arXiv:2602.01622v1 [physics.med-ph] 2 Feb 2026

对比度序：一种用于非线性波束形成器的基于序的图像质量准则

DONGWOON HYUN，美国斯坦福大学

许多现代超声波束形成器使用对比度比和对比噪声比等经典准则进行评估时，显示出图像质量有所改善；这些准则基于感兴趣区域（ROI）的汇总统计量。然而，非线性波束形成器和后处理方法可能会大幅改变这些统计量，因此人们担心，所报告的改善反映的可能是动态范围或映射方式的变化，而非真正的信息增益（例如杂波抑制）。广义对比噪声比（gCNR）等新准则旨在解决这些问题，但依赖于对底层分布的含噪估计。为此，我们提出一种新的图像质量准则，称为对比度序（CO），其定义为两个感兴趣区域亮度差之符号的期望值。CO 对图像值的所有严格单调变换均保持不变，因为它仅取决于图像值的相对排序；它也可以解释为一个感兴趣区域比另一个更亮的概率减去其更暗的概率。与 gCNR 不同，CO 具有简单的无偏估计量，其方差会随着每个感兴趣区域中的样本数量增加而减小。我们进一步提出有效对比度比（ECR），将对比度序校准至熟悉的对比度比，使二者在理想的瑞利散斑统计下相一致。CO 和 ECR 共同提供了保序、保符号且与动态范围无关的准则，用于评估病灶对比度；在评估现代波束形成器时，它们为经典及较新的图像质量准则提供了一种有理论依据的替代方案。

1 引言

在医学超声领域，如何以精准且切实可行的方式定义和测量图像质量是一项重大挑战，尤其是在试图将图像质量与患者结局直接关联时。即使是经过精心设计的临床医师阅片研究，也会受到阅片者间差异、培训背景不同以及个人偏好的影响，从而限制其可重复性和可扩展性。作为阅片研究的实用替代方案，人们开发了多种定量图像质量准则，用于表征超声图像的对比度、分辨率和噪声特性。这些准则通常被用作病灶可检测性和整体诊断性能的替代指标。然而，目前广泛使用的许多图像质量指标都是基于特定的统计和信号处理假设设计的，而现代成像方法正日益违背这些假设。

经典图像质量准则，如对比度比（CR）、对比噪声比（CNR）[17], 信噪比（SNR）以及基于点扩散函数（PSF）的分辨率指标，主要是针对经线性波束形成、随后仅进行极少非线性处理（通常为包络检波）所生成的图像而发展起来的。在这些条件下，图像值与底层回波幅度保持直接且可解释的关系，散斑统计可由瑞利分布很好地近似。在此范围内，这些指标具有清晰的解释。例如，对比噪声比已被证明可在瑞利散射假设下描述理想观察者的病灶可检测性 [1, 2, 10, 16, 22, 26], 而散斑自相关则与系统分辨率相关联 [25]。

当代超声成像研究日益模糊了波束形成与图像处理之间的传统界限。尽管波束形成在历史上通常被实现为根据射频通道数据对反射率进行线性重建（例如延时求和（DAS）），但现代系统经常在处理流程的多个阶段引入非线性操作。这些非线性既有意为之，例如通过自适应 [3, 24] 和基于相干性的 [5, 11, 12, 14, 15] 波束形成器来抑制杂波或突出可靠信号；也不可避免地存在于动态范围压缩、对比度增强和显示映射等后处理操作中。

正如 Hverven 等人 [7] 和 Rindal 等人 [18], 所证明的，即使图像的底层信息含量保持不变，这些非线性操作也可能显著改变图像值的统计分布。因此，传统图像质量指标所报告的改善，可能反映的是图像统计量的变化，而非病灶可检测性或杂波抑制能力的真正提升。这种统计失配引发了一个根本性问题：当图像质量指标对图像值的任意非线性变换都很敏感时，它们可能会将外观上的修饰性变化与信息含量的实质性改善混为一谈。

应对这一挑战的一种历史做法，是将比较限制在保持线性的波束形成器之间，或将非线性后处理视为“仅仅是修饰性的”[22]。从这一视角出发，线性方法与非线性方法之间的比较通常被认为 inherently 不公平，除非所有方法都遵循相同的统计假设，尤其是关于散斑统计和图像振幅分布的假设。这种观点大幅限制了可评估的波束形成器和图像重建算法类别，排除了许多现代方法；这些方法的主要目标并非保持传统散斑统计，而是通过自适应、基于相干性或其他非线性操作，提高临床相关结构的可分辨性。

另一种日益受到重视的方法是采用信息论准则。Rodriguez-Molares 等人 [21] 首次明确尝试使用广义对比噪声比（gCNR）来评估非线性波束形成器。（此前，Nguyen 等人 [16]提出了 Kullback–Leibler 散度，这也能实现相同的目标 [10], ，不过当时作者关注的是瑞利散射。）gCNR 描述了信息论意义上的理想观察者对两个感兴趣区域（ROI）的基本可分辨性，等于 1 减去其错误率 [10]。gCNR 也称为全变差距离，在所有单射动态范围变换（DRT）下均保持不变，因为它仅取决于感兴趣区域的概率分布，而不取决于图像值

本研究部分由美国国家生物医学成像与生物工程研究所通过 K99-EB032230 号资助支持。作者在斯坦福大学任职期间完成了本项工作，之后加入西门子医疗。目前作者未隶属于任何机构。作者联系方式：Dongwoon Hyun，美国加利福尼亚州帕洛阿尔托，斯坦福大学。

本身，因此是比较非线性波束形成器的绝佳选择。（我们还提出了一种类似的、基于自互信息的 DRT 不变空间分辨率准则 [8]。）

然而，广义对比噪声比对应于一种特别强的 DRT 不变性概念。图像质量准则根据其所具有不变性的 DRT 类别而有所区别。不同的 DRT 不变类会导出图像之间不同的等价关系，因此产生不同的图像质量概念。广义对比噪声比对所有单射 DRT 的不变性产生了一种粗略的等价关系，它舍弃了图像值上的所有数学结构，包括排序（正式讨论见第2 节）。此外，基于有限样本进行估计并非易事，需要通过直方图或密度估计来近似底层分布，由此产生的偏差和方差难以量化 [10]。

本文表明，将不变类限制为严格单调的 DRT 后，我们可以得到一种更精细的等价关系；这种关系保留了图像亮度的相对排序，同时对可视化和显示中常用的非线性映射不敏感。我们还提出了两个符合这一中间层级不变性的新准则：**对比度序**（CO）及其经过散斑校准的等效指标**有效对比度比**（ECR）。

CO 提供了一种带符号、基于排序的对比度度量，介于完全基于分布的准则（如广义对比噪声比）与传统的、依赖具体指标的度量（如对比度比和对比噪声比）之间。重要的是，CO 有一种简单的无偏估计量，可基于有限的感兴趣区域样本计算，其方差取决于从各感兴趣区域抽取的独立样本数。ECR 则进一步依据瑞利散斑统计对 CO 进行校准，从而得到熟悉的比率式解释。CO 与 ECR 共同构成了一个简单且有原则的框架，可用于评估现代非线性波束形成器的对比度。

本文其余部分的安排如下。第 2节回顾现有图像质量准则，并对 DRT 的影响进行形式化描述。第 3 节介绍 CO 和 ECR，并分析其数学性质。第 4 节通过仿真和实验示例展示其表现。最后，第 5 节讨论其影响、局限性及未来研究方向。

2 超声图像质量评估

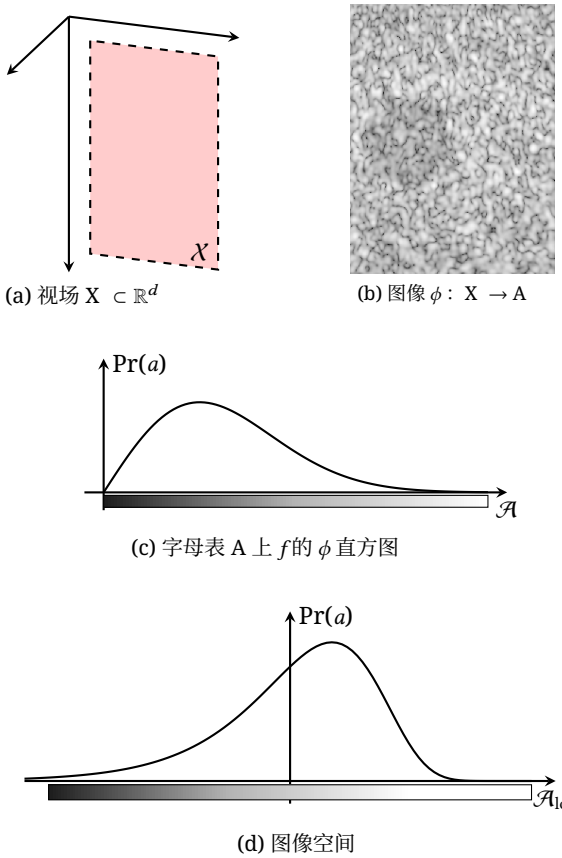
此处，我们给出相关定义，以便精确表述现代图像质量准则所要求的不变性。

2.1 图像统计量

考虑一个图像 $\phi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{A}$，它将某个视场(FOV) $\mathcal{X}$ 映射到一个字母表$\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$，即所有可能图像值的集合。图像值可以视为一个随机变量 $A = \phi(x)$，其概率分布为 $f\colon \mathcal{A} \to [0,1]$，也称为直方图，属于$A$。图1 展示了这一过程。

我们可以用 X 或 A 来描述图像的统计量，两种方法都会得到相同的结果。例如， A 的期望值可以计算为 $\phi(x)$ 在视场 X 上的均值：

$$\mathbb{E}[A] = \mathbb{E}[\phi(x)] = \frac{1}{m(\mathcal{X})}\int_{\mathcal{X}} \phi(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$



(a) 视场 X $\subset \mathbb{R}^d$ (b) 图像 $\phi\colon$ X $\to$ A

(c) 字母表 A 上 f的 ϕ 直方图

(d) 图像空间

图 1. (a) 在三维空间中显示的二维视场 X。(b) 图像 ϕ 将 A 中的值赋给 X 中的每个坐标。(c) ϕ 的直方图给出了 A 中各图像值的相对出现频率。

其中， $m(x)$ 是区域 $x \subseteq$ X 的体积测度，即 m 是勒贝格测度或计数测度。等价地，也可以在字母表 A 上计算期望值：

$$\mathbb{E}[A] = \int_{\mathcal{A}} a\, f(a)\,\mathrm{d}a. \tag{2}$$

二者通过直方图 f相关，其定义如下：

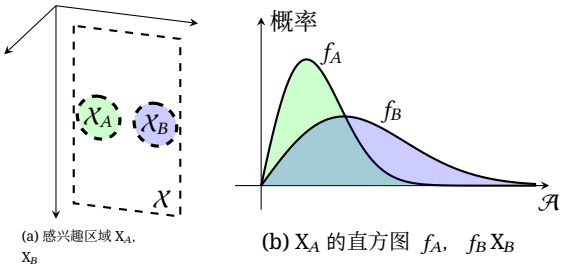
$$f(a) = m(\phi^{-1}(a))/m(\mathcal{X}), \tag{3}$$

其中， ϕ^{-1}是从 A 到 X 的逆映射。于是， $f(a)$表示具有图像值 a的视场体积占视场总体积的比例，即在视场中观测到图像值 a 的概率。

为了给出更精确的测度论定义， f 是概率测度 μ 在 (A $\Sigma_{\mathcal{A}}$) 上的密度，其中 μ 是 m 通过可测函数 $\phi\colon$(X $\Sigma_{\mathcal{X}}$) $\to$(A $\Sigma_{\mathcal{A}}$) 推前得到的测度（即定义在 (X $\Sigma_{\mathcal{X}}$) 上的测度），而 $\Sigma_{\mathcal{X}}$ 和 $\Sigma_{\mathcal{A}}$ 分别是各自定义域上适当的σ-代数。

2.2 选择感兴趣区域（感兴趣区域）

选择感兴趣区域的过程相当于从视场 X_A，X_B，… $\subset$X 中选取子集。在本文中，我们使用大写



(a) 感兴趣区域 X_A，X_B　(b) X_A 的直方图 f_A，f_B X_B

图 2. 图示说明了病灶可检测性问题。(a) 给定图像函数 ϕ（见图 1b），我们选取两个感兴趣区域（ROI）：$\mathcal{X}_A$ 和 $\mathcal{X}_B$。(b) 分别得到 ϕ 在 $\mathcal{X}_A$ 和 $\mathcal{X}_B$ 中的直方图：f_A 和 f_B。

字母（例如，A、B）表示与感兴趣区域内图像值相对应的随机变量，并用 X 上的下标（例如，X_A、X_B）表示空间域本身。我们将 ϕ 在第 i 个感兴趣区域上的限制记为 $\phi_i\colon \mathrm{X}_i \to \mathrm{A}$。这些感兴趣区域子图像各自具有直方图 $f_i\colon \mathrm{A} \to [0,1]$，定义如下：

$$f_i(a) = m(\phi_i^{-1}(a))/m(\mathcal{X}_i). \tag{4}$$

换句话说，直方图值 $f_i(a)$ 是在第 i 个感兴趣区域 X_i 中观测到 a 的概率。

我们将两个感兴趣区域的图像值表示为以下随机变量：A 和 B，其概率密度分别为 f_A 和 f_B。图2 展示了这一情形。与前文一样，我们可以在 A 和 B 上计算$\mathcal{X}$ 或$\mathcal{A}$的统计量。期望值为

$$\mathbb{E}[A] = \frac{1}{m(\mathcal{X}_A)}\int_{\mathcal{X}_A}\phi_A(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{A}} a\,f_A(a)\,\mathrm{d}a \tag{5}$$

$$\mathbb{E}[B] = \frac{1}{m(\mathcal{X}_B)}\int_{\mathcal{X}_B}\phi_B(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{A}} b\,f_B(b)\,\mathrm{d}b, \tag{6}$$

方差为

$$\mathrm{Var}[A] = \mathbb{E}[A^2] - (\mathbb{E}[A])^2,\ \mathrm{Var}[B] = \mathbb{E}[B^2] - (\mathbb{E}[B])^2. \tag{7}$$

2.3 图像质量准则

均值和方差是许多图像质量准则的主要组成部分。图像质量准则 定义为一个函数$q\colon \mathrm{A}^{\mathcal{X}} \to \mathbb{R}$，它为任意图像 $\phi \in \mathrm{A}^{\mathcal{X}}$赋予一个质量评分 $q(\phi)$，其中 $\mathrm{A}^{\mathcal{X}}$ 是所有可能图像的集合。这是一个通用定义，涵盖了医学成像中广泛使用的许多常见图像质量准则。在处理实值图像（$\mathrm{A} = \mathbb{R}$）时，$q(\phi)$的示例包括：

$$\mathrm{CR}(\phi;\mathcal{X}_A,\mathcal{X}_B) = \frac{\mathbb{E}[A]}{\mathbb{E}[B]} \tag{8}$$

$$\mathrm{CNR}(\phi;\mathcal{X}_A,\mathcal{X}_B) = \frac{\mathbb{E}[A]-\mathbb{E}[B]}{\sqrt{\mathrm{Var}[A]+\mathrm{Var}[B]}} \tag{9}$$

$$\mathrm{SNR}(\phi;\mathcal{X}_A) = \frac{\mathbb{E}[A]}{\sqrt{\mathrm{Var}[A]}} \tag{10}$$

$$\mathrm{FWHM}_{\mathrm{pt}}(\phi;\mathcal{X}_A) = 2\arg\min_{\Delta x}\left\{\frac{\phi_A(x+\Delta x)}{\phi_A(x)} \geq 0.5\right\} \tag{11}$$

$$\mathrm{FWHM}_{\mathrm{corr}}(\phi;\mathcal{X}_A) = 2\arg\min_{\Delta x}\left\{\frac{R_{\phi\phi}(\Delta x)}{R_{\phi\phi}(0)} \geq 0.5\right\} \tag{12}$$

$$\mathrm{gCNR}(\phi;\mathcal{X}_A,\mathcal{X}_B) = 1 - \int_{\mathcal{A}} \min\{f_A(a), f_B(a)\}\,\mathrm{d}a \tag{13}$$

$$\mathrm{FWHM}_{\mathrm{info}}(\phi;\mathcal{X}_A) = 2\arg\min_{\Delta x}\left\{\frac{I_{\phi\phi}(\Delta x)}{I_{\phi\phi}(0)} \geq 0.5\right\}, \tag{14}$$

其中，$R_{\phi\phi}(\Delta x) = \mathbb{E}[\phi_A(x)\phi_A^*(x+\Delta x)]$是自相关，而$I_{\phi\phi}(\Delta x) = \mathbb{E}[\log \frac{f_{AB}}{f_A f_B}]$是~~平~~移感兴趣区域 [8, 25]的自互信息（“自信息”）。接下来，我们将准则 $q(\phi; \mathrm{X}_A, \mathrm{X}_B)$简称为 $q[A,B]$。

重要的是，这些准则隐含地假设不同重建方法所得的图像值可以直接比较；当波束形成或后处理中应用的非线性变换改变了图像值时，这一假设便会产生问题。

2.4 动态范围变换

现代波束形成器和图像处理流程通常会将改变图像信息含量的操作（例如杂波抑制或自适应加权）与主要影响图像值动态范围的强度重映射相结合。这些动态范围变换（DRT）可能为实现可视化而显式应用，也可能作为非线性处理的一部分隐式产生。正如 Hverven 等人 [7] 和 Rindal 等人 [18], 所示，此类变换会引起图像强度统计特性的显著变化，因此在评估图像质量时不能忽略。下面我们通过引入 DRT 及其不变类的精确定义，对上述讨论进行形式化。

2.4.1 动态范围变换（*DRT*）。DRT 是一个函数$h\colon \mathrm{A} \to \mathrm{A}'$，它将图像值 $\phi(x) \in \mathrm{A}$ 重映射为新值 $h(\phi(x)) \in \mathrm{A}'$。新的图像值 A' 不必与 A 相同。如本文所定义，DRT 是一种全局操作，以相同方式作用于所有像素 $x \in \mathrm{X}$。将所有 DRT 的集合记为 $\mathrm{T}_{\mathrm{all}} = \{h\colon \mathrm{A} \to \mathrm{A}'\}$。如果图像质量准则 q 在 DRT 类 $\mathrm{T} \subseteq \mathrm{T}_{\mathrm{all}}$ 下满足

$$q(h(\phi)) = q(\phi) \quad \forall h \in \mathcal{T}. \tag{15}$$

2.4.2 对标量乘法的不变性。（正）标量乘法是一种将整个图像 ϕ 乘以某个实常数 $c > 0$的函数，即 $h(\phi(x)) = c\,\phi(x)$。将所有此类函数的集合记为 $\mathrm{T}_{\times}$。这类 DRT 通常被视为理所当然（例如，将图像归一化为其最大值），因为超声

回波通常被认为具有任意单位。这类 DRT 保持比值，即对于任意 $a,\ b \in \mathrm{A}$ 和 $b \neq 0,\ a/b = h(a)/h(b)$。

2.4.3 对单调变换的不变性。 A（严格）单调变换 是一种 DRT，当且仅当 $h(a) < h(b)$ $a < b$ 时满足该条件。将所有此类 DRT 记为 $\mathrm{T}_<$。这些 DRT 在为人类观察者设计的高动态范围成像系统中十分常见，例如灰度压缩。这些 DRT保持序关系，但不一定保持比值。

2.4.4 对单射变换的不变性。 一种单射变换 是一种 DRT，其中每个元素 $a \in \mathcal{A}$ 都映射到唯一的元素 $a' \in \mathcal{A}'$。单射 DRT 不一定是单调的。所有此类 DRT 的集合记为 $\mathcal{T}_{\mathrm{inj}}$。一个反例是量化，此时 $\mathcal{A}$ 中的一个值区间会映射到 $\mathcal{A}'$中的同一个值。重要的是，单射 DRT 保留信息：它们不会影响感兴趣区域的熵或互信息 [8, 10]。因此，可以将单射 DRT 视为不会对信息论理想观察者产生影响的 DRT。

这些 DRT 类构成一个严格的层次结构：

$$\mathcal{T}_{\mathrm{all}} \supset \mathcal{T}_{\mathrm{inj}} \supset \mathcal{T}_{<} \supset \mathcal{T}_{\times}. \tag{16}$$

限制 DRT 不变性类会在图像值字母表上保留更多结构。例如，对 $\mathrm{T}_{\mathrm{inj}}$ 的不变性仅保留分布信息，而对 $\mathrm{T}_<$ 的不变性还会保留图像值的相对排序，对 $\mathrm{T}_\times$ 的不变性则进一步保留尺度和比值。

在评估非线性波束形成器时，这一层次结构至关重要。例如，CR、对比噪声比、SNR、$\mathrm{FWHM}_{\mathrm{pt}}$ 和 $\mathrm{FWHM}_{\mathrm{corr}}$ 对 $\mathrm{T}_\times$ 不变，而广义对比噪声比和 $\mathrm{FWHM}_{\mathrm{info}}$ 对 $\mathrm{T}_{\mathrm{inj}}$ 不变，这意味着它们可以严格应用于范围更广的 DRT 类。据我们所知，目前尚无对 $\mathrm{T}_<$ 不变的准则在使用中。下面我们提出一个这样的候选准则。

3 对比度排序准则

本节将定义对比度序，阐述其不变性，并在理想散斑假设下，分析其与传统对比度指标之间的关系。

3.1 对比度序的定义

对比度 是指区分两个感兴趣区域的能力，例如病灶和背景。我们希望找到一种新的对比度度量，用于描述两个感兴趣区域在统计意义上的“可排序性”，即一个感兴趣区域的值是否小于或大于另一个，但不依赖于两者之间差异的大小。

与前文相同，令随机变量 A 和 B 分别对应于 X 中感兴趣区域 X_A 和 X_B 的图像值，其概率分布分别为 f_A 和 f_B。我们引入一种称为对比度序（*CO*）的新判据，定义如下

$$\mathrm{CO}[A, B] = \mathbb{E}[\operatorname{sign}(A - B)] \tag{17}$$

$$= \iint \operatorname{sign}(a - b)\, f_{AB}(a, b)\, \mathrm{d}a\, \mathrm{d}b, \tag{18}$$

其中，期望是对具有密度 $f_{AB}(a, b) = f_A(a) f_B(b)$ 的乘积测度（即 $\mu_A \times \mu_B$在 $\Sigma_A \otimes \Sigma_B$ 上）取的，且符号函数定义为对任意标量 $c \in \mathbb{R}$，其

$$\operatorname{sign}(c) = \begin{cases} +1, & c > 0 \\ 0, & c = 0 \\ -1, & c < 0 \end{cases}. \tag{19}$$

此定义强调相对次序，而非数值大小。正如对比度比衡量两个感兴趣区域之间的比值，对比度序衡量的是这些值的相对次序。

3.2 对比度序的性质

对比度序的取值范围为区间 $[-1, +1]$；当 X_A 中的所有值都小于 X_B 中的所有值时，其值为 -1；当所有值都较大时，其值为 $+1$。对比度序还是一个反对称函数，即 $\mathrm{CO}[A, B] = -\mathrm{CO}[B, A]$，因为对于所有 $a, b \in \mathbb{R}$，$\operatorname{sign}(a - b) = -\operatorname{sign}(b - a)$。

现在将严格单调变换定义为函数 $h : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$，使得 $h(a) < h(b)$ 当且仅当 $a < b$。

定理1 （不变性）。 对比度序在所有严格单调变换下保持不变。

证明。首先，直接考察符号函数的所有可能情况可知，严格单调变换会保留差值 $a - b$ 的符号，对所有 $a, b \in \mathbb{R}$ 均成立：

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(h(a) - h(b)) &= \begin{cases} +1, & h(a) > h(b) \iff a > b \\ 0, & h(a) = h(b) \iff a = b \\ -1, & h(a) < h(b) \iff a < b \end{cases} \\ &= \operatorname{sign}(a - b), \end{aligned} \tag{20}$$

这直接由严格单调变换的定义可得。因此，

$$\mathrm{CO}[h(A), h(B)] = \mathbb{E}[\operatorname{sign}(h(A) - h(B))] \tag{21}$$

$$= \mathbb{E}[\operatorname{sign}(A - B)] \tag{22}$$

$$= \mathrm{CO}[A, B], \tag{23}$$

也就是说，两个图像感兴趣区域之间的对比度序，在与严格单调变换复合后保持不变。■

定理1 表明，对比度序在功率压缩等操作下保持不变 $h(a) = a^p$ 以及对数压缩 $h(a) = \log a$下亦如此；这两种操作都常用于后处理。定理 1 不适用于一般的非严格单调变换，此类变换定义为函数 $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$，使得 $g(a) \leq g(b)$ 当且仅当 $a \leq b$。

推论2。 对于一般的（非严格）单调变换 g，$g(A)$ 与 $g(B)$ 的对比度序在大小和符号上可能不同于 A 与 B 的对比度序。

证明。我们使用一个简单的反例。考虑字母表 $\mathrm{A} = \{1, 2, 3\}$，以及单调变换 $g_1(\mathrm{A}) = \{1, 2, 2\}$ 和 $g_2(\mathrm{A}) = \{1, 1, 2\}$。设 A和 B分别服从分布 $f_A = \{0, 1, 0\}$ 和 $f_B = \{0.5, 0, 0.5\}$。根据公式（18）计算得到的对比度序为：

- $[A, B] = 0$ 对比度序 对比度序
- $[g_1{}^{A}_{A}\ g_1{}^{B}_{B}] = +0.5$ ( ) ( ) 对比度
- $[g_2{}^{A}_{A}\ g_2{}^{B}_{B}] = -0.5$ 序 ( ) ( )

因此，在一般的单调变换下，大小和符号都无法保持不变。■

该反例是有意设计得极端的，如此大的变化在实践中不太可能出现。尽管如此，在合并具有较大测度的图像值时应谨慎。一个现实的（非严格）单调变换例子是幅度量化，其中值的区间由单个值表示，例如在显示器上显示图像时，或在直方图分箱过程中 [10]。

命题3。 对比度序是 $A > B$ 的概率减去 $A < B$的概率。

证明。注意到对任意 $a,\ b \in \mathsf{A} \subset \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sign}(a-b) = \mathbf{1}\{a > b\} - \mathbf{1}\{a < b\}, \tag{24}$$

其中$\mathbf{1}\{\cdot\}$是示性函数，当谓词$\{\cdot\}$为真时等于1，否则为0。另请注意

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}\{A > B\}] = \Pr[A > B]. \tag{25}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{CO}[A,B] &= \mathbb{E}[\operatorname{sign}(A-B)]\\ &= \mathbb{E}[\mathbf{1}\{A > B\}] - \mathbb{E}[\mathbf{1}\{A < B\}] &(26)\\ &= \Pr[A > B] - \Pr[A < B]. &(27)\end{aligned}$$

从而为对比度序提供概率解释。 ■

3.3 散斑幅度感兴趣区域的对比度序

散斑由漫射亚分辨率散射产生。考虑一个均匀的散斑感兴趣区域 X_A，其回声性 σ_A。散斑图像的幅度是一个随机变量 A，服从尺度参数为 σ_A的瑞利分布：

$$f_A(a;\sigma_A) = \frac{a}{\sigma_A^2}\exp\left[-\frac{a^2}{2\sigma_A^2}\right], \qquad a \geq 0. \tag{28}$$

A 的累积分布函数为

$$F_A(a;\sigma_A) = \int_0^a f_A(a;\sigma_A)\,\mathrm{d}a = 1 - \exp\left[-\frac{a^2}{2\sigma_A^2}\right]. \tag{29}$$

考虑两个散斑随机变量 A和 B，其分布分别为 $f_A(a;\ \sigma_A)$ 和 $f_B(b;\ \sigma_B)$。将回声强度比记为

$$\gamma = \frac{\sigma_A}{\sigma_B}. \tag{30}$$

为简洁起见，以下记号中省略尺度参数。

命题 4. 两个散斑信号 A 和 B 之间的对比度比 γ等于回声强度比。

证明。注意到

$$\mathrm{CR}[A,B] = \frac{\mathbb{E}[A]}{\mathbb{E}[B]} = \frac{\sigma_A\sqrt{\pi/2}}{\sigma_B\sqrt{\pi/2}} = \gamma, \tag{31}$$

其中我们用到了瑞利随机变量的均值为 $\sigma\sqrt{\pi/2}$这一事实。 ■

定理5。 两个散斑信号 A 和B 之间的对比度序为 $\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2+1}$。

证明。 我们从命题 26中的式（3）开始：

$$\begin{aligned}\mathrm{CO}[A,B] &= \mathbb{E}[\mathbf{1}\{A > B\}] - \mathbb{E}[\mathbf{1}\{A < B\}]\\ &= \iint_{a>b} f_{AB}(a,b)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b - \iint_{a<b} f_{AB}(a,b)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b. &(32)\end{aligned}$$

第一个积分可简化为

$$\begin{aligned}\iint_{a>b} f_{AB}(a,b)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b &= \int_0^\infty f_A(a)\left(\int_0^a f_B(b)\,\mathrm{d}b\right)\mathrm{d}a &(33)\\ &= \int_0^\infty f_A(a)\,F_B(a)\ \mathrm{d}a &(34)\\ &= \int_0^\infty \frac{a}{\sigma_A^2}\exp\left[-\frac{a^2}{2\sigma_A^2}\right]\left(1-\exp\left[-\frac{a^2}{2\sigma_B^2}\right]\right)\mathrm{d}a &(35)\\ &= 1 - \int_0^\infty \frac{a}{\sigma_A^2}\exp\left[-\frac{a^2(\sigma_A^2+\sigma_B^2)}{2\sigma_A^2\sigma_B^2}\right]\mathrm{d}a &(36)\\ &= 1 - \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2+\sigma_B^2} &(37)\\ &= 1 - \frac{1}{\gamma^2+1}. &(38)\end{aligned}$$

第二个积分的计算方法类似，结果为

$$\begin{aligned}\iint_{a<b} f_{AB}(a,b)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b &= \int_0^\infty f_A(a)\left(\int_a^\infty f_B(b)\,\mathrm{d}b\right)\mathrm{d}a &(39)\\ &= \int_0^\infty f_A(a)\,(1-F_B(a))\,\mathrm{d}a &(40)\\ &= \frac{1}{\gamma^2+1}. &(41)\end{aligned}$$

因此，对比度序为

$$\mathrm{CO}[A,B] = 1 - \frac{2}{\gamma^2+1} = \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2+1}, \tag{42}$$

完成证明。 ■

3.4 散斑强度感兴趣区域的对比度序

现在考虑散斑强度，即 A^2 和 B^2。注意，平方函数

$$h\ a\ = a^2 \qquad\qquad a \geq (\,) \text{ 在定义域 上}$$

0严格单调。因此，我们预期对比度序在平方运算下保持不变（$\mathrm{CO}[A^2,B^2] = \mathrm{CO}[A,B]$），但对比度比（$\mathrm{CR}[A^2,B^2] \neq \mathrm{CR}[A,B]$）则不会。下面来证明这一点。

我们将利用这样一个事实：当 A 服从瑞利分布时， A^2 服从指数分布，其分布为

$$f_{A^2}(a';\sigma) = \frac{1}{2\sigma^2}\exp\left[-\frac{a'}{2\sigma^2}\right], \qquad a' > 0 \tag{43}$$

且累积分布为

$$F_{A^2}(a';\sigma) = \int_0^a f_A(a';\sigma)\,\mathrm{d}a' = 1 - \exp\left[-\frac{a'}{2\sigma^2}\right]. \tag{44}$$

命题 6. </style}两个散斑强度 A^2 和 B^2 之间的对比度比为 γ^2。

证明。指数随机变量的期望值为 $2\sigma^2$:

$$\mathrm{CR}[A^2, B^2] = \frac{\mathbb{E}[A^2]}{\mathbb{E}[B^2]} = \frac{2\sigma_A^2}{2\sigma_B^2} = \gamma^2, \tag{45}$$

其为 A 与 B的对比度比的平方。 ■

定理7. 两个散斑强度A^2 与 B^2 之间的对比度序为 $\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2+1}$。

证明。 采用与定理 5相同的步骤，可得

$$\mathrm{CO}[A^2, B^2] = \mathbb{E}[\mathbf{1}\{A^2 > B^2\}] - \mathbb{E}[\mathbf{1}\{A^2 < B^2\}]$$
$$= \iint_{a'>b'} f_{A^2B^2}(a', b')\,\mathrm{d}a'\,\mathrm{d}b' - \iint_{a'<b'} f_{A^2B^2}(a', b')\,\mathrm{d}a'\,\mathrm{d}b'. \tag{46}$$

与之前一样，第一个积分可简化为

$$\iint_{a'>b'} f_{A^2B^2}(a', b')\,\mathrm{d}a'\,\mathrm{d}b' = \int_0^\infty f_{A^2}(a') \left(\int_0^{a'} f_{B^2}(b')\,\mathrm{d}b' \right) \mathrm{d}a' \tag{47}$$
$$= \int_0^\infty f_{A^2}(a')\, F_{B^2}(a')\ \mathrm{d}a' \tag{48}$$
$$= 1 - \frac{1}{\gamma^2+1}, \tag{49}$$

第二个积分可简化为

$$\iint_{a'<b'} f_{A^2B^2}(a', b')\,\mathrm{d}a'\,\mathrm{d}b' = \int_0^\infty f_{A^2}(a') \left(\int_a^\infty f_{B^2}(b')\,\mathrm{d}b' \right) da' \tag{50}$$
$$= \int_0^\infty f_{A^2}(a')\,(1 - F_{B^2}(a'))\,\mathrm{d}a' \tag{51}$$
$$= \frac{1}{\gamma^2+1}. \tag{52}$$

因此，对比度序再次为

$$\text{对比度序}[A^2, B^2] = 1 - \frac{2}{\gamma^2+1} = \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2+1}, \tag{53}$$

从而完成证明。 ■

进一步外推，定理1在数学上保证，任意严格单调变换 h 对散斑信号 A 与 B 的对比度序将始终为

$$\mathrm{CO}[h(A), h(B)] = \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2+1}. \tag{54}$$

3.5 有效对比度比

当图像不符合传统散斑统计规律时 [7, 18]，对比度比便不再与回声强度比耦合 γ，其含义也变得不明确。因此，我们提出有效对比度比（*ECR*），通过对（42）求逆得到：

$$\mathrm{ECR}[A, B] = \sqrt{\frac{1 + \mathrm{CO}[A, B]}{1 - \mathrm{CO}[A, B]}}. \tag{55}$$

换言之，ECR 是两个理想散斑感兴趣区为复现给定的对比度序值所必须具备的回声强度比。尽管 ECR 不如对比度序本身那么基础，但它为测得的对比度序提供了一个便捷的校准方式使其与熟悉的瑞利散斑对比度概念相联系。我们提出，ECR 能够实现当前对比度比测量的预期目的（测量两个感兴趣区域的有效可分辨性及其相对排序），同时还具有 $\mathrm{T}_{\prec}$ 不变性。展望未来，我们建议在比较非线性波束形成器时，以 ECR 直接替代对比度比。

3.6 对比度序的估计

在实践中，必须根据每个感兴趣区域内有限数量的图像样本来估计对比度序。设$\{A_i\}_{i=1}^{N_A} \sim A$ 和$\{B_j\}_{j=1}^{N_B} \sim B$ 分别表示从感兴趣区域$\mathcal{X}_A$ 和$\mathcal{X}_B$中抽取的样本。对（18）中定义的对比度序，自然的估计量是对所有交叉样本对的差值符号取平均:

$$\widehat{\mathrm{CO}}[A, B] = \frac{1}{N_A N_B} \sum_{i=1}^{N_A} \sum_{j=1}^{N_B} \mathrm{sign}(A_i - B_j). \tag{56}$$

若每个感兴趣区域内的样本均为独立同分布，且两个样本集合相互独立，则该估计量是无偏的，即:

$$\mathbb{E}[\widehat{\mathrm{CO}}] = \mathrm{CO}. \tag{57}$$

此外，其方差有一个简单且易于理解的上界:

$$\mathrm{Var}[\widehat{\mathrm{CO}}] \le \frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_B} - \frac{1}{N_A N_B}. \tag{58}$$

这些结果的证明见附录，其中还提供了 MATLAB 和 Python 实现示例。

重要的是，尽管对比度序对 $N_A N_B$ 成对比较取平均，但这些比较并非相互独立，因为其中许多比较共享共同样本。因此，主导方差项按$1/N_A + 1/N_B$而非$1/(N_A N_B)$的尺度变化，这反映了每个感兴趣区域所贡献的独立观测的有效数量。

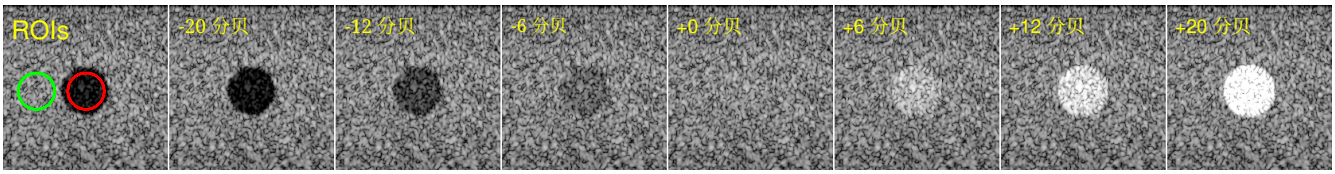
在实践中，感兴趣区域的采样往往比系统分辨率更精细，从而产生空间相关的图像值。在这种情况下，估计量仍然无偏，但由于有效样本量减小，方差下降得更慢，并且方差界应相对于独立样本的有效数量而非原始像素计数来解释。

最后，对比度序估计量在统计分析和解释上比广义对比噪声比估计量简单得多；后者首先需要显式估计底层概率分布，通常通过直方图分箱或核密度估计来完成。这一中间步骤会引入额外的调节参数（例如箱宽或带宽），并导致偏差-方差权衡。因此，广义对比噪声比通常并非总体广义对比噪声比的无偏估计，其方差同时取决于样本数量和所选的密度估计参数。相比之下，对比度序无需调节，在标准假设下精确无偏，并且具有方差的闭式界，使其成为感兴趣区域可分性的一种特别透明且稳健的估计量。

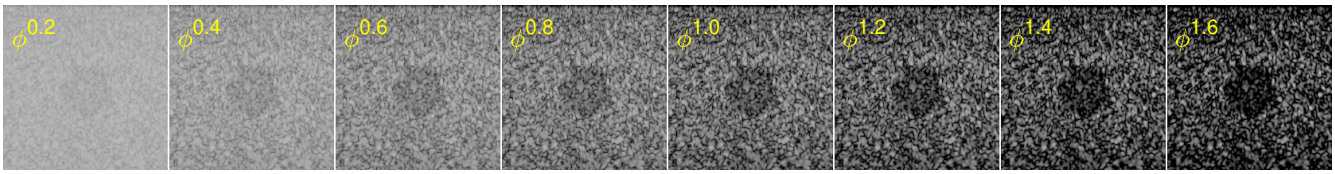
4 示例

4.1 对比度序与 ECR 演示

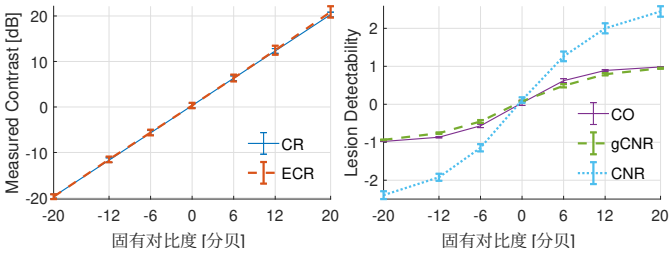
4.1.1 方法：数据集。使用 Field II 对病灶靶进行仿真，以展示对比度序和 ECR 的行为。



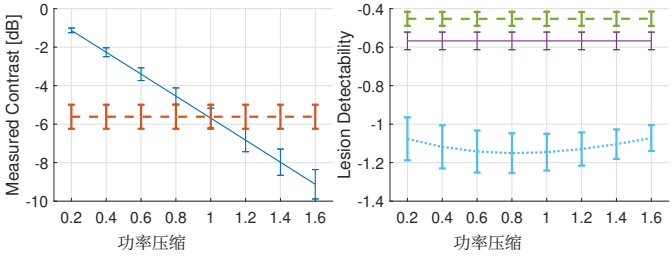
（a）模拟对比度病灶



（b） −6 分贝病灶的功率压缩



（c）准则与固有对比度的关系



（d）准则与功率压缩的关系

图 3. 使用 Field II 模拟对比度病灶。（a）通过改变病灶的回声性，模拟病灶对比度的真实变化。（b）使用功率压缩模拟病灶对比度的“表观”变化。对于这两种情况，均绘制 CR、ECR、CO、有符号 gCNR 和有符号 CNR。（c）在测量病灶对比度的真实变化时，CR 和 ECR 的表现相同。CO 的取值范围为 -1 至 +1，gCNR 也是如此；而 CNR 无界，但遵循相同的趋势。（d） −6 分贝病灶的 ECR 在功率压缩下保持不变，而 CR 会发生变化。类似地，CO 和 gCNR 保持不变，而 CNR 会发生变化。

该数据集与 Hyun等人所用的数据集相同。 [9]：使用模拟的 L12-3v换能器（128 个阵元，中心频率为 8 MHz），通过完整（多静态）合成孔径序列对理想散斑靶成像，每个分辨单元包含 20 个散射体。所有情况下均采用标准延时求和波束形成器。在仰角焦点处仿真了一个直径为 3 毫米的圆柱形病灶，其真实回声强度分别为 −20分贝、 −12分贝、 −6分贝、0分贝、 +6分贝、 +12 分贝和 +20 分贝，如图3a 所示。此外，还研究了在功率压缩条件下的 −6 分贝病灶，压缩因子范围为0.2 至1.6，以考察 DRT 的影响，如图3b 所示。图3a 的第一个面板展示了病灶和背景感兴趣区。针对每种情况，均计算了对比度比、ECR、对比度序、广义对比噪声比和对比噪声比。我们将广义对比噪声比和对比噪声比乘以均值差的符号，得到带符号的指标，以便与反对称对比度序直接比较。共仿真了 8 次随机散射体实现，以获得误差条。

4.1.2 结果。在图 3c 中，正如延时求和波束形成器所预期的那样，CR 随真实病灶对比度线性增加。由于散斑服从瑞利统计量，ECR 也与 CR 完全一致，这同样符合预期。对比度序、有符号广义对比噪声比和有符号对比噪声比呈现相同的 S 形变化，在对比度幅值较高时，病灶可检测性的提升逐渐减小。在图 3d 中，尽管真实病灶对比度仍保持不变，功率压缩仍会影响 CR 为 −6 分贝，而 ECR 不受影响。类似地，功率压缩不会改变对比度序和广义对比噪声比，但会使对比噪声比发生变化。

该演示通过一个数值示例说明，对比度序和 ECR 在简单单调变换下保持不变，这一点已在定理 1 中得到证明。这种不变性使 ECR 成为非线性波束形成器中 CR 的更佳替代方案。我们还可以看到，对于来自线性波束形成器的瑞利分布信号，ECR 与 CR 相一致；只有在引入非线性后，ECR 才会偏离 CR。因此，ECR 是独立于 DRT 测量对比度差异的更优选择。

4.2 波束形成器比较

本实验评估对比度序和 ECR 是否能对先前在动态范围灵敏度背景下研究过的各种波束形成器给出一致的排名 [18]。

4.2.1 方法：数据集。使用医学超声平面波成像挑战赛（PICMUS）数据 [13] 中的实验对比度散斑数据集，对多种当前波束形成器进行了评估。该数据集包含 75 次平面波发射，

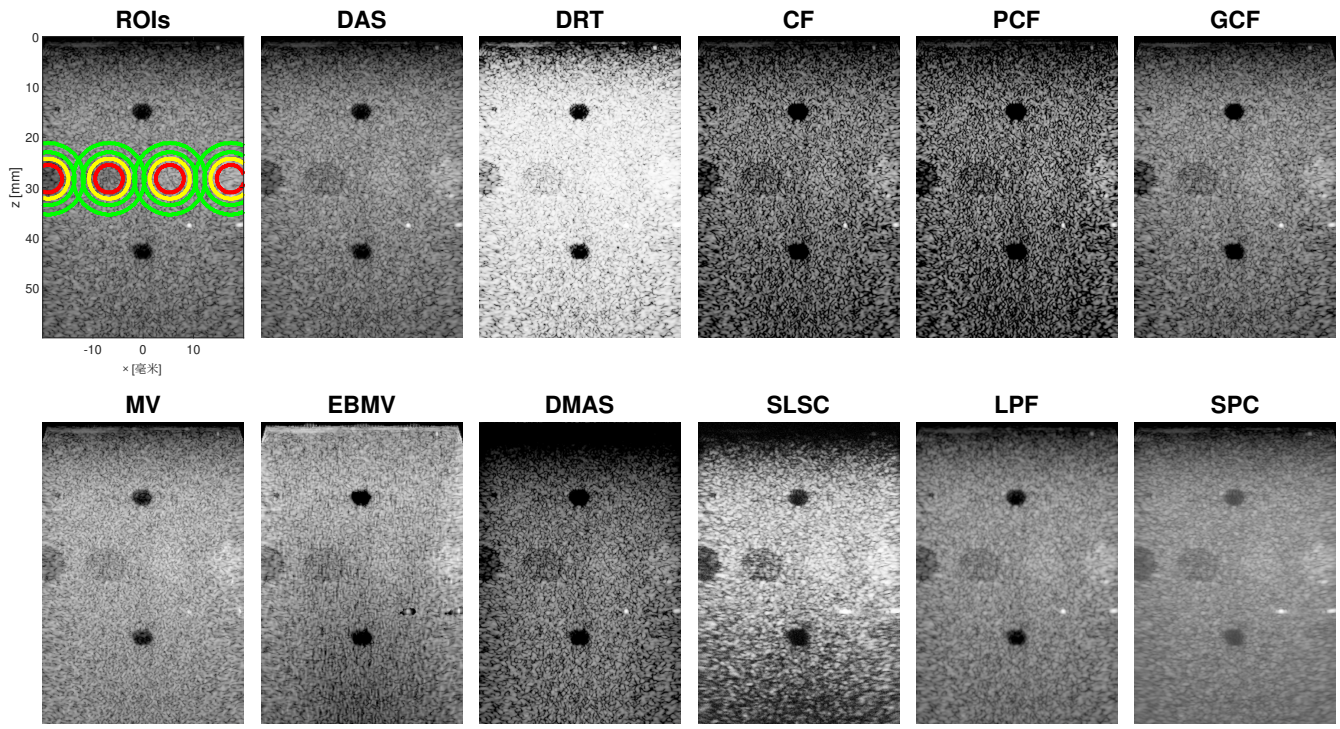


图4. 使用多种波束形成器，从 PICMUS 实验对比度体模数据集中重建灰度目标 [13]：延迟求和（DAS）、简单的动态范围变换（DRT）、相干因子（CF）、相位相干因子（PCF）、广义相干因子（GCF）、Capon最小方差（MV）、基于特征子空间的最小方差（EBMV）、延迟乘积求和（DMAS）、短滞后空间相干（SLSC）、简单的低通滤波器（LPF）以及接收空间复合（SPC）。红色内圆表示病灶感兴趣区，黄色圆表示病灶位置，绿色圆环表示背景感兴趣区。请注意，图像对比度和纹理变化很大。

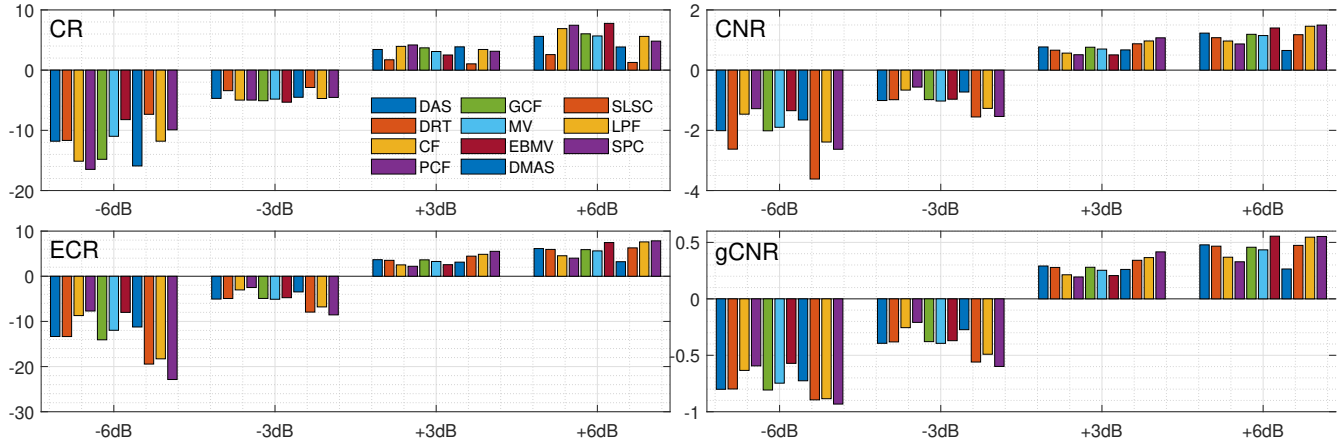


图5. 图中针对图4中的每个灰度目标，绘制了每种波束形成器对应的 CR、ECR、（带符号）CNR 和（带符号）gCNR。请注意，纯粹用于修饰的 DRT，其 CR 和 CNR 与 DAS 不同，显示出它们的不稳定性。CR 和 CNR 取决于图像统计量，其变化趋势与 ECR 和 gCNR 不一致，尤其是在 −6分贝病灶中。

这些数据由 Verasonics Vantage 256 系统搭配 L11-4v探头采集。更多详情请参阅 Liebgott 等人 [13] 。成像目标为 CIRS Model 040GSE体模，其中包含若干无回声区域，以及四个灰度目标，标称对比度为 -6 分贝、-3 dB、 +3dB 和 +6dB。对测试夹具进行了少许修改，以选择灰度目标，而非无回声目标。选取了同心感兴趣区，其中心为 {−18.9毫米 −6.8毫米 5.3 毫米 17.4 毫米}，且所有感兴趣区均以

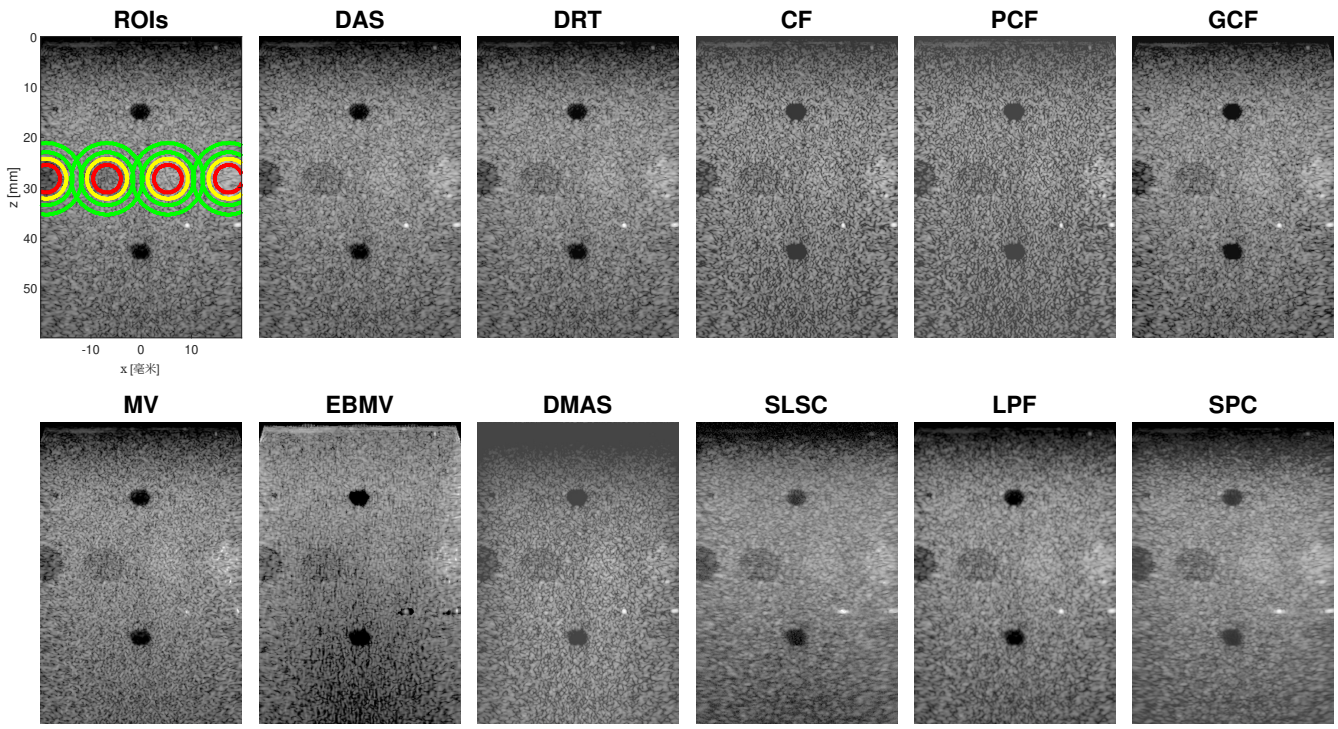


图6。将直方图匹配应用于图4 中的波束形成图像，并以DAS 直方图作为参考。所得图像纹理和对比度在视觉上彼此更加相似，因此更易于比较。此外，相对图像质量与图7中的定量结果更加吻合。

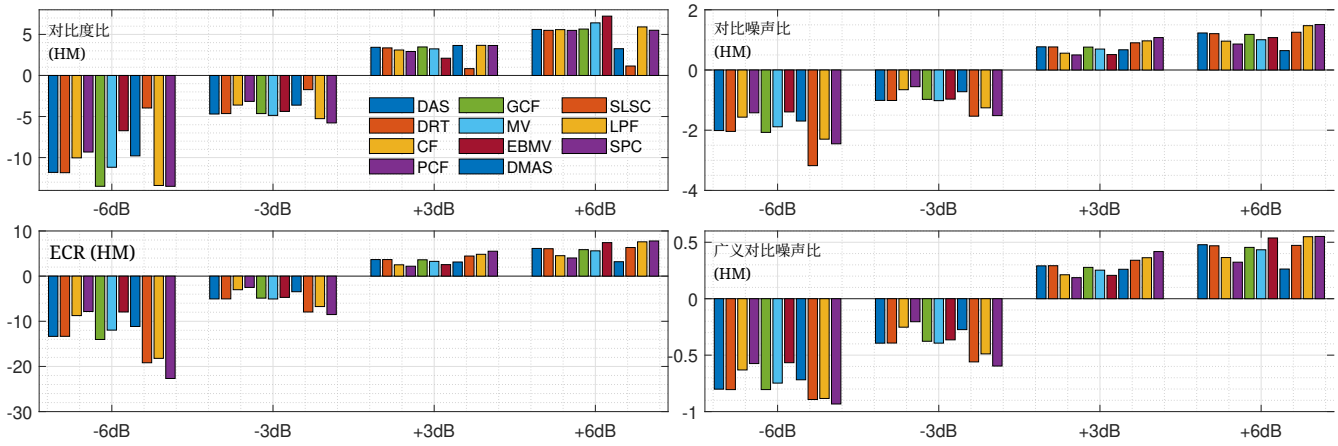


图7。图6 中每种灰度目标对应的各个波束形成器的CR、ECR、（有符号）对比噪声比和（有符号）广义对比噪声比均绘制于图中，且数据经过直方图匹配（HM）处理。HM改变了图5中的CR和对比噪声比，尤其消除了DRT的影响。ECR和广义对比噪声比则保持不变。

$z = 28.5$毫米。选取了一个内圆形感兴趣区域和一个外环形感兴趣区域，间距为横向分辨率的 2 倍（圆形半径：2.75 毫米；环形内半径：5.25 毫米；环形外半径：7.11 毫米）。

4.2.2 方法：波束形成器。遵循Rindal 等人 [18], 的实现，测试了以下波束形成器：DAS；纯粹用于视觉修饰的DRT（灰度变换 [18]，使用 $\alpha = 0.12$、$\beta = 50$ [14], 、 $\epsilon = 0.012$）；由相干因子（CF）加权的DAS 相位相干因子 (PCF) [5],和广义相干因子 (GCF) [12]；Capon 最小方差 (MV) [24]和基于特征空间的最小方差 (EBMV) 波束形成器 [3]；滤波延迟乘积求和 (DMAS) 波束形成器 [15]；短滞后空间相干 (SLSC) 波束形成器 [11]；以及简单的动态范围变换 (DRT)、截止频率为 $\sigma = \lambda/3$ 的高斯低通滤波器 (LPF)，和 4× 接收空间复合。具体而言

对于 SLSC 波束形成器， –6在接收通道数据中添加了分贝数值的均方根 (RMS) 噪声，以避免无噪声仿真环境产生过多的相干伪影 [6]。除非另有说明，我们采用了 Ultrasound Toolbox（USTB） [20]的实现方式和参数；每种波束形成器的具体描述见 Rindal 等人 [18]。

4.2.3 结果：波束形成器原始输出。**在未进行任何归一化的情况下，经典对比度指标给出的排名不一致且具有误导性，而 ECR 和广义对比噪声比则保持稳健**。图4 展示了各波束形成器的重建结果。图像值分布差异很大。相干因子、相位相干因子和延迟乘积求和往往会使图像变暗，并增大散斑颗粒。DRT、最小方差、EBMV 和 SLSC 会提高图像的整体亮度。SLSC、低通滤波器和 SPC 的分辨率似乎也略差。低通滤波器和 SPC 的对比度较差，但会减小散斑颗粒。图5 绘出了每种波束形成器对 4 个病灶的对比度比、ECR、对比噪声比和广义对比噪声比。

这些图充分体现了 2019 年引入广义对比噪声比之前，现代超声图像质量评估所面临的挑战。正如 Rindal 等人 [18] 此前观察到的那样，纯粹改善外观的 DRT 波束形成器显著提高了对比噪声比，相较于延迟求和表现更佳。或许更令人担忧的是，对比度比和对比噪声比对波束形成器质量的排名并不一致：在–6分贝病灶中，对比度比排名前三的是相位相干因子、延迟乘积求和和相干因子，而对比噪声比排名前三的则是 SLSC、DRT 和 SPC。

这些观察结果凸显了 CR 和 CNR 对不同波束形成器之间图像值分布变化的敏感性。由于这些准则明确依赖均值和方差等图像统计量，即使感兴趣区域内图像强度的底层排序保持不变，整体亮度、对比度缩放或分布形状的差异也可能显著影响其数值。

相比之下，图5中的 ECR 和广义对比噪声比在不同波束形成器之间表现出更加一致的特性，其排序受图像统计量整体偏移的影响较小。这表明，DRT不变准则为比较输出动态范围或统计结构各异的波束形成器提供了更稳定的依据，无需额外归一化或事后调整。

4.2.4 结果：直方图匹配。**直方图匹配使经典对比度准则的排序与 DRT不变准则的排序高度一致，从而能够对不同波束形成器进行更有意义的定性比较**。我们重复了相同的分析，这次额外加入直方图匹配步骤，以均衡图像的定性特征 [4]。直方图匹配通过强制采用统一的图像值分布，减少了不同波束形成器之间的视觉差异。根据直方图分箱的选取方式，匹配过程可能严格单调，也可能不是。我们使用对数压缩DAS图像作为参考图像，并对所有图像进行直方图匹配，例外情况是 SLSC波束形成器，其单位为相关系数。全图匹配使用 MATLAB 中的 imhistmatch函数完成。

如图6所示，所得图像在灰度色调和整体亮度方面更加相似，便于进行定性视觉比较。图7 展示了直方图匹配后的相应图像质量准则。值得注意的是，CR 和对比噪声比的排序现在与图5中 ECR 和广义对比噪声比所得的排序更加一致。特别是，那些先前因动态范围效应而导致 CR 和对比噪声比值偏高的波束形成器，其排序与使用 DRT不变准则所得的结果一致。

这一现象表明，直方图匹配可通过近似补偿动态范围变换，部分减轻 CR 和对比噪声比对图像统计量差异的敏感性。从这个意义上说，直方图匹配可视为一种有价值的预处理步骤，有助于更有意义地使用传统对比度指标进行定性评估和可视化。

然而，直方图匹配的效果取决于具体实现选择，例如直方图分箱、参考对象的选择，以及是在全局范围内还是在感兴趣区域内进行匹配 [4]。此外，直方图匹配无法保证在后续 DRT 下仍保持不变。可以将直方图匹配视为一种尝试，旨在为设计上不具备 DRT 不变性的指标补上这种特性。相比之下，ECR 和广义对比噪声比等 DRT不变准则提供了一种有保证且有原则的方法，可在无需归一化或附加假设的情况下比较波束形成器。

5 讨论

现代超声波束形成器越来越注重提升图像的信息含量，例如抑制离轴杂波或突出相干信号分量，且常借助非线性处理实现。这些操作通常会改变图像值分布，使 CR 和对比噪声比等传统对比度准则难以解读。由于这些准则明确依赖均值和方差等汇总统计量，因此无法可靠地区分感兴趣区域可分性的真正改善与动态范围重映射所引起的变化。这一局限使得对现代波束形成器进行严格比较变得困难。

如第 4 节所示，直方图匹配可通过在评估前统一图像值分布，部分缓解这一问题，从而恢复经典对比度排序的一致性。然而，直方图匹配是一种归一化策略，而非准则本身固有的属性。其有效性取决于具体实现方式，例如直方图分箱是否采用对数尺度，以及匹配是针对整幅图像还是特定感兴趣区域进行 [4]。相比之下，定义对 DRT 不变的图像质量准则，无需进行任何归一化，即可直接比较波束形成器，而不受图像值单调重映射的影响。

在这一框架下，对比度序提供了一种简单、基于排序的感兴趣区域可分性度量，它仅取决于图像值的相对排序。由于依赖的是成对比较的符号而非大小，对比度序在严格单调的 DRT 下保持不变。对比度序天然带有正负号，能够指示哪个感兴趣区域的平均亮度更高；此外，它还有一个简单的无偏估计量，并具有闭式方差上界。这些特性使对比度序成为一种尤为直观且统计稳健的图像质量评价标准。ECR 进一步将对比度序映射到一种熟悉的

瑞利校准尺度，在保留 DRT 不变性的同时，延续了基于 CR 的传统文献中的表述。

在多种波束形成器中，对比度序与广义对比噪声比高度一致，这令人鼓舞，因为广义对比噪声比与信息论理想观察者的性能直接相关 [10]。这表明，尽管对比度序的定义方式简单得多，却能捕捉到与理想观察者的可检测性密切相关的感兴趣区域可分性概念。重要的是，若存在广义对比噪声比能够检测、而对比度序无法检测的图像差异，这些差异必然源于图像值的非单调重排序；而这类重排序并不对应成像流程或显示映射中有意义的变化。从这个角度看，对比度序可视为理想观察者的一种易于处理的保序替代指标，且不会对数学上允许但实践中无关紧要的 DRT 过度敏感。

对比度并非孤立存在。在第4节中，SLSC、高斯模糊和空间复合图像的 ECR 和广义对比噪声比值较高，但分辨率明显降低，突显了对比度与分辨率之间固有的权衡；正如我们此前所示 [10], 对感兴趣区域进行模糊处理可以提高相应直方图的可分性。这说明对比度和分辨率彼此提供关键背景信息，因此必须结合起来呈现和解读。遗憾的是，当前的分辨率准则，如点目标半高全宽和散斑自相关半高全宽，并非 DRT 不变 [8, 19, 25]。我们还需进一步研究，以确定令人满意的 DRT 不变分辨率准则。尽管斯派罗分辨率准则 [23]和自信息 [8]是有力的候选指标，但仍需进一步发展和表征，以确保它们适用于相关成像场景。

最后，DRT不变准则为探索更深层、更复杂的问题打开了大门。对比度提升到什么程度才值得牺牲分辨率？在以与 DRT无关的方式优化图像的信息含量之后，我们如何找到对人类视觉而言最优的DRT？随着成像流程日益融入非线性处理和自动化分析，图像质量准则应如何演进？

6 结论

我们提出了一种新的基于序的对比度准则，称为对比度序。对比度序衡量两个感兴趣区域的“可排序性”。它具有反对称性，并且取值范围被限制在区间 $[-1,+1]$ 内。对比度序在所有严格单调变换下保持不变，但在非严格单调变换下可能发生变化。我们证明，对比度序可用于推导出一种有效的 对比度比，即 $\mathrm{ECR} = \sqrt{(1+\mathrm{CO})/(1-\mathrm{CO})}$。对于瑞利散斑，ECR 提供了一种与变换无关的准则，并且与 CR 一致，因此在评估非线性波束形成器时，可作为广泛使用的 CR 准则的直接替代方案。

A 对比阶估计量的性质

接续第 3.6 节，令 $\{A_i\}_{i=1}^{N_A} \sim A$和 $\{B_j\}_{j=1}^{N_B} \sim B$分别表示从感兴趣区域中抽取的独立同分布（i.i.d.）样本，$\mathcal{X}_A$ 和 $\mathcal{X}_B$，其中这两组样本相互独立。

命题8. $\widehat{\mathrm{CO}}$ 是 CO 的无偏估计量。

证明。该估计量的期望为

$$\mathbb{E}[\widehat{\mathrm{CO}}[A,B]] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{N_A N_B}\sum_{i=1}^{N_A}\sum_{j=1}^{N_B}\mathrm{sign}(A_i - B_j)\right] \tag{59}$$

$$= \frac{1}{N_A N_B}\sum_{i=1}^{N_A}\sum_{j=1}^{N_B}\mathbb{E}\left[\mathrm{sign}(A_i - B_j)\right] \tag{60}$$

$$= \frac{1}{N_A N_B}\sum_{i=1}^{N_A}\sum_{j=1}^{N_B}\mathbb{E}\left[\mathrm{sign}(A - B)\right] \tag{61}$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathrm{sign}(A-B)\right] \tag{62}$$

$$= \mathrm{CO}[A,B], \tag{63}$$

它等于总体对比度序。 ∎

命题9. $\mathrm{Var}(\widehat{\mathrm{CO}})$ 的上界为 $\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_B} - \frac{1}{N_A N_B}$ — ——

证明。令 $X_{ij} = \mathrm{sign}(A_i - B_j)$。于是，

$$\mathrm{Var}(\widehat{\mathrm{CO}}) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{N_A N_B}\sum_{i=1}^{N_A}\sum_{j=1}^{N_B} X_{ij}\right) \tag{64}$$

$$= \frac{1}{N_A^2 N_B^2}\sum_{i,j}\sum_{i',j'}\mathrm{Cov}(X_{ij}, X_{i'j'}), \tag{65}$$

也就是说，方差展开为一个双重求和，其中包含有序对 (i,j) 和 (i',j') 之间的协方差。接下来，我们将协方差项分为四个子集进行讨论：

(1) $\sum_{i\neq i', j\neq j'} \mathrm{Cov}(X_{ij}, X_{i'j'}) = 0$
(2) $\sum_{i=i', j=j'} \mathrm{Cov}(X_{ij}, X_{i'j'}) = N_A N_B \,\mathrm{Var}(X_{11})$
(3) $\sum_{i=i', j\neq j'} \mathrm{Cov}(X_{ij}, X_{i'j'}) = N_A N_B (N_B - 1)\,\mathrm{Cov}(X_{11}, X_{12})$
(4) $\sum_{i\neq i', j=j'} \mathrm{Cov}(X_{ij}, X_{i'j'}) = N_B N_A (N_A - 1)\,\mathrm{Cov}(X_{11}, X_{21})$

在情形1中，(A_i, B_j)与$(A_{i'}, B_{j'})$根据独立同分布假设相互独立，因此协方差为零。情形2仅为方差项。在情形3和4中，其中一个指标是共享的，因此协方差非零。注意，在情形2–4中，由于独立同分布假设，(协)方差不依赖于具体指标。

还需界定$\mathrm{Var}(X_{11})$、$\mathrm{Cov}(X_{11}, X_{12})$和$\mathrm{Cov}(X_{11}, X_{21})$的界。由于 $X_{ij} \in \{-1, 0, +1\}$，我们有 $|X_{ij}| \leq 1$，因此

$$\mathrm{Var}(X_{11}) \leq \mathbb{E}[X_{11}^2] \leq 1. \tag{66}$$

让我们对$\mathrm{Cov}(X_{11}, X_{12})$关于 A_1取条件。给定 A_1，随机变量 $X_{11} = \mathrm{sign}(A_1 - B_1)$与 $X_{12} = \mathrm{sign}(A_1 - B_2)$相互独立。因此，根据全协方差公式，

$$\mathrm{Cov}(X_{11}, X_{12})$$

$$= \mathbb{E}[\mathrm{Cov}(X_{11}, X_{12} \mid A_1)] + \mathrm{Cov}(\mathbb{E}[X_{11} \mid A_1], \mathbb{E}[X_{12} \mid A_1]) \tag{67}$$

$$= 0 + \mathrm{Var}(\mathbb{E}[\mathrm{sign}(A_1 - B) \mid A_1]) \tag{68}$$

$$\leq 1, \tag{69}$$

其中，最后一个不等式由 $\mathbb{E}_B[\mathrm{sign}(a-B)] \in [-1,1]$推出，这意味着 $\mathrm{Var}(\mathbb{E}_B[\mathrm{sign}(a-B)]) \leq 1$。对 B_1 作条件化，可用类似论证得到 $\mathrm{Cov}(X_{11}, X_{21}) \leq 1$。

将这些不等式代入协方差子集后，(65) 可界定为

$$\mathrm{Var}(\widehat{\mathrm{CO}}) \le \frac{N_A N_B + N_A N_B (N_B - 1) + N_B N_A (N_A - 1)}{N_A^2 N_B^2} \tag{70}$$

$$= \frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_B} - \frac{1}{N_A N_B}. \tag{71}$$

这证明了估计器方差上界。 ■

B 示例代码

我们提供两个示例，展示如何根据两个感兴趣区域 img1 和 img2 中的图像值估计对比度序，以及如何估计 ECR；这些示例注重清晰易懂，而非运行效率。

B.1 MATLAB

```
function co = 对比度_序(img1 , img2) num = 0; % for i
```

B.2 Python

```
导入 NumPy 作为np

def 对比度_序(img1 ,          img2):
    数值 = 0.0 # 初始化运行总和
    对于 a 在 img1.ravel (): # 遍历 img1
        对于 b 在 img2.ravel(): # 遍历 img2
            num += np.sign(a - b)
    # 归一化并返回输出
    返回 num/ img1.size / img2.size

定义 effective_对比度_ratio (对比度序):
    返回 np.sqrt((1 + 对比度序) / (1 - co))
```

致谢

本研究部分经费由美国国家生物医学成像与生物工程研究所通过 K99-EB032230 号资助提供。作者谨向 Jeremy Dahl 教授对本研究的鼓励，以及匿名审稿人提出的宝贵意见致谢，尤其感谢他们对估计量分析提出的意见。

参考文献

[1] Craig K Abbey、Nghia Q Nguyen 和 Michael F Insana。2010。采用理想观察者的超声最优波束形成。*IEEE* 超声、铁电体与频率控制汇刊57，8（2010），1782–1796。[2] Craig K Abbey、Roger J Zemp、Jie Liu、Karen K Lindfors 和 Michael F Insana。2006。模拟超声成像中恶性与良性乳腺病灶辨别任务的观察者效率。*IEEE* 医学成像汇刊25，2（2006），198–209。[3] Babak Mohammadzadeh Asl 和 Ali Mahloojifar。2010。应用于医学超声成像的基于特征子空间的最小方差波束形成。*IEEE* 超声、铁电体与频率控制汇刊57，11（2010），2381–2390。

[4] Nick Bottenus、Brett Byram 和 Dongwoon Hyun。2020。用于超声图像视觉比较的直方图匹配。IEEE 超声、铁电体与频率控制汇刊（2020）。[5] Jorge Camacho、Montserrat Parrilla 和 Carlos Fritsch。2009。相位相干成像。IEEE 超声、铁电体与频率控制汇刊56，5（2009），958–974。[6] Jeremy J Dahl、Dongwoon Hyun、Muyinatu Lediju 和 Gregg E Trahey。2011。采用短延迟空间相干成像的诊断超声病灶可检测性。超声成像33，2（2011），119–133。[7] Stine M. Hverven、Ole Marius Hoel Rindal、Alfonso Rodriguez-Molares 和 Andreas Austeng。2017。散斑统计量对超声成像中对比度指标的影响。载于2017年IEEE国际超声研讨会（IUS）。1–4。doi:10.1109/ULTSYM.2017.8091875[8] Dongwoon Hyun。2021。定性图像的信息论空间分辨率准则。载于2021年IEEE国际超声研讨会（IUS）。1–4。doi:10.1109/IUS52206.2021.9593744[9] Dongwoon Hyun、Anna Lisa C Crowley 和 Jeremy J Dahl。2016。高效估计背向散射空间相干性的方法。IEEE 超声、铁电体与频率控制汇刊64，3（2016），500–513。[10] Dongwoon Hyun、Gene B Kim、Nick Bottenus 和 Jeremy J Dahl。2021。超声病灶可检测性作为概率测度之间的距离。IEEE 超声、铁电体与频率控制汇刊69，2（2021），732–743。[11] Muyinatu A Lediju、Gregg E Trahey、Brett C Byram 和 Jeremy J Dahl。2011。背向散射回波的短滞后空间相干性：成像特性。IEEE 超声、铁电体与频率控制汇刊58，7（2011），1377–1388。[12] Pai-Chi Li 和 Meng-Lin Li。2003。采用广义相干因子的自适应成像。IEEE 超声、铁电体与频率控制汇刊50，2（2003），128–141。[13] Herve Liebgott、A Rodriguez-Molares、F Cervenansky、Jørgen Arendt Jensen 和 Olivier Bernard。2016。医学超声平面波成像挑战赛。载于2016年IEEE国际超声研讨会（IUS）。IEEE，1–4。[14] Raoul Mallart 和 Mathias Fink。1994。散射介质中通过声速非均匀性实现自适应聚焦：范·西特-泽尼克方法与聚焦准则。《美国声学学会杂志》96，6（1994），3721–3732。[15] Giulia Matrone、Alessandro Stuart Savoia、Giosuè Caliano 和 Giovanni Magenes。2014。延迟乘积求和波束形成算法在超声B型医学成像中的应用。IEEE 医学成像汇刊34，4（2014），940–949。[16] Nghia Q Nguyen、Richard W Prager 和 Michael F Insana。2016。用于超声波束形成器比较的基于任务的分析框架。《美国声学学会杂志》140，2（2016），1048–1059。[17] MS Patterson 和 FS Foster。1983。环形阵列/锥形混合阵列所生成B型图像的改进与定量评估。《超声成像》5，3（1983），195–213。[18] Ole Marius Hoel Rindal、Andreas Austeng、Ali Fatemi 和 Alfonso Rodriguez-Molares。2019。动态范围变化对对比度估计的影响。IEEE 超声、铁电体与频率控制汇刊66，7（2019），1198–1208。[19] Ole Marius Hoel Rindal、Andreas Austeng 和 Alfonso Rodriguez-Molares。2020。对比自适应波束形成器的半高全宽，以可分辨性衡量分辨率。载于2020年IEEE国际超声研讨会（IUS）。IEEE，1–4。[20] Alfonso Rodriguez-Molares、Ole Marius Hoel Rindal、Olivier Bernard、Arun Nair、Muyinatu A Lediju Bell、Hervé Liebgott、Andreas Austeng 等。2017。超声工具箱。载于2017年IEEE国际超声研讨会（IUS）。IEEE，1–4。[21] Alfonso Rodriguez-Molares、Ole Marius Hoel Rindal、Jan D'hooge、Svein-Erik Måsøy、Andreas Austeng、Muyinatu A Lediju Bell 和 Hans Torp。2019。广义对比噪声比：病灶可检测性的形式化定义。IEEE 超声、铁电体与频率控制汇刊（2019）。[22] Stephen W Smith、Robert F Wagner、John M Sandrik 和 Hector Lopez。1983。医学超声中的低对比度可检测性与对比度/细节分析。IEEE 声学与超声汇刊30，3（1983），164–173。[23] Carroll Mason Sparrow。1916。论光谱分辨本领。《天体物理学杂志》44（1916），76。[24] Johan-Fredrik Synnevag、Andreas Austeng 和 Sverre Holm。2009。医学超声成像中最小方差波束形成的优势。IEEE 超声、铁电体与频率控制汇刊56，9（2009），1868–1879。[25] Robert F Wagner、Michael F Insana 和 Stephen W Smith。1988。医学超声图像中相干散斑的基本相关长度。IEEE 超声、铁电体与频率控制汇刊35，1（1988），34–44。[26] Roger J Zemp、Michael D Parry、Craig K Abbey 和 Michael F Insana。2005。超声成像系统的检测性能理论。IEEE 医学成像汇刊24，3（2005），300–310。