arXiv:2602.01625v1 [cond-mat.mes-hall] 2 Feb 2026

参量驱动下玻色拓扑边缘态中的稳态趋肤效应

Nobuyuki Okuma[1], *

[1] *Graduate School of Engineering, Kyushu Institute of Technology, Kitakyushu 804-8550, Japan*

（日期：2026年2月3日）

非厄米系统因其极端特性而受到广泛的理论关注。然而，其实现大多局限于经典应用或人工搭建的系统。本研究聚焦于玻色玻戈留波夫–德热纳（BdG）系统固有的量子本性；从谱理论的角度看，这种量子本性对应于非厄米性。基于这一认识，我们提出利用此类 BdG 非厄米性，在量子凝聚态中实现稳态趋肤效应。具体而言，我们将参量泵浦产生的 BdG量子项引入某种玻色厄米陈绝缘体的边缘态，从而在没有耗散的情况下实现非厄米性。这种系统设计的优势在于，它在很大程度上不依赖微观模型的具体细节。通过非平衡格林函数分析，我们发现，在开边界条件下能够实现一种具有非厄米趋肤效应的稳态。在该稳态中观察到的显著角粒子积累呈现出正交分量各向异性，体现了玻色量子特性。我们的研究弥合了非厄米矩阵迷人数学理论与实际量子物理系统之间的鸿沟。

I. 引言

近年来，非厄米趋肤效应——即非厄米晶格系统对边界条件表现出强烈的谱敏感性，并承载局域于边界的趋肤模这一现象——受到了广泛关注 [1–8]。在一维非厄米紧束缚模型中，开放边界条件（OBC）下趋肤模的出现，可由周期边界条件（PBC）下复能量曲线的非平凡绕数来表征（图1）。关于这种对应关系的相关定理，是在参考文献 [11–13]中的若干观察之后，由参考文献 [9, 10], 证明的。此外，基于厄米拓扑零模与非厄米趋肤模之间的对偶性，参考文献 [9] 提出了对称性保护的趋肤效应和高维趋肤效应的概念。

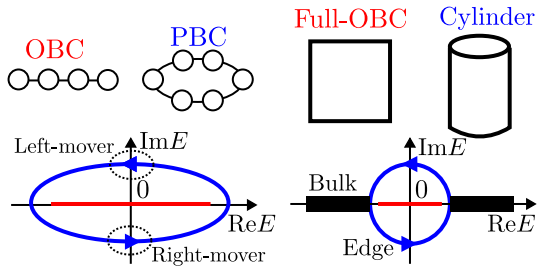

图1. 非厄米趋肤效应示意图。左图：谱绕数与皮肤效应之间的关系。右图：具有边缘依赖耗散的手征边缘态中的皮肤效应。

基于反常的非厄米拓扑[14, 15] 解释 [11, 16, 17] 有助于直观理解非厄米趋肤效应[18]。考虑PBC复能谱，其中虚部为负的右行模与虚部为正的左行模共存（图1）。在相应的OBC系统中，右行模和左行模在边界处发生耦合，所得杂化模的虚部取中间值。类似的解释也可应用于更复杂的情形，包括高维趋肤效应 [5, 18]。这些解释表明，各种非厄米趋肤效应都可能由拓扑边界态与边界依赖耗散 [5]的结合所诱导。例如，在陈绝缘子的手征边缘态中加入边界依赖耗散。由于这些手征边缘态的手性取决于边界，因此会产生与一维趋肤效应类似的能谱。在这种情况下，圆柱形和完全开放边界条件（CBC和FOBC）分别对应于边缘态的PBC和OBC（图1）。

尽管其数学方面已得到广泛研究，但在真实量子系统或固态系统中揭示非厄米趋肤效应的独特性质，仍是这一快速发展的领域中最具挑战性、也最引人入胜的问题之一。玻色基塔耶夫链 [22, 23] 为实现非厄米趋肤效应提供了一个新颖的平台。这种效应并非源于开放性或耗散，而是源于玻色博戈留波夫–德热讷（BdG）哈密顿量的内禀非厄米性，这从根本上反映了玻色对易关系的量子本性。实验研究已证实了这一机制的有效性 [24, 25]。越来越多的研究从理论上考察了更一般的玻色 BdG 系统中的非厄米趋肤效应 [26–33]。

本文提出了一种研究非厄米趋肤效应稳态性质的平台，该平台通过将玻色子拓扑边缘态与

* okuma@hosi.phys.s.u-tokyo.ac.jp

参量驱动诱导的 BdG型非厄米性相耦合来实现。与传统模型不同，我们的方法无需复杂的参量驱动项。此外，相关的玻色子拓扑系统已在各种平台上得到广泛研究，包括可调谐光子系统 [34], ，以及磁振子系统 [35]和声子系统 [36] 。

本文结构安排如下。第二节简要回顾玻色子BdG哈密顿量的形式，并介绍由参量驱动产生、贯穿本文使用的反常项。第三节给出参量驱动下玻色手性边缘态的模型，并考察其谱性质。第四节根据非平衡格林函数计算单粒子约化密度矩阵，并展示稳态中出现了显著的角粒子积累和正交分量各向异性。第五节讨论其余议题以及未来研究的可能方向。

II. 参量驱动下的玻色子BdG哈密顿量

本节简要回顾玻色子BdG哈密顿量的形式。我们还将介绍由参量驱动产生、并将在本文中贯穿使用的反常项。

A. 玻色子BdG形式

本文始终考虑由玻色子 BdG 哈密顿量 [37–40] 描述的系统：

$$\hat{H}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}^{\dagger},\boldsymbol{a})H_{\mathrm{BdG}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{a}^{\dagger}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}^{\dagger},\boldsymbol{a})\begin{pmatrix}h & s\\ s^{*} & h^{*}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{a}^{\dagger}\end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中，$(a_i,\ a_i^{\dagger})$ 是位于格点 i 上的玻色子湮灭与产生算符，$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}^{\dagger})$ 是南部旋量，而h 和 s分别是厄米矩阵和对称矩阵。 aa 和 $a^{\dagger}a^{\dagger}$ 称为配对项或反常项，它们破坏粒子数守恒。不同于费米子的情形，不能通过对厄米矩阵 H_{BdG}进行对角化来获得单粒子激发能。真正的能谱由非厄米矩阵 $H_{\sigma\mathrm{BdG}}$ 的特征谱给出：$=\sigma_z H_{\mathrm{BdG}}$，其中 σ 表示作用于南部空间的泡利矩阵。详情参见文献 [39–42] 。这里，非厄米性源自配对（反常）项，而非开放量子性质。非厄米哈密顿量矩阵 $H_{\sigma\mathrm{BdG}}$满足以下非厄米对称性 [16, 43]:

$$\sigma_z[H_{\sigma\mathrm{BdG}}]^{\dagger}\sigma_z=H_{\sigma\mathrm{BdG}}, \tag{2}$$
$$\sigma_x[H_{\sigma\mathrm{BdG}}]^{*}\sigma_x=-H_{\sigma\mathrm{BdG}}. \tag{3}$$

方程（2）描述了赝厄米性，它源于 H 的厄米性。方程（3）是粒子-空穴对称性的玻色子类比。注意，相应的布洛赫哈密顿量满足以下对称性：

$$\sigma_z[H_{\sigma\mathrm{BdG}}(\boldsymbol{k})]^{\dagger}\sigma_z=H_{\sigma\mathrm{BdG}}(\boldsymbol{k}), \tag{4}$$
$$\sigma_x[H_{\sigma\mathrm{BdG}}(-\boldsymbol{k})]^{*}\sigma_x=-H_{\sigma\mathrm{BdG}}(\boldsymbol{k}), \tag{5}$$

其中， $\boldsymbol{k}$ 是晶体动量。

B. 旋转坐标系中参量驱动产生的反常项

为引入反常项，我们考虑在依赖于格点的参量驱动 [44, 45] 下的玻色子紧束缚模型：

$$\hat{H}(t)=\sum_{i,j}a_i^{\dagger}\tilde{h}_{i,j}a_j+\sum_i\left[i\eta_i e^{i\Omega t}a_i a_i+h.c.\right], \tag{6}$$

其中 $h_{i,j}$ 是正常部分（未配对）的哈密顿量矩阵，η_i 刻画了依赖于格点的反常项，Ω 为驱动频率。通常，这些反常项源于非线性相互作用，例如 $b^{\dagger}aa+h.c.$，其中 b 表示可视为经典相干态的玻色泵浦模。在旋转坐标系中，可以消去哈密顿量的时间依赖性：

$$\hat{H}=\sum_{i,j}a_i^{\dagger}h_{i,j}a_j+\sum_i\left[i\eta_i a_i a_i+h.c.\right], \tag{7}$$

其中 $h_{i,j}=h_{i,j}-(\Omega/2)\delta_{ij}$ 是重整化后的正常部分。数学上，这可在相互作用绘景中通过计算 $\hat{H}:=e^{i\hat{H}_0 t}\hat{H}_1(t)e^{-i\hat{H}_0 t}$ 推导得出，其中 $\hat{H}(t)=\hat{H}_0+\hat{H}_1(t)$ 且 $\hat{H}_0=\Omega/2\sum_i a_i^{\dagger}a_i$。显然，式（7）可以改写成式（1）的形式。

III. 玻色手性边缘态皮肤效应的谱性质

本节将介绍本文分析的参量驱动下玻色手性边缘态模型，并考察其谱性质。

A. 模型

下文定义本文所分析的模型。我们采用 QWZ模型作为重整化正常部分 [46], ，其布洛赫哈密顿量写作

$$h(\boldsymbol{k})=\sin k_x\tau_x+\sin k_y\tau_y+(m-\cos k_x-\cos k_y)\tau_z, \tag{8}$$

其中， m 表示质量项， τ是作用于一个元胞内子晶格自由度的泡利矩阵。对于 $0<m<2$ （$-2<m<0$），最低能带的陈数为 1（-1）。本文中，我们设定 $m=1$。根据体边对应关系 [47], , 在开放边界条件下可以找到手性边缘模。请注意，原始哈密顿量 $\tilde{}\, h$ 的本征值应为正，以确保热力学稳定性；参量驱动的频率则选取为适当的值，以实现哈密顿量（8）。正常部分的 σBdG 形式为

$$H^{(\mathrm{N})}_{\sigma\mathrm{BdG}}(\boldsymbol{k}) = \sin k_x\tau_x\otimes\hat{1} + \sin k_y\tau_y\otimes\sigma_z + (m-\cos k_x-\cos k_y)\tau_z\otimes\sigma_z, \tag{9}$$

ˆ其中，1 为单位矩阵。在下文中，只要根据上下文可以明确其含义，我们将省略单位矩阵 ˆ1。每一项中是否存在 σ_z 由粒子-空穴对称性（5）决定。对于配对项，我们考虑如下位点哈密顿量：

$$H^{(\mathrm{A})}_{\sigma\mathrm{BdG}} = \sum_{\boldsymbol{r}} i\Delta_{\boldsymbol{r}}\left|\boldsymbol{r}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{r}\right|\otimes\hat{1}\otimes\sigma_x, \tag{10}$$

其中， $\boldsymbol{r}$ 表示元胞，且 $\Delta_{\boldsymbol{r}}\in\mathbb{R}$。我们假设沿 x 和 y方向分别存在 L_x 和 L_y 个元胞。除对称性（4）和（5）外，总哈密顿量 $H_{\sigma\mathrm{BdG}} = H^{(\mathrm{N})}_{\sigma\ \mathrm{BdG}} + H^{(\mathrm{A})}_{\sigma\ \mathrm{BdG}}$还具有如下位点幺正对称性：

$$[H_{\sigma\mathrm{BdG}}, U] = 0 \quad \text{with } U=\hat{1}\otimes\tau_x\otimes\sigma_x. \tag{11}$$

因此，哈密顿量相对于 U分块对角化，每个扇区由本征值$U=\pm1$表征。下文将讨论这种对称性重要和不重要的情形。前者意义重大，因为它与玻色子基塔耶夫模型 [22, 23]形成类比，在该模型中，这种对称性发挥着关键作用；而后者对于考察广泛的应用十分重要，包括磁振子 [35] 和声子 [36]系统。接下来，我们首先讨论谱，随后考察非平衡稳态的性质。

B. 边缘驱动下的谱性质

我们考虑以下两种边界条件：CBC和FOBC，二者在 y 方向上均为开放。首先，我们假设底边和顶边上的配对项是均匀的（即对 $y=1$ 和 $y=L_y$取 $\Delta_{\boldsymbol{r}}=\Delta$ ，否则取 $\Delta_{\boldsymbol{r}}=0$ ）。在CBC下，通过考虑对称性11，我们发现边缘处的低能有效理论由四个具有复能量的手性边缘模给出：

$$(k_x+i\Delta)\left|\tau_x=1\right\rangle\left\langle\tau_x=1\right|\otimes\left|\sigma_x=1\right\rangle\left\langle\sigma_x=1\right|, \tag{12}$$

$$(k_x-i\Delta)\left|\tau_x=1\right\rangle\left\langle\tau_x=1\right|\otimes\left|\sigma_x=-1\right\rangle\left\langle\sigma_x=-1\right|, \tag{13}$$

$$(-k_x+i\Delta)\left|\tau_x=-1\right\rangle\left\langle\tau_x=-1\right|\otimes\left|\sigma_x=1\right\rangle\left\langle\sigma_x=1\right|, \tag{14}$$

$$(-k_x-i\Delta)\left|\tau_x=-1\right\rangle\left\langle\tau_x=-1\right|\otimes\left|\sigma_x=-1\right\rangle\left\langle\sigma_x=-1\right|. \tag{15}$$

由于存在虚部为正的复能量，该系统表现出动力学不稳定性，并因此转变为另一种稳态。事实上，具有 $L_x\times L_y = 16\times16$和 $\Delta=0.1$的整个系统的能谱呈现出可由这一有效理论解释的行为 [图 2(a)]。文献 [48]从拓扑磁振子放大的角度讨论了一个在单侧边缘施加参量驱动的类似模型。从这个意义上说，本文的核心贡献在于 FOBC 情形。在 FOBC 下，可以找到虚部为零的边缘态 [图 2(a)], , 这意味着其边缘谱与 CBC 情形截然不同。这是非厄米趋肤效应的典型表现。得益于皮肤效应，系统不会受到边缘放大所导致的动力学不稳定性影响。严格来说，在边缘态与体态的连接处会出现极小的虚部。然而，在典型实验装置中应当存在的耗散可能会掩盖如此微弱的放大。我们将在后文的稳态计算中讨论这一点。

在这种皮肤效应中，幺正对称性（11）起着关键作用。在 $U=1$ 扇区中，存在一个虚部为正的右行模（12）和一个虚部为负的左行模（15）。这些边缘模与体模一起，在CBC下形成谱绕数，这表明非厄米皮肤效应的存在。这里，我们通过将 y方向视为内部自由度来定义一维绕数。在 $U=-1$ 扇区中，同样的现象以相反的绕数出现。因此，总绕数为零。从这个意义上说，上述谱行为被理解为受幺正对称性（11）保护的皮肤效应。在每个扇区中，趋肤模局域在 $x=1$ 或$x=L_x$ [图 2(a)]。这意味着对称性（11）的破缺可导致皮肤效应消失。在我们的先前工作 [49], 中，这种被称为无穷小不稳定性的消失可由无穷小的微扰触发。玻色 BdG 系统中同样的无穷小不稳定性也在文献 [28]中被指出。我们加入对称性破缺项 $\epsilon 1\otimes1\otimes\sigma_z$ 作为微扰。对于 $\epsilon=0.05$，我们观察到FOBC谱趋近于CBC谱。在附录中，我们更详细地讨论这种微扰不稳定性。

模型特有的对称性可能不利于实际应用。如果不要求趋肤模的能量为实数，皮肤效应便可以

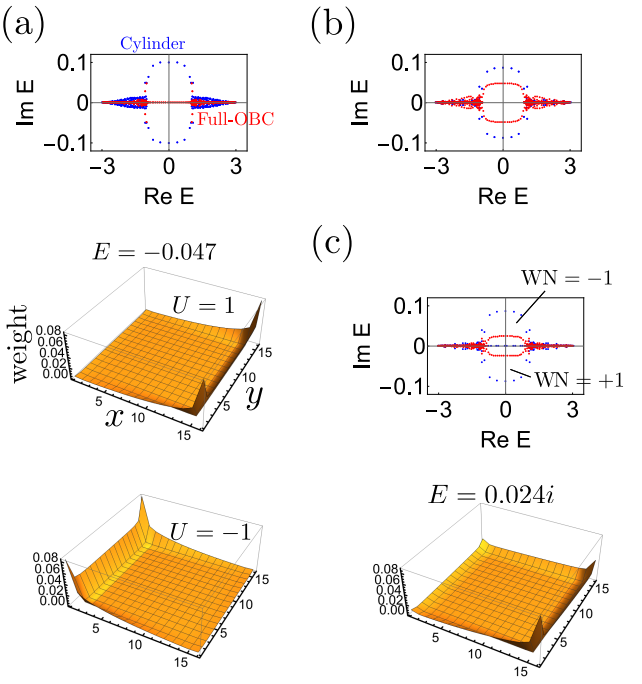

图 2. 参量驱动下玻色手性边缘态中的非厄米趋肤效应。(a) 存在幺正对称性 (11) 时的复谱和趋肤模。(b) 存在对称性破缺项时的复谱。(c) 在 $y = 1$ 处进行单边缘驱动时的复谱和趋肤模。

通过仅对一侧边缘施加参量驱动来诱导，即使不存在该对称性也是如此（$y = 1$）（$\epsilon = 0.05$）[图 2(c)]。这是因为存在两个净谱绕数为 ± 1 的区域。通过调节耗散与 Δ 之间的比值，可以诱导出依赖于边界条件的动力学不稳定性。由于这种方法不依赖于模型的具体细节，因此预计皮肤效应可在广泛的玻色切尔恩绝缘体中观测到。

IV. 具有正交分量各向异性的稳态积累

本节中，我们计算由非平衡格林函数定义的单粒子约化密度矩阵。由此发现，具有正交分量各向异性的显著角落粒子积累会随之出现。

A. 非平衡性质导致的自能

在不存在虚部为正的复能量时，可以定义非平衡稳态。我们利用南部表示中的延迟格林函数，定义依赖于 ω 的有效哈密顿量：

南部表示 [29]:

$$G^R(\omega) = \frac{1}{G_0^{-1} - \Sigma^R_{\mathrm{BdG}}(\omega)} = \frac{1}{\omega\sigma_z - [H_{\mathrm{BdG}} + \Sigma^R_{\mathrm{BdG}}(\omega)]} =: \frac{1}{\omega - H^{(\mathrm{eff})}_{\sigma\mathrm{BdG}}(\omega)}\sigma_z, \tag{16}$$

其中 $\Sigma^R_{\mathrm{BdG}}(\omega)$ 是延迟自能。$\omega\sigma_z$ 项代表了与费米子情形的差异。在存在耗散时，尽管 σBdG 中的有效哈密顿量不再具有赝厄米性，但它仍满足以下粒子-空穴对称性 [29]:

$$\sigma_x[H^{(\mathrm{eff})}_{\sigma\mathrm{BdG}}(-\omega)]^*\sigma_x = -H^{(\mathrm{eff})}_{\sigma\mathrm{BdG}}(\omega). \tag{17}$$

为保持对称性 (11)，这里我们考虑以下与 ω无关的耗散:

$$\Sigma^R_{\sigma\mathrm{BdG}}(\omega) := \sigma_z\Sigma^R_{\mathrm{BdG}}(\omega) = -i\Gamma\hat{1}\otimes\hat{1}\otimes\hat{1}, \tag{18}$$

其中 $\Gamma \in \mathbb{R}$。这种耗散保留了模型的数学结构，复能量虚部的常数偏移除外。我们关注的是 FOBC 系统，其对应的 CBC 系统表现出动力学不稳定性。

请注意，即使在近似条件下，上述耗散 (18) 也无法在热平衡中实现。假设耗散仅存在于正常部分:

$$\Sigma^R_{\sigma\mathrm{BdG}}(\omega) = \begin{pmatrix} \sigma^R(\omega) & 0 \\ 0 & -[\sigma^R(-\omega)]^* \end{pmatrix}. \tag{19}$$

对于热稳定性，$\sigma^R(\omega < 0) = 0$。因此，在固定的 $\omega \neq 0$ 下，热平衡中的自能在粒子或空穴扇区中为零，这表明耗散 (18) 无法实现。在参量驱动下，自能在旋转坐标系中发生偏移:

$$\Sigma^R_{\sigma\mathrm{BdG}}(\omega) = \begin{pmatrix} \sigma^R(\omega + \frac{\Omega}{2}) & 0 \\ 0 & -[\sigma^R(-\omega + \frac{\Omega}{2})]^* \end{pmatrix}. \tag{20}$$

如果实验相关频率位于 $-\Omega/2 < \omega < \Omega/2$，则自能 (20) 在近似条件下与耗散 (18) 并不矛盾。总之，在玻色 BdG 系统中施加恒定耗散这一近似，只有在非平衡条件下才具有物理意义。例如，参考文献 [50, 51] 讨论了这一点。

B. 稳态积累

为研究稳态性质，我们计算单粒子约化密度矩阵。假设系统玻色子与热浴耦合，且热浴温度远低于系统玻色子的激发能。也就是说，关闭参量泵浦时，系统玻色子不会被激发。在这一

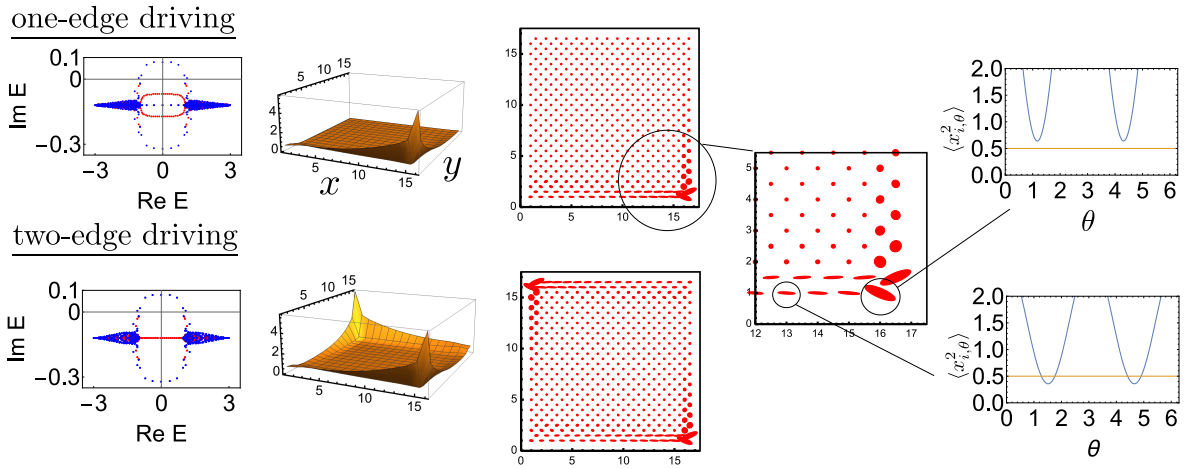

图 3. 非厄米趋肤效应导致的稳态积累。左图：有效哈密顿量的本征谱和 a 玻色子的稳态积累。右图：正交分量涨落的空间分布，$\langle x^2_{i,\ \theta}\rangle$。每个元胞中的子晶格位置标为 (0,0) 和 (1/2,1/2)。对于单边驱动和双边驱动，参数均设为 $L_x = L_y = 16$、$\Delta = 0.2$、$\epsilon = 0$ 和 $\Gamma = 0.12$。

假设下，旋转坐标系中的约化密度矩阵为 [50, 51]:

$$\rho = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{a}\rangle & \langle \boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{a}^\dagger\rangle \\ \langle \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\rangle & \langle \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^\dagger\rangle \end{pmatrix} = i\int \frac{d\omega}{2\pi} G^<(\omega) = \int \frac{d\omega}{2\pi} G^{\mathrm{R}}(\omega) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\Gamma \end{pmatrix} G^{\mathrm{A}}(\omega), \quad (21)$$

其中，$G^<(\omega)$ 是非平衡态下的小于格林函数，2×2 矩阵作用于南部空间。利用公式 (21)，我们计算了单边驱动和双边驱动下的稳态物理量。

首先，我们计算 ρ 的粒子扇区，发现 a玻色子在角落处高度局域地积累（图 3）。这些结果源于有效哈密顿量 (16) 的强非正规性所导致的瞬态放大，其特征由 $[H, H^\dagger]$的非对易程度决定。在强非正规性下，众所周知，线性系统的瞬态动力学由具有较大虚部 [52]的 ϵ-伪谱支配。在我们的情形中，玻色子波包在两侧边缘中的一侧被放大，而在另一侧被阻尼。粗略地说，在表现出皮肤效应的系统中，当 ϵ较小时，伪谱是复平面 [5]中由 PBC 曲线和 OBC 曲线围成的二维区域。对于费米子，PBC 曲线不可能具有正虚部，因此不会发生瞬态放大。因此，与玻色玻戈留波夫情形相比，皮肤效应对输运的影响仍然有限。关于玻色子与费米子之间差异的上述考量，也与林德布拉德系统中的结果 [53]一致。

接下来，我们考虑正交分量算符 $x_\theta = (e^{i\theta}a + e^{-i\theta}a^\dagger)/\sqrt{2}$，它在玻色 BdG 系统 [32, 50, 51] 中尤为重要。$\theta = 0$ 和 $3\pi/2$ 两种情况分别对应于谐振子系统中的位置和动量算符 x 和 p，以及磁振子系统中的自旋算符 S_x 和 S_y。每个格点 i，$\langle x^2_{i,\theta}\rangle$ 处的正交分量涨落均根据公式（21）计算。在 $(a_i, a_i^\dagger)$ 的真空态下，$\langle x^2_{i,\theta}\rangle = 1/2$，称为标准量子极限。图 3 将稳态的正交分量涨落随大小和角度的变化描绘为椭圆。由于二维体区几乎处于真空态，其正交分量涨落表现为一个圆，其半径由标准量子极限给出。在参数驱动边缘，系统受到皮肤效应的影响，导致粒子数在角点呈指数局域，同时正交分量椭圆发生更显著的形变。值得注意的是，边缘处涨落的最小值低于标准量子极限，这意味着该稳态处于压缩态 [图 3]。另一方面，角点处正交分量椭圆的短轴和长轴半径均大于 1/2[图 3]。尽管如此，正交分量椭圆仍表现出强烈的各向异性，这表明该稳态中的粒子积累体现了玻色 BdG 系统特有的量子本性。

V. 讨论

在结束本文之前，我们讨论几个尚待解决的问题。这类稳态的一个引人注目的特征是，它对连接边界的小微扰十分敏感，而这些微扰可能导致稳态密度矩阵发生剧烈变化 ρ。在无限体积极限下，即使是无穷小的微扰

也可能导致稳态崩溃。在我们的情形中，由带有一个小缺口的环构成的开口环几何结构非常适合观测这种不稳定性。另一个关键问题是玻色子-玻色子相互作用的影响。尽管这类相互作用在光子系统中可以忽略不计，但在磁振子平台等准玻色子系统中却可能发挥重要作用。在通过线性近似涌现定义的准玻色子系统中，高阶非线性项表现为准玻色子之间的相互作用。这些相互作用的存在是否会抑制指数累积，或导致距离依赖的有序态出现，是一个并非显而易见的问题。将相互作用纳入考量的一个具体起点，是考虑式 (16) 中自能的频率依赖性。总之，玻色子趋肤效应的物理机制体现了非平衡动力学、非厄米性、相互作用与量子效应之间引人入胜的相互作用。

致谢

我衷心感谢与 Chen-Hsuan Hsu 及其课题组成员进行的宝贵讨论。本研究得到日本学术振兴会科学研究费助成事业资助编号 JP23K03243。

附录 A：对对称性破缺项的不稳定性

图 4 展示了小微扰下的谱。我们发现，对于足够大的系统和足够小的微扰，谱不会发生显著变化。当系统尺寸固定时，微扰强度超过某个阈值 ϵ 后，谱开始发生突变。类似地，当 ϵ 固定时，随着系统尺寸增大，谱对变化变得更加敏感。这些行为在定性上与一维情形中观察到的现象相同，例如对称性保护的趋肤效应 [9, 49] 和临界趋肤效应 [54]。

另一方面，在保持数值精度的同时增大系统尺寸，比一维情形更困难；在目前的数值计算中，我们无法研究足够大的系统。尽管确切原因尚不清楚，即使存在微扰，FOBC谱与 CBC谱之间仍然存在差异。

[1] N. Hatano 和 D. R. Nelson，非厄米量子力学中的局域化转变，Phys. Rev. Lett. **77**，570（1996）。[2] N. Hatano 和 D. R. Nelson，涡旋钉扎与非厄米量子力学，Phys. Rev. B **56**，8651（1997）。[3] S. Yao 和 Z. Wang，非厄米系统的边缘态与拓扑不变量，Phys. Rev. Lett. **121**，086803（2018）。[4] X. Zhang、T. Zhang、M.-H. Lu 和 Y.-F. Chen，非厄米趋肤效应综述，《物理学进展：X》**7**，2109431（2022）。[5] N. Okuma 和 M. Sato，非厄米拓扑现象：综述，Annual Review of Condensed Matter Physics **14**，83（2023）。[6] R. Lin、T. Tai、L. Li 和 C. H. Lee，拓扑非厄米趋肤效应，《物理学前沿》**18**，53605（2023）。[7] H. Wang、J. Zhong 和 S. Fan，非厄米光子能带绕数与趋肤效应：教程，《光学与光子学进展》**16**，659（2024）。[8] J. T. Gohsrich、A. Banerjee 和 F. K. Kunst，非厄米趋肤效应：一种观点，《欧洲物理快报》**150**，60001（2025）。[9] N. Okuma、K. Kawabata、K. Shiozaki 和 M. Sato，非厄米趋肤效应的拓扑起源，Phys. Rev. Lett.**124**，086801（2020）。[10] K. Zhang、Z. Yang 和 C. Fang，非厄米系统中绕数与趋肤模之间的对应关系，Phys. Rev. Lett. **125**，126402（2020）。[11] Z. Gong、Y. Ashida、K. Kawabata 和 K. Takasan 和 S. Higashikawa，以及 M. Ueda，《拓扑相的非厄米系统，Phys. Rev. X **8**, 031079 (2018).[12] C. H. Lee, and R. Thomale，非厄米系统中趋肤模与拓扑的剖析，Phys. Rev. B **99**, 201103 2019(R) ( ).[13] D. S. Borgnia, and A. J. Kruchkov, and R.-J. Slager，非厄米边界模与拓扑，Phys. Rev. Lett. **124**, 056802 (2020).[14] J. Y. Lee, J. Ahn, H. Zhou, and A. Vishwanath，厄米与非厄米系统间的拓扑对应：反常动力学，Physical review letters **123**, 206404 2019( ).[15] T. Bessho and M. Sato，具有体拓扑的Nielsen–Ninomiya定理：Floquet与非厄米系统中的对偶性，Physical Review Letters **127**, 196404 (2021).[16] K. Kawabata, and K. Shiozaki, and M. Ueda, and M. Sato，非厄米物理中的对称性与拓扑，Phys. Rev. X**9**, 041015 (2019).[17] H. Zhou and J. Y. Lee，具有非厄米对称性的拓扑能带周期表，Physical Review B **99**, 235112 2019( ).[18] N. Okuma and M. Sato，开放系统中的量子反常、非厄米趋肤效应与纠缠熵，Phys. Rev. B **103**, 085428 (2021).[19] D. Nakamura, K. Inaka, N. Okuma, and M. Sato，源自拓扑材料的点隙拓扑相通用平台，Physical Review Letters **131**, 256602 (2023).[20] F. Schindler, K. Gu, B. Lian, and K. Kawabata，厄米体态–非厄米边界对应，PRX Quantum **4**, 030315 (2023).[21] X.-R. Ma, K. Cao, X.-R. Wang, Z. Wei, Q. Du, and S.-P. Kou，非厄米手性趋肤效应，Physical Review Research **6**, 013213 (2024).

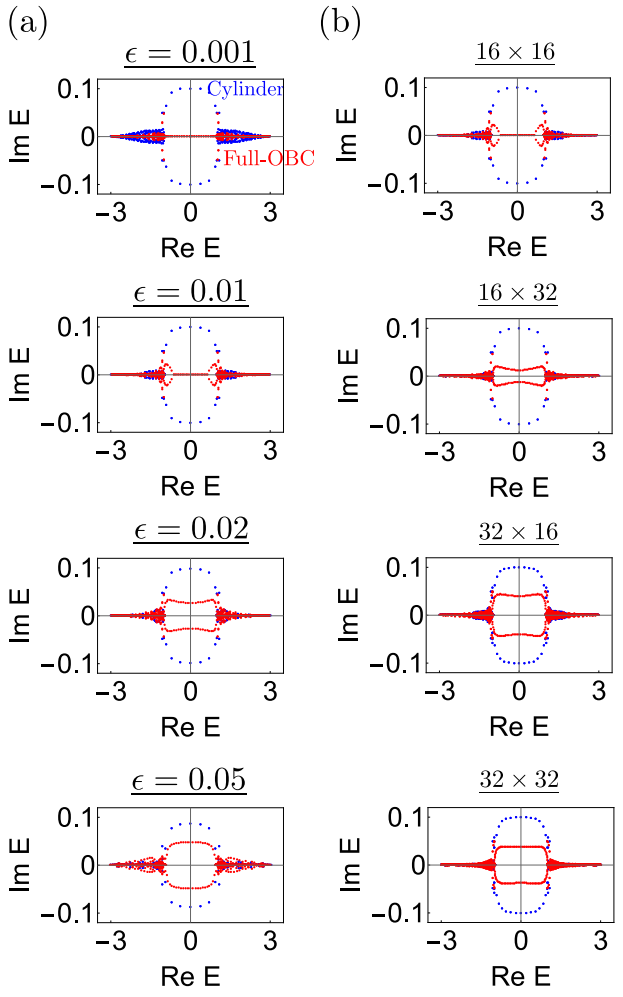

图4. 不同（a）扰动强度（$L_x \times L_y = 16 \times 16$）和（b）系统尺寸（$\epsilon = 0.01$）下的复能谱。

245701 (2021)。[28] K. Yokomizo 和 S. Murakami，玻色 Bogoliubov–de Gennes系统中的非布洛赫能带理论，Physical Review B **103**，165123 (2021)。[29] N. Okuma，玻色格林函数的边界依赖的动力学不稳定性：耗散玻戈留博夫–德热内哈密顿量及其在非厄米趋肤效应中的应用，Physical Review B **105**，224301 (2022)。[30] Q. Wang、C. Zhu、Y. Wang、B. Zhang 和 Y. Chong，利用非厄米趋肤效应放大量子信号，Physical Review B **106**，024301 (2022)。[31] L.-L. Wan 和 X.-Y. L¨u，量子压缩诱导的点隙拓扑和皮肤效应，Physical Review Letters **130**，203605 (2023)。[32] ´A. G´omez-Le´on、T. Ramos、A. Gonz´alez-Tudela 和 D. Porras，参量谐振器阵列中的驱动耗散拓扑相，Quantum **7**，1016 (2023)。[33] C. Lv 和 Q. Zhou，玻色子基塔耶夫模型中的隐藏弯曲空间，arXiv 预印本 arXiv:2408.05132 (2024)。[34] T. Ozawa、H. M. Price、A. Amo、N. Goldman、M. Hafezi、L. Lu、M. C. Rechtsman、D. Schuster、J. Simon、O. Zilberberg 和 I. Carusotto，拓扑光子学，Rev. Mod. Phys. **91**，1 (2019)。[35] P. A. McClarty，拓扑磁振子：综述，Annual Review of Condensed Matter Physics **13**，171 (2022)。[36] Y. Liu、X. Chen 和 Y. Xu，拓扑声子学：从基础模型到真实材料，Advanced Functional Materials **30**，1904784 (2020)。[37] N. Bogoliubov，论超流动性理论，J. Phys **11**，23 1947( )。[38] A. Altland 和 B. D. Simons，凝聚态物质场论（剑桥大学出版社，2010）。[39] J. Colpa，二次玻色子哈密顿量的对角化，Physica A：统计力学及其应用 **93**，327 (1978)。

[40] Y. Kawaguchi 和 M. Ueda，《自旋量玻色–爱因斯坦凝聚体》，Physics Reports **520**, 253 (2012)。

[41] A. G. Del Maestro 和 M. J. Gingras，《偶极海森堡型稀土烧绿石中的量子自旋涨落》，Journal of Physics: Condensed Matter**16**, 3339 (2004)。

[42] R. Shindou、R. Matsumoto、S. Murakami 和 J.-i. Ohe，《磁振子晶体中的拓扑手性磁振子边缘模》，Phys. Rev. B **87**, 174427 (2013)。

[22] A. McDonald, T. Pereg-Barnea, and A. Clerk，玻色基塔耶夫-马约拉纳链中的相位依赖手性输运与有效非厄米动力学，Physical Review X **8**, 041031 (2018). [23] A. McDonald and A. A. Clerk，利用非厄米晶格动力学实现指数增强的量子传感，Nature communications**11**, 5382 (2020). [24] J. J. Slim, C. C. Wanjura, M. Brunelli, J. Del Pino, A. Nunnenkamp, and E. Verhagen，玻色基塔耶夫链的光机实现，Nature **627**, 767 (2024). [25] J. H. Busnaina, Z. Shi, A. McDonald, D. Dubyna, I. Nsanzineza, J. S. Hung, C. S. Chang, A. A. Clerk, and C. M. Wilson，玻色基塔耶夫链的量子模拟，Nature Communications **15**, 3065 (2024).[26] Flynn, Vincent P and Cobanera, Emilio and Viola, Lorenza，解构二次玻色哈密顿量中的有效非厄米动力学，New Journal of Physics **22**, 083004 2020( ). [27] Flynn, Vincent P. and Cobanera, Emilio and Viola, Lorenza，耗散诱导拓扑：亚稳态二次马尔可夫动力学中的马约拉纳玻色子，Phys. Rev. Lett. **127**,

[43] S. Lieu，《非厄米模型的拓扑对称性类别及其与玻色玻戈留博夫–德热讷方程的联系》，Phys. Rev. B**98**, 115135 (2018)。

[44] C. C. Gerry 和 P. L. Knight，《量子光学导论》（剑桥大学出版社，2023）。

[45] V. Peano、M. Houde、C. Brendel、F. Marquardt 和 A. A. Clerk，《光压缩诱导的拓扑相变与手性非弹性输运》，Nature Communications **7**，10779（2016）。

[46] Y.-L. Wu、B. A. Bernevig 和 N. Regnault，《分数量子陈绝缘体的分类》，Phys. Rev. B**85**，075116（2012）。

[47] Y. Hatsugai，《整数霍尔效应中的陈数与边缘态》，Physical Review Letters **71**，3697（1993）。

[48] D. Malz、J. Knolle 和 A. Nunnenkamp，《拓扑磁振子放大》，Nature Communications**10**，3937（2019）。

[49] N. Okuma 和 M. Sato，《无穷小不稳定性驱动的拓扑相变：非厄米自旋电子学中的马约拉纳费米子》，Phys. Rev. Lett.**123**，097701

（2019）。[50] E. G. D. Torre、S. Diehl、M. D. Lukin、S. Sachdev 和 P. Strack，《量子光学中非平衡相变的 Keldysh 方法：超越光学腔中的 Dicke 模型》，《物理评论 A：原子、分子与光学物理》**87**，023831（2013）。[51] L. M. Sieberer、M. Buchhold 和 S. Diehl，《驱动开放量子系统的 Keldysh 场论》，Reports on Physics进展 **79**, 096001 (2016). [52] L. N. Trefethen 和 M. Embree，《谱与伪谱》（普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2005）。[53] A. McDonald、R. Hanai 和 A. A. Clerk，量子非厄米晶格模型的非平衡稳态，Physical Review B **105**, 064302 (2022). [54] L. Li、C. H. Lee、S. Mu 和 J. Gong，临界非厄米趋肤效应，Nature Communications **11**, 5491 (2020)。