arXiv:2602.01584v1 [math.AT] 2 Feb 2026

拓扑雅可比形式的计算

AKIRA TOMINAGA

Abstract. 我们在素数 2 处计算收敛到拓扑雅可比形式谱 TJF_m 的同伦群的整个下降谱序列，其中每个指标 $m \geq 1$都对应一个这样的谱。一个显式的 TMF 胞腔分解 $\mathrm{TJF}_m \simeq \mathrm{TMF} \otimes P_m$ 将问题化归为分析一个有限复形 P_m，该复形除维数 2 外，每个维数都恰有一个偶维胞腔$\leq 2m$ 。我们利用胞腔结构确定了所有微分。

1. Introduction

拓扑模形式（TMF）谱由 Hopkins 和 Mahowald 构造，是一个配备结构映射 $\pi_{2*}\mathrm{TMF} \to \mathrm{MF}_*$ 的高度 2 谱。通过 Ando–Hopkins–Strickland [AHS01] 和 Ando–Hopkins–Rezk [AHR10], 的工作，TMF 成为 Witten 属的靶对象

$$M\mathrm{String} \to \mathrm{TMF},$$

因此，它也相应地成为同伦论中的核心对象。基于 Lurie 在谱代数几何和椭圆上同调方面的大量工作（[Lur18c], [Lur09], [Lur18a], [Lur18b], [Lur19]），Gepner–Meier 为每个紧李群构造了 TMF 的 G-等变精化 G [GM20]。他们构造了一个谱 Deligne–Mumford 叠 $\mathcal{M}_G$ 和一个保余极限函子

$$\mathcal{E}ll_G \colon \mathrm{Sp}_G^{\mathrm{op}} \to \mathrm{QCoh}(\mathcal{M}_G)$$

满足

(1) $\mathcal{M}_e = \mathcal{M}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{or}}$，其中 e 是平凡群，$\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{or}}$ 是 [Lur18b],中构造的定向椭圆曲线的谱 DM 叠；(2) $\mathcal{M}_{\mathbb{T}} \simeq \mathcal{E}$，其中 $\mathbb{T}$ 是圆，$\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{or}}$ 上的万有定向椭圆曲线（另见 [Mei18，第 4]章）；(3) 每个 $\mathcal{M}_G$ 都是 $\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{or}}$,上的相对概形

并且赋值 $G \mapsto \mathcal{E}ll_G$ 是自然的，因此 G-等变 TMF 可解释为全局等变上 [调理论 24]GLP24]。

在这一框架的基础上，我们引入一族谱——拓扑雅可比形式

$$\mathrm{TJF}_m \coloneqq \Gamma\big(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(me)\big) \qquad (m \geq 1)$$

它们是万有定向椭圆曲线上线丛的整体截面 $\mathcal{E} \to \mathcal{M}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{or}}$。这些谱将 $RO(\mathbb{T})$-分次 TMF 汇集起来，并为权为 k 、指标为 $\frac{m}{2}$ 的整弱雅可比形式环提供同伦论精化

$$\mathrm{JF}_{k,\frac{m}{2}} = \Gamma\big(E, p^*\omega^{\otimes k+m} \otimes \mathcal{O}_E(me)\big)$$

例如，定义见 [EZ85] 和 [Kra95]。

本文对每个 $m \geq 1$ 的 TJF_m 进行了完整的 2-局部分析。我们的主要贡献是对同伦群 $\pi_*\mathrm{TJF}_m$ 的显式计算。尽管经典雅可比形式本身已相当微妙，但其拓扑精化通过等变同伦论中的传递映射，揭示了它与复射影空间之间令人惊讶的联系。

1.1. 主要结果。

定理 1.1. 对于每个整数 $m \geq 1$，存在一个 TMF-模的等价

$$\mathrm{TJF}_m \simeq \mathrm{TMF} \otimes P_m,$$

其中 P_m 由截短复射影空间 $\Sigma^2\mathbb{C}P^{m-1}_{-1}$删去其2维胞腔得到（定义 *6.1*）。特别地，$\mathrm{TJF}_m$ 在每个偶数维 $2d \leq 2m$、$d \neq 1$中恰有一个TMF胞腔，且其稳定粘接映射由 *Hopf* 纤维化 η ν 和 2ν检测。

定理 1.2。令 $E^{s,\ t}_{\ r}(m)$ 表示收敛到 $\pi_{t-s}\mathrm{TJF}_m$的下降谱序列。

（*1*） E_2项为

$$E_2^{s,2t}(m) \cong H^s\big(E; p^*\omega^{\otimes t} \otimes \mathcal{O}_E(me)\big)$$

并由一个 *Hopf* 群胚 (B_m, Σ_m) 的上同调显式描述；该 *Hopf* 群胚由万有椭圆曲线 E 的 $GL_2(\mathbb{Z}/3)$-伽罗瓦覆盖 $E' \to E$ 得到（第 *4* 节）。*(2)* 下降谱序列在 E_{24} 页上于 $s = 24$ 处具有一条水平消失线（推论 *6.5*）。*(3)* 对每一个 m，微分均完全由胞腔结构、消失线以及（合成）莱布尼茨法则确定（第 *7* 至 *12* 节）。

1.2. **论证提纲**。 我们的计算分四个阶段进行。

(1) 建立谱序列。我们在 ´平展覆盖 $\mathcal{M}_1(3) \to \mathcal{M}_{\mathrm{ell}}$ 上工作，其仿射坐标环为 $A = \mathbb{Z}_{(2)}[a_1, a_3, \Delta^{\pm}]$。将万有椭圆曲线 E 拉回到 $\mathcal{M}_1(3)$，得到一条 Weierstraß 曲线，由此构造控制 TJF$_m$ 的 Hopf 群胚 (B_m, Σ_m)。(2) TJF$_\infty$ 情形。根据换环定理 [HS08] [Hov01], , 我们可以算出 TJF$_\infty$ 的 DSS 的 E_2 页。结果表明，本质上只有一个由关系 $\eta^4 = 0$给出的 d_3 微分，从而得到 π_*TJF$_\infty$的简单结构。(3) 转移与胞腔结构。利用在[GM20], 中研究的转移序列 ΣTMF $\to$ TMF$_{\mathbb{T}}$ $\to$TMF，我们将 TJF$_m$ 等同于映射 TMF $\otimes \Sigma\mathbb{C}P_+^{m-1} \to$ TMF $\oplus \Sigma$TMF 的余纤维。与截断射影空间 [Mil82] [Mos68] 的比较揭示了该余纤维的胞腔结构，并证明了定理 1.1。(4) 高阶微分。对 TJF$_\infty$ 的胞腔分解与分析给出 E_2 页，并严格限制下降谱序列中可能的 d_r。对于 $m = 2$，我们由 TJF$_2 \simeq$ TMF $\otimes C\nu$. 这一事实计算出全部微分。该方法可推广至 $m = 3$，.....，7，但所需的簿记工作逐步增加。

1.3. **本文结构**。 第 2 节介绍等变 TMF 的预备知识。第 3 节和第 4 节回顾圆等变椭圆上同调，设定记号，并构造 Hopf 群胚 (B_m, Σ_m)。第 6 节通过与截断射影空间进行比较来证明定理 1.1。第 7–12 节计算 $m = 2, \ldots, 7$ 的 E_2-项及其下降谱序列中的微分。

1.4. **约定**。

(1) Sp 表示谱的 ∞-范畴，Sp$_G$ 表示真 G-谱的范畴；上标 fin 表示由紧对象生成的全子范畴。我们用 $\mathcal{S}$ 表示空间的 ∞-范畴，用 $\mathcal{S}^{\mathrm{fin}}$ 表示紧空间。(2) $\Sigma_+^\infty\colon \mathcal{S} \to$ Sp 和 $\Sigma^\infty\colon \mathcal{S}_* \to$ Sp 是悬挂谱函子；我们常将带基点空间视为其悬挂谱，并用 (–)$_+$ 表示添加一个不交基点。(3) $\mathbb{S}$ 表示球谱，$\pi_* X$ 表示稳定同伦群。除非另有说明，谱和谱层都默认取 2-局部化。(4) $\eta \in \pi_1\mathbb{S}$ 和 $\nu \in \pi_3\mathbb{S}$ 是 $\pi_*\mathbb{S}$ 中分别由 Hopf 纤维化 $S^3 \to S^2$ 和 $S^7 \to S^4$ 表示的元素。(5) $\mathbb{T} = U(1)$ 是圆群，$\rho\colon \mathbb{T} \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ 是其典范复表示；$S^{m\rho}$ 是相应的表示球。(6) tmf 是拓扑模形式的连通谱，而 TMF =tmf$[(\Delta^8)^{-1}]$ 是其周期版本。我们对 π_*tmf 中的元素沿用 [Bau08] 中的名称。(7) $\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{or}}$ 是定向椭圆曲线的谱 Deligne-Mumford 叠 [Lur18b]；其底层的光滑椭圆曲线 1-层是 $\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}$。(8) $\mathcal{M}_1^{\mathrm{or}}(n)$ 表示带有 $\Gamma_1(n)$-层结构的定向椭圆曲线的谱模空间；其结构层的整体截面给出 TMF$_1(n)$。(9) 我们用 $\mathcal{M}$ 等花体字母表示谱层，用普通字母 M 表示其底层经典层。(10) $p\colon \mathcal{E} \to \mathcal{M}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{or}}$ 是带单位截面 e 的万有定向椭圆曲线。我们用 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(me)$ 表示与 me 关联的线丛，用 ω 表示 $\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}$ 上的霍奇线丛；$p^*\omega$ 是其在万有椭圆曲线 E 上的拉回。(11) CAlg 表示 $\mathbb{E}_\infty$-环的范畴，SpSch 表示谱概形的范畴。

1.5. **致谢**。 我谨向我的导师 David Gepner 致以诚挚的谢意，感谢他在我整个博士项目期间给予的宝贵指导、持续的参与以及富有洞见的讨论。我同样感谢 Lennart Meier、Tilman Bauer、Mayuko Yamashita、Agn`es Beaudry 和 Ishan Levy 所进行的有益讨论以及提出的建设性意见，这些极大地改进了本研究。我感谢 MPIM 的款待，本学位论文的一部分正是在那里完成的。

2. Preliminary

下面我们简要回顾由 [GM20]给出的等变 TMF 的构造。我们并不声称任何原创性；所有陈述均在所引参考文献中加以说明。令 $S = \mathrm{Spec}\, R$ 为与偶周期 $\mathbb{E}_\infty$-环 $R \in$CAlg相关联的谱概形。

定义 2.1。 谱椭圆曲线 $p\colon C \to S$ 是 SpSch_S 中的严格阿贝尔群对象，满足

- p是平坦的,
- $\tau_{\geq 0}p$ 是适当且局部几乎有限表示的，并且
- 对于任意点 $i\colon \mathrm{Spec}\ k \to \tau_{\geq 0}S$（其中 k是一个代数闭域），拉回 $i^*\mathcal{C} \to \mathrm{Spec}\ k$是一个定义在 k上的（经典）椭圆曲线。

$\widehat{\ }$沿单位截面 $e\colon S \to C$ 完成，定义了一个定义在 S上的形式群 C。当底环 R 是偶周期的时，第一陈类诱导出一个定义在 $R^0(\mathbb{C}P^\infty)$上的形式群 $\mathrm{Spf}(R^0(\mathbb{C}P^\infty))$；Lurie 还构造了与偶周期环 R相关联的谱形式群 $\widehat{\mathbb{G}}_R^Q := \mathrm{Spf}(C^*(\mathbb{C}P^\infty; R))$。这两个形式群通过预定向 和定向相关联。

定义 2.2。严格阿贝尔群对象 C 在 SpSch_S 中的预定向是一个映 p

$$i\colon S^2 \to \mathrm{Map}_{\mathrm{SpSch}_S}(S, C).$$

事实证明，预定向的数据等价于给出一个严格阿贝尔群对象$\mathbb{C}P^\infty \to \mathrm{Map}^{\mathrm{SpSch}_S}(S, C)$在 $\mathcal{S}$中的映射。由此可知，预定向诱导出一个形式群的映射 $\widehat{\mathbb{G}}_R^Q \to \widehat{C}$[Lur18b，命题 4.3。21]。

定义 2.3. 如果相应的

$$\widehat{\mathbb{G}}_R^Q \to \widehat{C}$$

形式群映射是一个等价，则称预定向为定向。

注意，当且仅当诱导的线丛映射 $\omega_{\widehat{C}} \to \Sigma^{-2}R$ 在 S 上是$\widehat{\ }$一个等价时，预定向才是定向，其中 $\omega_{\widehat{C}}$ 是 C 在单位截面 [处的对偶化线丛（Lur18b，命题 4.3.23]）。

对于定向阿贝尔概形 C，可以将一个整体等变上同调理论与之关联。为了解释这一点，我们先回顾轨形空间的概念。用 Top 表示拓扑空间的 1-范畴，用 Gpd 表示群胚的 1-范畴。

定义 2.4. 拓扑 1-层是一个函子 [1] $X\colon \mathrm{Top}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Gpd}$，满足层条件：即对于任意拓扑空间 T及其任意开覆盖 $\{U_i \to T\}_{i\in I}$，典范映射

$$X(T) \to \lim\Big(\prod_{i\in I} X(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} X(U_i \cap U_j) \;\substack{\rightarrow\\ \rightarrow\\ \rightarrow}\; \prod_{i,j,k\in I} X(U_i \cap U_j \cap U_k)\Big)$$

是群胚的等价。

设 G 是一个紧李群。当一个空间 X 带有 G-作用时，我们可以构造一个群胚对象

$$\cdots \;\substack{\rightarrow\\ \rightarrow\\ \rightarrow}\; G \times G \times X \rightrightarrows G \times X \to X$$

它位于拓扑空间的（1-）范畴中。对由该群胚对象核心表示的函子 $M \mapsto \mathrm{Map}^{\mathrm{Top}}(M,\ X_*)$ 作层化，可得到相应的拓扑层 $[X/G]$。特别地，当 X 是一个点时，便得到分类主 G-丛的栈 $\mathbb{B}G$。

拓扑层构成一个 ∞-范畴 Stk_∞：对象是拓扑层，1-态射是拓扑层之间的映射，2-态射是作为预层的映射之间的同伦，依此类推。关于精确定义，参见 [GM20，附录 A]。轨道范畴是 Stk_∞ 的以下全子范畴。

定义 2.5。 轨道范畴 Orb 是拓扑层范畴 Stk_∞ 的全子范畴，其对象由形如 $\mathbb{B}G$ 的对象张成，其中 G 是一个紧李群。它可以描述为如下的 Top-丰范畴:

- 对象是形如 $\mathbb{B}G$ 的拓扑层，并且
- 映射空间由 $\mathrm{Map}_{\mathrm{Orb}}(\mathbb{B}G, \mathbb{B}H) = \mathrm{Map}_{\mathrm{Lie}}(H, G)_{hG}$ 定义，其中后者上的 G-作用由共轭作用给出。

[1]从技术上讲，为避免大小问题，我们将定义域限制为 $\mathrm{Top}' \subset \mathrm{Top}$ 的一个小的全子范畴，该全子范畴包含 CW 复形的所有同胚类型，并且对有限乘积和子空间封闭。一个例子是 Top 的全子范畴，其对象是 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 的有限乘积的子空间。

定义 2.6. 预层范畴 $\mathcal{P}(\mathbf{Orb})$ 称为轨形空间范畴。

令 $\mathbf{Orb}_G$ 表示 G的轨道范畴：由形如 G/H 且对应于某个闭子群$H \triangleleft G$的 G-空间构成的全子范畴。回顾 Elmendorf 定理，对于每个紧李群 G， G-空间 $\mathcal{S}^G$ 的范畴等价于以 G的轨道为对象的预层范畴 $\mathcal{P}(\mathbf{Orb}_G)$。

命题 2.7 （[LNP25]）。 存在一个全忠实嵌入 $\mathrm{Orb}_G \to \mathrm{Orb}_{/\mathbb{B}G}$，其定义为 $G/H \mapsto$ （$\mathbb{B}H \to \mathbb{B}G$）。

该嵌入 $\mathbf{Orb}_G \to \mathbf{Orb}$ 通过左 Kan 延拓诱导出一个函子 $\mathcal{S}^G \simeq \mathcal{P}(\mathbf{Orb}_G) \to \mathcal{P}(\mathbf{Orb})_{/\mathbb{B}G}$。

命题 2.8。 设 G 为一个紧李群。则函子

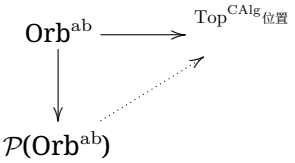
$$\mathcal{S}^G \to \mathcal{P}(\mathrm{Orb})_{/\mathbb{B}G}$$

保余极限且为全忠实的。

取由等价于 $\mathbb{B}G$ 的对象所张成的全子范畴 $\mathbf{Orb}^{\mathrm{ab}} \subset \mathbf{Orb}$，其中$G$为一个阿贝尔紧李群。给定定向椭圆曲线 $C \to S$，我们可以构造一个从 $\mathbf{Orb}^{\mathrm{ab}}$ 到环化空间范畴 $\mathbf{Top}^{\mathrm{CAlg}}{}_{\mathrm{loc}}$ [Lur18c，定义 1.1.5.1] 的函子，其公式为

$$\mathbb{B}G \mapsto \mathcal{X}[\widehat{G}] \coloneqq \mathrm{Map}_{\mathrm{Ab}^s(\mathrm{SpSch}_S)}(\widehat{G}, \mathcal{E})$$

其中 $\widehat{G}$ 是 G的 Pontryagin 对偶。由于 $\mathbf{Top}^{\mathrm{CAlg}}{}_{\mathrm{loc}}$ 是余完备的，我们得到一个函子



经由左 Kan 延拓。 最后，通过与限制映射 $\mathcal{P}(\mathbf{Orb}) \to \mathcal{P}(\mathbf{Orb}^{\mathrm{ab}})$ 复合，可得到函子 r

$$\mathrm{Ell}_{C/S} \colon \mathcal{P}(\mathrm{Orb}) \to \mathrm{Top}^{\mathrm{CAlg}}_{\mathrm{loc}}.$$

根据构造，我们可以识别这些像

$$\mathrm{Ell}_{C/S}(\mathbb{B}S^1) \simeq C,\ \mathrm{Ell}_{C/S}(\mathbb{B}C_n) \simeq C[n].$$

现在，我们可以为每个紧李群 G 定义 G-等变椭圆上同调函子。将所得的谱概形记为 $\mathbf{Ell}^{C/S}(\mathbb{B}G)$。对于有限的 G-空间 X，命题 2.8 中的函子将 X 嵌入到 $\mathcal{P}(\mathbf{Orb})_{/\mathbb{B}G}$ 中；应用 $\mathbf{Ell}^{C/S}$，即可得到位于 $\mathbf{Ell}^{C/S}(\mathbb{B}G)$ 上的谱概形 $\mathbf{Ell}^{C/S}(X)$。

定理 2.9 ([GM])。 假设紧李群 G 满足以下任一条件

- G 是阿贝尔的，或
- $\pi_1 G$ 是无挠的。

那么，对于任意有限的 G-空间 X，局部环化空间 $\mathrm{Ell}^{C/S}(X)$ 是一个谱概形。

将 $\mathbf{Ell}^{C/S}(X)$ 的结构层沿映射推送到 $\mathbf{Ell}^{C/S}(\mathbb{B}G)$，得到 $\mathbf{Ell}^{C/S}(\mathbb{B}G)$ 上的拟凝聚层。我们将这一构造概括如下：

定理 2.10。 设 G 是一个紧李群，且 $\pi_1 G$ 无挠；或者假设 G 是阿贝尔的。设 $p\colon\ C \to S$ 是一条定向椭圆曲线。存在一个 G-等变椭圆上同调函子

$$\mathcal{E}ll_G^{C/S} \colon \mathcal{S}^{G,\mathrm{fin}} \to \mathrm{QCoh}(\mathrm{Ell}_{C/S}(\mathbb{B}G))^{\mathrm{op}}$$

满足以下性质：

- $\mathcal{E}ll_G$ 保持余极限，
- 对于闭子群 $H \triangleleft G$ 的每个轨道 G/H，我们有

$$\mathcal{E}ll_G^{C/S}(G/H) \simeq (i_H)_* \mathcal{O}_{\mathrm{Ell}_{C/S}(\mathbb{B}H)}$$

其中 $i_H \colon \mathbf{Ell}^{C/S}(\mathbb{B}H) \to \mathbf{Ell}^{C/S}(\mathbb{B}G)$ 是映射 $\mathbb{B}H \to \mathbb{B}G$ 的像。

由于目标范畴 $\mathbf{QCoh}(\mathbf{Ell}^{C/S}(\mathbb{B}G))$ 是有基点的，我们可以将 $\mathcal{E}ll_G$ 的定义域沿着 $(-)_+ \colon \mathcal{S}^{G,\mathrm{fin}} \to \mathcal{S}^{G,*}{}^{\mathrm{fin}}$ 扩展，并得到约化上同调函子

$$\widetilde{\mathcal{E}ll}_G^{C/S} \colon \mathcal{S}_*^{G,\mathrm{fin}} \to \mathrm{QCoh}(\mathrm{Ell}_{C/S}(\mathbb{B}G))^{\mathrm{op}}$$

同样如此。此外，当 G 为环面时， [GM20，定理 8.1，命题 9.2] 表明 $\mathcal{E}ll_G^{C/S}$ 是对称幺半的：

定理 2.11. 函子 $\mathcal{E}ll_G^{C/S}$ 与 $\widetilde{\mathcal{E}ll}_G^{C/S}$ 在 $G=\mathbb{T}^n$ 对某个 $n\in\mathbb{N}$成立时是对称幺半的。此外， $\widetilde{\mathcal{E}ll_{\mathbb{T}^n}}$ 的定义域可以沿 $\Sigma^\infty\colon \mathcal{S}^{\mathbb{T}^n,\ \mathrm{fin}_*} \to \mathrm{Sp}_{\mathbb{T}^n}^{\mathrm{fin}}$延拓，从而我们得到一个函子

$$\mathcal{E}ll_{\mathbb{T}^n}\colon \mathrm{Sp}_{\mathbb{T}^n} \to \mathrm{QCoh}(\mathrm{Ell}_{C/S}(\mathbb{B}\mathbb{T}^n))^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{QCoh}(C^{\times n})^{\mathrm{op}}.$$

本文的主要兴趣在于圆等变情形 $G=S^1$。我们并不分别处理各个定向椭圆曲线及其相应的椭圆上同调理论，而是转向万有对象。回想一下，Lurie构造了定向椭圆曲线的模空间 $\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{or}}$ [Lur18b] ，并证明了一个等价

$$\mathrm{TMF}\simeq\Gamma(\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{or}},\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{or}}}).$$

我们可以将这个模叠表示为仿射概形的余极限

$$\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{or}}\simeq \operatorname*{colim}_{\substack{\mathrm{Spec}\,R\to\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{or}}\\ R\colon \text{ even periodic}}} \mathrm{Spec}\,R.$$

万有定向　　椭圆曲线是通过沿同一图表粘合定向椭圆曲线而得到的

$$\mathcal{E}:=\operatorname*{colim}_{\substack{\mathrm{Spec}\,R\to\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{or}}\\ C\to\mathrm{Spec}\,R\colon \text{ oriented}}} C$$

由于等变椭圆上同调关于定向椭圆曲线是函子性的，我们可以如下构造万有圆等变椭圆上同调。

定理 2.12. 设 $p\colon \mathcal{E}\to\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{or}}$ 为万有定向椭圆曲线。则存在一个相伴的圆等变 TMF-上同调函子

$$\mathcal{E}ll_{\mathbb{T}}\colon \mathrm{Sp}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{fin}}\to\mathrm{QCoh}(\mathcal{E})^{\mathrm{op}}$$

满足以下性质：

(1) $\mathcal{E}ll_{\mathbb{T}}$ 是一个保持余极限的对称幺半函子，*(2)* $\mathcal{E}ll_{\mathbb{T}}(S^0)\simeq\mathcal{O}_C$，*(3)* $\mathcal{E}ll_{\mathbb{T}}(\Sigma_+^\infty(\mathbb{T}/\mathbb{T}[n]))\simeq(e_n)_*\mathcal{O}_{C[n]}$ 其中 $e_n\colon C[n]\to C$ 是 C 的 n-挠点的包含映射。

3. The Descent Spectral Sequence: Setup

为定义拓扑Jacobi形式，我们构造一个带有 S^1-作用的空间。设 $\rho\colon \mathbb{T}=U(1)\hookrightarrow\mathbb{C}^\times$ 为圆 $\mathbb{T}$的基本表示。则存在一个余纤维序列

$$\mathbb{T}_+\to S^0\to S^\rho,$$

其中 S^ρ 是与 ρ 相伴的表示球。将 $\mathcal{E}ll_{\mathbb{T}}$ 作用于该序列，我们得到一个层的纤维序列

$$\mathcal{E}ll_{\mathbb{T}}(\mathbb{T}_+)\simeq e_*\mathcal{O}_S\leftarrow\mathcal{O}_C\leftarrow\mathcal{E}ll_{\mathbb{T}}(S^\rho),$$

并且我们看到， $\mathcal{E}ll_{\mathbb{T}}(S^\rho)$ 是可逆层 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-e)$。由于 $\mathcal{E}ll_{\mathbb{T}}$ 是对称幺半的，它将 Spanier-Whitehead 对偶 $S^{-\rho}$ 在 $\mathrm{Sp}_{\mathbb{T}}$ 中映到 $\mathcal{O}_C(e)$，因此将 $S^{-m\rho}$ 映到 $\mathcal{O}_C(me)$。

定义 3.1. 设 $p\colon \mathcal{E}\to\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{or}}$ 为万有定向椭圆曲线。指标为 m 的拓扑Jacobi形式 TJF_m 是整体截面

$$\mathrm{TJF}_m:=\Gamma(\mathcal{E},\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(me)).$$

换言之，TJF_m 是表示球面的 $\mathbb{T}$-等变椭圆上同调。以下两个结果说明了这一命名的合理性。

Le引理 3.2. 在（经典的）椭圆曲线 *Deligne-Mumford*叠 $\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}$上，我们有

$$\pi_n\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(me)\simeq\begin{cases}0 & (n=2k+1)\\ p^*\omega^k\otimes\mathcal{O}_E(me) & (n=2k)\end{cases}$$

其中 E 是 $\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}$上的万有椭圆曲线

证明。 利用 p 的平坦性： $\mathcal{E}\to\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{or}}$，我们计算

$$\begin{aligned}\pi_n\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(me) &\simeq \pi_n p^*\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{or}}}\otimes_{\pi_0\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{or}}}}\pi_0\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(me)\\ &\simeq\begin{cases}0 & (n=2k+1)\\ p^*\omega^k\otimes\mathcal{O}_E(me) & (n=2k).\end{cases}\end{aligned}$$

□

定义 3.3 ([Kra95])。 对于所有权 $k \in \mathbb{Z}$ 和指标 $m \in \frac{\mathbb{Z}}{2}$，整数 Jacobi 形式的集合定义为整体截面 $\Gamma(E, p^*\omega^{k+2m} \otimes \mathcal{O}_E(2me))$。

注释 3.4。在 [EZ85], 我们 ak 权为 $k \in \mathbb{Z}$、指标为 $m \in \frac{\mathbb{Z}}{2}$ 的雅可比形式定义为一个二元函数 n

$$\phi \colon \mathbb{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

使得

- 对于 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，在 $SL_2(\mathbb{Z})$ 中，ϕ 满足

$$\phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k e^{\frac{2\pi i m c z^2}{c\tau+d}} \phi(\tau, z),$$

- 对于所有整数 λ，$\mu \in \mathbb{Z}$，ϕ 满足

$$\phi(\tau, z+\lambda\tau+\mu) = e^{-2\pi i m(\lambda^2\tau+2\lambda z)}\phi(\tau, z).$$

如果一个弱 Jacobi 形式的傅里叶系数全都是整数，则称其为整数的。

在 Tate 曲线上的取值给出了从整体截面 $\Gamma(E,\ p^*\omega^k \otimes \mathcal{O}_E(2me))$ 到整数系数的弱整数 Jacobi 形式群的映射：更详细的解释见附录 A。

本文的目标是完整计算与 TJF_m 相关的下降谱序列：

$$H^p(E; p^*\omega^q \otimes \mathcal{O}_E(me)) \to \pi_{2q-p}\mathrm{TJF}_m.$$

注 3.5。 在 [CDvN24], 中，已证明 TMF 的下降谱序列与 ν_{MU}(TMF) 的符号谱序列同构，其中 ν_{MU} 是合成类比函子；他们还在 [CDN24] 中计算了该符号谱序列。此外，他们的结果可推广到 $\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{or}}$ 上的拟凝聚层，因此 TJF_n 的下降谱序列与 $\nu_{\mathrm{MU}}(\mathrm{TJF}_n)$ 的符号谱序列同构。在第 7 至 12 章中，我们将利用这一对应关系，在计算微分时应用合成莱布尼茨法则。

4. E_2-term of DSS

从现在起，我们默认将所研究的所有谱和谱层都作 2-局部化。设 $\mathcal{X}$ 是一个谱 Deligne-Mumford 栈，且 $\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(\mathcal{X})$ 是 $\mathcal{X}$ 上的一个拟凝聚层。取一个 ´étale 覆盖 $\mathcal{U} \to \mathcal{X}$。那么层条件表明

$$\Gamma(\mathcal{X}; \mathcal{F}) \simeq \mathrm{Tot}(\Gamma(\mathcal{U} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{U} \times \cdots \times_{\mathcal{X}} \mathcal{U}; \pi^*\mathcal{F}))$$

其中 π: $\mathcal{U} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{U} \times \cdots \times_{\mathcal{X}} \mathcal{U} \to \mathcal{X}$ 是投影映射。下降谱序列是与该全化相关的 Bousfield-Kan 谱序列。特别地，其 E_2 项是 Čech 上同调

$$\check{H}^p(X; \pi_q\mathcal{F})$$

它与 ´étale 覆盖 $U \to X$ 相关，其中 U 和 X 分别是 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{X}$ 的底层 Deligne-Mumford 1-层。

在本文中，我们取 $X = \mathcal{E}$ 为 $\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{or}}$ 上的万有定向椭圆曲线。令 q: $\mathcal{E}' \to \mathcal{M}_1^{\mathrm{or}}(3)$ 为沿着来自椭圆曲线模空间的谱增强（带有 $\Gamma_1(3)$-结构）的 ´étale 覆盖 $\mathcal{M}_1^{\mathrm{or}}(3) \to \mathcal{M}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{or}}$ 对 $\mathcal{E}$ 的拉回。由于 $\mathcal{M}_1^{\mathrm{or}}(3) \to \mathcal{M}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{or}}$ 是一个 ´étale 覆盖，诱导映射 $\mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ 也是如此。

回顾底层代数栈的等同

$$\mathcal{M}_1(3) \simeq [\mathrm{Spec}\, A/\mathbb{G}_m]$$

其中 $A = \mathbb{Z}_2[a_1, a_3, \Delta^{\pm 1}]$，且 $\mathbb{G}_m$-作用由次数 $|a_1| = 2, |a_3| = 6$ 给出，其中 $\Delta = a_3^3(a_1^3 - 27a_3)$。于是，$\mathcal{M}_1(3)$ 上的底层椭圆曲线 E' 由加权射影叠$\mathbb{P}(4,6)$ 中被 Weierstrass 方程截出的闭子概形给出

$$Y^2Z + a_1XYZ + a_3YZ^2 = X^3.$$

引理 4.1. E' 上的高阶上同调

$$H^i(E', q^*\omega^k \otimes \mathcal{O}_{E'}(me)) = 0 \ (i > 0)$$

消失。此外，

$$\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^0(E', q^*\omega^k \otimes \mathcal{O}_{E'}(me))$$

是一个秩为 m 的自由 A-模。

证明。 注意到 $\mathcal{M}_1(3) \simeq [\operatorname{Spec} A/\mathbb{G}_m]$ 的上同调维数为零。利用 Leray谱序列[Sta25, Tag 0782], , 我们看到 $\mathcal{O}_{E'}(me) \otimes q^*\omega^k$ 的 i 阶上同调同构于 i 阶导出函子 $R^iq_*(\mathcal{O}_{E'}(me) \otimes q^*\omega^k)$ 的整体截面。然而，由投影公式可得

$$R^iq_*(\mathcal{O}_{E'}(me) \otimes q^*\omega^k) \simeq R^i(q_*\mathcal{O}_{E'}(me) \otimes \omega^k),$$

因此，第一个断言由半连续性定理得出。此外，$q_*\mathcal{O}_{E'}(me)\otimes\omega^k$ 的整体截面是 Spec A上 $q_*\mathcal{O}_{E'}(me)$的拉回的整体截面中次数为k 的部分。注意，层$q_*\mathcal{O}_{E'}(me)$可以延拓到 Spec $\mathbb{Z}_{(2)}[a_1, a_3]$，并且由于它是主理想整环上的多项式环，Spec A 上$q_*\mathcal{O}_{E'}(me)$的整体截面是自由的，因此第二个断言得证（或者应用整体Horrocks延拓定理）。□

将 $\bigoplus_k H^0(E',\ q^*\omega^k\otimes\mathcal{O}_{E'}(2e))$的 A-模生成元记为 1 和 x，将 $\bigoplus_k H^0(E',\ q^*\omega^k\otimes\mathcal{O}_{E'}(3e))$的生成元记为 1，$x$ 和 y。次数分别为 $|x| = 4$ 和 $|y| = 6$. 。这些 x 和 y 满足方程 $y^2 + a_1xy + a_3y = x^3$，，并且 x，y 中的单项式 x^iy^j 对每个 m都生成 $\bigoplus_k H^0(E',\ q^*\omega^k \otimes \mathcal{O}_{E'}(me))$作为一个 A-模。

类似地，考虑 $\mathcal{E}$ 到交 $\mathcal{M}_1(3) \times_{\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{or}}} \mathcal{M}_1(3)$ 的拉回。回忆一下，$\mathcal{M}_1(3) \times_{\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{or}}} \mathcal{M}_1(3)$ 的底层代数栈等价于 $[\operatorname{Spec} \Gamma/\mathbb{G}_m]$，其中

$$\Gamma \coloneqq A[s, t]/I$$

并且 I 是由以下元素生成的 A 中的理想

$$s^4 - 6st + a_1s^3 - 3a_1t - 3a_3s,$$
$$-27t^2 + 18s^3t + 18a_1s^2t - 27a_3t - 2s^6 - 3a_1s^5 + 9a_3s^3 + a_1^3s^3 + 9a_1a_3s^2.$$

回忆一下，$(A,\ \Gamma)$ 构成一个 Hopf 群胚。结构映射由椭圆曲线 $y^2 + a_1xy + a_3y = x^3$ 的自同构确定，其定义为

$$x \mapsto x - \frac{1}{3}(s^2 + a_1s),$$
$$y \mapsto y - sx + \frac{1}{3}(s^3 + a_1s^2) - t,$$

从而 a_1，a_3 映射为

$$a_1 \mapsto a_1 + 2s$$
$$a_3 \mapsto a_3 + \frac{1}{3}(a_1s^2 + a_1^2s) + 2t.$$

结合上述论证，我们描述下降谱序列的 E_1 项。令 B_m 为 $A[x, y]/(y^2 + a_1xy + a_3y - x^3)$ 中次数小于或等于 $2m$ 的多项式集合，其中 x 的次数为 4，y 的次数为 6。注意，B_m 是一个秩为 m 的自由 A-模。于是，我们的下降谱序列的 E_1 项是由余条复形给出的上链复形

$$B_m \longrightarrow \Gamma \otimes_A B_m \longrightarrow \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A B_m \longrightarrow \cdots$$

其中，x, y, a_1, a_3上的余作用由上述公式确定。

为了计算其上同调，我们在余条复形（B_m, Σ_m）中引入一个滤过：对任意元素 $a \in A$，令 $|x| = 4$、$|y| = 6$ 和 $|a| = 0$ 。我们称之为胞腔过滤。（B_m, Σ_m）的上同调可由相关谱序列（代数 Atiyah-Hirzebruch 谱序列）计算。其 E_1 项是相关分次对象的上同调。由于 B_m 是由次数小于 m 的单项式 x^iy^j 生成的自由 A-模，我们看到，代数 AHSS 的 E_1 项是 TMF 的下降谱序列的E_2项上的自由秩-m 模。我们将过滤度为 n 的 E_2 生成元记为 x_n。例如，x_0 由 $1 \in A$ 表示，x_4 由 $x \in B_2$ 表示，而 x_6 由 $y \in B_3$ 表示。

由 x 上余作用的公式，以及 $-(s^2 + a_1s)/3$ 在 TMF 的 DSS 的 E_2 项中表示元素 ν 这一事实（记号见 7.1），我们得到代数 AHSS 中的微分 $d_2(x_4) = \nu x_0$ 。类似地，y 上的余作用表明，x_6 上的 d_1-微分等于由下式表示的元素

$$-sx + \frac{1}{3}(s^3 + a_1s^2) - t,$$

并且因为 $s \in \Gamma$ 表示 sents $\eta \in \pi_1$TMF，$d_1(y)$命中 ηx_4。由于我们可以取一个相关分次的生成元

$$B_{m+1}/B_m \simeq \begin{cases} A\{x^i\} & m = 2i - 1, \\ A\{x^{i-1}y\} & m = 2i, \end{cases}$$

我们可以类似地利用莱布尼茨法则计算生成元 x_n 的微分。注意到 $d_2(x_{16}) = 4\nu x^3 = 0$，我们得到下表所示的 16周期微分。

	x_4	x_6	x_8	x_{10}	x_{12}	x_{14}	x_{16}	x_{18}
d_1	0	ηx_4	0	ηx_8	0	ηx_{14}	0	ηx_{16}
d_2	νx_0	0	$2\nu x_4$	νx_6	$3\nu x_8$	$2\nu x_{10}$	0	$3\nu x_{14}$

每个 E_2-项的计算将在第 7 至 12 章中完成。

5. DSS FOR TJF_∞

本节基于 T. Bauer 和 L. Meier [BM25], 的一个想法，我们谨再次感谢他们讲解计算方法。此处所呈现证明的原创性归功于他们；不过，由于后续各节将用到由此得到的计算，我们仍在此阐述计算过程。

我们计算 $\mathrm{TJF}_\infty := \mathrm{colim}_m \mathrm{TJF}_m$的下降谱序列。其 E_2-项由余条复形的上同调给出

$$B \to B \otimes_A \Gamma \to B \otimes_A \Gamma \otimes_A \Gamma \cdots$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{Z}_2[a_1, a_3, \Delta^{-1}], \\ B &= A[x, y]/(y^2 + a_1xy + a_3y - x^3), \\ \Gamma &= A[s, t]/I \end{aligned}$$

其余作用为

$$\begin{aligned} x &\mapsto x - \frac{1}{3}(s^2 + a_1 s), \\ y &\mapsto y - sx + \frac{1}{3}(s^3 + a_1 s^2) - t, \\ a_1 &\mapsto a_1 + 2s, \\ a_3 &\mapsto a_3 + \frac{1}{3}(a_1 s^2 + a_1^2 s) + 2t. \end{aligned}$$

注记 5.1。 或者，也可以利用以下事实： $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(\infty e)$ 的整体截面 $= \mathrm{colim}_n \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(ne)$ 可与去点定向椭圆曲线上的函数环相识别，因此 TJF_∞的下降谱序列与去点定向椭圆曲线的结构层所对应的下降谱序列同构。

记 $\Sigma := \Gamma \otimes_A B$。那么 $(B,\ \Sigma)$ 构成一个 Hopf 群胚，并且上面的余条复形来自 $(B,\ \Sigma)$。我们回顾换环定理以计算其上同调。

定理 5.2 （[HS08], [Hov01]）。 设 (A, Γ) 是一个 *Hopf* 群胚，且 $f\colon\ A \to A'$ 是一个环映射。如果存在一个环R 及一个环映射 $A' \otimes_A \Gamma \to R$，使得复合映射

$$A \xrightarrow{f \otimes \eta_R} A' \otimes_A \Gamma \longrightarrow R$$

是忠实平坦的，那么 *Hopf* 群胚映射 $(A, \Gamma) \to (A', A' \otimes_A \Gamma \otimes_A A')$ 诱导出余模范畴之间的等价。

引理 5.3 ([Bau08], 评注 4.2)。 令(A', Γ') 为由下式给出的 *Hopf* 群胚

$$\begin{aligned} A' &= \mathbb{Z}_{(2)}[a_1, a_3, a_4, a_6, \Delta^{\pm}], \\ \Gamma' &= A'[s, t] \end{aligned}$$

其余作用为

$$\begin{aligned} a_1 &\mapsto a_1 + 2s, \\ a_3 &\mapsto a_3 + a_1 r + 2t, \\ a_4 &\mapsto a_4 - a_3 s - a_1 t - a_1 rs - 2st + 3r^2, \\ a_6 &\mapsto a_6 + a_4 r - a_3 t - a_1 rt - t^2 + r^3, \end{aligned}$$

其中 $r = \frac{1}{3}(s^2 + a_1 s)$。于是商映射 $A' \to A$ 满足定理 *5.2* 的条件。

定义 Hopf 群胚

$$\begin{aligned} B' &= A'[x,y]/(y^2+a_1xy+a_3y-x^3-a_4x-a_6) \\ &\simeq \mathbb{Z}_{(2)}[a_1,a_3,a_4,x,y,\Delta^{\pm}] \\ \Sigma' &= B'[s,t] \simeq B' \otimes_{A'} \Gamma'. \end{aligned}$$

带有余作用

$$\begin{aligned} x &\mapsto x - \frac{1}{3}(s^2+a_1s), \\ y &\mapsto y - sx + \frac{1}{3}(s^3+a_1s^2) - t. \end{aligned}$$

那么，定理 5.2 告诉我们，上同调 $H^*(B,\ \Sigma)$ 与 $H^*(B',\ \Sigma')$ 同构。通过进一步应用定理 5.2，我们计算 $H^*(B',\ \Sigma')$。

引理 5.4。考虑商映射 $q\colon\ B' \to B'/(y)$。那么复合映射

$$B' \xrightarrow{q\otimes\eta_R} B'/(y) \otimes_{B'} \Sigma'$$

是忠实平坦的。

证明。根据定义，环映射

$$\mathbb{Z}_2[a_1,a_3,a_4,x,y,\Delta^{\pm}] \to \mathbb{Z}_2[a_1,a_3,a_4,x,s,t,\Delta^{\pm}]$$

由将 a_1,a_3,a_4,x 映射到其余作用所确定，且

$$y \mapsto -sx + \frac{1}{3}(s^3+a_1s^2) - t.$$

记

$$\begin{aligned} a_1' &\coloneqq a_1 + 2s \\ a_3' &\coloneqq a_3 + \frac{1}{3}(a_1s^2 + a_1^2s) + 2t \\ x' &\coloneqq x - \frac{1}{3}(s^2+a_1s). \end{aligned}$$

那么 $\mathbb{Z}_{(2)}[a_1,a_3,xs,t]$ 同构于 $\mathbb{Z}_{(2)}[a_1',a_3',x',s,t]$，我们所考虑的环映射由 y

$$\begin{aligned} a_1 &\mapsto a_1', \\ a_3 &\mapsto a_3', \\ x &\mapsto x', \\ y &\mapsto -sx' - t. \end{aligned}$$

该结论成立，因为 $-sx'-t$ 在 t 中是单射。 □

注 5.5。注意，环 B 刻画了一个椭圆曲线及其上的一个非单位点。通过适当地选择 t，我们可以借助椭圆曲线的一个自同构，将任意点移到一个 y 坐标为 0 的点。因此，由 (B,Σ) 表示的栈等价于由 $(B/(y),(y)\backslash\Sigma/(y))$ 表示的栈。

因此，我们所需的上同调来自 Hopf 群胚

$$\begin{aligned} B^{(2)} &\coloneqq B'/(y) = \mathbb{Z}_{(2)}[a_1,a_3,a_4,x,\Delta^{\pm}], \\ \Sigma^{(2)} &\coloneqq B^{(2)} \otimes_B \Sigma' \otimes_B B^{(2)} = B^{(2)}[s,t]/(-sx+sr-t) \simeq B^{(2)}[s] \end{aligned}$$

带有余作用

$$\begin{aligned} a_1 &\mapsto a_1 + 2s, \\ a_3 &\mapsto a_3 - 2sx + \frac{1}{3}(a_1+2s)(s^2+a_1s), \\ a_4 &\mapsto a_4 - a_3s - a_1(sr-sx) - a_1rs - 2s(sr-sx) + 3r^2, \\ x &\mapsto x - \frac{1}{3}(s^2+a_1s). \end{aligned}$$

我们可以进一步应用换环定理来简化 Hopf 群胚。

引理 5.6. 考虑商映射 $q\colon\ B^{(2)} \to B^{(2)}/(x)$。那么复合

$$B^{(2)} \xrightarrow{q\otimes\eta_R} B^{(2)}/(x) \otimes_{B'} \Sigma^{(2)}$$

是忠实平坦的。

证明。 我们可以应用上面类似的论证，注意到 $-(s^2+a_1s)/3$ 是关于 s 的首一多项式。 □

因此，$(B,\ \Sigma)$ 的上同调与 $(B^{(3)},\ \Sigma^{(3)})$ 的上同调同构，其中

$$\begin{aligned} B^{(3)} &:= B^{(2)}/(x) = \mathbb{Z}_{(2)}[a_1, a_3, a_4, \Delta^{\pm}], \\ \Sigma^{(3)} &:= B^{(3)} \otimes_{B^{(2)}} \Sigma^{(2)} \otimes_{B^{(2)}} B^{(3)} = B^{(3)}[s]/(s^2 + a_1 s), \end{aligned}$$

带有余作用

$$\begin{aligned} a_1 &\mapsto a_1 + 2s, \\ a_3 &\mapsto a_3, \\ a_4 &\mapsto a_4 - a_3 s. \end{aligned}$$

我们使用与不变理想相关的代数 Novikov 谱序列来计算其上同调。注意，$I_0 := (2)$ $I_1 := (2,\ a_1)$ $I_2 := (2,\ a_1,\ a_3)$ 是 $(B^{(3)},\ \Sigma^{(3)})$ 中的不变理想。对于 $i = 0,\ 1,\ 2$。，将商 Hopf 代数 $(B^{(3)}/I_i,\ I_i\backslash\Sigma^{(3)}/I_i)$ 记为 $(B_i,\ \Sigma_i)$

注意，$(B_2,\ \Sigma_2) = (\mathbb{F}_2[a_4],\ B_2[s]/(s^2))$ 具有平凡余作用。因此我们看到，$H^*(B_2,\ \Sigma_2) \simeq \mathbb{F}_2[\eta, a_4]$，其中 $\eta \in H^1$ 是由 s 表示的元素。余作用表明，$a_3,\ a_4^2$ 是永久循环，而 a_4 命中 $a_3\eta$。由代数 Novikov 谱序列，我们得到

$$H^*(B_1, \Sigma_1) \simeq \mathbb{F}_2[\eta, a_3, a_4^2]/(a_3\eta).$$

此外 ，由于 a_1 的余作用模 2 平凡，且 $a_4^2 + a_1a_3a_4$ 是余循环，我们有 e

$$H^*(B_0, \Sigma_0) \simeq \mathbb{F}_2[\eta, a_1, a_3, a_4^2 + a_1a_3a_4]/(a_3\eta).$$

现在我们运行 2-Bockstein 谱序列。微分由 $a_1 \mapsto 2s$决定。注意，a_1^2 和$a_1a_3 + 2a_4$ 是余循环。由于 η 乘以 $a_4^2 + a_1a_3a_4$ 非零，且 η 是 2-挠元，因此 a_1 乘以$a_4^2 + a_1a_3a_4$ 必定命中$2\eta\cdot\ (a_4^2 + a_1a_3a_4)$ 。因此我们得出

$$H^*(B, \Sigma) = \mathbb{Z}_{(2)}[\eta, a_1^2, a_3, a_1a_3 + 2a_4, a_4^2 + a_1a_3a_4]/(2\eta, a_3\eta).$$

回忆一下，亚纯整模形式环 MF_* 同构于 $\mathbb{Z}[c_4, c_6, \Delta^{\pm}]/(c_4^3 - c_6^2 - 1728\Delta)$，其中 c_4，c_6，和 Δ 由下式给出

$$\begin{aligned} c_4 &:= a_1^4 - 24a_1a_3 - 48a_4, \\ c_6 &:= a_1^6 - 36a_1^3a_3 - 72a_1^2a_4 + 216a_3^2, \\ \Delta &:= a_1^5a_3a_4 + a_1^3a_3^3 + a_1^4a_4^2 - 30a_1^2a_3^2a_4 - 27a_3^4 - 96a_1a_3a_4^2 - 64a_4^3. \end{aligned}$$

因此，作为 MF_*上的模，TJF_∞ 的 DSS 的 E_2项可写为

$$\mathrm{MF}_*[\eta, b, c, d, e]/(2\eta, c\eta, d\eta, 4e - d^2 + bc^2, c_4^3 - c_6^2 - 1728\Delta, b^2 - 24d - c_4, b^3 - 36bd + 216c^2 - c_6).$$

剩下的任务是求出 TJF_∞ 的下降谱序列中的高阶微分。由于 $\eta \in H^1$ 属于单位映射 $\mathrm{TMF} \to \mathrm{TJF}_\infty$ 的像，因此它必须满足关系 $\eta^4 = 0 \in \pi_*\mathrm{TJF}_\infty$。唯一能命中 η^4 的类是 $b\eta$，所以我们得到

$$d_3(b) = \eta^3.$$

出于次数原因，不存在其他可能的微分，由此我们完成了 $\pi_*\mathrm{TJF}_\infty$ 的计算。谱序列的一部分绘于图 1。

备注 5.7。 尽管 TJF_∞ 的同伦群中只有类似 KO 的元素和自由部分，但我们并不 拥有将 TJF_∞ 谱分解为移位的 KO 与 KU 之和的结果。事实上，TJF_∞ 甚至不是 $K(2)$-无环的。说明这一点的一种方法如下：考虑包含映射 $\mathcal{E}[3] \to \mathcal{E}$。去掉这些概形的基点并取整体截面，我们得到一个环态射 $\mathrm{TJF}_\infty \to \mathrm{TMF}_1(3)$，这是由 Meier 对 TMF^{C_3} [Mei18],的分解得到的，而后者不是 $K(2)$-无环的。

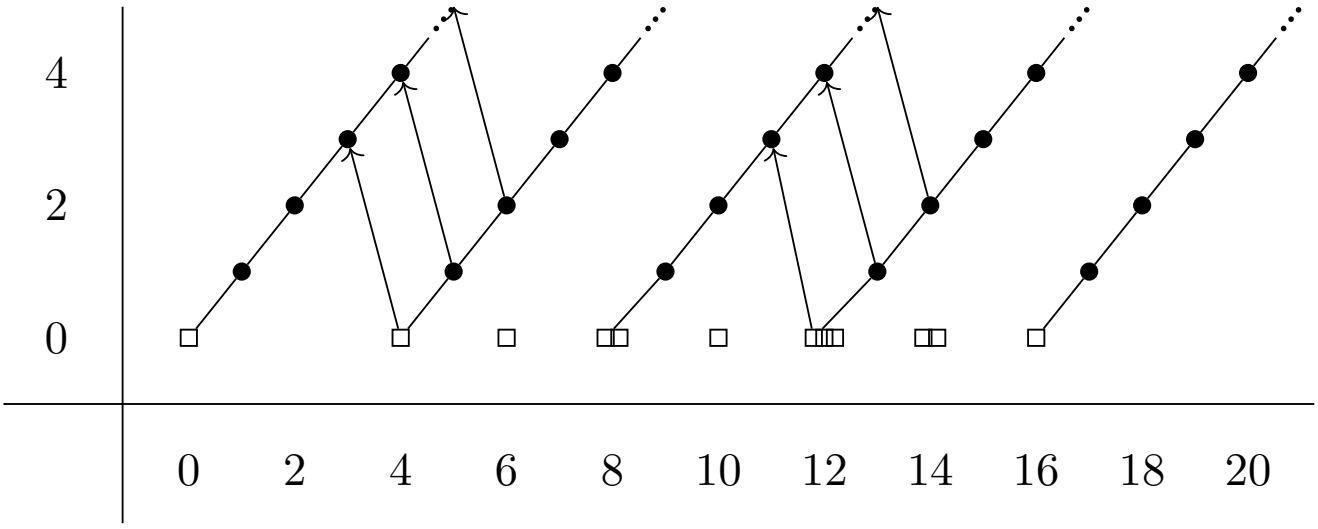


FIGURE 1. TJF 的 DSS E_3页及微分∞

6. Transfers and Cell Structures of TJF

为计算 TJF$_m$的高阶微分，我们作如下观察。本节的主要目标是证明定理 6.3。

定义 6.1. 令 $m \geq 1$为一个整数，令 tr: $\Sigma\Sigma_+^\infty \mathbb{C}P^\infty \to S^0$为圆周等变转移映射，且令$q$: $\mathbb{C}P_+^\infty \to S^0$为塌缩映射。定义有限谱 P_m为映射的余纤维

$$\mathrm{tr} \oplus \Sigma q \colon \Sigma\mathbb{C}P_+^{m-1} \to S^0 \oplus S^1.$$

备注 6.2. 根据 [Mil82，引理 2.7]可知，圆周等变转移映射的余纤维等价于截断射影空间 $\Sigma^2\mathbb{C}P_{-1}^\infty$的二重纬悬。因此，我们得到如下余纤维序列的交换图。

$$\begin{array}{ccccc}
\Sigma\mathbb{C}P_+^{m-1} & \longrightarrow & S^0 \oplus S^1 & \longrightarrow & P_m \\
\| & & \downarrow & & \downarrow \\
\Sigma\mathbb{C}P_+^{m-1} & \longrightarrow & S^0 & \longrightarrow & \Sigma^2\mathbb{C}P_{-1}^{m-1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & S^2 & = & S^2
\end{array}$$

右侧的竖直序列表明， P_m 是“去掉 2-胞腔后的$\Sigma^2\mathbb{C}P_{-1}^{m-1}$”。特别地， P_m 在除 2 以外的每个偶数维都有一个胞腔，并且 P_2 等价于 Hopf纤维化 $C\nu = \mathbb{H}P^2$的余纤维。

定理 6.3. 对每个整数 $m \geq 1$，我们都有一个 TMF-模的等价

$$\mathrm{TJF}_m \simeq \mathrm{TMF} \otimes P_m.$$

该定理在计算下降谱序列时被广泛使用，因为 tmf $\otimes P_m$ 的谱序列中可能出现的微分要少得多，而我们通过求逆多项式生成元 $\Delta^8 \in \pi_{192}$tmf，得到 TJF$_m$ 的谱序列。

为了证明该定理，我们回顾谱代数几何中的一个观察。

引理 6.4. 定向椭圆曲线 p: $C \to S$ 的对偶化层 $\omega_{C/S}$ 同构于 $S^{-1} \otimes \mathcal{O}_C$. 。对于拟凝聚层 $\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(C)$，对偶层 $\Gamma(C, \mathcal{F}^\vee)$ 的整体截面同构于次数平移后的 TMF- 对偶 $\Sigma D(\Gamma(C, \mathcal{F}))$。

证明。 第一个断言由 [Lur18c] 的例6.4.2.9 和 [Lur18a] 的注5.2.5 得出。第二个陈述由以下观察得出

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_S(p_*\mathcal{F},\mathcal{O}_S) &\simeq \mathrm{Hom}_C(\mathcal{F},\omega_{C/S})\\ &\simeq \mathrm{Hom}_C(\mathcal{F},S^{-1}\otimes\mathcal{O}_C)\\ &\simeq S^{-1}\otimes\mathrm{Hom}_C(\mathcal{F},\mathcal{O}_C)\\ &\simeq S^{-1}\otimes\Gamma(C,\mathcal{F}^\vee).\end{aligned}$$

□

考虑带基点空间序列

$$S(m\rho)_+ \to S^0 \to S^{m\rho}.$$

其中 $S(m\rho)$ $\widetilde{\ }$是表示 $m\rho$中的单位球面。应用 $\mathcal{E}ll_{\mathbb{T}}$，我们得到一个纤维序列 e

$$\widetilde{\mathcal{E}ll}_{\mathbb{T}}(S(m\rho)_+) \leftarrow \mathcal{O}_C \leftarrow \mathcal{O}_C(-me)$$

在拟凝聚层(C)中。由于群 $\mathbb{T}$ 在 $S(m\rho)$上自由作用，我们有

$$\widetilde{\mathcal{E}ll}_{\mathbb{T}}(S(m\rho)_+) \simeq e_*(\mathcal{O}_S^{\mathbb{C}P^{m-1}})$$

根据定理2的(3)。 12. 对该序列取对偶并取整体截面，可得到余纤维序列

$$\mathrm{TMF}\otimes\Sigma\mathbb{C}P^{m-1} \to \mathrm{TMF}_{\mathbb{T}} \to \mathrm{TJF}_m.$$

它是 TMF-模。注意， ΣTMF $\hookrightarrow$ TMF $\otimes\,\Sigma\mathbb{C}P^{m-1} \to$ TMF$_{\mathbb{T}}$ 是 [GM20]中定义的传递映射。他们证明了传递映射 ΣTMF $\to$TMF$_{\mathbb{T}}$ 的余纤维等价于 TMF。特别地，TJF$_m$ 是映射的余纤维

$$\mathrm{TMF}\otimes\Sigma\mathbb{C}P_1^{m-1} \to \mathrm{TMF} \to \mathrm{TJF}_m.$$

我们利用上述余纤维序列对 m 进行归纳，以证明该定理。首先，我们知道 TJF$_1 = \Gamma(C,\ \mathcal{O}_C(e))$ $\simeq$TMF。（或许可以在此引用 GM。）注意以下交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{TMF}\otimes\Sigma S^{2m-1} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathrm{TMF}\otimes\Sigma^2 S^{2m-1}\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\mathrm{TMF}\otimes\Sigma\mathbb{C}P_1^{m-1} & \longrightarrow & \mathrm{TMF} & \longrightarrow & \mathrm{TJF}_m\\
\downarrow & & \downarrow\mathrm{id} & & \downarrow\\
\mathrm{TMF}\otimes\Sigma\mathbb{C}P_1^{m} & \longrightarrow & \mathrm{TMF} & \longrightarrow & \mathrm{TJF}_{m+1}
\end{array}$$

其中行和列都是余纤维序列。右侧的垂直序列表明，TJF$_{m+1}$ 是通过将 S^{2m+2}-胞腔附加到 TJF$_m \simeq$ TMF $\otimes P_m$上得到的。我们根据第 4 节所描述的余条复形来分析这一附加过程。

我们从基例开始 $m = 1$. TJF$_2$ 的下降谱序列的 E_2-项是 Hopf 群胚 $(B_2, B_2 \otimes_A \Gamma)$ 的上同调，而 B_2 是由 1 和 x. 生成的秩为 2 的自由 A-模。对 x的余作用告诉我们， x上的 d_1-微分为

$$d_1(x) = -\frac{1}{3}(s^2 + a_1 s),$$

且 $-\frac{1}{3}(s^2+a_1 s)$ 表示 ν在 TMF 的 DSS 的 E_2 页。因此， $\nu \in$TMF 在 TJF$_2$, 中变为零，而这一事实迫使映射 TMF $\otimes S^3 \to$ TJF$_1 =$ TMF 等于 $\nu \in [\Sigma^3$TMF，TMF$]_{\mathrm{TMF}} \simeq \pi_3$TMF。特别地，TJF$_2$ 等价于余纤维 TMF $\otimes C\nu$.

我们按如下方式进行归纳法。假设等价 $\mathrm{TJF}_n \simeq \mathrm{TMF}\otimes P_m$，并考虑以下图表：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{TMF}\otimes\Sigma^2 S^{2m-1} & \longrightarrow & \mathrm{TMF}\otimes P_m & \longrightarrow & \mathrm{TMF}\otimes P_{m+1} \\
\| & & \downarrow & & \\
\mathrm{TMF}\otimes\Sigma^2 S^{2m-1} & \longrightarrow & \mathrm{TJF}_m & \longrightarrow & \mathrm{TJF}_{m+1} \\
\| & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{TMF}\otimes\Sigma^2 S^{2m-1} & \longrightarrow & \mathrm{TMF}\otimes\Sigma^2\mathbb{C}P_1^{m-1} & \longrightarrow & \mathrm{TMF}\otimes\Sigma^2\mathbb{C}P_1^{m}.
\end{array}$$

底部的方块是交换的，中间竖直映射的复合由底部 0-胞腔的压缩给出。要完成归纳法，只需证明左上方块交换。由于经过复合 $\mathrm{TJF}_m \to \mathrm{TMF}\otimes\Sigma^2\mathbb{C}P_1^{m-1}$ 后这两个映射重合，我们可以通过下方的图表追逐来验证交换性。

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{TMF} & = & \mathrm{TMF} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{TMF}\otimes\Sigma^2 S^{2m-1} & \longrightarrow & \mathrm{TMF}\otimes P_m & \longrightarrow & \mathrm{TMF}\otimes P_{m+1} \\
\| & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{TMF}\otimes\Sigma^2 S^{2m-1} & \longrightarrow & \mathrm{TMF}\otimes\Sigma^2\mathbb{C}P_1^{m-1} & \longrightarrow & \mathrm{TMF}\otimes\Sigma^2\mathbb{C}P_1^{m}
\end{array}$$

因此 利用胞腔分解，我们可以推出 TJF_n 的 DSS 存在一条水平消失线。

引理 6.5. （另见 [BBPX22]和 [Chu22]）TJF_n 的下降谱序列在 E_{24}-页的 $s = 24$ 处有一条水平消失线。

证明。记 I 为映射 $\mathrm{TMF} \to \mathrm{TMF}_1(3)$ 的核。TMF 的下降谱序列在 E_{24}-页的 $s = 24$ 处有一条水平消失线 [Bau08], ，因此映射 $I^{\otimes 24} \to$TMF 是一个幻影映射。由于 TMF 是偶周期 $\mathbb{E}_\infty$-环的极限，任何到 TMF 的幻影映射都为零。因此，映射 $I^{\otimes 24} \to$TMF 也为零。

本节中的论证通过映射 $\mathrm{TMF} \to \mathrm{TMF}_1(3)$，将 TJF_n 的 DSS 与 $\mathrm{TMF}\otimes P_n$ 的亚当斯-诺维科夫谱序列联系起来。由于我们知道映射 $I^{\otimes 24}\otimes P_n \to \mathrm{TMF}\otimes P_n$ 为零，因此由 [Mat17, 命题 2.29] 可得所述的消失线。□

7. TJF_2

7.1. E_2**-项。** 我们确定 TJF_m 的下降谱序列的高阶微分与 E_∞-页。我们首先回顾 TMF 的下降谱序列的 E_2-项，其计算见 [Bau08] ，并如图 2 所示。

定理7.1 ([Beh19])。 作为环，TMF 的下降谱序列的 E_2-页同构于

$$E_2^{*,*} \simeq \mathbb{Z}_{(2)}[c_4, c_6, \Delta^{\pm 1}, \eta, \nu, \delta, \epsilon, \kappa, \overline{\kappa}]/I$$

其中 I 是由.....生成的理想

$$2\eta, \eta\nu, 4\nu, 2\nu^2, \nu^3 - \eta\epsilon,$$
$$2\epsilon, \nu\epsilon, \epsilon^2, 2\delta, \nu\delta, \epsilon\delta, \delta^2 = c_4\eta^2,$$
$$2\kappa, \eta^2\kappa, \nu^2\kappa - 4\overline{\kappa}, \epsilon\kappa, \kappa^2, \kappa\delta,$$
$$\nu c_4, \nu c_6, \epsilon c_4, \epsilon c_6, \delta c_4 - \eta c_6, \delta c_6 - \eta c_4^2,$$
$$\kappa c_4, \kappa c_6, \overline{\kappa} c_4 - \eta^4\Delta, \overline{\kappa} c_6 - \eta^3\delta\Delta, c_6^2 - c_4^3 + 1728\Delta$$

具有双次数

$$\begin{array}{lll}
|c_4| = (0,8), & |c_6| = (0,12), & |\Delta| = (0,24), \\
|\eta| = (1,2), & |\nu| = (1,4), & |\delta| = (1,6), \\
|\epsilon| = (2,10), & |\kappa| = (2,16), & |\overline{\kappa}| = (4,24).
\end{array}$$

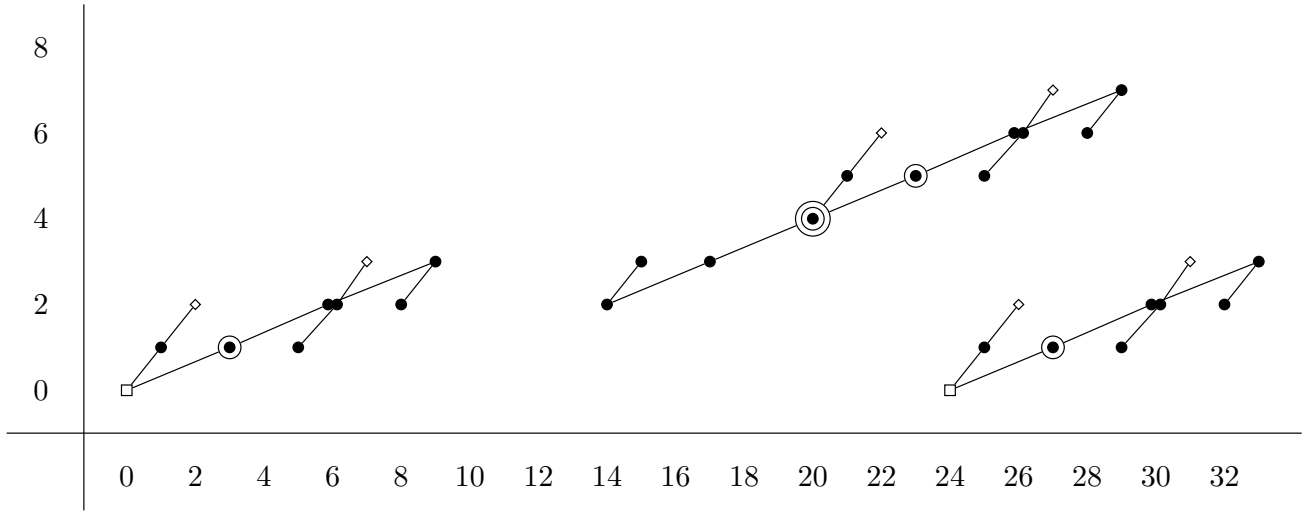
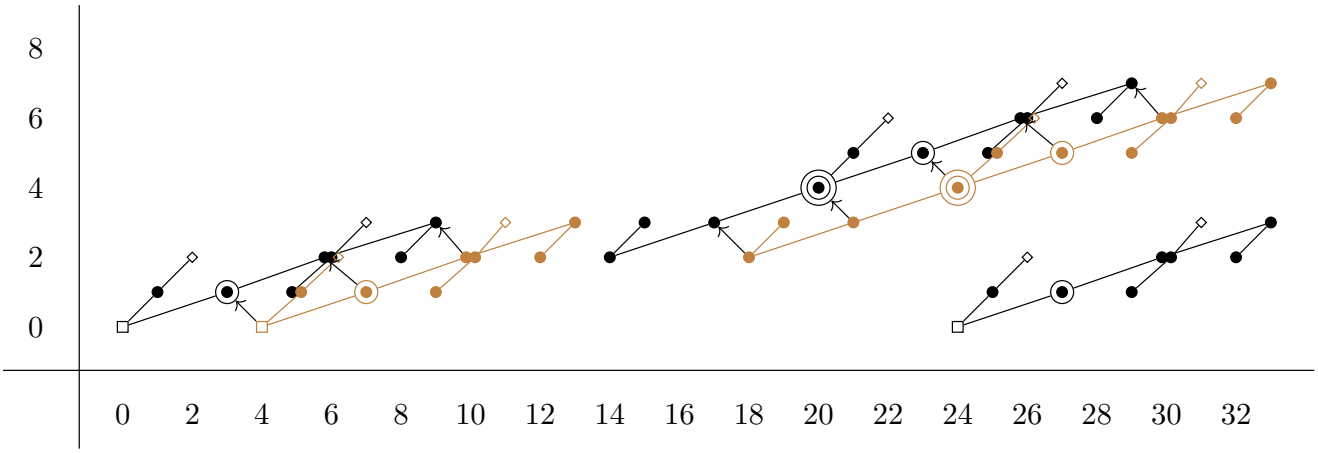


FIGURE 2. 2-局部 TMF 的 DSS 的 E_2 页



TJF 的代数 AHSS 的 FIGURE 3. E_1 项$_2$ 及微分

根据第 6 节中的胞腔结构，代数 AHSS 的 E_1-项包含两份 TMF 的 E_2-项，分别由双次数为 (0，0) 的 x_0 和双次数为 (4，0) 的 x_4 生成。d_1- 微分将 $x_4 \mapsto \nu \cdot x_0$ 送至 E_2。这给出了 TJF$_2$ 的 DSS 的 E_2 页（图 4）；它是 Δ- 线性且 κ- 线性的。

我们注意到以下乘法扩张。

引理 7.2. E_2 项中存在以下乘法扩张。

(1) $\eta \cdot [4x_4] = [\delta x_0]$,
(2) $\nu \cdot [\eta x_4] = [\epsilon x_0]$,
(3) $\eta \cdot [2\nu x_4] = [\epsilon x_0]$,
(4) $\nu \cdot [\epsilon x_4] = [\eta\kappa x_0]$,
(5) $\eta\kappa \cdot [\eta x_4] = [2\overline{\kappa} x_0]$.

证明。我们在 E_2项中使用 Massey 括号和洗牌引理：

(1) $\eta \cdot [4x_4] = \eta\langle 4, \nu, x_0\rangle = \langle \eta, 4, \nu\rangle x_0 = [\delta x_0]$,(2)
$\nu \cdot [\eta x_4] = \nu\langle \eta, \nu, x_0\rangle = \langle \nu, \eta, \nu\rangle x_0 = [\epsilon x_0]$,(3)
$\eta \cdot [2\nu x_4] = \eta\langle 2\nu, \nu, x_0\rangle = \langle \eta, 2\nu, \nu\rangle x_0 = [\epsilon x_0]$,(4)
$\nu \cdot [\epsilon x_4] = \nu\langle \epsilon, \nu, x_0\rangle = \langle \nu, \epsilon, \nu\rangle x_0 = [\eta\kappa x_0]$,(5)
$\eta\kappa \cdot [\eta x_4] = \eta\kappa\langle \eta, \nu, x_0\rangle = \langle \eta\kappa, \eta, \nu\rangle x_0 = [2\kappa x_0]$.

□

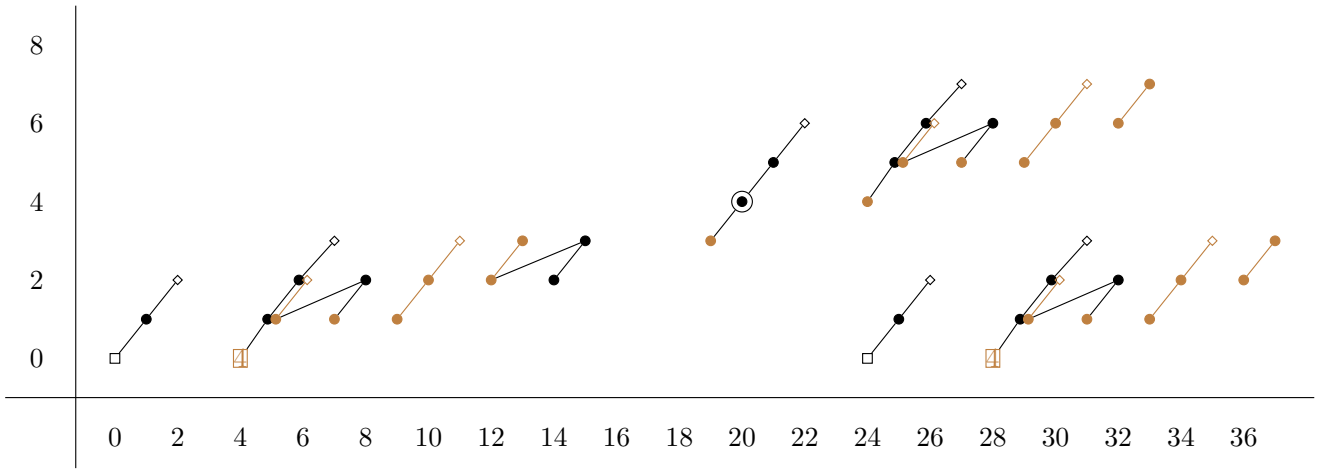


FIGURE 4. TJF 的 DSS E_2 页$_2$

7.2. **高阶微分**。 映射 TMF $\to$ TJF$_2$ 诱导了 d_3-微分 $d_3([2\nu x_0]) = \eta^4 x_0$，且 η-线性给出 $d_3([4x_4]) = \eta^3 x_0$。没有其他 d_3-微分出现，因此 E_4-页如图9所示。

注 7.3。 由于 3 线以上的任何元素都可被 κ 整除，因此在计算高阶d_r 时，只需考察上同调次数不超过 3 的元素。对 TJF$_n$，我们也采用同样的观察。

For 由双次数原因，只能出现奇数 r。因此，只需确定 d_5， d_7， $\cdots$， d_{23} .

引理7.4。 d_5-微分是 Δ^2-线性的，并且由以下内容确定

(1) $d_5([\Delta\eta x]) = [\epsilon\overline{\kappa}x_0]$,

(2) $d_5([\Delta\epsilon x]) = [\eta\overline{\kappa}\kappa x_0]$,

以及 Δ^2-线性。

证明。 回忆一下，在 TMF 的 DSS 中， $d_5(\Delta) = \nu\kappa$。对于 $w \in E^{*,*}_4$，莱布尼茨法则给出

$$d_5(\Delta w) = \nu\overline{\kappa}w + \Delta d_5(w).$$

由于 ν-倍元在 E_2-页上是 2-挠元，我们还有

$$d_5(\Delta^2 w) = 2\Delta\nu\overline{\kappa}w + \Delta^2 d_5(w) = \Delta^2 d_5(w),$$

这 给出了所示公式以及 Δ^2-线性。稀疏性排除了其他 d_5-微分 . □

引理 7.5. d_7-微分是 Δ^4-线性的，并由以下条件确定

(1) $d_7([\Delta^{2i+1}\eta\kappa x_4]) = [\Delta^{2i}\eta^2\kappa^2\overline{x}_0]$,

(2) $d_7([\Delta^{2i}\eta\kappa x_4]) = 0$.

证明. DSS 中 TMF 的等式 $d_7(\Delta^4) = \Delta^3\eta^3\kappa = 4\Delta^3\nu\kappa$ 蕴含此处的 Δ^4-线性，论证与 d_5 相同。

证明 1. </style}TMF 中的类 $\eta^2\kappa^2 \in \pi_{42}$ 可被 ν 整除，因此 $[\eta^2\kappa^2 x_0]$ 必须是某个微分的目标。根据 Δ^4-周期性，唯一可能的源是 $[\Delta^{2i+1}\eta\kappa x_4]$，由此得到奇次幂上所述的非平凡 d_7。对于偶次幂，

$$d_7([\Delta^2\eta\kappa x_4]) = \kappa\, d_7([\Delta^2\eta x_4]) = 0,$$

而且 Δ^4-线性迫使所有 i 都满足 $d_7([\Delta^{2i}\eta\kappa x_4]) = 0$。若 $d_7(\Delta^7\eta\kappa x_4) = 0$，类 $\eta^2\kappa^2\Delta^6 x_0$ 就必须支持一个更晚的微分，从而迫使 $d_{17}(\eta^2\kappa^2\Delta^6 x_0) = \kappa^5\Delta^3\eta\epsilon x_0$。下文将证明 $d_9(\kappa^5\Delta^3\eta\epsilon x_4) \neq 0$，排除这种可能。

证明 2（合成莱布尼茨法则）。使用 d_5-微分和合成莱布尼茨法 e,

$$\begin{aligned}\delta_4^8([\Delta^{2i+1}\eta\kappa x_4]) &= \kappa\,\delta_4^8([\Delta^{2i+1}\eta x_4]) \\ &= \kappa[\Delta^{2i}\epsilon\overline{\kappa}x_0] \\ &= [\Delta^{2i}\eta^2\overline{\kappa}^2 x_0],\end{aligned}$$

在奇次幂上给出相同的非平凡 d_7 □

注记 7.6。回想一下，$w^2 = [\Delta^2\eta\kappa^2]$ 是 TMF 的 DSS 中的一个永久循环。它在 TJF 的 DSS 的 E_∞ 页中的像为零，但在 $\pi_*\mathrm{TJF}_2$ 中的像非零，并落在更高的 Adams 滤过中。

为进一步确定微分，我们使用 [BBPX22 中引理 6.13] 所示的以下引理（几何边界定理）。

引理 7.7. 设 $X \to Y \xrightarrow{p} Z$ 是谱的一个（余）纤维化，且 $a \in E_r(Y)$ 是 *DSS* 中的一个元素。假设 $p_*(a)$ 对某个 $r' \geq r$ 持续到 $E_{r'}$ 项，并且存在一个非平凡微分 $d_{r'}(p_*(a)) \neq 0$. 那么，对某个 $r'' \leq r'.$，存在一个非平凡微分 $d_{r''}(a) \neq 0$

Lemma 7.8. d_9-微分由以下带有 $i = 0$ 的微分确定，1:

(1) $d_9([\Delta^{2+4i}x_0]) = [\Delta^{4i}\kappa^2 \cdot 2\nu x_4]$, *(2)* $d_9([\Delta^{3+4i}x_0]) = [\Delta^{4i+1}\kappa^2 \cdot 2\overline{\nu}x_4]$, *(3)* $d_9([\eta\Delta^2 x_4]) = [\kappa^2\epsilon x_4]$.

证明。我们对 $i = 0.$ 证明这一结论。同样的论证也适用于 $i = 1$ 情形。第一个微分由以下事实得出：

$$\pi_{47}\mathrm{TMF} \otimes C\nu = 0.$$

第二个是 TMF 的 d_9-微分的像，以及 η-线性性的结果。$d_9([\eta\Delta^2 x_4])$ 是引理 7.7 的推论。第一个微分也可以由合成莱布尼茨法则推导如下：在 $\nu_{\mathrm{MU}}(\mathrm{TJF}_2)/\tau^{12}$ 中，我们计算

$$\begin{aligned}\tau^8\overline{\kappa}^2[2\nu x_4] &= \tau^8\overline{\kappa}^2\langle 2\nu, \nu, x_0\rangle \\ &= \tau^4\overline{\kappa}\langle\tau^4\overline{\kappa}, 2\nu, \nu\rangle x_0 \\ &= \tau^4\overline{\kappa}[2\nu\Delta]x_0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

其中最后一个等式在 [CDN24，推论 6.36] 中得到了证明。因此，$[\kappa^2 2\nu x_4]$ 必须是某个 d_9-微分的目标，而 $[\Delta^2 x_0]$ 是唯一可能的定义域。□

引理 7.9。$i = 0$ 为 d_{11}-微分的决定方式如下：1:

(1) $d_{11}([2\Delta^{2+4i}x_0]) = [\Delta^{4i}\kappa^2\eta^3\overline{\kappa}x_4]$, *(2)* $d_{11}([\kappa\Delta^{2+4i}x_0]) = [\Delta^{4i}\eta\kappa^3 x_0]$, *(3)* $d_{11}([2\Delta^{3+4i}x_0]) = [\Delta^{1+4i}\kappa^2\eta^3 x_4]$, *(4)* $d_{11}([\kappa\Delta^{3+4i}x_0]) = [\Delta^{1+4i}\eta\kappa^3 x_0]$, *(5)* $d_{11}([\Delta^4 x_0]) = [\Delta^2\kappa^2\eta^3 x_4]$, *(6)* $d_{11}([\Delta^5\overline{x}_0]) = [\Delta^3\kappa^2\eta^3 x_4]$

证明。第二个和第四个微分是微分 TMF $\to\mathrm{TJF}_2$. 的像。其他所有微分都由以下观察得出：

$$\pi_{24i-1}\mathrm{TMF} \otimes C\nu = 0,\ i = 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

或者，我们可以使用合成莱布尼茨法则来推导这些微分。□

引理 7.10。不存在 d_{13}、d_{15}、d_{17}-微分。

证明。这由次数原因可知。□

引理 7.11。d_{19}-微分由以下内容确定：

(1) $d_{19}([\eta\Delta^4 x_4]) = [\overline{\kappa}^5 x_0]$,
(2) $d_{19}([\Delta^7\eta^3 x_4]) = [\Delta^3\overline{\kappa}^5\eta^2 x_0]$.

证明。一种理解方式是，κ^5 在 TMF 中通过奇异扩张可被 ν 整除。第二个则来自以下观察：

$$\pi_{175}\mathrm{TMF} \otimes C\nu = 0.$$

此外，这两个微分都可以由引理 6.5 推得。由于消失线的存在，这两个目标都必须被某个微分击中，而实现这一点只有一种可能。□

引理 7.12。d_{23}-微分由以下内容确定：

(1) $d_{23}([\Delta^5\eta^2 x_4]) = [\overline{\kappa}^6\eta x_4]$,
(2) $d_{23}([\Delta^6\eta x_0]) = [\overline{\kappa}^6\Delta x_0]$,

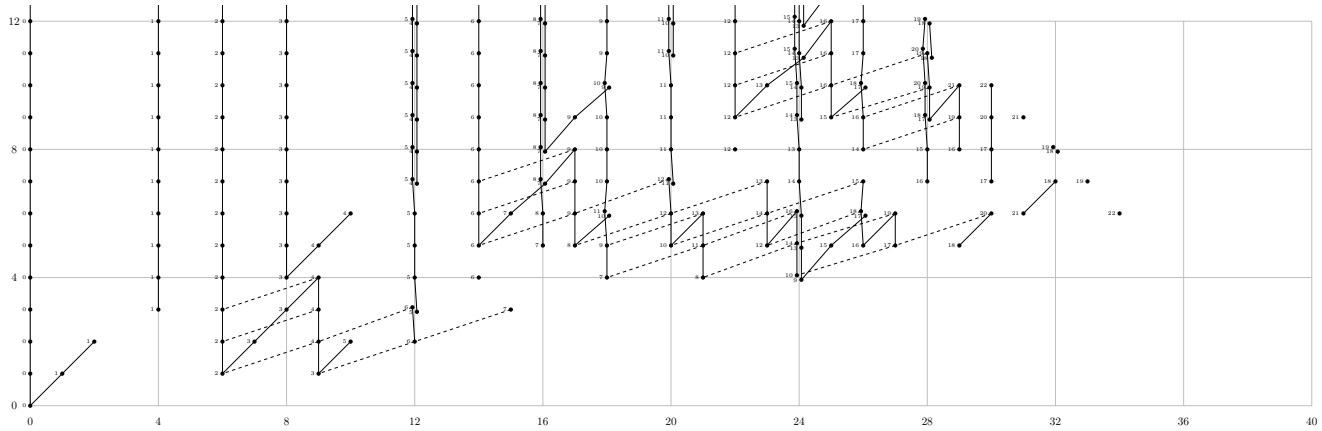


FIGURE 5. E_2 阶段的 TJF_3 的 ASS

(3) $d_{23}([\Delta^7\eta^2 x_0]) = [\overline{\kappa}^6\eta\Delta x_0]$.

证明。 第一个微分是引理 7.7 的推论。第二个和第三个微分由引理 6.5 得出。□

8. TJF_3

8.1. E_2 **阶段**。 代数 AHSS 的 E_1 阶由 x_0、x_4、x_6 生成，其中 $d_1(x_6) = \eta x_4$. 。所得的 E_2 页见图13。下面记录乘法扩张。

命题8.1。 E_2 阶段中存在以下乘法扩张：

(1) $\eta \cdot [2x_6] = [2\nu x_4]$, *(2)*
$2 \cdot [2\nu x_6] = [\delta x_4]$, *(3)*
$\nu \cdot [2\nu x_6] = 2 \cdot [\nu^2 x_6] = [\epsilon x_4]$, *(4)*
$\eta \cdot [\nu\kappa x_6] = \kappa \cdot [4\widetilde{x_4}] = [\nu^2\kappa x_4]$。

证明。 我们将其与收敛到 tmf $\otimes P_2$ 的 Adams 谱序列进行比较。

- 对于 (1)：ASS 的 E_2 项（图5，使用 [BR21] 计算）在同伦次数 6 和 7 上没有可能的微分，而且 $\pi_6$tmf $\otimes P_2$ 中生成元的 η 倍非零。这些事实确定了 $\pi_*\mathrm{TJF}_3$ 中前两个扩张。(2) 可用类似方法证明。

- 对于 (3)：我们计算

$$\nu \cdot (2[\nu^2 x_6]) = \nu \cdot [\epsilon x_4] = [\eta\kappa x_0].$$

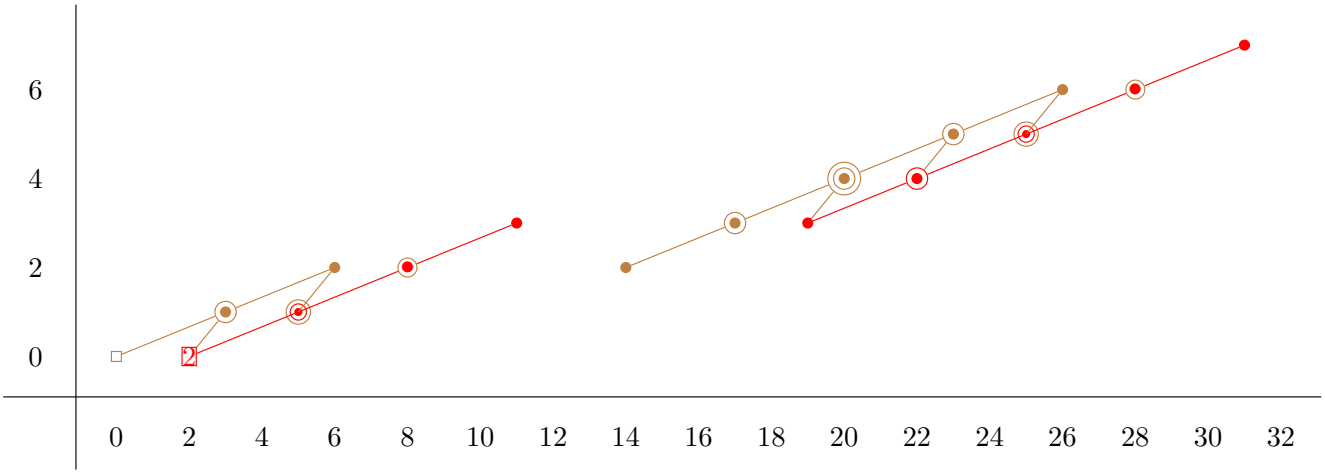
The 代数 AHSS 中的微分 $d_2([\nu x_6]) = [\epsilon x_0]$ 给出 Massey 乘积 shufflin g

$$\begin{aligned} 2\nu \cdot [\nu^2 x_6] &= 2\nu\langle \nu, \epsilon, x_0\rangle \\ &= \langle 2\nu, \nu, \epsilon\rangle x_0 \\ &= [\eta\kappa x_0], \end{aligned}$$

从而得到所需的恒等式。

- 对于（4）：由 TJF_3 6.3 的 TMF胞腔结构，我们知道该映射的余纤维是 TMF $\otimes C\eta$。tmf $\otimes C\eta$ 的 DSS 的E_2项由 [Bau04] 计算，并显示于图6中。我们可以在 tmf $\otimes C\eta$中检验这一扩张。或者，我们也可以使用 ASS 证明这一扩张：tmf $\otimes P_2$ 的 ASS 中有一个 d_3命中双次数为 (22,8) 的 $\mathbb{Z}/2$ 类（例如，我们可以确认该微分是收敛到 $\pi_* P_3$ 的 Adams 谱序列的 d_3 的像，该谱序列显示于 [Lin26]），因此 π_{22}TJF3 </style}是无挠的。因此， $[\nu^2\kappa x_4]$必定是 DSS 中某个微分的目标，而唯一可能性是 $d_3([\nu\kappa x_6]) = [\nu^2\kappa x_4]$。随后， η线性迫使 $\eta \cdot [\nu\kappa x_6] = [\nu^2\kappa x_4]$，这与所述扩张相符。

□



TMF $\otimes C\eta$ 的 DSS FIGURE 6. E_2 项

8.2. **高阶微分**。 现在我们确定 $r \geq 5$的所有微分 d_r 。它们显示于图14–17中。

引理8.2. 这些 d_5-微分为：

(1) $d_5([2\Delta^{1+2i}x_6]) = \nu[2\Delta^{2i}\kappa x_6]$, *(2)* $d_5([\Delta^{1+2i}\nu^2 x_6]) = [\Delta^{2i}\kappa\nu^3 x_6]$, *(3)* $d_5([2\Delta^{2+4i}x_6]) = 2\nu[\Delta^{1+4i}\kappa x_6] = [\Delta^{1+4i}\kappa\delta x_4]$, *(4)* $d_5([\nu^2\Delta^{2+4i}x_6]) = [\Delta^{1+4i}\eta\kappa x_0]$.

证明. 这些由 $d_5(\Delta) = \nu\kappa$ 得出，并结合莱布尼茨法则。 □

引理8.3. 不存在 d_7-微分。

证明。 由次数考虑可将它们排除。 □

引理8.4。 d_9-微分为：

(1) $d_9([\Delta^2 x_0]) = [\kappa^2\nu x_4]$, *(2)* $d_9([\Delta^2\nu x_4]) = [\kappa^2\kappa x_0]$ *(3)* $d_9([\Delta^3 x_0]) = [\Delta\kappa^2\nu x_4]$, *(4)* $d_9([\Delta^3\nu x_4]) = [\Delta\kappa^2\kappa x_0]$.

证明。 这些是 $\mathrm{TJF}_2 \to \mathrm{TJF}_3$ 的微分的像。 □

引理8.5。 d_{13}-微分为：

(1) $d_{13}([\Delta^{2+4i}\eta x_0]) = [\Delta^{4i}\kappa^3\epsilon x_4]$,

(2) $d_{13}([\Delta^5\nu^3 x_6]) = [4\Delta^2\kappa^4 x_6]$.

证明。 第一项是 $\mathrm{TJF}_2 \to \mathrm{TJF}_3$ 的像。第二项由引理 6.5 的消失线所迫。 □

利用引理 6.5 并结合次数的考虑，我们得到其余的微分。

引理 8.6。 d_{15}-微分为：*(1)* $d_{15}([\Delta^{3+4i}\delta x_4]) = [\Delta^{4i}\kappa^4 x_0]$.

引理 8.7。 不存在 d_{17}-微分。 d_{19}-微分为：

(1) $d_{19}([\Delta^5 x_0]) = [\Delta\kappa^4\nu^3 x_6]$

引理 8.8。 d_{21}-微分为：*(1)* $d_{21}([4\Delta^6 x_6]) = [\Delta^2\kappa^5\eta x_0]$

引理 8.9. *The* d_{23}-微分为：

(1) $d_{23}([\Delta^6\eta x_0]) = [\kappa^6 x_0]$.

9. TJF_4

9.1. E_2**项。** 代数 AHSS 的 E_1 项生成了计算 DSS 的 E_2 项的 x_0、x_4、x_6以及 x_8，其中 $d_1(x_8) = 2\nu x_4$。我们还注意到，在 AHSS 中存在从 Massey 乘积 $\eta\kappa = \langle\epsilon, \nu, 2\nu\rangle$. 出发的微分 $d_3(\epsilon x_8) = \eta\kappa x_0$。由此得到的 DSS 的 E_2 页绘于图 18 中。现在列出 E_2 项中的乘法扩张。

命题 9.1。 E_2页中存在以下乘法扩张：

(1) $2[\eta x_8] = [2\nu x_6]$,

(2) $2[\nu^2 x_8] = [\kappa x_0]$,

(3) $\eta[\eta\kappa x_8] = [\overline{4}\kappa x_4]$.

证明. (1) 微分 $d_1(x_8) = 2\nu x_4$ 给出

$$[\delta x_4] = \langle\eta, \nu, 4x_4\rangle = \eta \cdot [2x_8] = 2 \cdot [\eta x_8].$$

(2) 我们有

$$[\kappa x_0] = \langle\nu, 2\nu, \nu, 2\nu\rangle x_0 = \nu\langle 2\nu, \nu, 2\nu, x_0\rangle.$$

然而，类 $\langle\nu, 2\nu, x_0\rangle = [2\nu x_4]$ 被 $d_1(x_8) = 2\nu x_4$ 杀死，因此我们计算

$$\langle 2\nu, \nu, 2\nu, x_0\rangle = [2\nu x_8]$$

并得到所需结果。

(3) 考虑元素 $[\eta\kappa x_0] \in \pi_{21}\mathrm{TJF}_3$。Toda 括号 $\eta\kappa = \langle\kappa, 2, \nu^2\rangle$ 与 Moss 定理蕴含关系

$$\begin{aligned}[\eta\overline{\kappa}x_0] &= \langle\kappa, 2, \nu^2\rangle x_0 \\ &= \kappa\langle 2, \nu^2, x_0\rangle \\ &= \kappa[2\nu x_4]\end{aligned}$$

于 $\pi_{21}\mathrm{TJF}_3$ 中。因此 $[\eta\kappa x_0]$ 必定被 TJF_4，的 DSS 中的一个微分杀死，并且该扩张被迫通过 d_3 杀死该元素。

□

9.2. **高阶微分。**

引理 9.2. d_5-微分由以下内容确定：

(1) $d_5([2\Delta^{1+2i}x_6]) = \nu[2\Delta^{2i}\kappa\overline{x}_6]$, *(2)* $d_5([\Delta^{1+2i}\nu^2 x_6])$ $= [\Delta^{2i}\kappa\nu^3 x_6]$, *(3)* $d_5([2\Delta^{2+\overline{4}i}x_6])$ $= 2\nu[\Delta^{1+4i}\kappa x_6] = [\Delta^{1+4i}\kappa\delta x_4]$, *(4)* $d_5([\nu^2\Delta^{2+\overline{4}i}x_6])$ $= [\Delta^{1+4i}\eta\kappa x_0]$, *(5)* $d_5([\Delta^{2+4i}\nu x_6]) = [\Delta^{1+4i}\kappa\epsilon x_4]$, *(6)* $d_5([2\Delta^{1+4i}x_8]) = [2\Delta^{4i}\nu\kappa\overline{x}_8]$, *(7)* $d_5([\Delta^{2+4i}\nu x_8])$ $= [\Delta^{1+4i}\kappa\kappa x_0]$.

证明。由 $d(\Delta)$ 和莱布尼茨法则可得。 □

引理 9.3。 d_7-微分由以下内容确定：

(1) $d_7([4\Delta^{1+4i}x_8]) = [\Delta^{4i}\eta^3\overline{\kappa}\overline{x}_8]$, *(2)* $d_7([2\Delta^{2+4i}x_8]) = [\Delta^{1+4i}\eta^2\kappa\overline{x}_8]$.

证明。这由引理 7.7 得出。 □

引理 9.4。 d_9-微分由以下内容确定：

(1) $d_9([\Delta^{3+4i}\eta^2 x_8]) = [\Delta^{1+4i}\overline{\kappa}^2\nu^3 x_8]$.

证明。这是引理 7.7 的推论。 □

引理 9.5. 存在以下 d_{11}-微分：

(1) $d_{11}([\Delta^{2+4i}\nu\kappa x_6]) = [\Delta^{4i}\eta^2\overline{\kappa}^3 x_8]$.

证明。由于 $[\Delta^{4i}\eta^2\kappa^3 x_8] = \eta\kappa^3[\Delta^{4i}\eta x_8]$ 和 $\eta\kappa^3 \equiv 0$ 属于 $\pi_{61}\mathrm{TMF}$，这个类必定是某个微分的目标，而图示的微分是唯一的可能性。□

引理 9.6. 有以下 d_{13}-微分：

(1) $d_{13}([\Delta^{3+4i}\nu^3 x_6]) = [\Delta^{4i}2\overline{\kappa}^4 x_6]$,

(2) $d_{13}([\Delta^{3+4i}x_0]) = [2\Delta^{4i}\kappa^3\nu x_8]$,
(3) $d_{13}([\Delta^{3+4i}\nu^3 x_8]) = [\Delta^{4i}2\kappa^4 x_8]$.

证明。 (1) 在 TJF_3 中得到证明。(2) 由 $[2\Delta^{4i}\kappa^3\nu x_8] = \kappa^3\nu[2\Delta^{4i}\bar{x}_8]$ and $\kappa^3\nu = 0$推出。(3) 由引理7.7 得出。□

引理9.7。 存在以下 d_{15}-微分:
(1) $d_{15}([\Delta^{3+4i}\delta x_4]) = [\Delta^{4i}\kappa^4\bar{x}_0]$,
(2) $d_{15}([\Delta^4\eta x_8]) = [\Delta\kappa^4\bar{x}_0]$, *(3)* $d_{15}([\Delta^6 x_0]) = [\Delta^3\kappa^3\eta^3 x_8]$.

证明。 (1) 在 TJF_3 中得到证明。(2) 和 (3) 由消失线推出。 □

同样，以下微分由引理 6.5 得出。

引理*9.8. </style}*存在以下 d_{17}-微分:
(1) $d_{17}([\Delta^6\eta^2 x_8]) = [\Delta^2\bar{\kappa}^4\nu\kappa x_8]$.

引理9.9. d_{19}-微分为:
(1) $d_{19}([\Delta^5 x_0]) = [\Delta\bar{\kappa}^4\nu^3 x_6]$,
(2) $d_{19}([\Delta^5\nu^3 x_6]) = [\Delta\bar{\kappa}^5\eta^2 x_6]$.

引理9.10. 存在以下 d_{21}-微分:
(1) $d_{21}([\Delta^5\kappa\nu x_8]) = [\Delta^2\bar{\kappa}^6 x_0]$.

引理9.11. 存在以下 d_{23}-微分:
(1) $d_{23}([\Delta^5\eta^2 x_8]) = [\kappa^6\eta x_8]$, *(2)* $d_{23}([\Delta^7\eta^3 x_8]) = [\Delta^2\kappa^6\eta^2\bar{x}_8]$.

10. TJF_5

10.1. **E_2项。** 代数 AHSS 中的微分由 $d_1(x_{10}) = \eta x_8 + \nu x_6$ 给出。TJF_5 的 DSS 的 E_2 项见图 23。

命题 10.1. E_2 页中存在以下乘法扩张 :
(*1*) $\eta[\nu^3 x_{10}] = [\kappa x_0]$,
(*2*) $2[\eta\kappa x_{10}] = [\nu\kappa x_8]$,
(*3*) $\eta[\eta\kappa x_{10}] = [\bar{2}\kappa x_6]$.

证明。 (1) 从 tmf 的 ASS $\otimes P_6$ （图 7）可知， $\pi_{19}\mathrm{tmf} \otimes P_6$ 中 2-挠元的 η 倍非零。由于 $[\nu^3 x_{10}]$ 和 $[\kappa x_0]$ 在 TJF_6, 的 DSS 的 E_2 页均存留下来，这个关系在$\pi_*\overline{\mathrm{TJF}}_6$, 中必然成立；而滤过方面的原因保证它在 E_2 页就已经成立。

(2) $\mathrm{TJF}_3 \to \mathrm{TJF}_5$ 的余纤维是 $\Sigma^8\mathrm{TMF} \otimes C\eta$。tmf $\otimes C\eta$ 的 DSS E_2项（参见 [Bau04，图4.3]）在 $E^{3,28\ 2}$ 中呈现出相同的乘法扩张，适用于 tmf $\otimes \Sigma^8 C\eta$。
(3) 类似地，$\mathrm{TJF}_3 \to \mathrm{TJF}_5$的余纤维是 TMF $\otimes \mathbb{C}P^5_3$。复形 $\mathbb{C}P^5_3$有通过稳定映射 $\eta + \nu$附着的 6、8 和 10 维胞腔；TMF $\otimes \mathbb{C}P^5_3$中的扩张与第 7 节中的情形完全相同。

□

10.2. **高阶微分。** d_3微分由 $d_3(\delta) = \eta^4$得出，所得的 E_4页绘于 24。我们将在下文确定微分 $d_r, r \geq 5$ 。

引理 10.2。 有如下 d_5微分:
(1) $d_5([2\Delta^{1+4i}x_8]) = [2\Delta^{4i}\nu\bar{\kappa}x_8]$,
(2) $d_5([\Delta^{2+4i}\nu x_8]) = [\Delta^{1+4i}\bar{\kappa}\kappa x_0]$.

证明。 由莱布尼茨法则验证。 □

引理 10.3。 不存在 d_7-微分，且有以下 d_9-微分:
(1) $d_9([\Delta^{2+4i}\nu^3 x_{10}]) = [2\Delta^{4i}\kappa^3 x_6]$, *(2)* $d_9([\Delta^{3+4i}\nu^3 x_{10}]) = [2\Delta^{1+4i}\kappa^3 x_6]$, *(3)* $d_9([\Delta^{2+4i}x_6]) = [\Delta^{4i}\kappa^2\delta x_8]$, *(4)* $d_9([\Delta^{3+4i}x_6]) = [\Delta^{1+4i}\kappa^2\delta x_8]$.

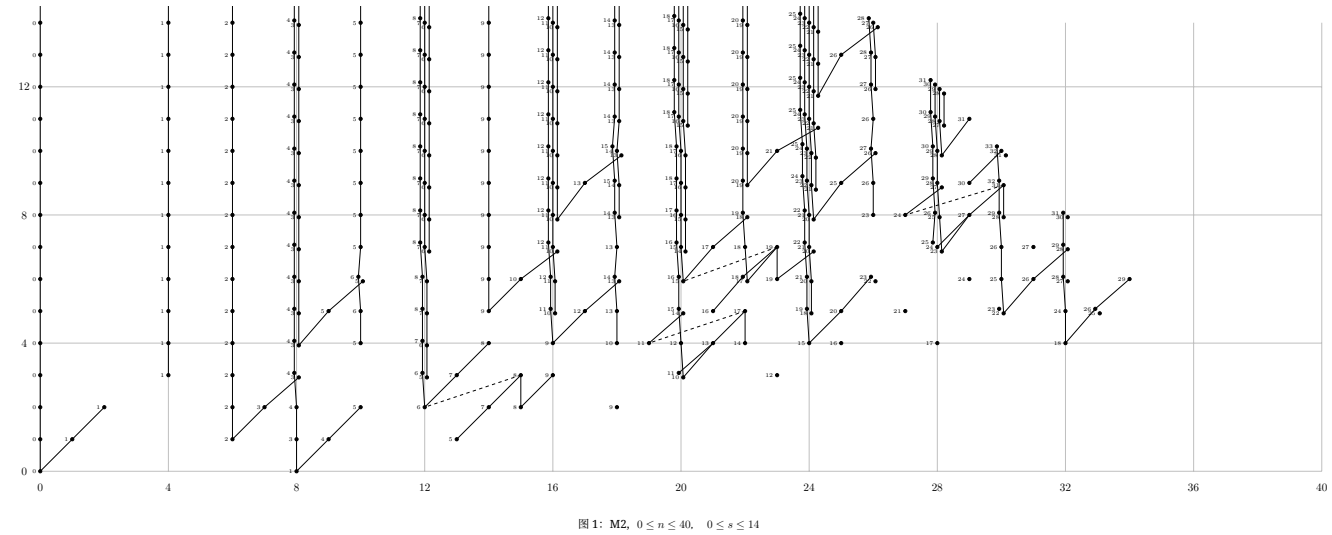


FIGURE 7. E_2-项 TJF 的 ASS_6

证明。 注意 $[2\kappa^4 x_6] = \kappa^3[2\kappa x_6] = \kappa^3\eta[\eta\kappa x_6]$ 在 E_2-项中。因为 $\kappa^3\eta = 0$ 在 $\pi_*\mathrm{tmf}$中，某个微分必定击中$[2\kappa^4 x_6]$; (1)和(2)由此及线性所强制。

(3) 和 (4) 由引理 6.5 得出。 □

引理 10.4。 有以下 d_{11}-微分:

(1) $d_{11}([\Delta^{2+4i}\delta x_8]) = [\Delta^{4i}\overline{\kappa}^3 x_0]$,

(2) $d_{11}([\Delta^{3+4i}\delta x_8]) = [\Delta^{1+4i}\overline{\kappa}^3 x_0]$.

证明。 由于 $[\kappa^4\overline{x_0}] = 0$ 属于 $\pi_{80}\mathrm{TJF}_4$, , DSS 中 TJF_5 的某个微分必须击中 $[\kappa^4 x_0]$, 而所显示的d_{11} 是唯一的可能性。 □

引理 *10.5*。 *</style>*存在以下 d_{13}-微分:

(1) $d_{13}([\Delta^{3+4i}x_0]) = [\Delta^{4i}\overline{\kappa}^3\nu x_8]$, *(2)* $d_{13}([\Delta^{3+4i}\nu^2 x_8]) = [\kappa^{3+4i}\eta\kappa x_{10}]$, *(3)* $d_{13}([\Delta^5\nu^2 x_8]) = [\Delta^2\kappa^3\overline{\nu\kappa}x_8]$

证明。 这些是 TJF_4 中 d_{13}-微分的像。 □

消失线引理 6.5 给出以下长微分。

引理 10.6。 存在以下 d_{15}-微分:

(1) $d_{15}([\Delta^3 x_6]) = [\overline{\kappa}^3\nu^3 x_{10}]$

引理 10.7。 不存在 d_{17}-微分，并且有以下 d_{19}-微分:

(1) $d_{19}([\Delta^5\kappa\eta x_{10}]) = [\Delta\overline{\kappa}^5\nu^2 x_8]$.

引理 10.8。 有以下 d_{21}-微分:

(1) $d_{21}([\Delta^6\eta\kappa x_{10}]) = [\Delta^2\overline{\kappa}^6 x_0]$

引理 10.9。 有以下 d_{23}-微分:

(1) $d_{23}([\Delta^6 x_0]) = [\overline{\kappa}^5\nu^3 x_{10}]$.

11. TJF_6

11.1. **E_2-项**。 TJF 的 DSS 的 E_2-项$_6$ 显示于图 28 中。

命题 11.1。 在 E_2-页中存在以下乘法扩张:

(1) $2[\eta x_{12}] = \eta[4x_{12}] = [\delta x_8]$,

(2) $\eta[\eta\kappa x_{12}] = [2\overline{\kappa}x_8]$.

证明。(1) 首先，我们看到 $[\delta x_8] = \langle \eta, 2\nu, 2x_8\rangle = \eta[4x_{12}]$。接下来证明 $2[\eta x_{12}] \neq 0$：我们知道，DSS 中 tmf $\otimes P_6$ 的 E^1,14 2 阶群为 8，由元素 $[\delta x_8], [\eta x_{12}]$ 和 $[c_6x_0]$ 生成（为使图 28 更清晰，省略了最后一项）。与 tmf $\to$ tmf $\otimes P_6$ 和 tmf $\otimes P_6 \to$ tmf $\otimes P_\infty$ 的复合在 E^1,14 2 上诱导出一个同构，因此我们看到 $[c_6x_0]$ 生成了 $\mathbb{Z}/2$ 直和项。因此， E^1,14 2 同构于 $\mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2$ 或 $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$。然而，我们知道，$\mathrm{TJF}_7$ 中 DSS 的 E^1, 14 2 同构于 TJF_∞ 中的对应群，因为次数小于 15 的余条复形 (B, Σ) 中的元素包含在第 4 节的子复形 (B_7, Σ_7) 中。因此，tmf $\otimes P_7$ 上的 E^1,14 2 同构于由 $[c_6x_0]$ 生成的 $\mathbb{Z}/2$，而由余纤维序列 Σ^{13}tmf $\to$tmf $\otimes P_6 \to$t mf $\otimes P_7$ 诱导的正合序列变为 $\mathbb{Z} \to E_2 \to \mathbb{Z}/2$，所以 tmf $\otimes P_6$ 上的 E^1,14 2 必须同构于 $\mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2$。这个群结构迫使等式 $2[\eta x_{12}] = \eta[4x_{12}]$ 成立，因为后者是 $\mathbb{Z}/4$ 中非零的 2-挠元。

(2) 注意，映射 $\mathrm{TJF}_4 \to \mathrm{TJF}_6$ 的余纤维等价于 TMF $\otimes X$，其中 X 具有 8 维胞腔、10 维胞腔和 12 维胞腔，粘接映射为来自 12 维胞腔的 $\eta + \nu$。然后可以用与命题 7.9（5）相同的方法证明这个扩张。

□

注记 11.2。 注意，坐标 (18,2) 中的元素由 $[\nu^2x_{12} + \epsilon x_{10}]$ 表示，因此我们有一个扩张$\eta[\nu^2x_{12} + \epsilon x_{10}] = [\eta\epsilon x_{10}]$。

11.2. **高阶微分**。

引理 11.3。 存在如下 d_5-微分：

(1) $d_5([\Delta^{2i+1}\eta\kappa x_{10}]) = [\Delta^{2i}\bar{\kappa}^2 x_8]$,

(2) $d_5([\Delta^{2i+1}\nu^2 x_{12}]) = [\Delta^{2i}\kappa\bar{\nu}^3 x_{12}]$.

证明。 由莱布尼茨法则可验证。 □

引理 11.4。 存在以下 d_7-微分：*(1)* $d_7([4\Delta^{2i+1}x_{12}])$ $= [\Delta^{2i}\eta^3\kappa x_{12}]$.

证明。 这是 7.7 的推论。 □

引理 11.5。 存在以下 d_9-微分：

(1) $d_9([\Delta^{2+4i}x_6]) = [\Delta^{4i}\kappa^2\delta\bar{x}_8]$, *(2)* $d_9([\Delta^{3+4i}x_6]) = [\Delta^{1+4i}\kappa^2\delta x_8]$, *(3)* $d_9([\Delta^{2+4i}\eta x_{12}]) = [\Delta^{4i}\kappa^3 x_{12}]$, *(4)* $d_9([\Delta^{3+4i}\eta x_{12}]) = [\Delta^{1+4i}\kappa^3 x_{12}]$.

证明。 (1) 和 (2) 在 TJF_6 中给出。(3) 和 (4) 可由 7.7 推得。 □

引理 11.6. 存在以下 d_{11}-微分：

(1) $d_{11}([\Delta^{2+4i}\delta x_8]) = [\Delta^{4i}\kappa^3 x_0]$, *(2)* $d_{11}([\Delta^{3+4i}\delta x_8]) = [\Delta^{1+4i}\kappa^3 x_0]$. *(3)* $d_{11}([2\Delta^{3+4i}x_8]) = [\Delta^{1+4i}\kappa^2\eta^3 x_{12}]$, *(4)* $d_{11}([\Delta^{2+4i}\kappa\eta x_{12}]) = [\kappa^2\eta^2 x_{12}]$, *(5)* $d_{11}([\Delta^5\eta x_{12}]) = [\Delta^3\kappa^3 x_0]$.

证明。(1) 和 (2) 在 TJF_6 中给出。(3) 和 (5) 可由 6.5 验证。(4) 是 7.7 的推论。 □

引理 11.7. 不存在 d_{13} 或 d_{15}-微分。

证明。 这可以根据次数原因验证。 □

利用引理 6.5，可以验证以下微分。

引理 11.8。 存在以下 d_{19}-微分：

(1) $d_{19}([\Delta^5\nu^2 x_{12}]) = [\bar{\kappa}^5\eta x_{12}]$,

(2) $d_{19}([\Delta^7 x_0]) = [\Delta^3\bar{\kappa}^4\eta^3 x_{12}]$.

引理 11.9。 不存在 d_{21}-微分，并且存在以下 d_{23}-微分：

(1) $d_{23}([\Delta^5\nu^3 x_{10}]) = [\kappa^6\bar{\nu}^2 x_{12}]$, *(2)* $d_{23}([\Delta^6 x_0]) = [\kappa^5\nu^3 x_{10}]$, *(3)* $d_{23}([\Delta^6\eta^2 x_{12}]) = [\Delta\kappa^6\eta x_{12}]$, *(4)* $d_{23}([\Delta^7\eta^3\bar{x}_{12}]) = [\Delta^2\kappa^6\eta^2 x_{12}]$.

12. TJF$_7$

12.1. **E_2-项。** E_2项如图33所示。

命题12.1. E_2页中存在以下乘法扩张 :

(1) $4[\nu x_{14}] = [\delta x_{12}]$, *(2)* $\eta[\nu x_{14}] = [\nu^2 x_{12} + \epsilon x_{10}]$, *(3)* $2[\nu^2 x_{14}] = [\epsilon x_{12}]$, *(4)* $\nu[\nu^3 x_{14}] = [2\kappa x_6]$, *(5)* $\eta[\kappa\nu x_{14}] = [4\kappa x_{12}]$.

证明。 注意，包含映射的余纤维 TJF$_5 \to$TJF$_7$等价于 Σ^{12}TMF$\otimes C\eta$。比较图6中 tmf $\otimes C\eta$ 的 DSS E_2项，可得扩张 (1)、(2)、(3) 和 (5)。扩张 (4) 的证明与前面的命题 11.1 (1) 类似：TJF$_\infty$ 中的结构决定了这一乘法扩张。□

12.2. **高阶微分。** d_3-微分与 d_5-微分由莱布尼茨法则连同$d_3(\delta) = \eta^4$ 和 $d_5(\Delta) = \nu\kappa$确定。

引理12.2。 有如下 d_5-微分:

(1) $d_5([4\Delta x_{14}]) = [\kappa\delta\bar{x}_{12}]$, *(2)* $d_5([\Delta\nu x_{14}]) = [\kappa\nu^2 x_{14}]$, *(3)* $d_5([\Delta^2\nu x_{14}]) = [\Delta\kappa\epsilon x_{12}]$.

引理12.3。 有如下 d_7-微分:

(1) $d_7([\Delta^{2i+1}\delta x_{12}]) = [\Delta^{2i}\bar{\kappa}^2 x_0]$, *(2)* $d_7([\Delta^{4i+2}2\nu x_{14}]) = [\Delta^{4i+1}\kappa^2 x_0]$, *(3)* $d_7([\Delta^4\nu x_{14}]) = [\Delta^3\bar{\kappa}^2 x_0]$.

证明。 (1)见 TJF$_6$。(2)可由合成莱布尼茨法则及 tmf^{syn} 中的关系 $4\nu = \tau^2\eta^3$ 得出。(3)是 tmf 的 DSS 中 $d_7(\Delta^4) = \Delta^3\eta^3\kappa$ 的结果。□

引理 12.4。 存在以下 d_9-微分:

(1) $d_9([\Delta^{2+4i}\delta\eta x_{12}]) = [\Delta^{4i}\kappa^2\kappa\bar{\eta}\bar{x}_{10}]$, *(2)* $d_9([\Delta^{2+4i}\kappa\eta x_{10}]) = [4\Delta^{4i}\kappa^3 x_{12}]$, *(3)* $d_9([\Delta^{3+4i}\delta\eta x_{12}]) = [\Delta^{1+4i}\kappa^2\kappa\eta x_{10}]$, *(4)* $d_9([\Delta^{3+4i}\kappa\eta x_{10}]) = [4\Delta^{1+4i}\kappa^3 x_{12}]$.

证明。 所有这些微分都是 TJF$_6 \to$TJF$_7$ 映射下 d_9 的像。□

引理 12.5. 存在以下 d_{11}-微分:

(1) $d_{11}([4\Delta^{2+4i}x_{12}]) = [\Delta^{4i}\bar{\kappa}^2\nu^3 x_{10}]$,
(2) $d_{11}([4\Delta^{3+4i}x_{12}]) = [\Delta^{1+4i}\kappa^2\nu^3 x_{10}]$.

证明。 同样，这些微分是 d_{11} 在映射 TJF$_6 \to$TJF$_7$.下的像 □

引理 12.6. 存在以下 d_{13}-微分:

(1) $d_{13}([2\Delta^{3+4i}x_8]) = [2\Delta^{4i}\bar{\kappa}^3\nu x_{14}]$,
(2) $d_{13}([\Delta^{3+4i}\nu^2 x_{14}]) = [\Delta^{4i}\bar{\kappa}^3\kappa\nu x_{12}]$.

证明。 这些可以由消失线 6.5 验证。□

引理 12.7。 不存在 d_{15}、d_{17}、d_{19}、d_{21}-微分。

证明。 由次数原因可知。□

引理 12.8。 存在以下 d_{23}-微分:

(1) $d_{23}([\Delta^5\delta\eta x_{12}]) = [\kappa^6\nu x_{14}]$, *(2)* $d_{23}([\Delta^6\delta\eta x_{12}]) = [\Delta\kappa^6\delta\eta\bar{x}_{12}]$, *(3)* $d_{23}([\Delta^7 x_0]) = [\Delta^2\bar{\kappa}^5\nu^3 x_{10}]$.

Appendix A. A comparison between algebraic and analytic Jacobi forms

定义 A.1. Tate 曲线是由该方程给出的、定义在 $\mathbb{Z}[[q]]$ 上的射影平面曲线

$$y^2 + xy = x^3 + a_4(q)x + a_6(q)$$

其中 $a_4(q)$ 与 $a_6(q)$ 由下式定义

$$a_4(q) = -5\sum_{n\geq 1}\frac{n^3q^n}{1-q^n}$$

and

$$a_6(q) = -\sum_{n\geq 1}\frac{q^n(7n^5+5n^3)}{12(1-q^n)}.$$

Tate 曲线成为 $\mathbb{Z}((q))$ 上的光滑椭圆曲线，记为 E_q。它具有典范不变微分$\omega_{\mathrm{can}} = dx/(2x+y)$。

定义 A.2. 设 R 为一个环，并设 $E_R \to \mathcal{M}_{ell}(R)$ 为 R 上光滑椭圆曲线模空间上的万有椭圆曲线。对任意权 $k\in\mathbb{Z}$ 与指标 $m\in\frac{\mathbb{Z}}{2}$，系数在 R 中的弱雅可比形式是整体截面 $\Gamma(E_R,\ p^*\omega^{k+2m}\otimes\mathcal{O}_{E_R}(2me))$。

等价地，权为 k、指标为 m、系数在 R中的雅可比形式，对每一对 $(C/\mathrm{Spec}\ R',\ \widetilde{\omega})$——即一个 R-代数 R' 上的椭圆曲线 C，连同不变微分的一个平凡化 $\widetilde{\omega}$ ——指定一个元素

$$f(C/R',\widetilde{\omega})\in\Gamma(C,p^*\omega^{2m}\otimes\mathcal{O}_C(2me))$$

满足以下条件:

- f 与基变换相容，并且
- 若 $\lambda\in R'^{\times}$，则

$$f(C/R',\lambda\widetilde{\omega}) = \lambda^{-k}f(C/R',\widetilde{\omega}).$$

将算术雅可比形式 f 在 Tate 曲线 $C_{\mathrm{Tate}}/\mathbb{Z}((q))$ 上取值，并使用典范生成元 ω_{can}，得到一个元素 $f(C_{\mathrm{Tate}}/\mathbb{Z}((q))\ \omega_{\mathrm{can}})\in\Gamma(C_{\mathrm{Tate}},\mathcal{O}_{C_{\mathrm{Tate}}}(2me))$。由于 $C_{\mathrm{Tate}}\cong\mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}}$ [DR73],，$\Gamma(C_{\mathrm{Tate}},\mathcal{O}_{C_{\mathrm{Tate}}}(2me))$ 中的任意截面都可写为 $s\in\mathbb{Z}((q))[u^{\pm1}]$，满足

$$s(qu) = q^{-m}u^{-2m}s(u).$$

对于弱雅　可比形式 f，所得的二元幂级数 $f(C_{\mathrm{Tate}},\omega_{\mathrm{can}})$ 是其 q-展开。

命题 A.3 (q-展开原理)。若环 R 上的弱 ***Jacobi*** 形式 f 的 q-展开系数属于子环 $S\subset\tilde{R}$，则存在唯一一个 S 上的弱 ***Jacobi*** 形式 f，其基变换为 f。特别地，R 上的弱 ***Jacobi*** 形式由其 q-展开唯一确定。

证明。这在 [Kra95 的引理 2.6] 中得到了证明。 □

现在我们考虑 $\mathbb{C}$上的 q-展开。复椭圆曲线的模空间是 $[\mathbb{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})]$，的商，而 $\mathbb{C}$ 上的椭圆曲线可写作 $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z})$，其中 $\tau\in\mathbb{H}$ 取某个值。因此，$\mathcal{M}_{ell}(\mathbb{C})$ 上的万有复椭圆曲线可写作

$$E_{\mathbb{C}}\cong\left[\mathbb{H}\times\mathbb{C}\Big/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\ltimes\mathbb{Z}^2\right],$$

其中 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 通过矩阵乘法作用于 $\mathbb{Z}^2$。对于 $\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，$(\gamma,(m,n))\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\ltimes\mathbb{Z}^2$ 的作用由下式给出

$$\begin{aligned}(\gamma,(\lambda,\mu))\cdot(\tau,z) &= \left(\gamma\cdot\tau,\frac{z+\lambda\tau+\mu}{c\tau+d}\right)\\ &= \left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z+\lambda\tau+\mu}{c\tau+d}\right).\end{aligned}$$

命题 A.4. 设 f 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的弱 ***Jacobi*** 形式，并将其 q-展开写作 $\phi(\tau,z):=f(E_q/\mathbb{C}((q))\ \omega_{\mathrm{can}})$。对于任意 $\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\ (\lambda,\mu)\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\ltimes\mathbb{Z}^2$，有

$$\phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z+\lambda\tau+\mu}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k e^{-2\pi im\left(\lambda^2\tau+2\lambda z-\frac{c(z+\lambda\tau+\mu)^2}{c\tau+d}\right)}\phi(\tau,z).$$

因此 $\phi(\tau,z)$ 是一个权为 k 、指标为 m的解析雅可比形式。

证明。 回顾同构 ([MRM08, 附录 I.2])

$$H^1(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2, \mathbb{C}^\times) \cong H^1(E, \mathcal{O}_E^\times) \cong \mathrm{Pic}(E).$$

容易验证,

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (\lambda, \mu)\right) \mapsto e^{2\pi i m(\lambda^2\tau + 2\lambda z - \frac{c(z+\lambda\tau+\mu)^2}{c\tau+d})}$$

定义了 $H^1(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2, \mathbb{C}^\times)$ 中的一个 1-余循环。根据 Ap- pel–Humbert 定理（参见 [Kra91，第 2] 节），相应的线丛为 $p^*\omega^{2m} \otimes \mathcal{O}_E(2me)$。因此，整体截面 $\Gamma(E_{\mathbb{C}}, p^*\omega^{k+2m} \otimes \mathcal{O}_{E_{\mathbb{C}}}(2me))$ 是满足雅可比形式变换律的函数ϕ: $\mathbb{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 。□

在 ω_{can} 处取 Tate 曲线的值，可得到一个单射映射

$$\Gamma(E_{\mathbb{C}}, p^*\omega^k \otimes \mathcal{O}_{E_{\mathbb{C}}}(2me)) \to \mathrm{JF}_{k,m}.$$

定理 **A.5** （[GW20],推论 3.6）。 解析雅可比形式的分次环由以下元素生成

$$\bigoplus_{n,k} \mathrm{JF}_{n,k} \cong \mathbb{Z}[c_4, c_6, \Delta^{\pm 1}, E_{4,1}, E_{4,2}, E_{4,3}, E_{6,1}, E_{6,2}, F_{6,3}, \phi_{0,1}, \phi_{0,2}, \phi_{0,\frac{3}{2}}, \phi_{0,4}, \phi_{-1,\frac{1}{2}}]$$

关系式为

$$\begin{aligned}
&c_4^3 - c_6^2 = 1728\Delta, && 24\phi_{0,2} = \phi_{0,1} - c_4\phi_{-1,\frac{1}{2}}^4,\\
&432\phi_{0,\frac{3}{2}}^2 = \phi_{0,1}^3 - 3c_4\phi_{0,1}\phi_{-1,\frac{1}{2}}^4 + 2c_6\phi_{-1,\frac{1}{2}}^6, && 4\phi_{0,4} = \phi_{0,1}\phi_{0,\frac{3}{2}}^2 - \phi_{0,2}^2,\\
&12E_{4,1} = c_4\phi_{0,1} - c_6\phi_{-1,\frac{1}{2}}^2, && 12E_{6,1} = c_6\phi_{0,1} - c_4^2\phi_{-1,\frac{1}{2}}^2,\\
&6E_{4,2} = E_{4,1}\phi_{0,1} - c_4\phi_{0,2}, && 6E_{6,2} = E_{6,1}\phi_{0,1} - c_6\phi_{0,2},\\
&2E_{4,3} = E_{4,1}\phi_{0,2} - c_4\phi_{0,3}, && 2F_{6,3} = E_{6,1}\phi_{0,2} - c_6\phi_{0,3}.
\end{aligned}$$

Appendix B. Descent spectral sequence charts

我们展示了 TJF_n 的下降谱序列：每张图都显示 $\mathrm{tmf} \otimes P_n$ 的 DSS，而 TJF_n 的 DSS 可通过对 Δ 求逆得到。全文采用 Adams 编号： $E^{s,\ r\ t}$绘制在 $(t-s,\ s)$ 处。

- 方框表示 $\mathbb{Z}_{(2)}$分量。
- 方框中的数字 n表示 $n\mathbb{Z}_{(2)}$分量。
- 实心点表示 $\mathbb{Z}/2$分量。
- n 同心圆表示 $\mathbb{Z}/2^n$求和项。例如， ◎ 表示 $\mathbb{Z}/4$求和项。
- 颜色表示第 4 节中对应元素在其 E_2项中的胞腔过滤。

	x_0	x_4	x_6	x_8	x_{10}	x_{12}	x_{14}
colors	black	brown	red	orange	purple	green	blue

- 斜率为负的非竖直箭头表示微分。
- 斜率非负的线表示乘以 TMF 中的一个元素： $\times 2$对应竖直线，$\times\eta$对应斜率为 1 的线， $\times\nu$对应斜率为 $1/3$ 的线。
- 线的颜色表示微分或乘法下生成元的像：例如在图13中， ν 乘以 $E^{0,\ 6\ 2}$ 中的生成元得到 $[2\nu x_6]$ （红色）。从 (9，1) 到 (12，2) 的棕色线同样表示 ν 乘以 $E^{1,\ 10\ 2}$ 中的生成元得到 $[\epsilon x_4]$（棕色）。
- 菱形 $\diamond$是 η塔的简写，表示从该点出发的所有 η倍数都存活。

B.1. TJF_2。 本节汇集了 TJF_2 的下降谱序列图表。

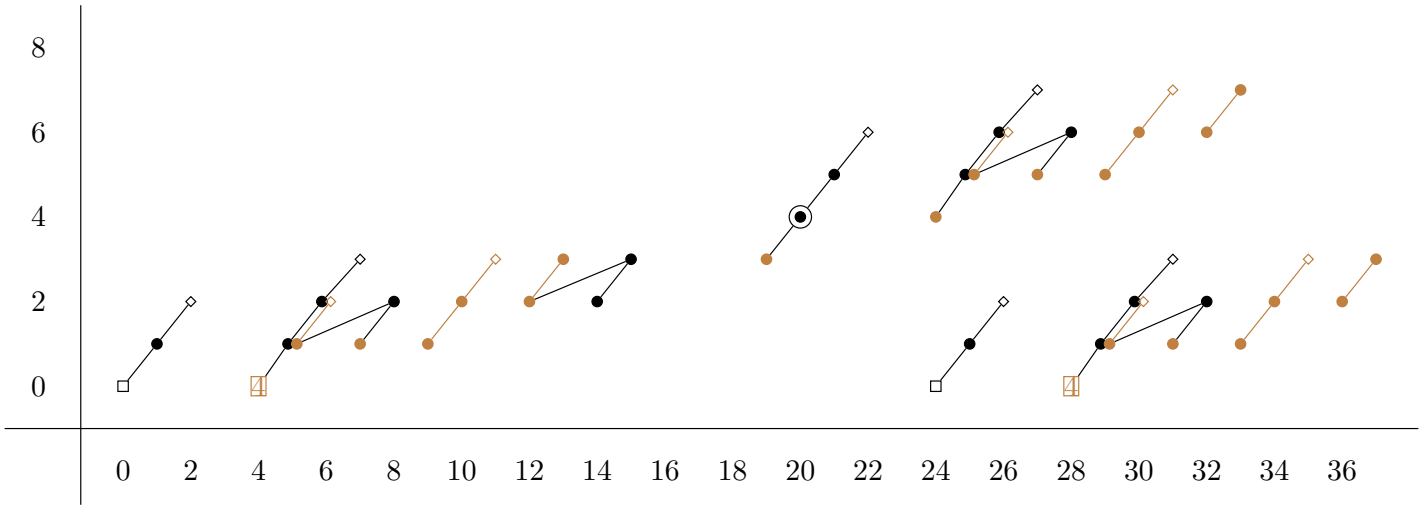


FIGURE 8. TJF_2 的 DSS 第 E_2 页

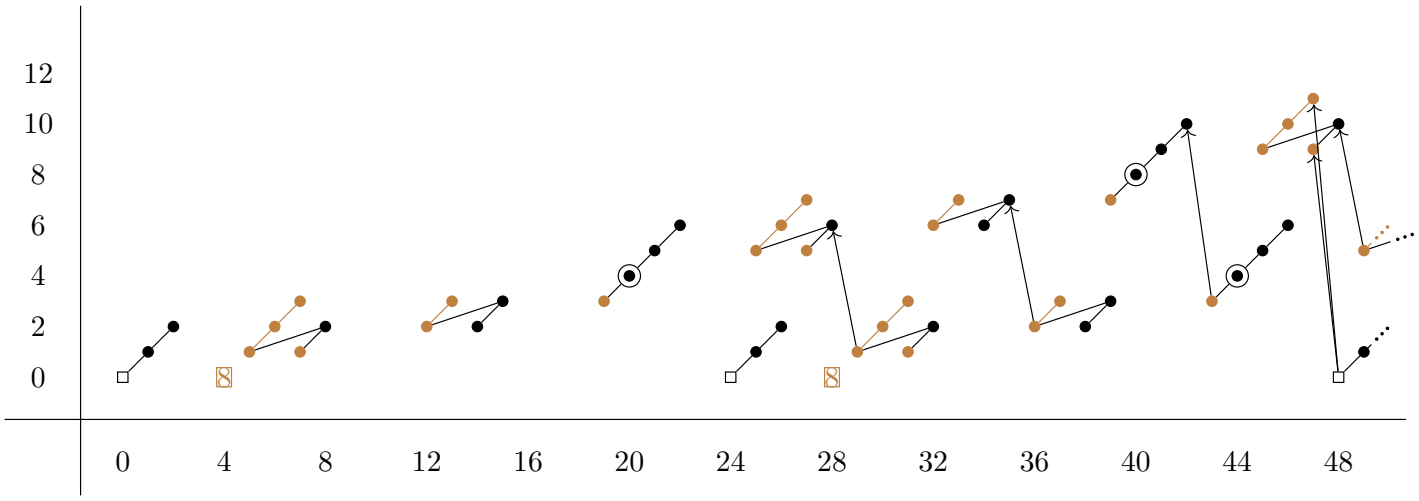


FIGURE 9. TJF_2 在 $0-49$ 范围内的 DSS 高阶微分

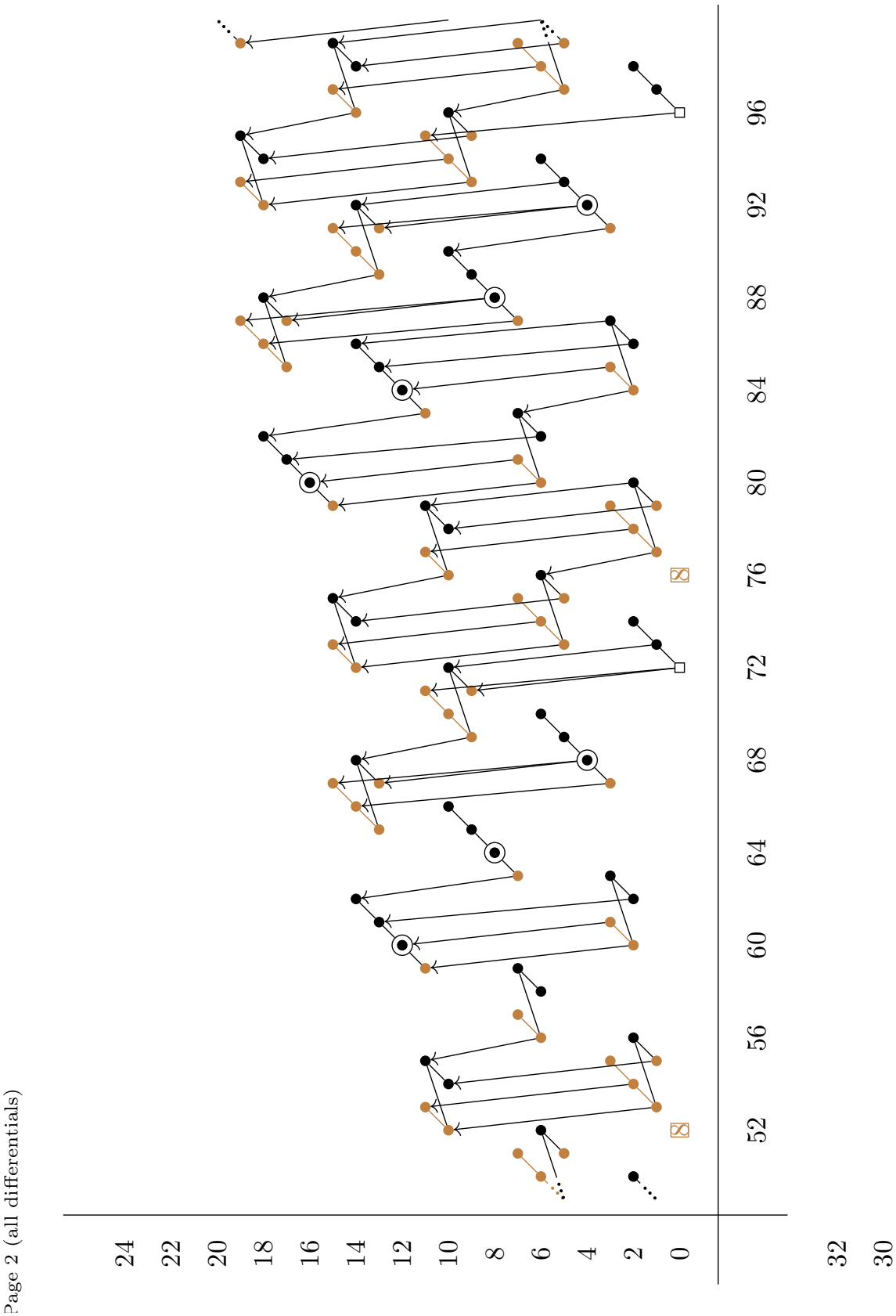


FIGURE 10. TJF 的 DSS 高阶页$_2$ 和微分

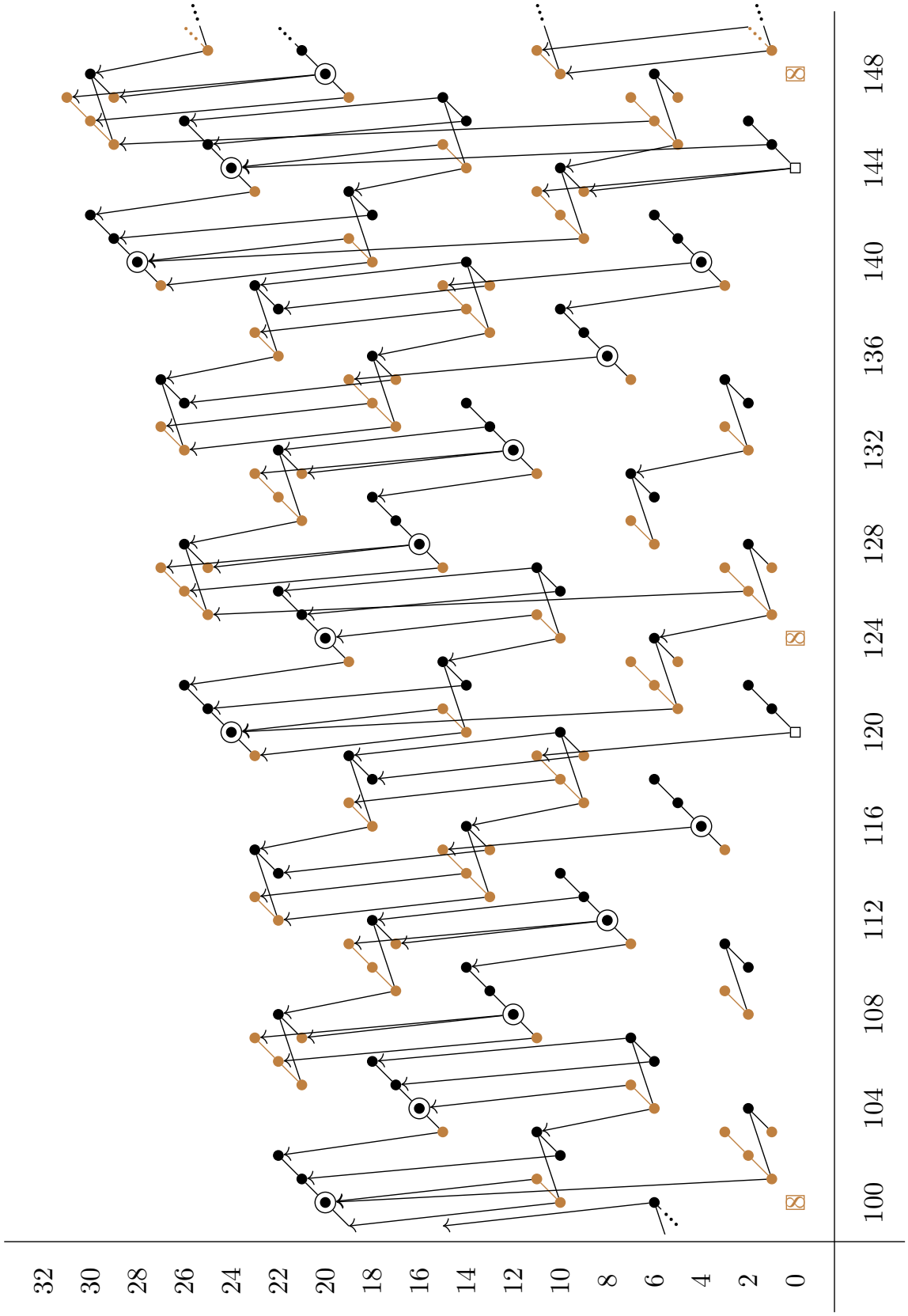


FIGURE 11. TJF 的 DSS 高页$_2$ 及微分

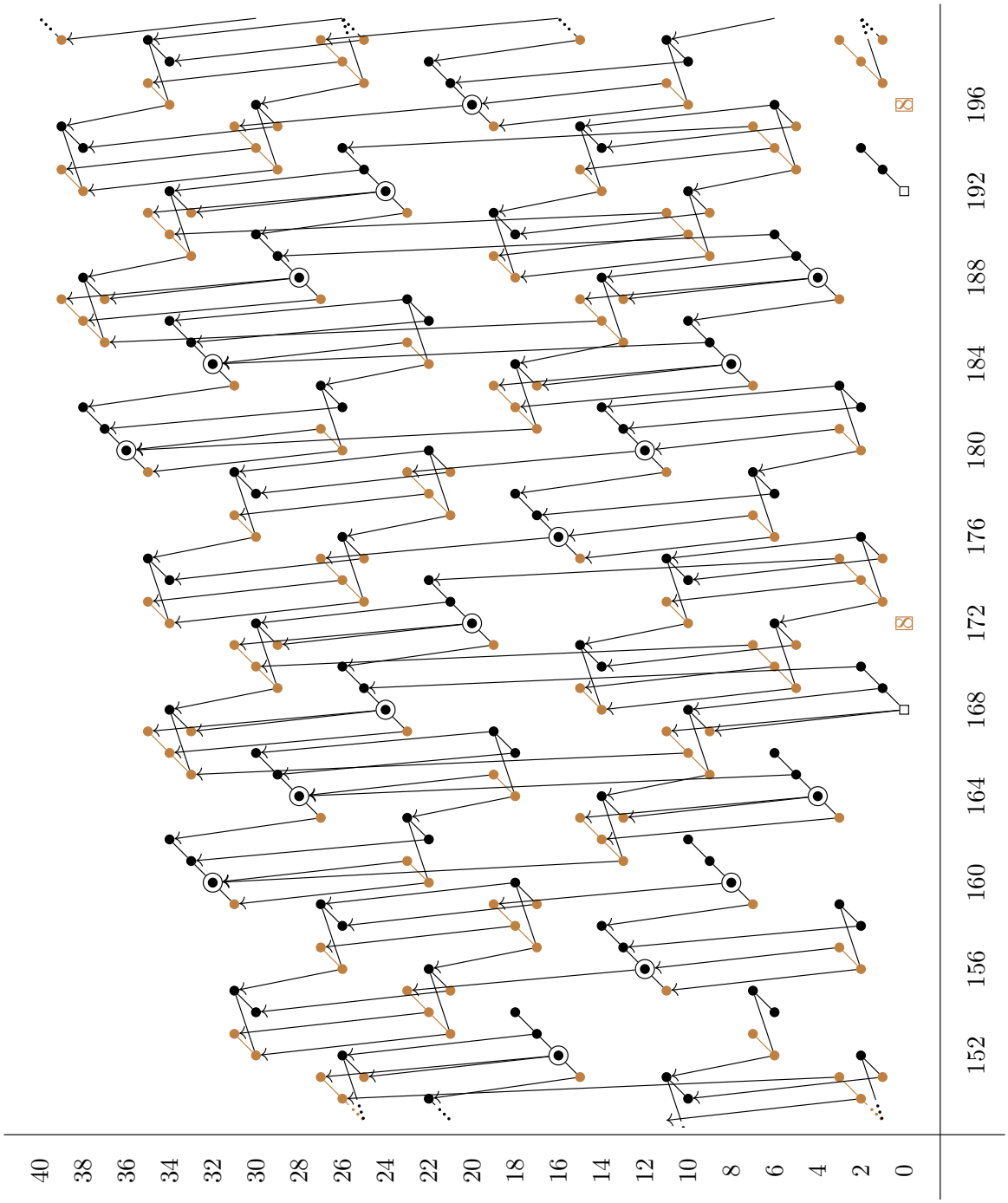


FIGURE 12. TJF 的 DSS 高阶页$_2$ 和微分

B.2. TJF_3。 TJF 的图表$_3$ 如下所示。

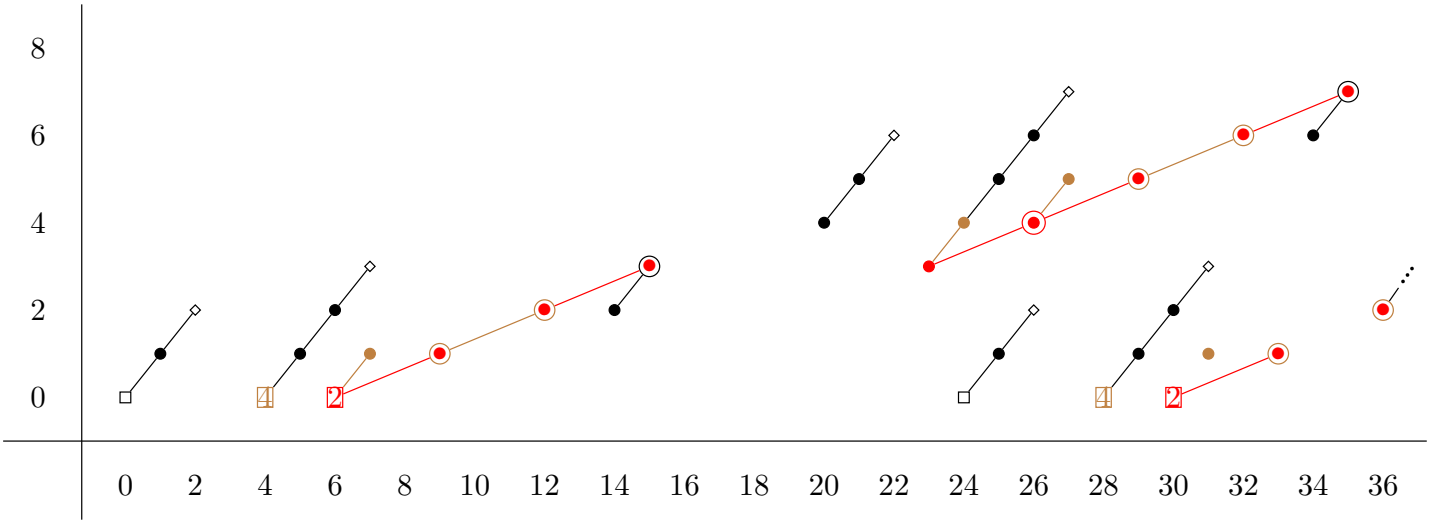


FIGURE 13. E_2-页的 TJF DSS_3

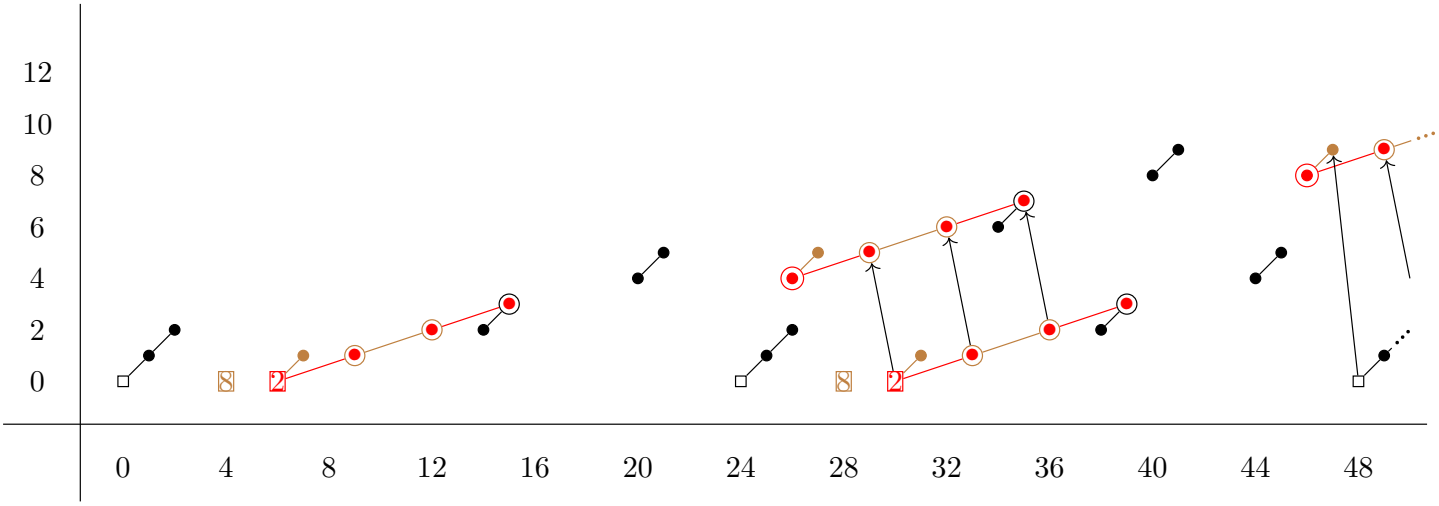
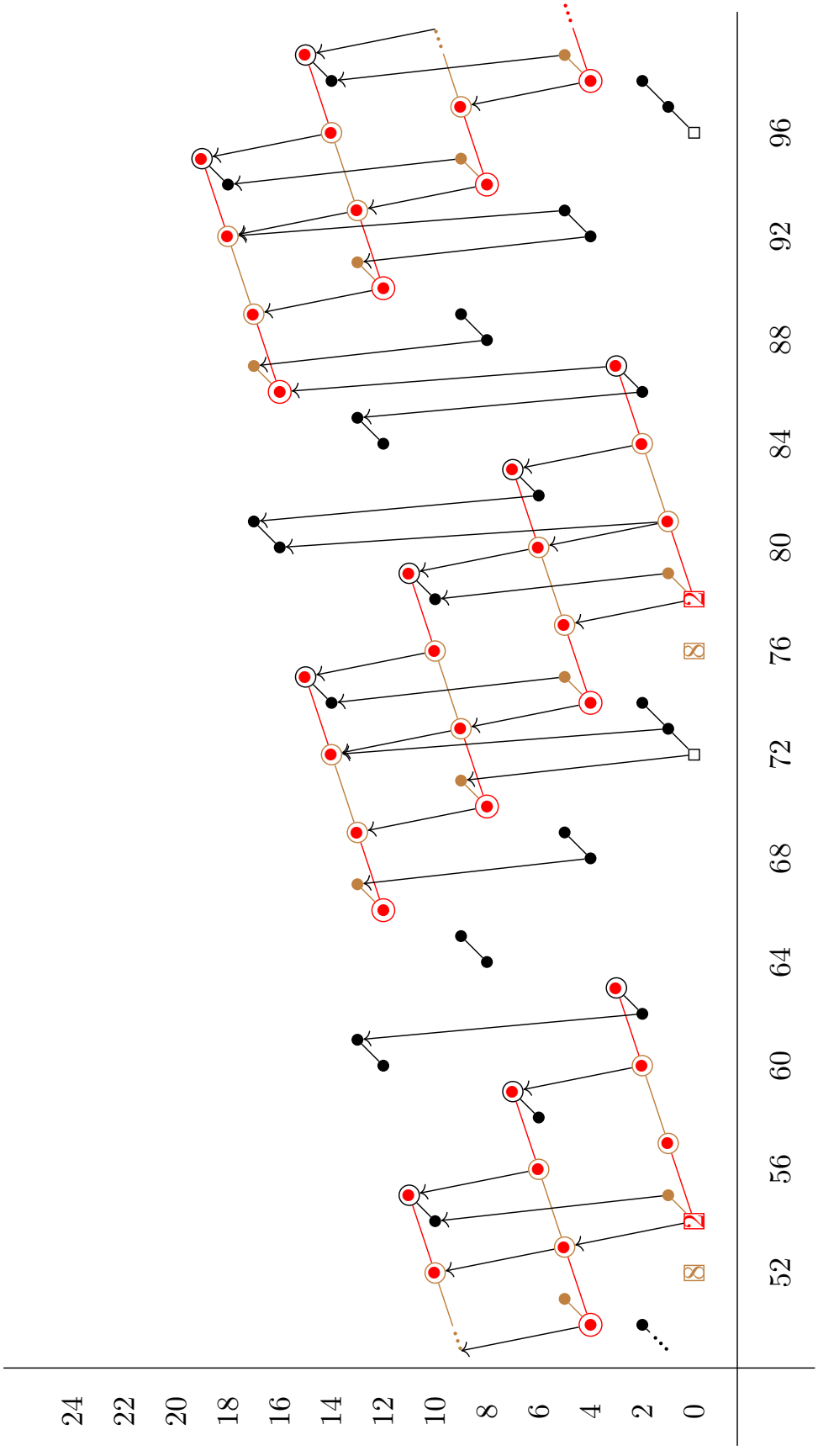
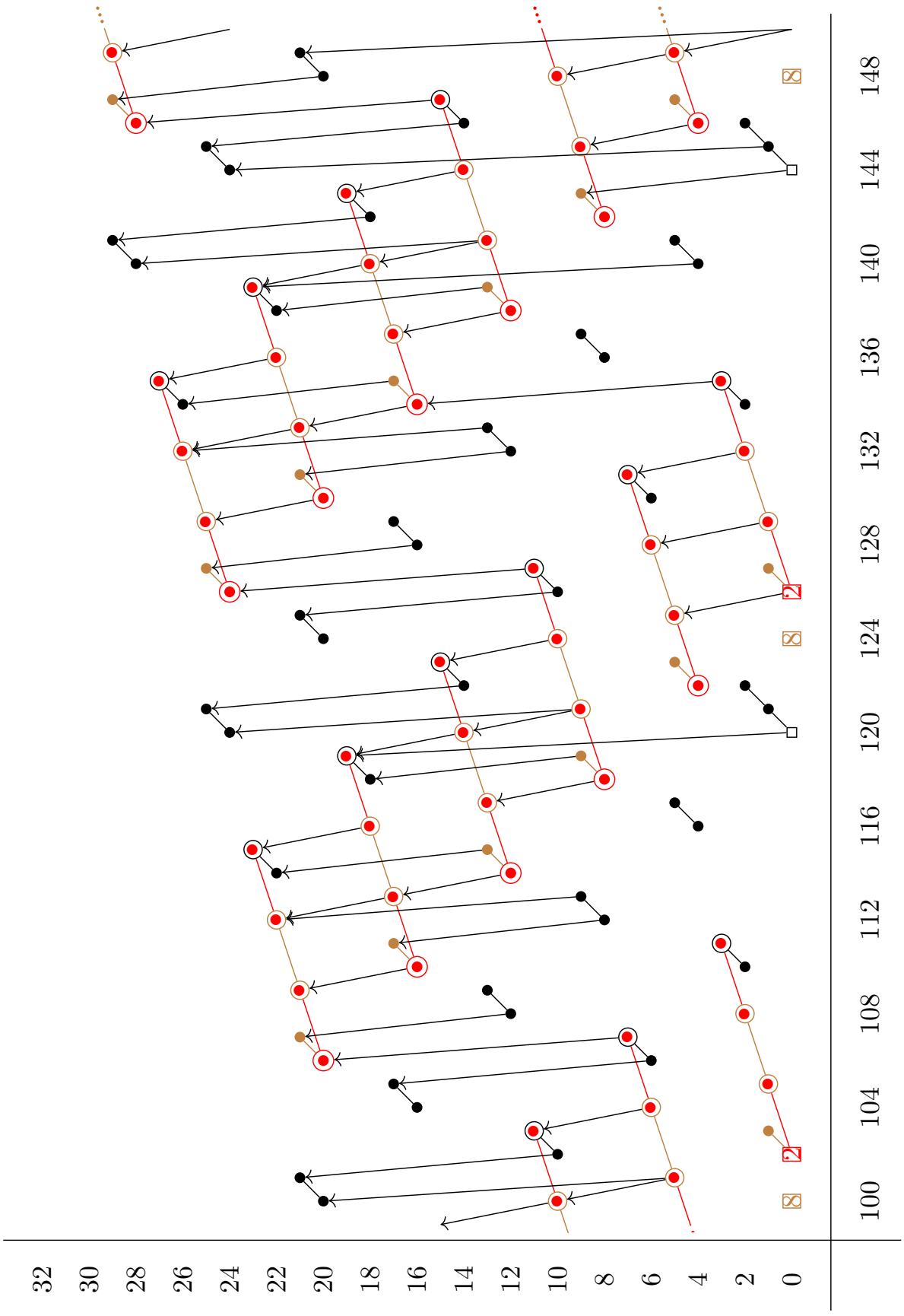


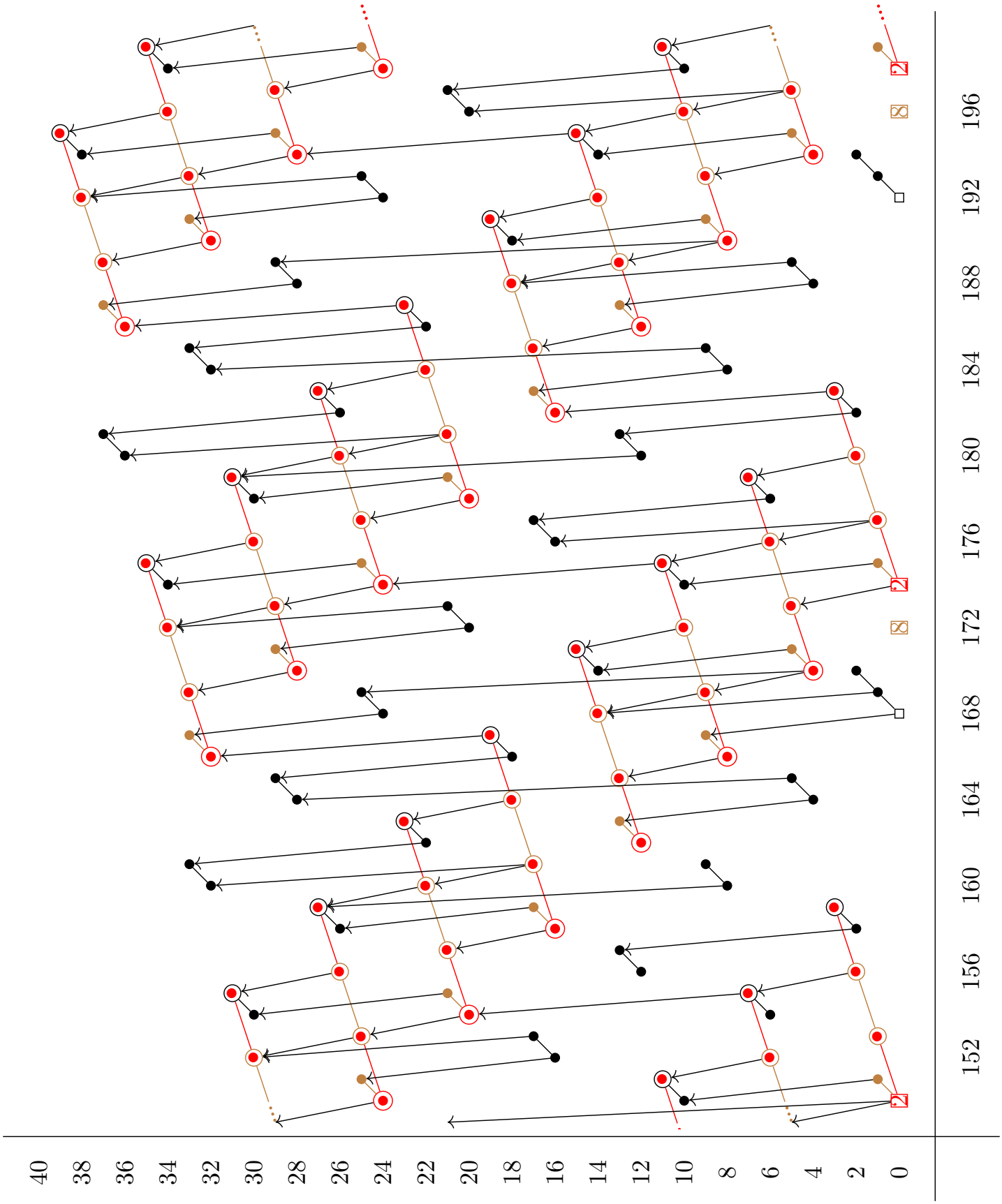
FIGURE 14. E_4-页以及 DSS 的 d_r、 $r \geq 5$ TJF_3



TJF 的 DSS FIGURE 15. E_4 页和 d_r、$r \geq 5$ 3



用于TJF的DSS的FIGURE 16. E_4页以及 d_r、 $r \geq 5$ 3



TJF 的 DSS FIGURE 17. E_4 页和 d_r、$r \geq 5$ 3

B.3. TJF_4。 本节汇集了 TJF_4 的下降谱序列图表。

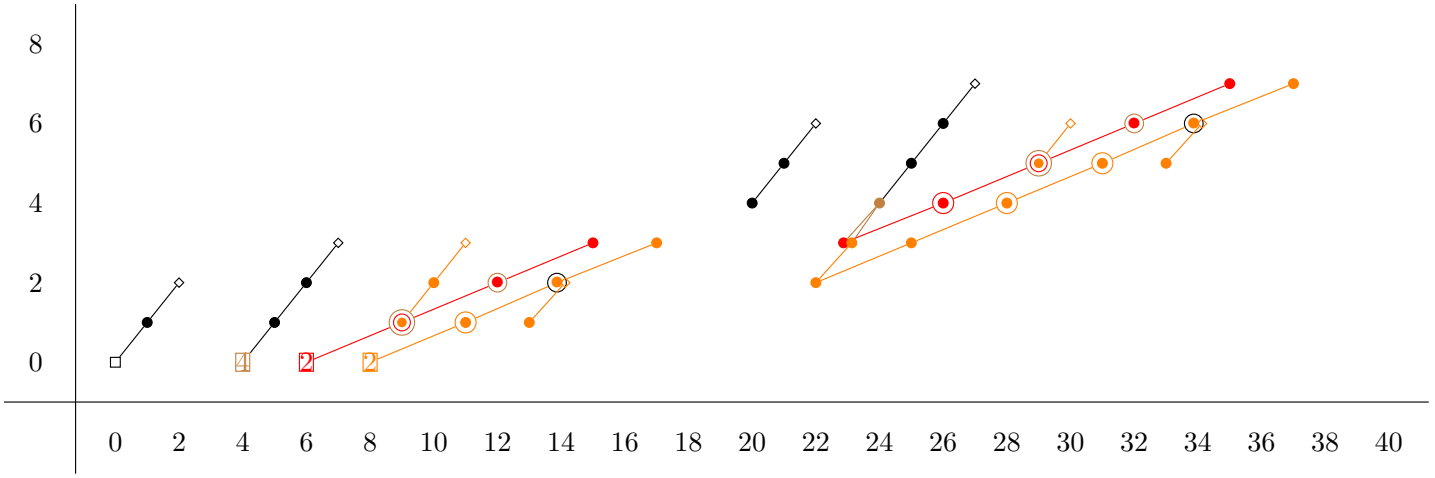


FIGURE 18. E_2-页的 TJF_4 下降谱序列

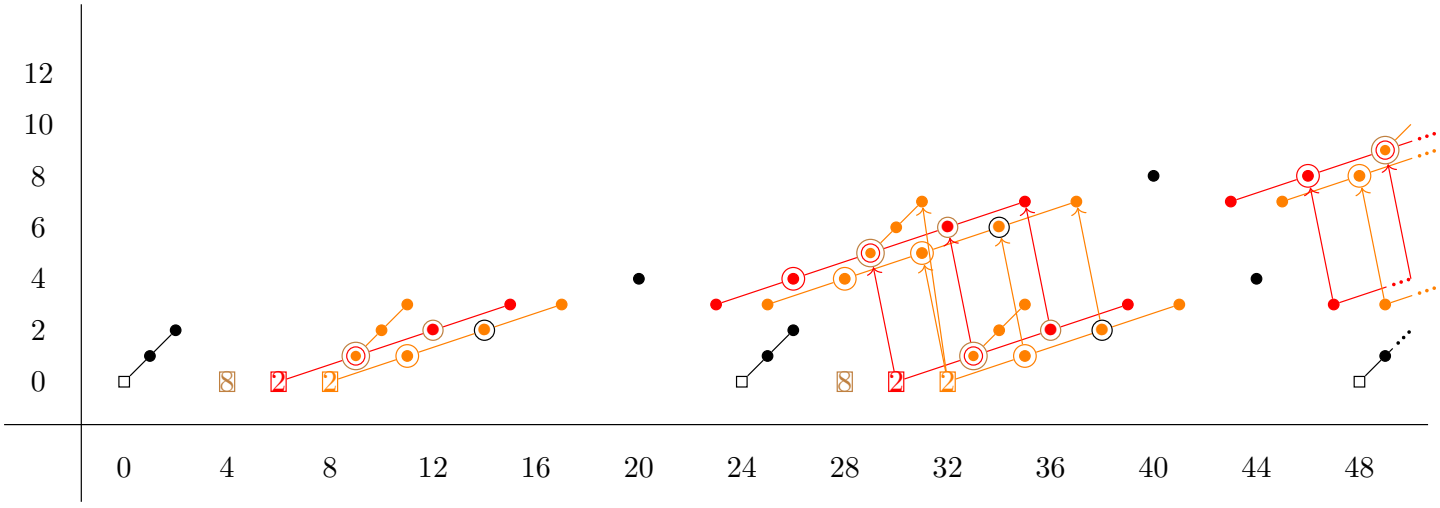
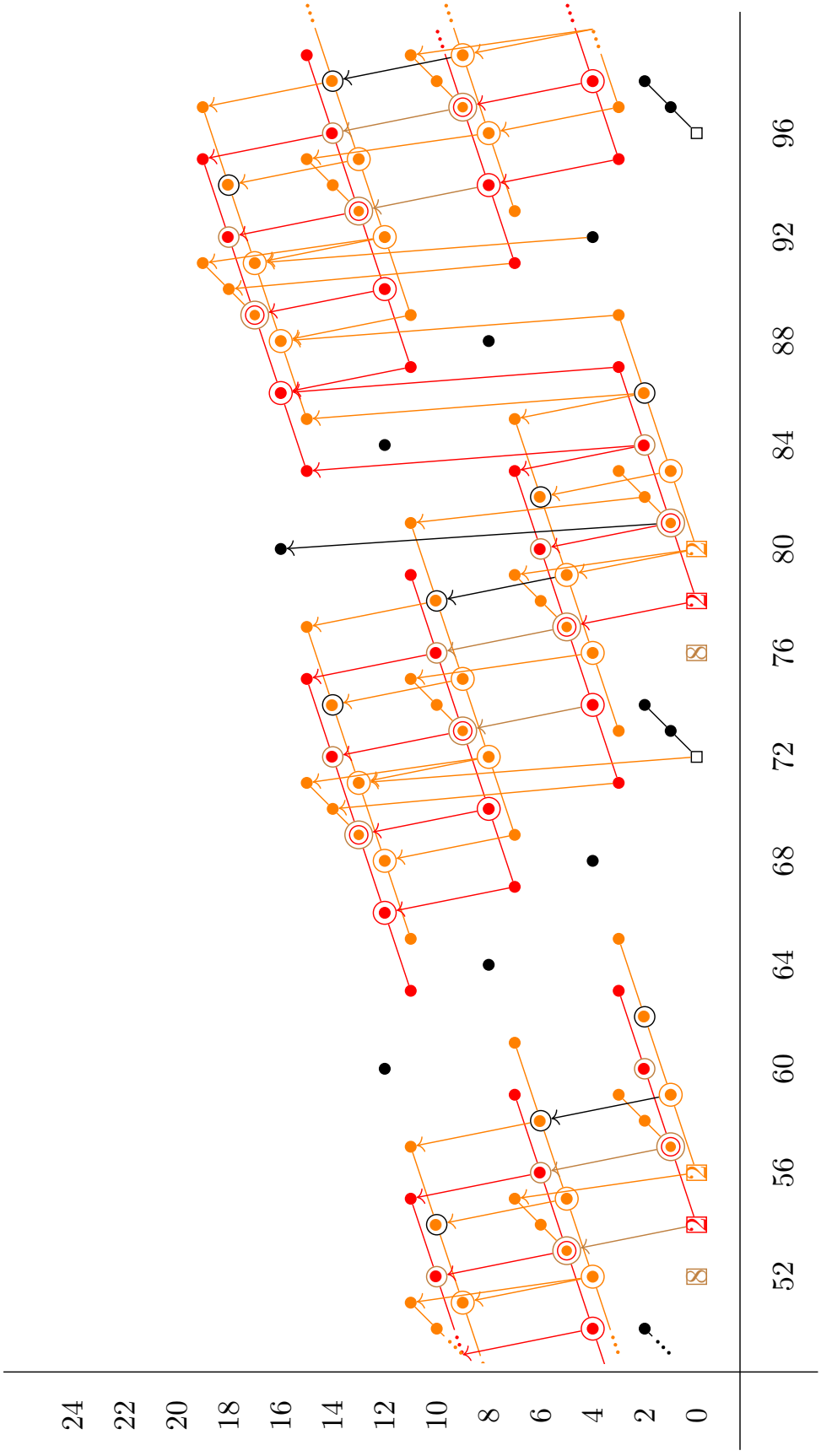


FIGURE 19. E_4-页和 d_r, $r \geq 5$ 的 TJF_4 下降谱序列



TJF 的 DSS FIGURE 20. E_4 页和 d_r、 $r \geq 5$ 4

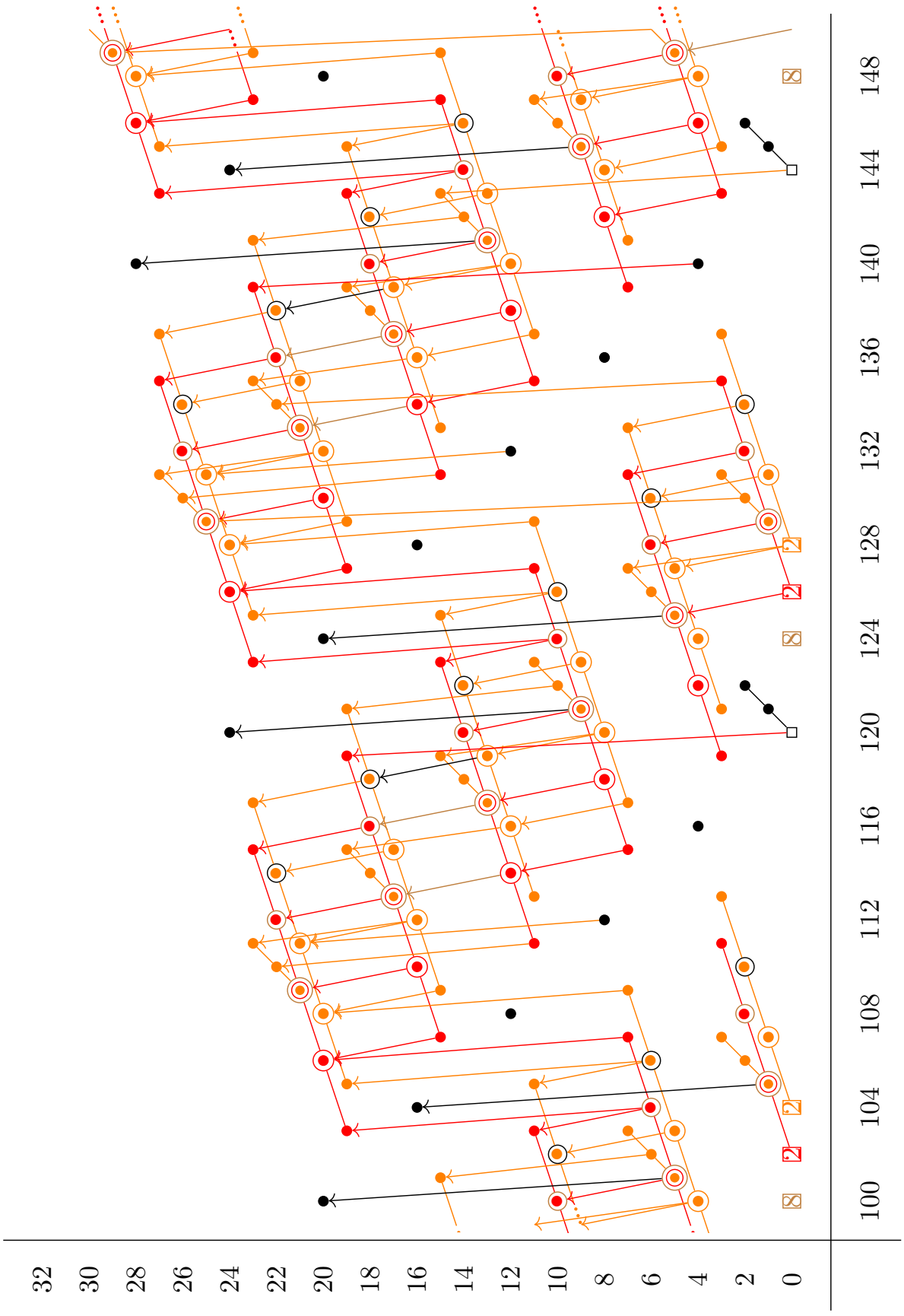
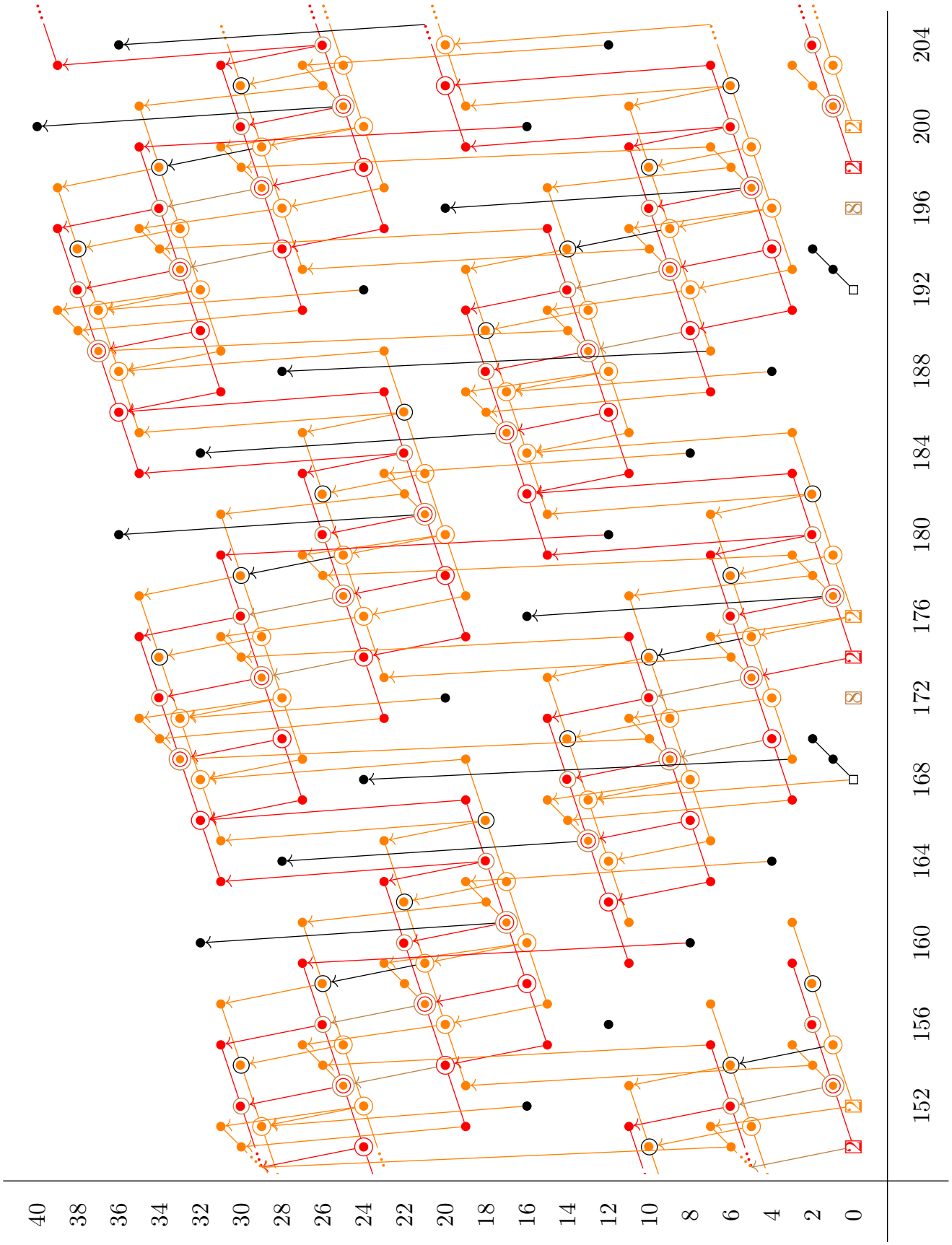


FIGURE 21. E_4DSS 的 d_r、 $r \geq 5$ 页，适用于 TJF_4



TJF 的 DSS FIGURE 22. E_4 页和 d_r、$r \geq 5$ 4

B.4. TJF_5. 本节汇集了 TJF_5 的下降谱序列图表。

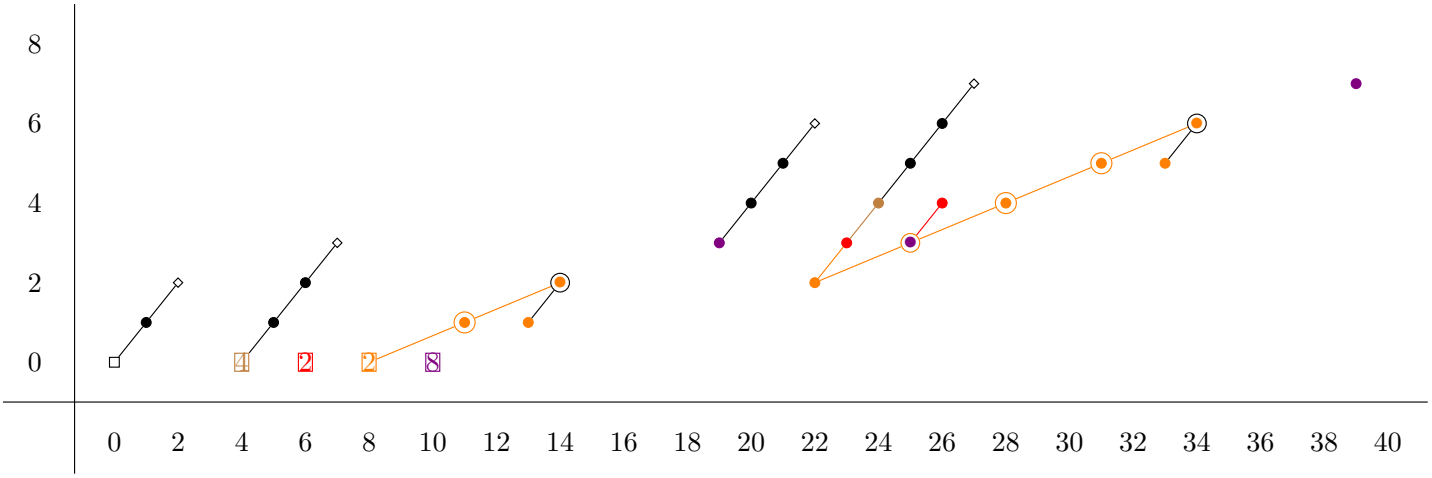


FIGURE 23. E_2-页的 TJF_5 的 DSS

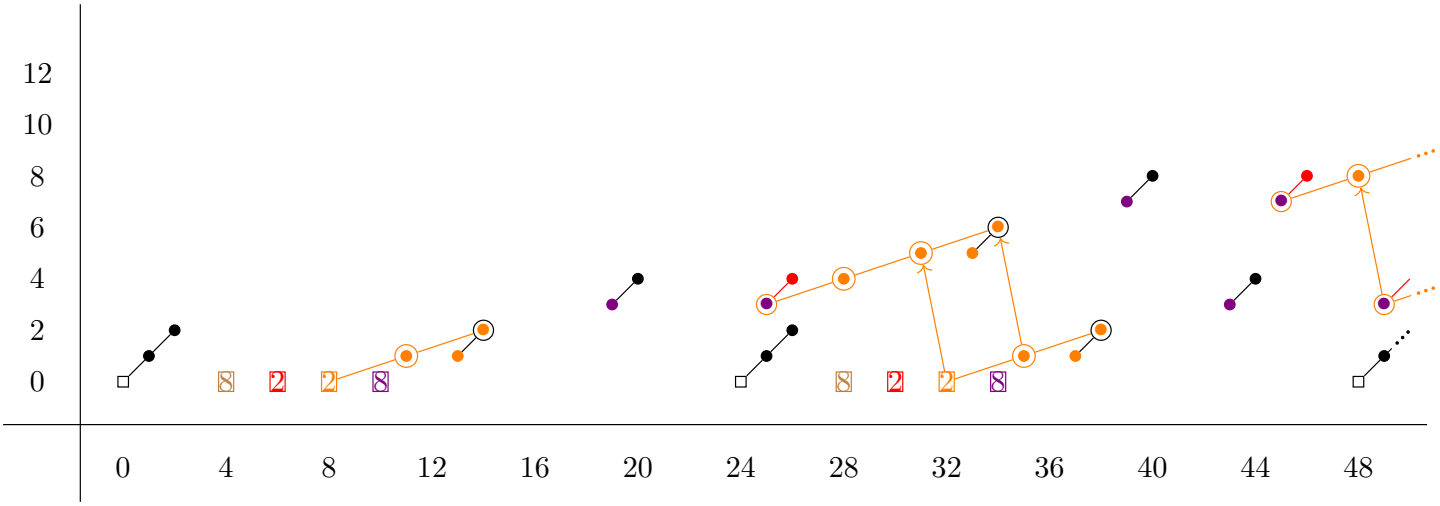


FIGURE 24. E_4-页以及 d_r, $r \geq 5$ 的 TJF_5 的 DSS

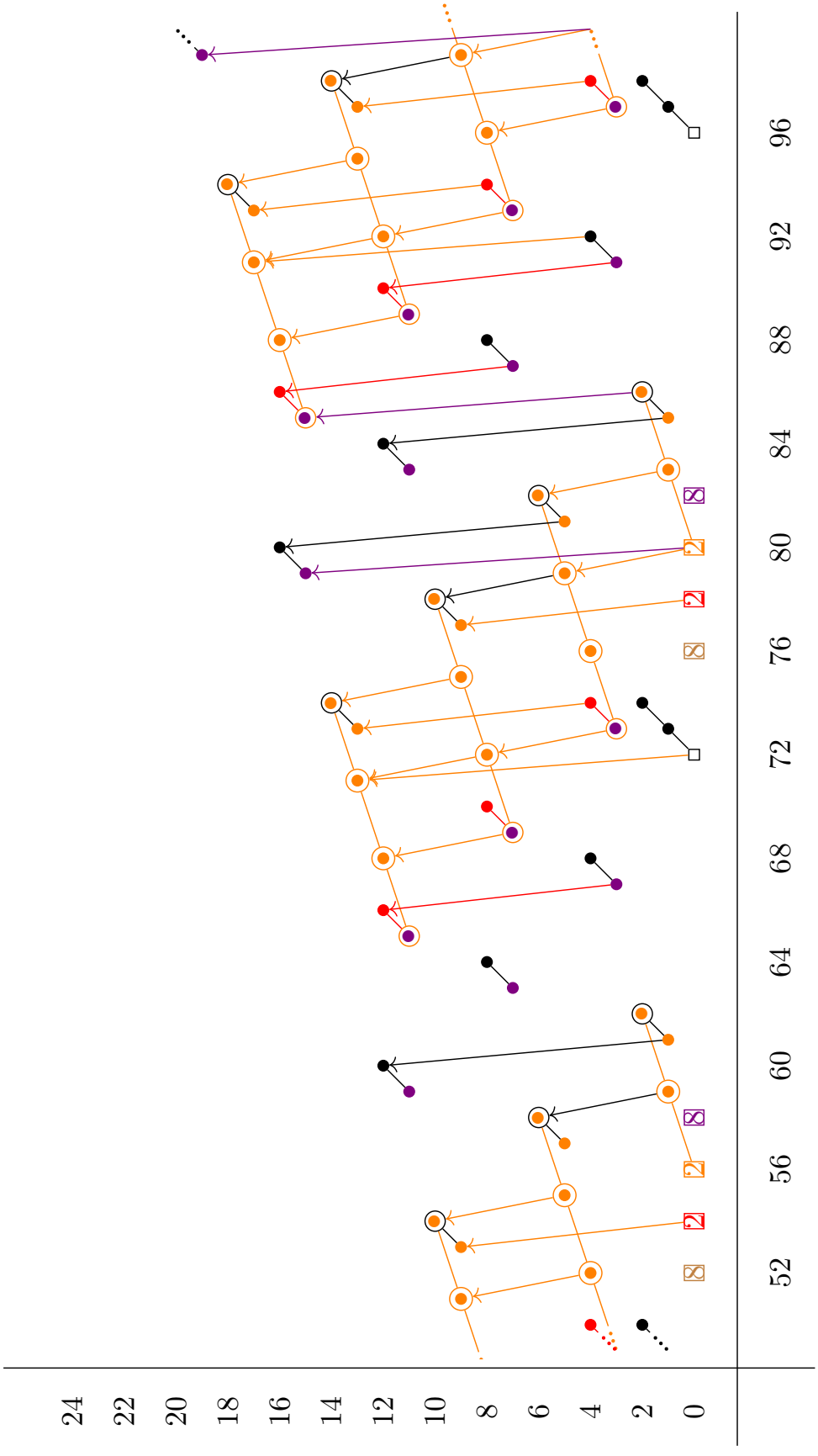


FIGURE 25. E_4页和拓扑雅可比形式（TJF）的 DSS_5中的 d_r、 $r \geq 5$

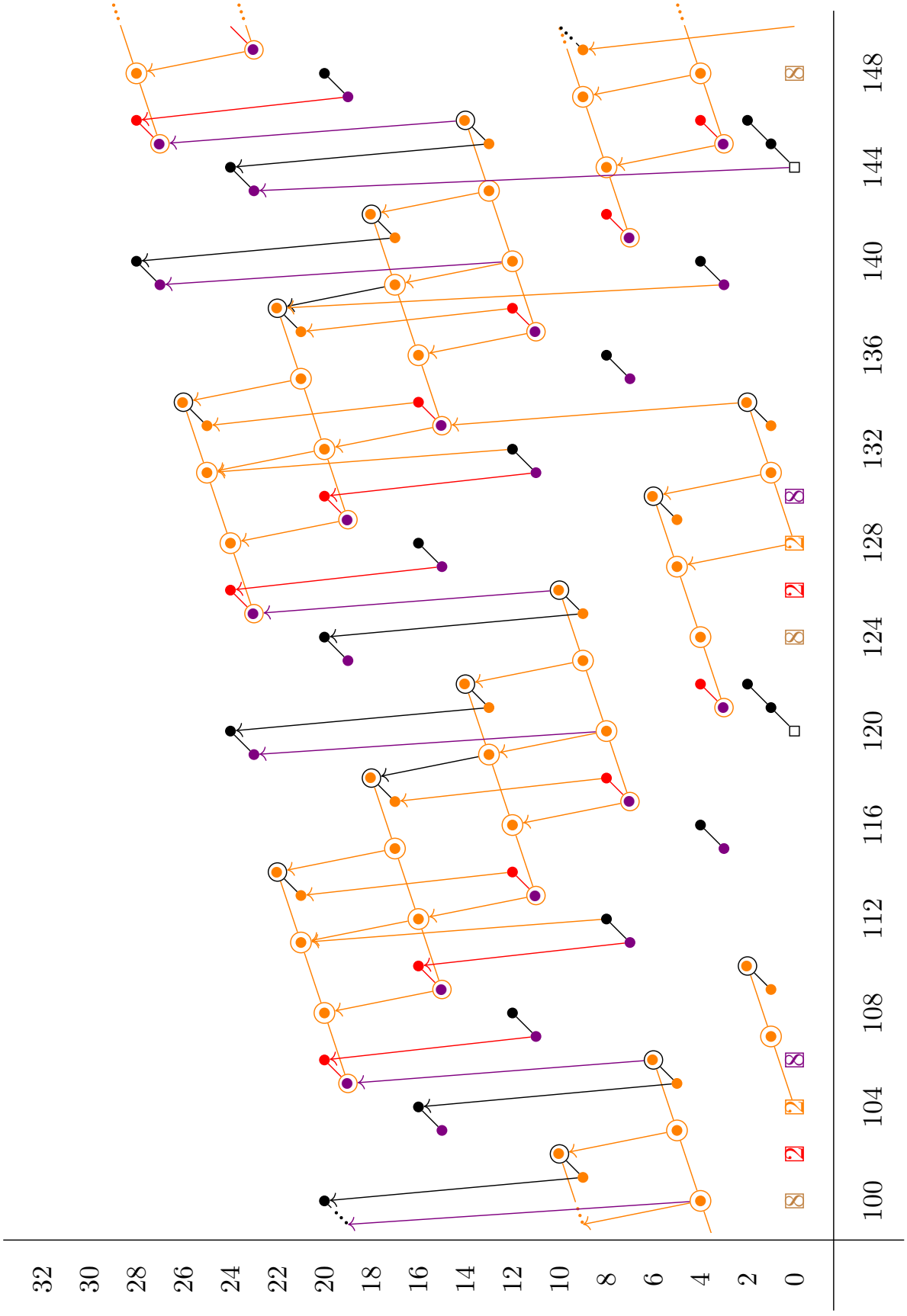


FIGURE 26. E_4-页和 d_r, $r \geq 5$ DSS 中用于 TJF 的[5]

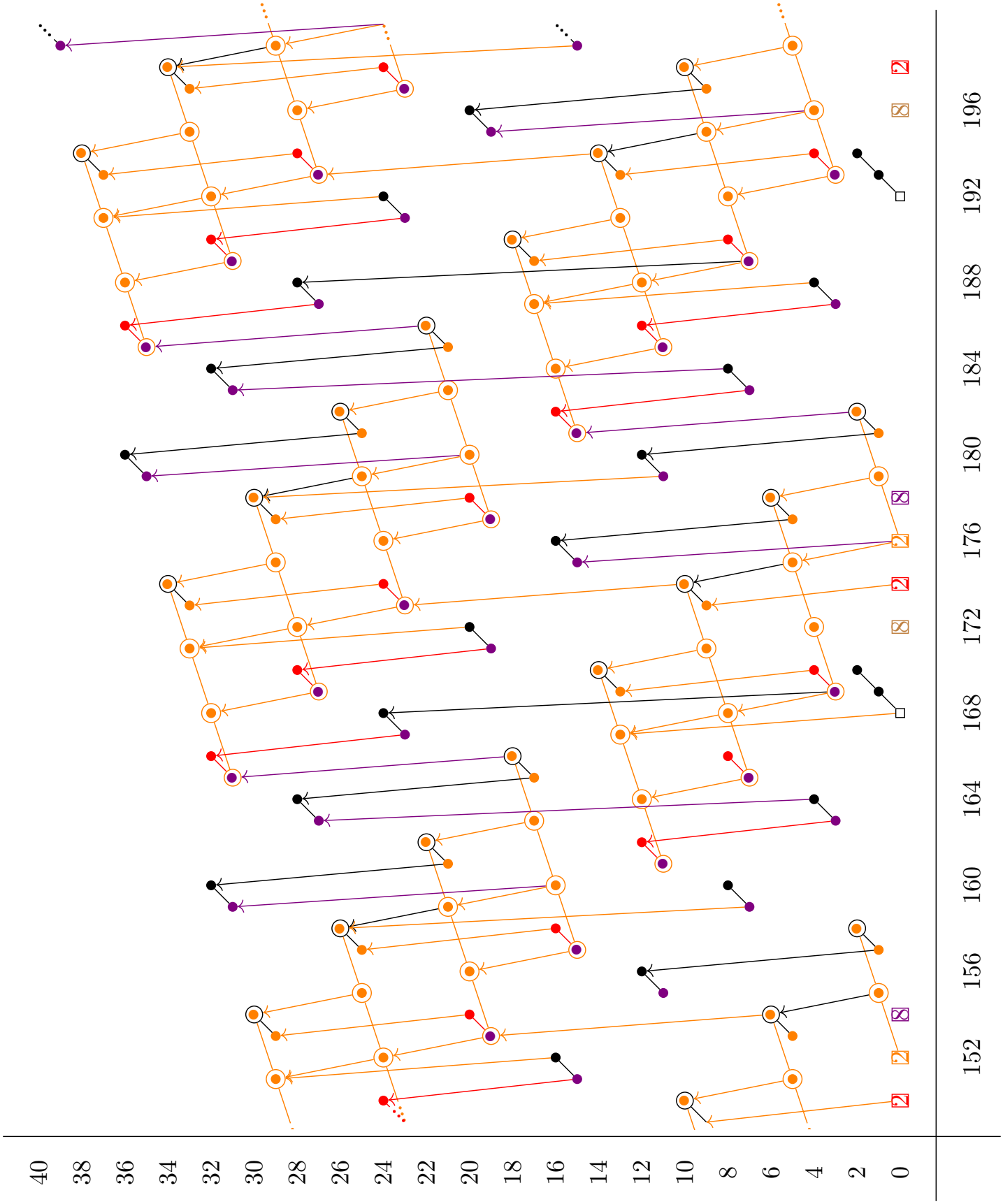
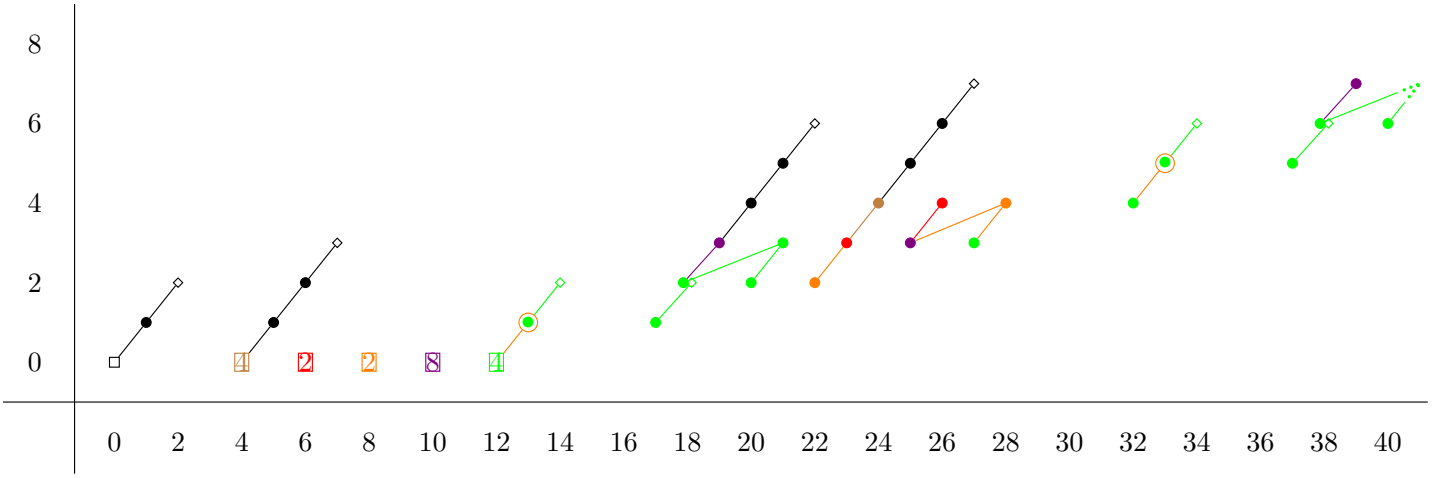
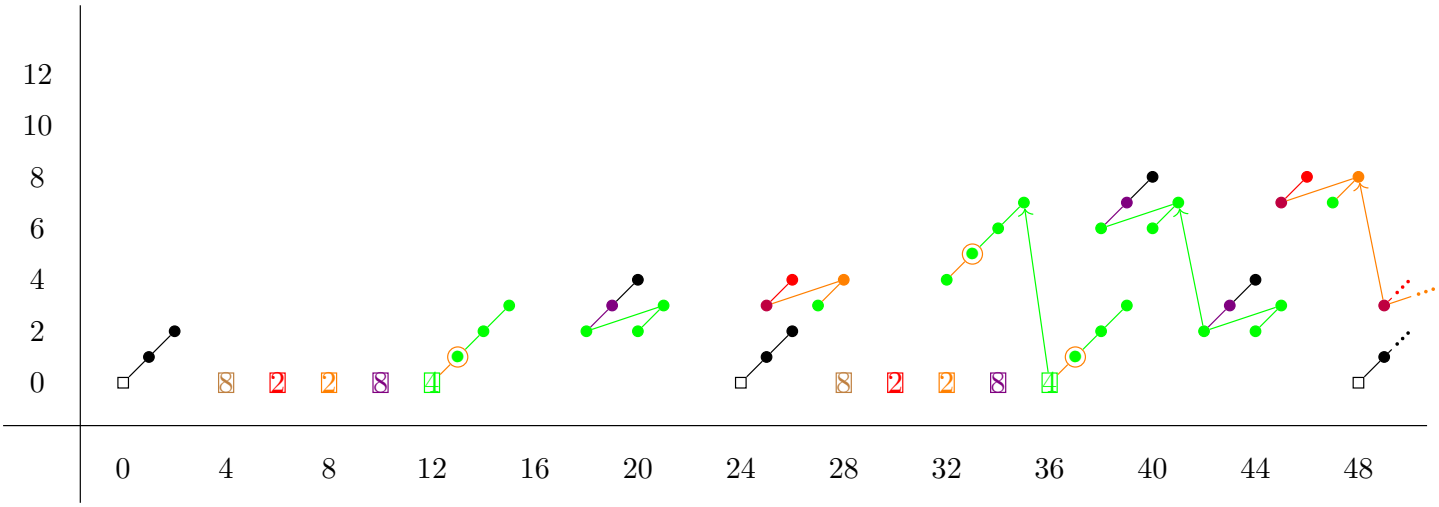


FIGURE 27. E_4页及拓扑Jacobi形式的 DSS d_r, $r \geq 5$ [5]

B.5. TJF_6. 本节汇集了 TJF_6 的下降谱序列图表。



TJF_6 的 DSS 第 FIGURE 28. E_2 页



TJF_6 的 DSS 第 FIGURE 29. E_4 页及 d_r, $r \geq 5$

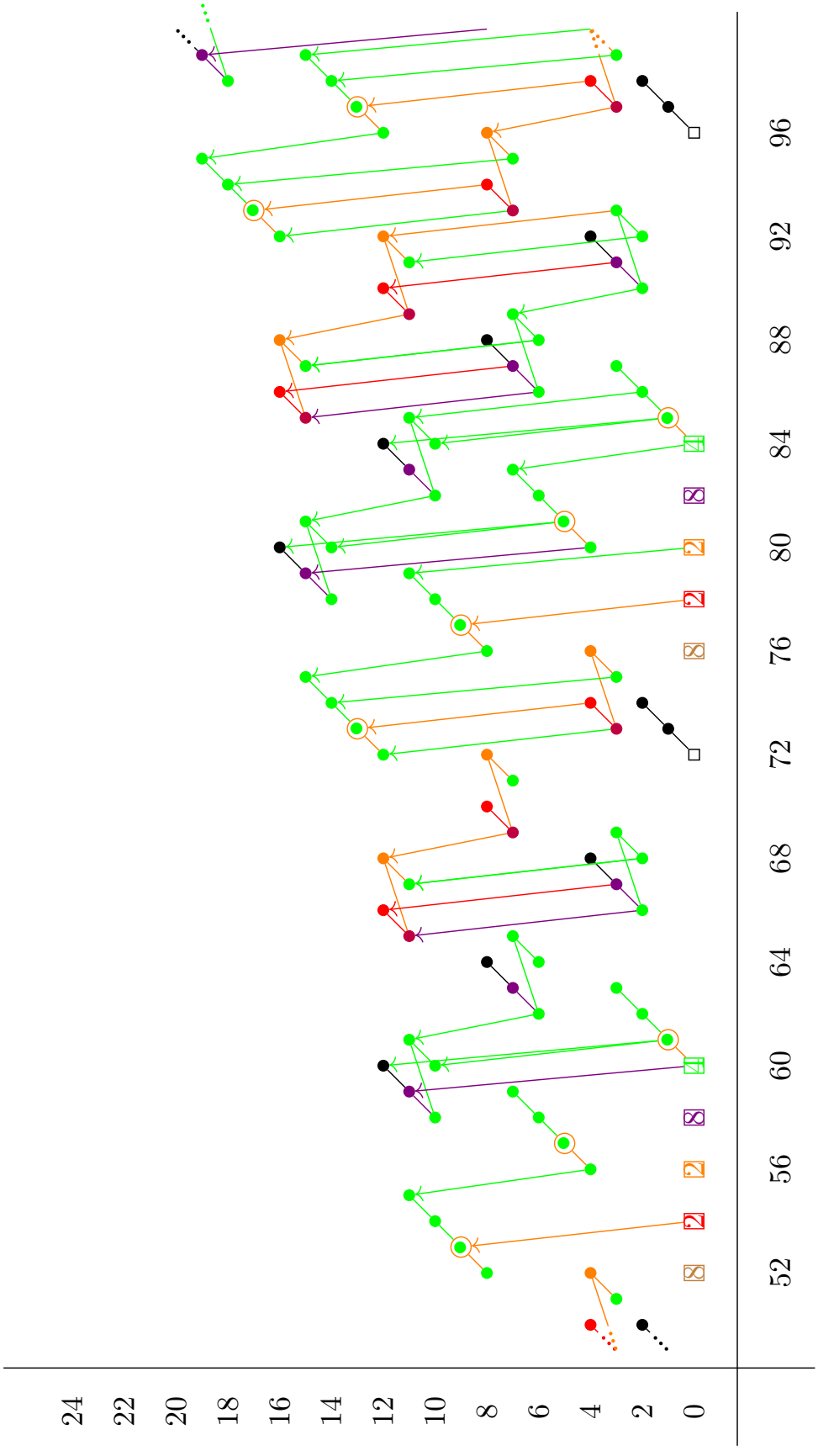


FIGURE 30. E_4页和 TJF 的 DSS 的 $d_r, r \geq 5$ [6]

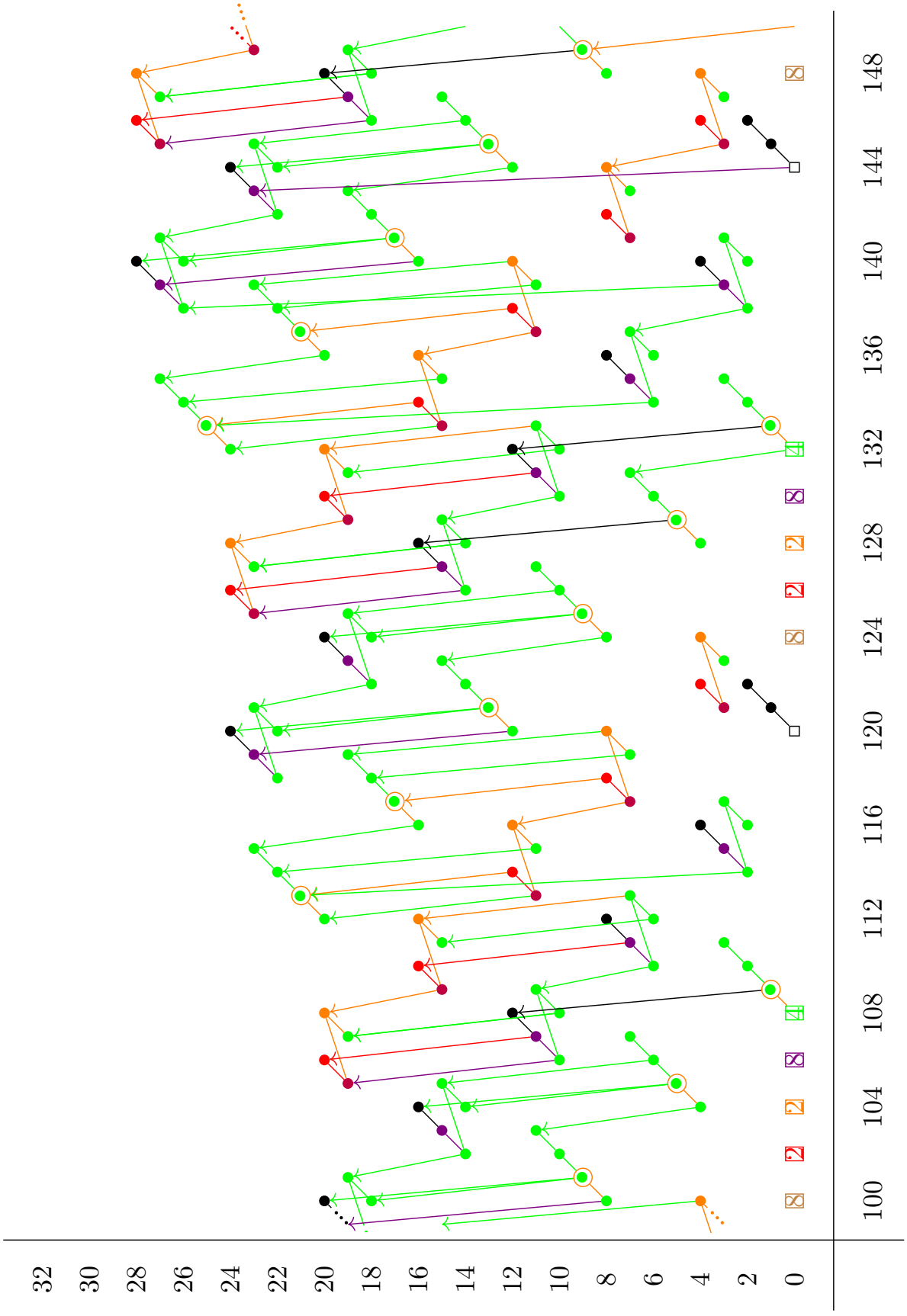
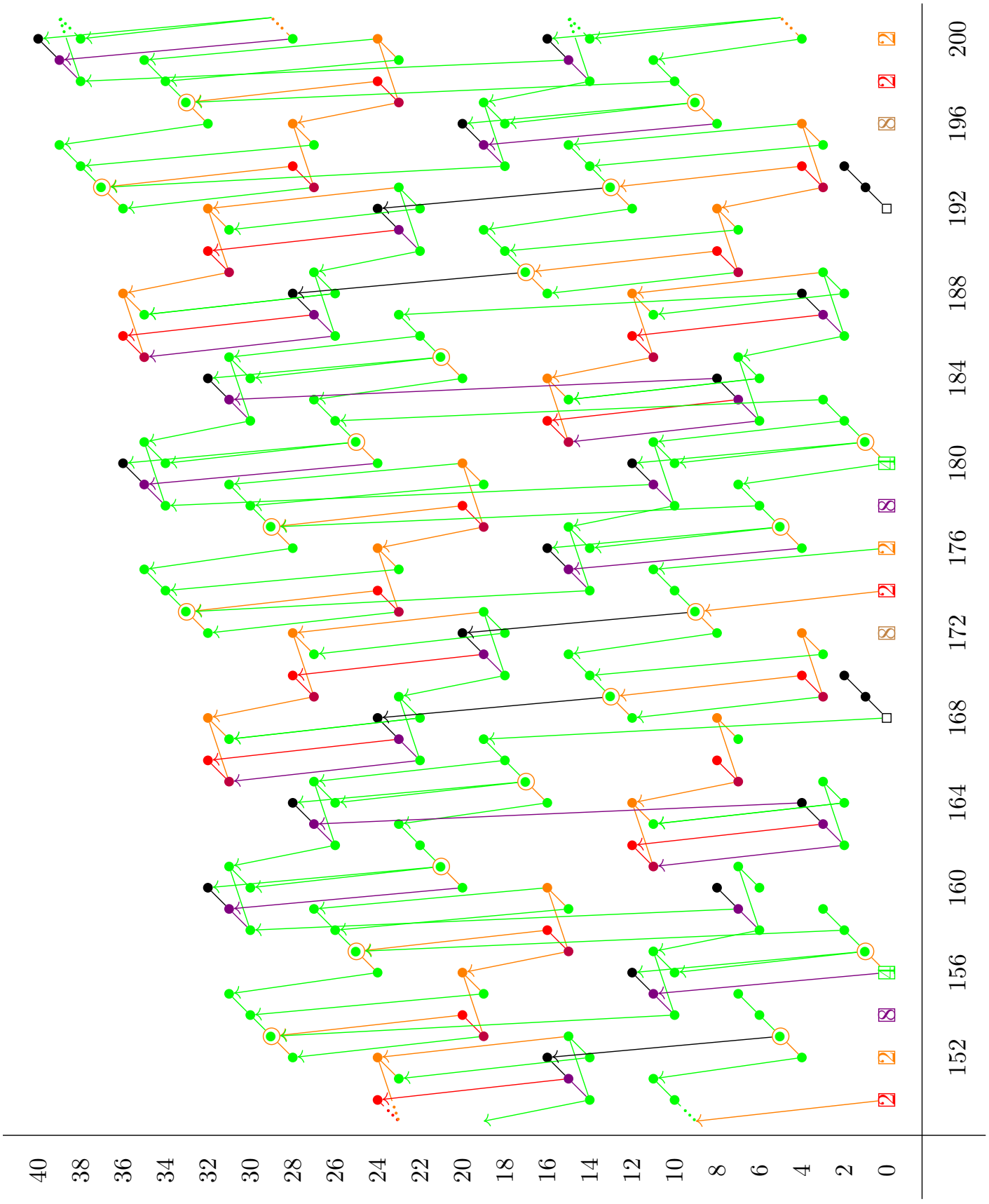


FIGURE 31. E_4-页和 d_r, $r \geq 5$ DSS 对应的 TJF_6



TJF 的 DSS FIGURE 32. E_4 页和 d_r、$r \geq 5$ 6

B.6. TJF_7。 本节汇集了 TJF_7 的下降谱序列图表。

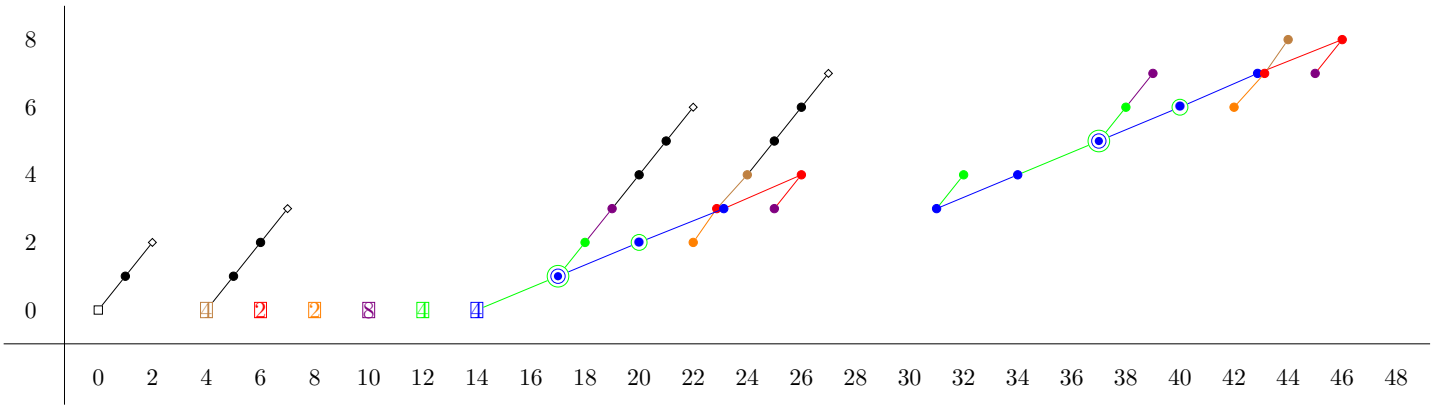


FIGURE 33. E_2-页 TJF_7 的 DSS

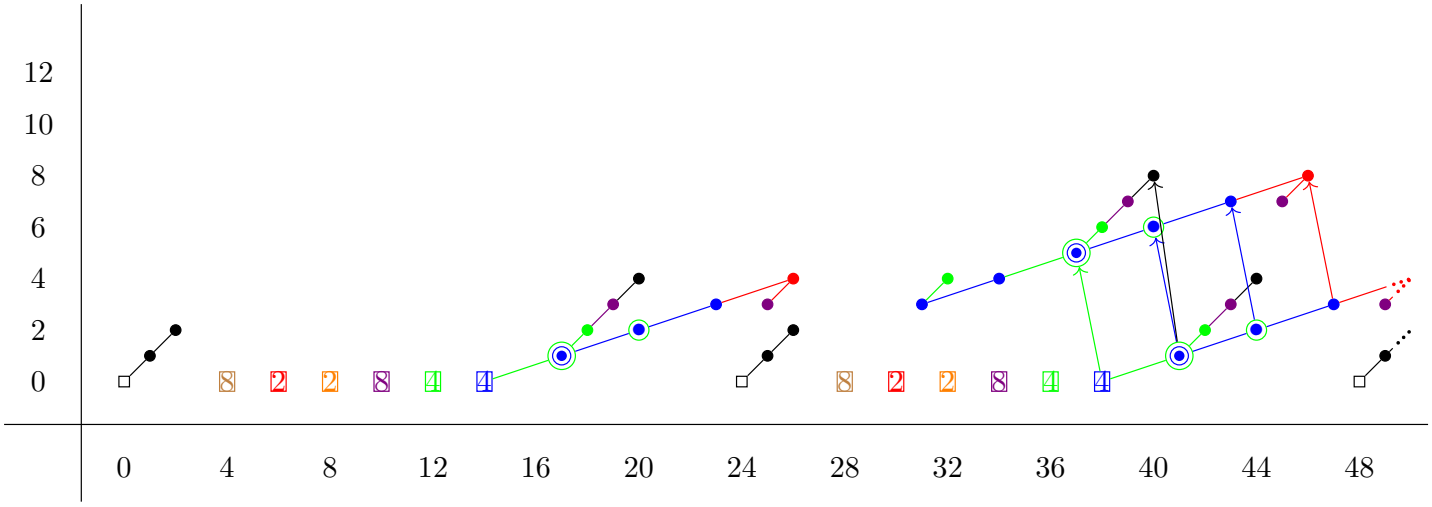


FIGURE 34. E_4-页及 d_r、 $r \geq 5$ DSS 的 TJF_7

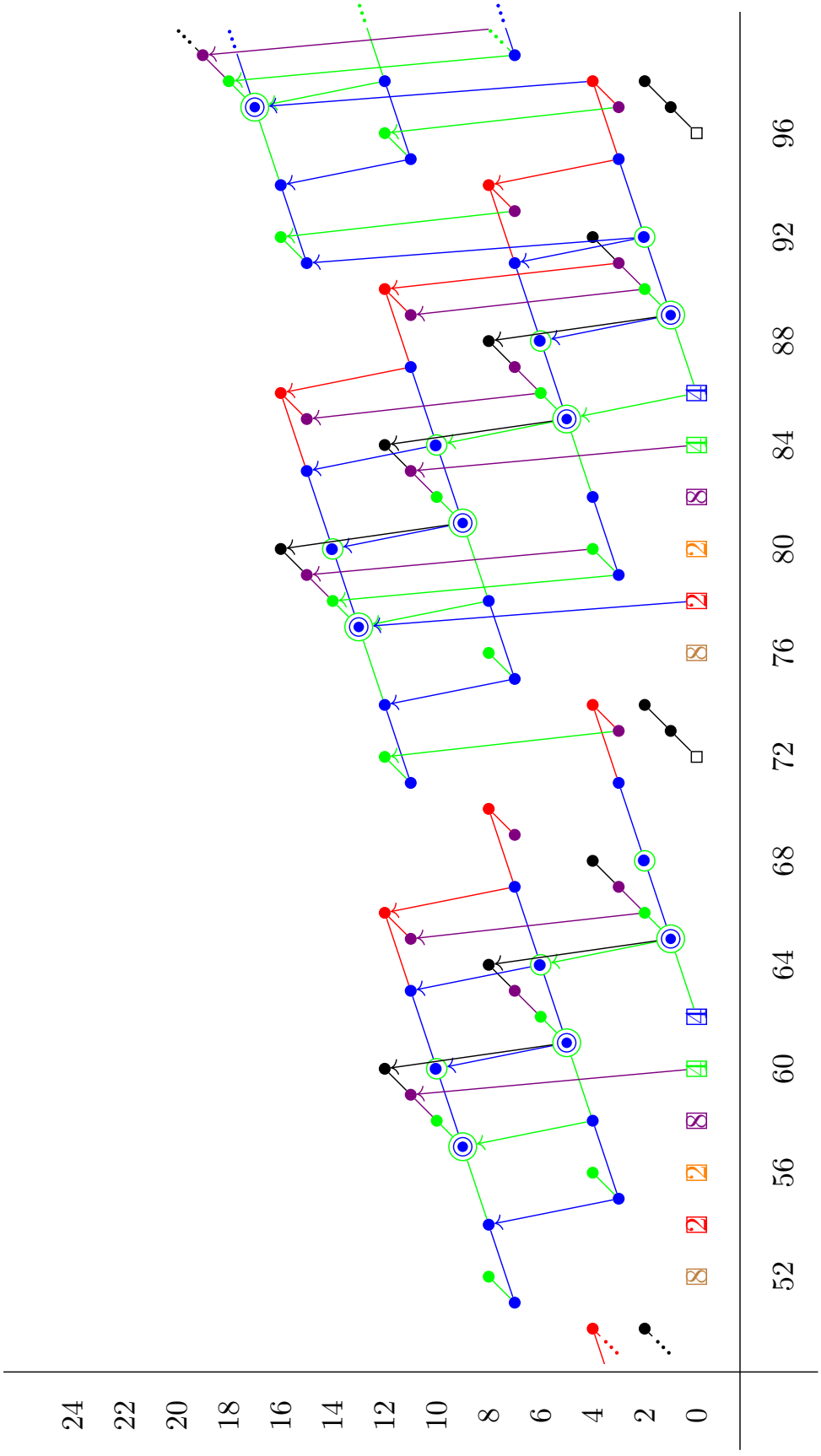


FIGURE 35. E_4页，TJF 的 DSS 的 $d_r, r \geq 5$ [7]

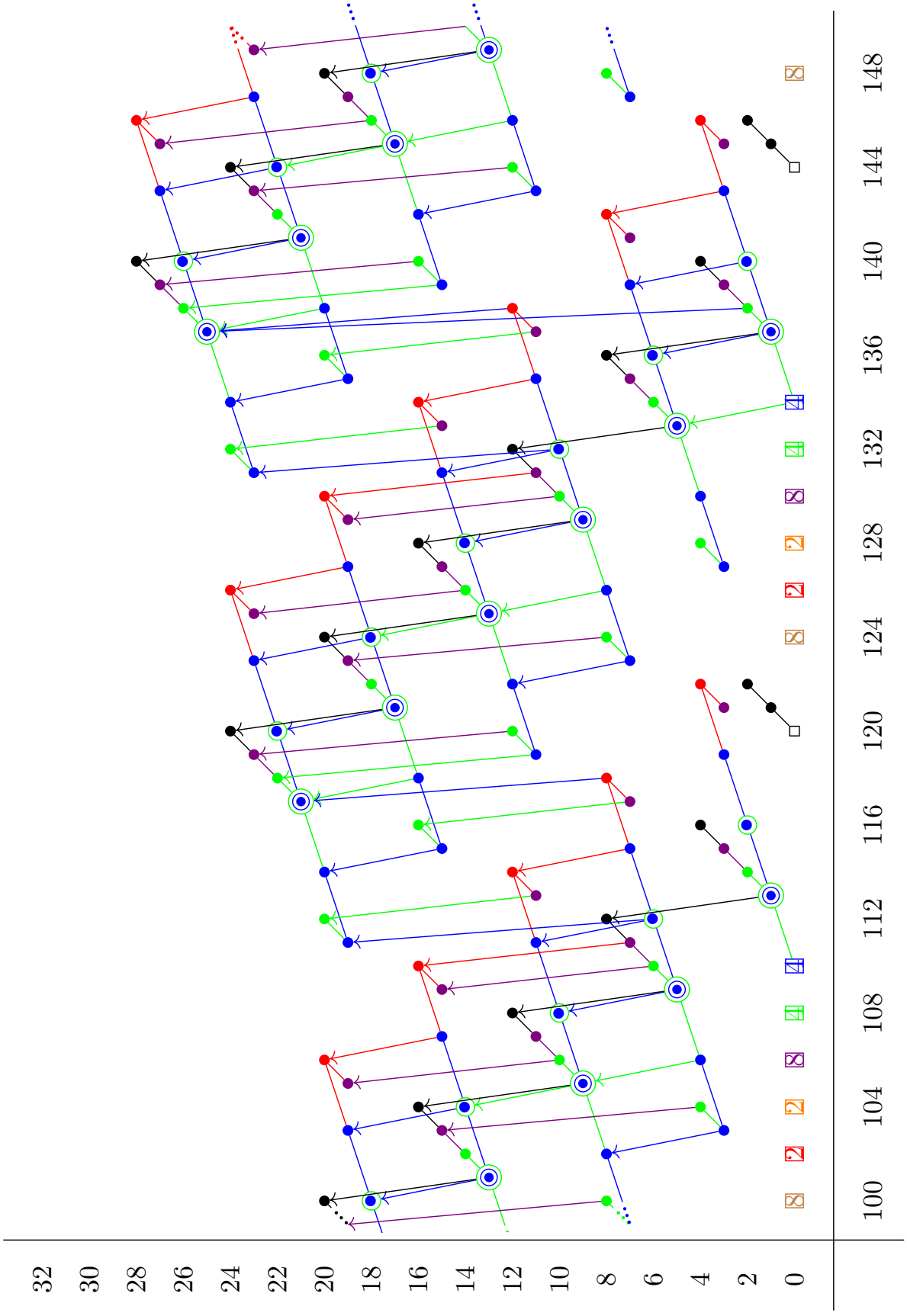


FIGURE 36. E_4-页，DSS 的 d_r, $r \geq 5$，用于 TJF_7

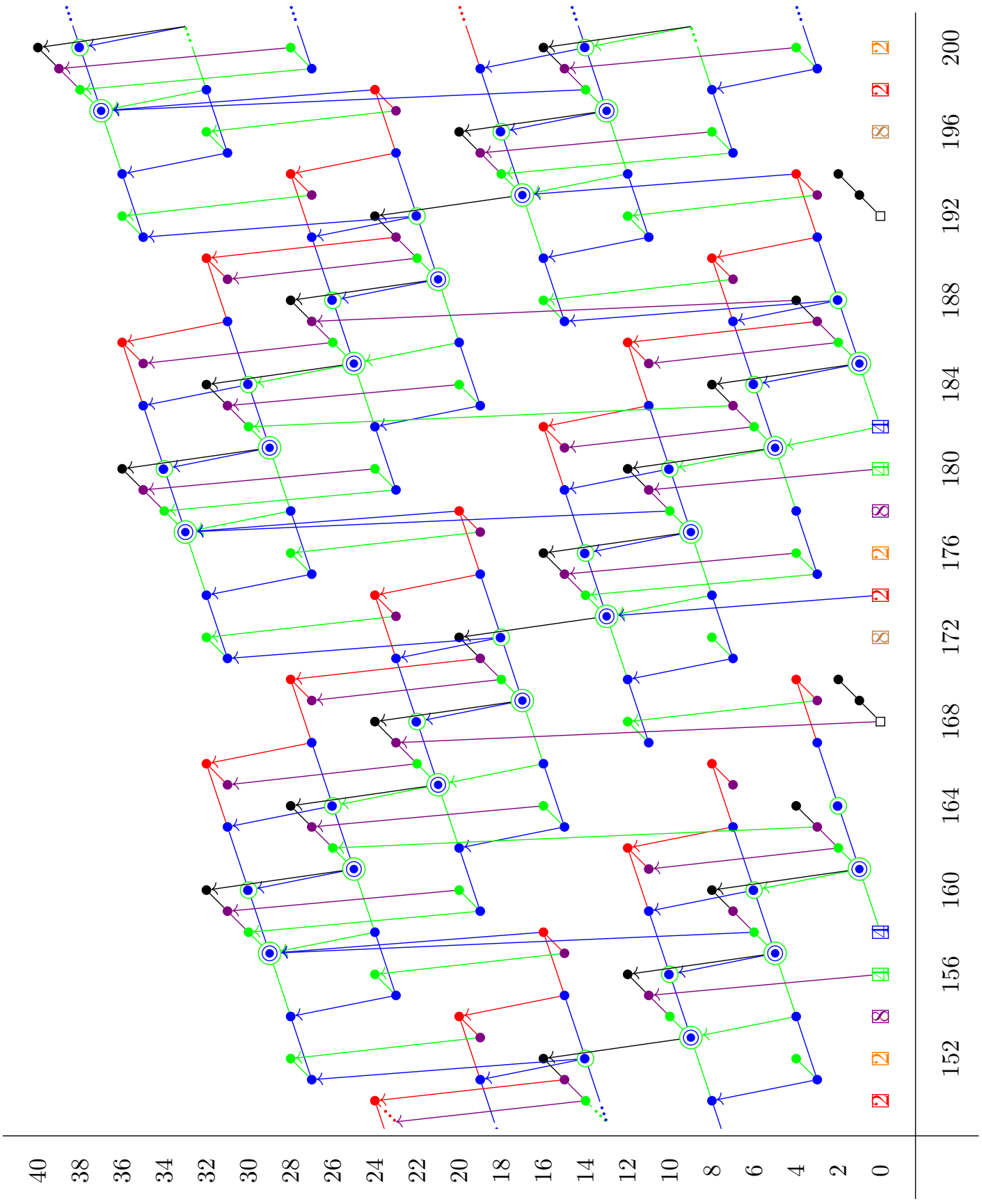


FIGURE 37. E_4页及拓扑Jacobi形式的 DSS d_r, $r \geq 5$ [7]

References

[AHR10] M. Ando、M. J. Hopkins 和 C. Rezk, *Multiplicative orientations of KO-theory and of the spectrum of topological modular forms* 2010 https://rezk.web.illinois.edu/koandtmf.pdf ，预印本，、。[AHS01] M. Ando、M. J. Hopkins 和 N. P. Strickland, *Elliptic spectra, the witten genus and the theorem of the cube*, 《数学发明》146（2001）595–687。[Bau04] T. Bauer, *Elliptic cohomology and projective spaces* 2004 https://people.kth.se/~tilmanb/ ，未发表手稿，、。[Bau08] , *Computation of the homotopy of the spectrum tmf*, 《群、同伦与构形空间》（东京 2005），数学科学出版社，2008 年 2 月。http://dx.doi.org/10.2140/gtm.2008.13.11。[BBPX22] A. Beaudry、I. Bobkova、V. Pham 和 Z. Xu, *The topological modular forms of $\mathbb{R}P^2$ and $\mathbb{R}P^2 \wedge \mathbb{C}P^2$*, 《拓扑学杂志》15（2022）1864–1926。[Beh19] M. Behrens, *Topological modular and automorphic forms* 2019 arXiv:1901.07990 [math.AT] https://arxiv.org/abs/ ，。。[BM25] T. Bauer 和 L. Meier, *Topological jacobi forms*, 2025 年。arXiv:2508.08010 [math.AT]。https://arxiv.org/abs/2508.08010。[BR21] R. Bruner 和 J. Rognes, *The cohomology of the mod 2 steenrod algebra* 2021 https://archive.sigma2.no//dataset/ ，。。[CDN24] C. Carrick、J. M. Davies 和 S. v. Nigtevecht, *The descent spectral sequence for topological modular forms*, 2024 年 12 月。http://arxiv.org/abs/2412.01640。arXiv:2412.01640。[CDvN24] C. Carrick、J. M. Davies 和 S. van Nigtevecht, *Descent spectral sequences through synthetic spectra* 2025 arXiv:2407.01507 ，。。[Chu22] D. Chua, *C_2-equivariant topological modular forms*, 《同伦及相关结构杂志》17（2022）23–75。[DR73] P. Deligne 和 M. Rapoport, *Les schémas de modules de courbes elliptiques*, 《单变量模函数 II》（柏林、海德堡）（P. Deligne 和 W. Kuijk 编），施普林格·柏林·海德堡，1973 年，第 143–316 页。[EZ85] M. Eichler 和 D. Zagier, *The theory of jacobi forms*, 《数学进展》第 55 卷，Birkh¨auser，波士顿，马萨诸塞州，1985 年。[GLP24] D. Gepner、S. Linskens 和 L. Pol, *Global 2-rings and genuine refinements* 2024 arXiv:2407.05124 [math.AT] https: ，。。。[GM] D. Gepner 和 L. Meier, *Equivariant elliptic cohomology with integral coefficients*。即将出版。[GM20] , *On equivariant topological modular forms*, 2023 年。arXiv:2004.10254 [math.AT]。[GW20] V. Gritsenko 和 H. Wang, *Graded rings of integral Jacobi forms*, 2020 年 4 月。http://arxiv.org/abs/1810.09392。arXiv:1810.09392 [hep-th]。[Hov01] M. Hovey, *Morita theory for hopf algebroids and presheaves of groupoids* 2001 arXiv:math/0105137 [math.AT] https: ，。。。[HS08] M. Hovey 和 H. Sadofsky, *Invertible spectra in the E n -local stable homotopy category* https://doi.org/10.1112/ （）。。电子预印本：https://academic.oup.com/jlms/article-pdf/////--.pdf。[Kra91] J. Kramer, *A geometrical approach to the theory of Jacobi forms*, 《数学汇编》79（1991）1–19（英文）。[Kra95] J. Kramer, *An arithmetic theory of jacobi forms in higher dimensions.*, 《纯粹与应用数学杂志》458（1995）157–182。¨Lin[W. Lin, 26] , 。。*Adams spectral sequence of the cell complex P_3* 2026 https://waynelin92.github.io/ss/plot.html?diagram= LNP[S. Linskens、D. Nardin 和 L. Pol, 25] , 《几何与拓扑》29（2025）1345–1440。 *Global homotopy theory via partially lax limits*Lur[J. Lurie, 09] , 第 – 页，施普林格·柏林·海德堡，柏林、海德堡，。。*A survey of elliptic cohomology* 219 277, 2009 https://doi. Lur18a[J. Lurie,] , 。。*Elliptic cohomology I: Spectral abelian varieties* 2018 https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/Elliptic-I. Lur18b[,] , 2018 年。 *Elliptic cohomology II: Orientations*。 https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/Elliptic-II.pdfLur18c[,] , 2018 年。*Spectral algebraic geometry*。 https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/SAG-rootfile.pdfLur[, 19] , 。。*Elliptic cohomology III: Tempered cohomology* 2019 https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/ Mat[A. Mathew, 17] , 2017 年。 *Examples of descent up to nilpotence*。 arXiv:1701.01528 [math.AT]。 https://arxiv.org/abs/1701.01528Mei[L. Meier, 18] , 2022 年。 *Topological modular forms with level structure: decompositions and duality*。 arXiv:1806.06709 [math.AT]。https://arxiv.org/abs/1806.06709Mil[H. Miller, 82] , 《加拿大数学学会会议论文集》2（1982）437–449。*Universal bernoulli numbers and the S^1-transfer*Mos[R. E. Mosher, 68] , 《拓扑学》7（1968）179–193。*Some stable homotopy of complex projective space*MRM[D. Mumford、C. Ramanujam 和 I. Manin, 08] , 《数学研究》，印度斯坦图书机构，2008 年。 *Abelian Varieties*。https://books.google.com/books?id=J81jPwAACAAJSta[Stacks Project 作者, 25] , *Stacks Project*, 2025 年。