P_{m,t}(\cdot|x_{1:t-1}),$$

（7）中的每一项均保持不变。对 t求和可得 分数$'_m(x_{1:n})\ =$ 分数$_m(x_{1:n})$。 □

取 $S(P,\ y)\ = -$ 对数 $p(y)$，得到累积对数预测密度

$$\mathrm{LPD}_m(x_{1:n}) = \sum_{t=1}^{n} \log p_{m,t}(y_t|x_{1:t-1}), \qquad p_{m,t}(y|x_{1:t-1}) = \frac{d}{dy} P_{m,t}(y|x_{1:t-1}),$$

以及通过 Δ对数预测密度$_{10} =$ 对数预测密度$_1 -$对数预测密度$_0$ 继承命题 4中的平移不变性。对于连续结果，也可以改用适当评分，例如连续排序概率评分（连续排序概率评分），

以在结果尺度上获得稳健性和可解释性。

4.4 问题何时会消失?

对数损失／信念后验情形。 如果损失为负对数似然，定理 1 保证在归一化抽样模型下得到普通贝叶斯后验分布，并使贝叶斯因子恢复其标准解释。

决策后验情形。在对数损失之外，信念证据的自然替代方案是与决策相关的预测性能评分——即与所选损失或评分规则相一致的序贯预测准则或交叉验证准则。这些方法明确指出，证据是相对于决策准则定义的，而非从生成似然继承而来。

5 对决策规则混合采用期望效用会导致退化

对基于损失的后验的一种诱人解释是，它们代表最优随机化。本节指出一个常见障碍：如果直接将经典的冯·诺伊曼–摩根斯坦期望效用公理应用于决策规则的混合，那么对随机化规则进行优化最终会退化为选择（本质上）单一行动。其含义是：任何非退化的基于损失的后验，都必须以对决策规则的非线性偏好为依据。

5.1 对随机化决策规则的偏好

固定观测数据 x 和行动空间 Θ。一个（随机化）决策规则是概率测度$q \in \Delta(\Theta)$。对于 q，$r \in \Delta(\Theta)$ 和 $\alpha \in (0,\ 1)$，用 $\alpha q + (1-\alpha)r$ 表示其混合。令 $\succeq_x$ 表示决策者在观察到 x后对 $\Delta(\Theta)$的偏好关系。

公理（决策规则上的 vNM 公理）。我们称 $\succeq_x$ 在 $\Delta(\Theta)$上满足 vNM公理，如果它满足：(i) 完备性和传递性（弱序）；(ii) 对混合连续；以及 (iii) 满足独立性：对所有 $q,\ r,\ s \in \Delta(\Theta)$，以及所有 $\alpha \in (0,\ 1)$，$q \succeq_x r \Leftrightarrow \alpha q + (1-\alpha)s \succeq_x \alpha r + (1-\alpha)s$ (冯·诺依曼和摩根斯坦，1944）。

5.2 冯·诺依曼独立性下的退化

命题 *5*（决策规则的混合满足 *vNM* 公理意味着退化）。固定 x。假设 $\succeq_x$ 在 $\Delta(\Theta)$上满足 *vNM* 公理。那么，存在一个可测函数 $u_x : \Theta \to \mathbb{R}$，使得偏好具有期望效用表示 $U_x(q) = \int_\Theta u_x(\theta) q(d\theta)$，$q \succeq_x r \Leftrightarrow U_x(q) \geq U_x(r)$。此外，如果$q_x^* \in arg\,max_{q \in \Delta(\Theta)} U_x(q)$存在，那么每个最大化者都支撑在 $\Theta_x^* = arg\,max_{\theta \in \Theta} u_x(\theta)$上；特别地，存在一个最优退化规则 $\delta_{\theta_x^*}$。如果 θ_x^* 唯一，那么唯一的最优规则就是点质量。

表 1：一致性手册：信念后验与决策后验

性质／主张	信念后验	决策后验	替代
对……的解释	条件信念	随机化决策规则中的权重	决策理论
概率		决策规则	最优性
联合分布的存在	是（按构造）	否（仅在对数损失的情况下）	损失作为原始概念
模型			
动态一致性	条件选择	序贯相干性	算子相干性
	一致性		
可交换性（de Finetti）	序列上的信念约束	并不蕴含	置换不变性
似然原则	在指定的	通常不适用	损失原则
	模型		
边际	定义明确、基于模型	在……中没有规范的对应物	基于决策的模型
似然/贝叶斯因子		一般	比较
尺度识别	似然确定尺度	尺度自由	校准/稳健性
			η的选择

命题5 明确阐述了一个基本观点：当冯·诺依曼独立性应用于决策规则的混合时，除了在同样最优的纯行动之间打破平局，随机化在行为上无关紧要。

推论 4 （非退化的基于损失的后验需要非线性偏好）。 考虑任意一种基于损失的更新：对于典型数据 x，它会输出一个非退化分布 $q(\cdot|x)$，且该分布的支撑集不包含于某个单一效用函数 $u_x(\theta)$ 的最大值集合中。那么，$q(\cdot|x)$ 不能作为关于 $\Delta(\Theta)$ 的冯·诺依曼—摩根斯坦期望效用偏好的唯一最优解而获得。

一旦允许对随机化决策规则具有非线性偏好，基于损失的后验便在决策理论上自然，例如，可以通过惩罚偏离基准规则 π 来实现。这类偏好会引入曲率，使内部解成为最优解，并使随机化成为一种有意义的正则化工具。

6 一致性手册及其启示

本节将这些刻画转化为一本实用的“一致性手册”。当某个程序产生信念后验（定理1）时，它便继承了熟悉的贝叶斯一致性保证。当它产生决策后验（推论 2）时，它作为最优随机化决策规则是相容的，但若干基于信念的推论便不再自动成立。表1 总结了主要区别。

6.1 关键启示

本书可概括为：信念后验支撑基于信念的决策分析；决策后验支撑基于规则的决策分析。

首先，除非对数损失成立，否则“先验”意为“基准规则”。当定理 1 不成立时， π 不应被解读为先验信念。它是作为正则化锚点的基准规则或参考规则。依赖先验信念的论证——例如可交换性或主观概率校准——不会自动适用。能够沿用的是将 π 解释为复杂度控制、默认行动或初始承诺。

其次，动态一致性被替换，而非保留。在基于信念的贝叶斯方法中，动态一致性将关于行动的条件偏好与无条件偏好联系起来；更新规则源于条件化之后计划仍保持最优（Ghirardato，2002年）。在基于损失的更新中，一致性概念是算子相干性：用加性损失依次更新，与用合并损失一次更新，会得到相同的决策后验（Bissiri 等人，2016 年）。这些是不同的要求。

第三，可交换性并非继承自顺序不变性。可加损失的置换不变性并不意味着可交换性作为一种信念约束（de Finetti，1937年），因为未必存在一个底层的联合概率模型。某一准则的置换不变性并不能替代概率可交换性。

第四，证据度量变得依赖于任务。信念后验带有与联合模型相联系的典范证据摘要（边际似然、贝叶斯因子）。决策后验并不产生典范的模型证据；比较必须用定义该更新的同一决策语言来表述。

关于广义后验的报告标准，我们建议如下：为避免将基于信念的主张带入决策后验机制，应用基于损失的更新时应报告：**(i)** 损失 $\ell(\theta; x)$ 及其尺度/单位；**(ii)** 学习率/温度 η 及其选取程序；**(iii)** 输出是被解释为信念后验（若是，则应说明定理1所隐含的似然模型）还是决策后验；**(iv)** 激发公理 A4 的预期独立性/可分离结构（如有）；**(v)** 所用的模型比较准则（最好采用与损失／评分规则一致的预测评分，而非 $Z(x)$）；以及 **(vi)** 任何不改变 $q(\cdot|x)$、但会影响 $Z(x)$ 的实现约定（中心化/归一化）。

6.2 学习率校准

或许最显而易见的实际结果，是学习率 η 的地位。在普通贝叶斯方法中，对数似然的尺度由概率模型固定，因此自然温度为 1。在基于损失的更新中， η 是偏好设定的一部分：它控制集中程度，因此必须经过校准。

已有多种有原则的校准策略被提出。损失似然自助法（Lyddon 等人，2019年）选择 η，使后验不确定性能够反映基于损失的估计量的抽样变异性。其他方法则致力于在模型错设下寻找安全的学习率（Gr¨unwald 和 van Ommen，2017 年）。决策理论视角清楚地揭示了校准为何至关重要：它取代了信念后验下自动确定的概率尺度识别。

6.3 简明核对清单

（C1）解释：您是在主张信念语义，还是认为后验分布是一种决策规则？如果主张信念语义，定理1 确定了所需的损失结构。（C2）损失依据：为什么所选损失能够代表当前的推断目标或决策问题？（C3）基准依据：π 代表什么？结论对这一选择有多敏感？（C4）校准：如何选择学习率？它旨在实现什么性质（覆盖率、稳健性、预测安全性）？

基于损失的更新具有一致性，但除非损失是对数损失，否则这种一致性属于决策后验分布。第3 节的刻画结果明确划分了这一区别；本书将其转化为可操作的指导原则。

7 讨论

广义贝叶斯及相关的基于损失的更新已成为标准工具。它们的成功体现在经验和方法论层面：在缺乏完整指定的似然、似然不可靠或与推断目标不一致的情况下，这些方法往往能提供稳定的程序。本文旨在明确划分信念后验与决策后验之间的界限。

广义贝叶斯最适合理解为一种在明确给定损失和基准的条件下，选择随机化决策规则的一致机制；只有在对数损失情形下，才能恢复贝叶斯信念更新。明确这一点，有助于强化基于损失的推断的方法论基础。

参考文献

F. J. Anscombe 和 R. J. Aumann。主观概率的定义。《数学统计年刊》，34(1):199–205，1963年。doi: 10.1214/aoms/1177704255。P. G. Bissiri、C. C. Holmes 和 S. G. Walker。更新信念分布的一般框架。《皇家统计学会学报：*B*辑（统计方法论）》，78(5):1103–1130，2016 年。doi: 10.1111/rssb.12158。O. Catoni。PAC-贝叶斯监督分类：统计学习的热力学。*arXiv* 预印本 *arXiv:0712.0248*，2007 年。V. Chernozhukov 和 H. Hong。一种用于经典估计的 MCMC 方法。《计量经济学杂志》，115 (2):293–346，2003年。

B. de Finetti。La pr´evision：其逻辑法则及主观来源。亨利·庞加莱研究所年刊´e，7(1):1–68，1937年。P. Ghirardato。在条件世界中重新审视 Savage。《经济理论》，20(1):83–92，2002年。doi: 10. 1007/s001990100188。P. Gr¨unwald 和 T. van Ommen。设定错误的线性模型中贝叶斯推断的不一致性及其修正方案。《贝叶斯分析》，12(4):1069–1103，2017 年。doi: 10.1214/17-BA1085。L. P. Hansen 和 T. J. Sargent。鲁棒控制与模型不确定性。《美国经济评论》，91(2): 60–66，2001年。doi: 10.1257/aer.91.2.60。Y. Kitamura 和 M. Stutzer。广义矩估计法的信息论替代方法。《计量经济学》，65(4):861–874，1997年。doi: 10.2307/2171942。N. A. Lazar。贝叶斯经验似然。《生物统计学》，90(2):319–326，2003年。doi: 10.1093/biomet/90.2.319。S. P. Lyddon、C. C. Holmes 和 S. G. Walker。广义贝叶斯更新与损失似然自助法。《生物统计学》，106(2):465–478，2019年。doi: 10.1093/biomet/asz006。F. Maccheroni、M. Marinacci 和 A. Rustichini。模糊厌恶、稳健性与偏好的变分表示。《计量经济学》，74(6):1447–1498，2006年。doi: 10.1111/j.1468-0262.2006.00716. x。F. Matˇejka 和 A. McKay。对离散选择的理性疏忽：多项逻辑回归模型的新基础。《美国经济评论》，105(1):272–298，2015年。doi: 10.1257/aer.20130047。A. B. Owen。《经验似然》。Chapman & Hall/CRC，2001年。L. J. Savage。《统计学基础》。John Wiley & Sons，1954年。S. M. Schennach。贝叶斯指数倾斜经验似然。《生物统计学》，92(1):31–46，2005年。doi: 10.1093/biomet/92.1.31。T. Strzalecki。乘子偏好的公理化基础。《计量经济学》，79(1):47–73，2011年。doi: 10.3982/ECTA8155。E. Tallman 和 M. West。贝叶斯预测决策综合。《英国皇家统计学会杂志 *B*辑：统计方法学》，86(2):340–363，2024年。J. von Neumann 和 O. Morgenstern。《博弈论与经济行为》。普林斯顿大学出版社，1944年。J. Watson 和 C. Holmes。近似模型与鲁棒决策。《统计科学》，31(4):465–489，2016 年。doi: 10.1214/16-STS592。

《何时广义贝叶斯才是贝叶斯？》的补充材料

S1 证明与支持性结果

本附录汇集了证明。全文中， $\Delta(\Theta)$ 表示可测空间 $(\Theta, \mathcal{T})$ 上的概率测度。

S1.1 定理1的证明

证明。假设 (i) 成立：存在 $\{p_\theta(x)\}$，使得对所有 x， $q(\theta|x) \propto \pi(\theta)p_\theta(x)$。与 $q(\theta|x) \propto \pi(\theta)\exp\{-\eta\ell(\theta;\, x)\}$ 比较可知，对每个固定的 x,

$$p_\theta(x) = a(x)\exp\{-\eta\ell(\theta; x)\}$$

存在某个因子 $a(x) > 0$，它不依赖于 θ。取对数得 $\ell(\theta; x) = -(1/\eta)\log p_\theta(x) + c(x)$，其中$c(x) = -(1/\eta)\log a(x)$，从而证明了 (ii)。

反过来，假设 (ii) 成立。那么 $\exp\{-\eta\ell(\theta; x)\} = p_\theta(x)\exp\{-\eta c(x)\}$。因子 $\exp\{-\eta c(x)\}$ 不依赖于 θ，在对 θ进行归一化时会抵消，因此广义更新等于似然为 $p_\theta(x)$ 时的贝叶斯后验，从而证明了 (i)。 □

S1.2 从KL正则化选择到指数倾斜

引理1 (吉布斯规则求解KL正则化风险)。 固定 x、损失 $\ell(\theta;\ x)$、基准 π 和 $\eta > 0$。假设$\int \exp\{-\eta\ell(\theta;\ x)\}\pi(d\theta) < \infty$。那么，该优化问题

$$\inf_{q\in\Delta(\Theta)} \left\{ \int \ell(\theta; x)q(d\theta) + \frac{1}{\eta} D_{\mathrm{KL}}(q\|\pi) \right\}$$

具有唯一最小化者

$$q^*(d\theta|x) = \frac{\exp\{-\eta\ell(\theta; x)\}\pi(d\theta)}{\int \exp\{-\eta\ell(\vartheta; x)\}\pi(d\vartheta)}.$$

此外，最优值等于 $-(1/\eta)\log \int\exp\{-\eta\ell(\theta;\ x)\}\pi(d\theta)$。

证明。 令 $Z = \int \exp\{-\eta\ell(\theta; x)\}\pi(d\theta)$，并按上述方式定义 q^*。对于任意 $q \ll \pi$，将 KL 散度写为 $D_{\mathrm{KL}}(q\|\pi) = \int \log(dq/d\pi)dq$。考虑

$$\int \ell\, dq + \frac{1}{\eta} D_{\mathrm{KL}}(q\|\pi) = \frac{1}{\eta}\int \log\left(\exp\{\eta\ell\}\frac{dq}{d\pi}\right) dq.$$

加上再减去 $\log Z$，并使用 q^* 的定义：

$$\log\left(\exp\{\eta\ell(\theta;x)\}\frac{dq}{d\pi}\right) = \log\left(\frac{dq}{dq^*}\right) + \log Z.$$

在 q 下积分可得

$$\int \ell\, dq + \frac{1}{\eta} D_{\mathrm{KL}}(q\|\pi) = \frac{1}{\eta} D_{\mathrm{KL}}(q\|q^*) + \frac{1}{\eta}\log Z.$$

由于 $D_{\mathrm{KL}}(q\|q^*) \geq 0$，且当且仅当 $q = q^*$（几乎处处）时取等号，因此 q^* 是唯一最小化者。 □

S1.3 第 3.2 节的证明3.2

第 3.2 节的论证包含三个逻辑上相互独立的部分：(i) 随机化决策规则的偏好变分表示，(ii) 由独立子问题之间的可分性所蕴含的偏离成本乘积可加性限制，以及 (iii) 在 f-散度类中识别唯一的乘积可加偏离成本，从而确定相对熵（仅相差一个尺度因子）。

步骤1：变分表示（假设）。我们通过假设 1来单独考察偏差惩罚项的作用。该假设提出，随机化规则上的条件偏好具有正则化形式（4）。这一假设在决策理论文献中很常见（Maccheroni 等人，2006；Strzalecki，2011）。

步骤2：可分性蕴含乘积可加性。

命题*1*的证明。考虑一个因子化决策问题，其中 $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2$, $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$，且损失可加。在假设 1下，公理（A4）要求，对 $q_1 \otimes q_2$ 与 $r_1 \otimes q_2$ 的比较不应取决于 q_2的具体选择。将其应用于变分准则可知，增量偏离成本

$$\Delta(q_1, r_1; q_2) := D(q_1 \otimes q_2 \| \pi_1 \otimes \pi_2) - D(r_1 \otimes q_2 \| \pi_1 \otimes \pi_2)$$

不能依赖于 q_2。令 $r_1 = \pi_1$，可得 $D(q_1 \otimes q_2\|\pi_1 \otimes \pi_2) - D(\pi_1 \otimes q_2\|\pi_1 \otimes \pi_2)$ 仅取决于 q_1。根据对称性，交换各组成部分的角色，可得一个类似结论，即该表达式仅取决于 q_2。结合这两种不变性，并利用 $D(\pi_1 \otimes \pi_2\|\pi_1 \otimes \pi_2) = 0$，得到如下分解

$$D(q_1 \otimes q_2\|\pi_1 \otimes \pi_2) = D(q_1 \otimes \pi_2\|\pi_1 \otimes \pi_2) + D(\pi_1 \otimes q_2\|\pi_1 \otimes \pi_2).$$

在不同领域中一致地解释 $D(\cdot\|\cdot)$ 可得到 $D(q_1\otimes\pi_2\|\pi_1\otimes\pi_2) = D(q_1\|\pi_1)$ 和 $D(\pi_1\otimes q_2\|\pi_1\otimes\pi_2) = D(q_2\|\pi_2)$，因此具有乘积可加性。 □

步骤3：在 f-散度中，乘积可加性必然导出 KL散度。

命题的证明 2。 在假设 2下，对于 $q \ll \pi$ 我们可以写成 $D(q\|\pi) = \int \varphi(dq/d\pi)\, d\pi$，其中 φ为凸函数，且 $\varphi(1) = 0$。对于乘积测度 $q = q_1 \otimes q_2$ 和 $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$，拉东–尼科迪姆导数可分解为乘积。因此，命题 1 中的乘积可加性等价于恒等式

$$\int \varphi(A(\theta_1)B(\theta_2))\ (\pi_1 \otimes \pi_2)(d\theta_1\, d\theta_2) = \int \varphi(A(\theta_1))\, \pi_1(d\theta_1) + \int \varphi(B(\theta_2))\, \pi_2(d\theta_2),$$

对所有满足 $\int A\, d\pi_1 = \int B\, d\pi_2 = 1$ 的可测 $A = dq_1/d\pi_1$ 和 $B = dq_2/d\pi_2$

hol .

标准的函数方程论证表明，凸解为 $\varphi(t) = c\, t \log t + a(t-1), c \geq 0$，而严格凸性则要求 $c > 0$。线性项的积分为零，因为 $\int a(dq/d\pi - 1)\, d\pi = a(\int dq - \int d\pi) = 0$，因此它不会影响 $D(q\|\pi)$。所以 $D(q\|\pi) = c\, D_{\mathrm{KL}}(q\|\pi)$，如所述。 □

步骤 4：指数倾斜。 令 D 正比于 D_{KL}，则根据引理 4，(1) 的优化解是吉布斯规则，且乘法常数并入 η。

推论 2 的证明。 结合命题 1 和命题 2，可得 $D(q\|\pi) = cD_{\mathrm{KL}}(q\|\pi)$，其中 $c > 0$。将 c 并入 η，见式 (4)。引理 1 继而给出广义贝叶斯形式 (2)；由严格凸性可知其唯一。

□

注释 1（所证内容与所假设内容）。假设*1* 分离出随机化决策规则上偏好的变分结构。在此结构下，命题*1* 是可分性公理（*A4*）的直接结果。命题*2* 对相对熵在可分的 f-散度偏离成本这一大类中给出了自洽的识别；结合引理*1*，由此在所述假设下得到广义贝叶斯决策规则的简洁且完全显式的推导。