arXiv:2602.01628v1 [math-ph] 2 Feb 2026

单光子、双光子量子 Rabi 模型及非交换调和振子的谱 ζ 函数特殊值

中浜亮介*†日本电报电话株式会社基础数学研究所、通信科学实验室，日本电报电话株式会社，东京都武藏野市绿町*3-9-11*，邮编*180-8585*，日本

2026年2月3日

摘要

我们给出了单光子量子Rabi模型（1pQRM）、双光子量子 Rabi 模型（2pQRM）和非交换调和振子（NCHO）的哈密顿量 H 对应的 Hurwitz 型谱 ζ 函数 $\zeta(\mathrm{H}; n,\ \lambda)$ 在正整数 n 处的特殊值的显式表达式。随后，1pQRM 谱 ζ 函数的第一项给出了阿佩里工作之后用于证明 ζ(2)无理性的 Beukers积分的一种推广。文中还讨论了 2pQRM 谱 ζ 函数第一项的类似表达式。

关键词：量子Rabi模型；非交换谐振子；谱 ζ 函数；Beukers 积分；Ap´ery 类数。

2020年数学主题分类：81Q10；11M41。

1 引言

量子 Rabi 模型 (QRM) 是一种光与物质相互作用模型，由 Jaynes和Cummings [18], 提出，其哈密顿量由以下形式自伴算子给出：$L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$,

$$\mathrm{H}_{1\mathrm{QRM}}^{(g,\Delta,0)} := \mathbf{I}\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a} + g\boldsymbol{\sigma}_1(\mathrm{a}+\mathrm{a}^\dagger) + \Delta\boldsymbol{\sigma}_3,$$

其中 g，$\Delta \in \mathbb{R}$，$\mathrm{a}^\dagger$，a 是作用于 $L^2(\mathbb{R})$ 上的产生与湮灭算符，而 $\boldsymbol{\sigma}_1$，$\boldsymbol{\sigma}_3 \in M(2,\ \mathbb{C})$ 是泡利矩阵。该模型描述了电磁模式与两能级系统之间的线性交互作用。Braak[6, 7] 利用该模型的 $\mathbb{Z}_2$-对称性证明了其可积性。作为一种推广，非对称量子 Rabi 模型

$$\mathrm{H}_{1\mathrm{QRM}}^{(g,\Delta,\varepsilon)} := \mathbf{I}\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a} + g\boldsymbol{\sigma}_1(\mathrm{a}+\mathrm{a}^\dagger) + \Delta\boldsymbol{\sigma}_3 + \varepsilon\boldsymbol{\sigma}_1,$$

其中 $\varepsilon \in \mathbb{R}$ 会破坏原始 QRM 的 $\mathbb{Z}_2$ 对称性，也已得到充分研究（例如参见 [6, 7, 20, 45]）。类似地，双光子量子 *Rabi* 模型 （2pQRM）

$$\mathrm{H}_{2\mathrm{QRM}}^{(g,\Delta,0)} := \mathbf{I}\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a} + g\boldsymbol{\sigma}_1(\mathrm{a}^2+(\mathrm{a}^\dagger)^2) + \Delta\boldsymbol{\sigma}_3$$

*本研究获得了日本 JST CREST 项目（项目编号：JPMJCR2113）的支持。
†电子邮箱：ryosuke.nakahama@ntt.com

描述了电磁模与两能级系统之间的非线性相互作用。对于所有 $g \in \mathbb{R}$，单光子量子 Rabi 模型（1pQRM）以及在 $|g| < 1/2$ 条件下的 2pQRM 都只有离散谱，但当 2pQRM 满足 $|g| \geq 1/2$ 时则并非如此。事实上，在 $g = 1/2$ 情况下，2pQRM 可能同时包含离散谱和连续谱（例如参见 [6, 7, 8, 9, 23, 46]）。我们还可以考虑 2pQRM 的非对称推广，

$$\mathrm{H}_{\mathrm{2QRM}}^{(g,\Delta,\varepsilon)} := \mathbf{I}\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a} + g\boldsymbol{\sigma}_1(\mathrm{a}^2 + (\mathrm{a}^\dagger)^2) + \Delta\boldsymbol{\sigma}_3 + \varepsilon\boldsymbol{\sigma}_1.$$

作为一个纯数学模型，出于数论方面的兴趣以及对（伪）微分算子系统的下界估计，Parmeggiani 和 Wakayama [34, 35, 36]引入了非交换调和振子（NCHO），其哈密顿算子作用于 $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$,

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_{\mathrm{NCHO}}^{(\alpha,\beta,0)} &:= \begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2\right) + \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\left(x\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\right)\\ &= \begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}\left(\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}(\mathrm{a}^2 - (\mathrm{a}^\dagger)^2),\end{aligned}$$

其中 α，$\beta \in \mathbb{R}$。如果 $\alpha\beta > 1$，则其具有离散谱 [32, 33],；在本文中，我们始终假设 $\alpha\beta > 1$。NCHO 的谱可以通过谱 ζ 函数（参见 [16, 21, 22, 31]及其中的参考文献）、全纯微分方程（例如参见 [29, 30, 39, 44]）以及伪微分算子（例如参见 [24, 25]）从数学上进行研究。NCHO 的一个推广，即平移非交换谐振子

$$\mathrm{H}_{\mathrm{NCHO}}^{(\alpha,\beta,\eta)} = \begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}\left(\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}(\mathrm{a}^2 - (\mathrm{a}^\dagger)^2) + 2\eta\sqrt{\alpha\beta - 1}\sqrt{-1}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

其中 $\eta \in \mathbb{R}$ 也由 [39]考虑。通过 [26], ，NCHO 的特征值问题等价于 2pQRM 的特征值问题，尽管这两个模型的起源不同。此外，同样通过 [26], ，对 2pQRM 进行变形，在取适当极限时会收敛到 1pQRM。这是对 [39, 44]中给出的合流过程的进一步完善。

在本文中，我们将 $\mathrm{H}_1^{(g,\Delta,\varepsilon)}{}_{\mathrm{QRM}}$、$\mathrm{H}_2^{(g,\Delta,\varepsilon)}{}_{\mathrm{QRM}}$ 重整化为

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{1QRM}}^{(g,\Delta,\varepsilon)} &:= \mathrm{H}_{\mathrm{1QRM}}^{(g,\Delta,\varepsilon)} + g^2\mathbf{I} = \mathbf{I}(\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a} + g^2) + g\boldsymbol{\sigma}_1(\mathrm{a} + \mathrm{a}^\dagger) + \Delta\boldsymbol{\sigma}_3 + \varepsilon\boldsymbol{\sigma}_1,\\ \widetilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{2QRM}}^{(g,\Delta,\varepsilon)} &:= \cosh(2g)\left(\mathrm{H}_{\mathrm{2QRM}}^{(\tanh(2g)/2,\Delta\,\mathrm{sech}(2g),\varepsilon\,\mathrm{sech}(2g))} + \frac{1}{2}\mathbf{I}\right)\\ &= \cosh(2g)\mathbf{I}\left(\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\sinh(2g)}{2}\boldsymbol{\sigma}_1(\mathrm{a}^2 + (\mathrm{a}^\dagger)^2) + \Delta\boldsymbol{\sigma}_3 + \varepsilon\boldsymbol{\sigma}_1,\end{aligned}$$

其中 g，Δ，$\varepsilon \in \mathbb{R}$，并将 $\mathrm{H}^{(\alpha,\beta,\eta)}{}_{\mathrm{NCHO}}$ 重整化为

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{NCHO}}^{(\alpha,\beta,\eta)} := \frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}}\mathrm{H}_{\mathrm{NCHO}}^{(\alpha,\beta,\eta)}\\ &= \frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}}\\ &\quad\times\left(\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}\left(\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}(\mathrm{a}^2 - (\mathrm{a}^\dagger)^2) + 2\eta\sqrt{\alpha\beta-1}\sqrt{-1}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right),\end{aligned}$$

其中 α，$\beta > 0$, $\alpha\beta > 1$, $\eta \in \mathbb{R}$，以使后续公式更简洁。随后，这些算子都只有离散谱，并利用 $\mathrm{H} = \widetilde{\mathrm{H}}_1^{(g,\Delta,\varepsilon)}{}_{\mathrm{QRM}}\ \widetilde{\mathrm{H}}_2^{(g,\Delta,\varepsilon)}{}_{\mathrm{QRM}}\ \widetilde{\mathrm{H}}^{(\alpha,\beta,\eta)}{}_{\mathrm{NCHO}}$ 的特征值 $\{\mu_j\}$，其

Hurwitz 型谱 ζ 函数定义为

$$\zeta(\mathrm{H};s,\lambda):=\sum_{j}\frac{1}{(\mu_j+\lambda)^s}=\mathrm{Tr}\big((\mathrm{H}+\lambda)^{-s}\big)$$

当 $s,\lambda\in\mathbb{C}$ 收敛时。这类谱 ζ 函数已由例如 [14, 16,21, 22, 31, 37, 40, 42] 研究。本文旨在给出 $\zeta(\mathrm{H};n,\lambda)$ 在 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$ 时的特殊值的显式表达式。为描述主要结果，对于 $g\in\mathbb{R}$, $\lambda,\varepsilon\in\mathbb{C}$，其中 $\lambda\pm\varepsilon\notin-\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，令

$$\begin{aligned}R_m^{\flat}(\lambda;g,\varepsilon)&:=\mathrm{Tr}\big(((\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a}+g(\mathrm{a}+\mathrm{a}^\dagger)+g^2+\varepsilon+\lambda)^{-1}(\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a}-g(\mathrm{a}+\mathrm{a}^\dagger)+g^2-\varepsilon+\lambda)^{-1}\big)^m\big),\\ C^{\flat}(\lambda,\varepsilon)&:=\max_{\delta\in\{\pm\},\ k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}\frac{1}{|k+\lambda+\delta\varepsilon|},\end{aligned}$$

并且对于 $g\in\mathbb{R}$, $\lambda,\varepsilon\in\mathbb{C}$，其中 $\lambda\pm\varepsilon\notin-(\mathbb{Z}_{\geq 0}+\frac{1}{2})$, $m\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，令

$$\begin{aligned}R_m^{+}(\lambda;g,\varepsilon):=\mathrm{Tr}\Bigg(\Bigg(\Bigg(&\cosh(2g)\bigg(\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a}+\frac{1}{2}\bigg)+\frac{\sinh(2g)}{2}(\mathrm{a}^2+(\mathrm{a}^\dagger)^2)+\varepsilon+\lambda\Bigg)^{-1}\\ &\times\Bigg(\cosh(2g)\bigg(\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a}+\frac{1}{2}\bigg)-\frac{\sinh(2g)}{2}(\mathrm{a}^2+(\mathrm{a}^\dagger)^2)-\varepsilon+\lambda\Bigg)^{-1}\Bigg)^m\Bigg),\\ C(\lambda,\varepsilon):=\max_{\delta\in\{\pm\},\ k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}&\frac{1}{\big|k+\lambda+\delta\varepsilon+\frac{1}{2}\big|}.\end{aligned}$$

第 3 节的主要结果如下。

定理 1.1 (推论 3.4)。 *(1)* 设 $g,\Delta,\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{C}$。假设 $\lambda\pm\varepsilon\notin-\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 且 $|\Delta|<C_{\flat}(\lambda,\varepsilon)^{-1}$。那么对于 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$，$(\widetilde{\mathrm{H}}_1^{(g,\Delta,\varepsilon)}$ 量子 Rabi 模型 $+\lambda)^{-n}$ 属于迹类，并且有

$$\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_{1\mathrm{QRM}}^{(g,\Delta,\varepsilon)};n,\lambda\big)=\zeta(n,\lambda+\varepsilon)+\zeta(n,\lambda-\varepsilon)+\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Delta^{2m}}{m}\frac{\partial^n R_m^{\flat}}{\partial\lambda^n}(\lambda;g,\varepsilon).$$

(2) 设 g、Δ、$\varepsilon\in\mathbb{R}$、$\lambda\in\mathbb{C}$。我们假设 $\lambda\pm\varepsilon\notin-(\mathbb{Z}_{\geq 0}+\frac{1}{2})$ 与 $|\Delta|<C(\lambda,\varepsilon)^{-1}$。则对 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$，$(\widetilde{\mathrm{H}}_2^{(g,\Delta,\varepsilon)}\,\mathrm{QRM}+\lambda)^{-n}$ 属于迹类，并且我们有

$$\begin{aligned}&\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_{2\mathrm{QRM}}^{(g,\Delta,\varepsilon)};n,\lambda\big)\\ &=\zeta\bigg(n,\lambda+\varepsilon+\frac{1}{2}\bigg)+\zeta\bigg(n,\lambda-\varepsilon+\frac{1}{2}\bigg)+\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Delta^{2m}}{m}\frac{\partial^n R_m^{+}}{\partial\lambda^n}(\lambda;g,\varepsilon).\end{aligned}$$

(3) 设 α、β、$\eta\in\mathbb{R}$、$\lambda\in\mathbb{C}$。我们假设 $\alpha\beta>1$、$\lambda\pm 2\eta\notin-(\mathbb{Z}_{\geq 0}+\frac{1}{2})$ 与 $\big|\lambda\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\big|C(\lambda,2\eta)<1$。则对 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$，$(\widetilde{\mathrm{H}}^{(\alpha,\beta,\eta)}\,\mathrm{NCHO}+\lambda)^{-n}$ 属于迹类，并且我们有

$$\begin{aligned}\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{NCHO}}^{(\alpha,\beta,\eta)};n,\lambda\big)&=\zeta\bigg(n,\lambda+2\eta+\frac{1}{2}\bigg)+\zeta\bigg(n,\lambda-2\eta+\frac{1}{2}\bigg)\\ &\quad+\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\bigg(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\bigg)^{2m}\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\lambda^{2m}R_m^{+}\bigg(\lambda;\frac{1}{2}\operatorname{artanh}\bigg(\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\bigg),2\eta\bigg).\end{aligned}$$

这里，$\zeta(s,\lambda):=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)^{-s}$ 是Hurwitz zeta函数。接下来，在第4节中，我们利用李半群理论求出 $R_m^{\flat}(\lambda;\,g,\varepsilon)$、$R_m^{+}(\lambda;\,g,\varepsilon)$的积分表达式。

定理 1.2. *(1)*（定理 *4.1 (1)*）设 $g\in\mathbb{R}$、 λ、 $\varepsilon\in\mathbb{C}$、 $m\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$。若实部 $\lambda-|$实部 $\varepsilon|>0$，则我们有

$$R_m^{\flat}(\lambda;g,\varepsilon)=\int_{[0,1]^{2m}}\exp\biggl(-4g^2\frac{\Phi_m(u_1,\dots,u_{2m})}{1-\prod_{j=1}^{2m}u_j}\biggr)\frac{\prod_{j=1}^{2m}u_j^{\lambda-(-1)^j\varepsilon-1}}{1-\prod_{j=1}^{2m}u_j}\prod_{j=1}^{2m}\mathrm{d}u_j,$$

其中

$$\Phi_m(u_1,\dots,u_{2m}):=m\biggl(1+\prod_{j=1}^{2m}u_j\biggr)+\sum_{l=1}^{2m-1}(-1)^l\sum_{k=1}^{2m}\prod_{j=k}^{k+l-1}u_j,$$

其中 $u_{2m+j}:=u_j$ 对于 $j=1,\dots,2m$。

(2)（推论 *4.4*）设 $g\in\mathbb{R}$, $\lambda,\varepsilon\in\mathbb{C}$, $m\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$。若 实部 $\lambda-|$实部 $\varepsilon|+\frac{1}{2}>0$，则有

$$R_m^{+}(\lambda;g,\varepsilon)=\int_{[0,1]^{2m}}\frac{1}{\sqrt{\Psi_m^g(u_1,\dots,u_{2m})-2}}\prod_{j=1}^{2m}u_j^{\lambda-(-1)^j\varepsilon-1}\,\mathrm{d}u_j,$$

其中

$$\Psi_m^g(u_1,\dots,u_{2m}):=\operatorname{tr}\biggl(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq 2m}}\biggl(\begin{bmatrix}\cosh(2g)&(-1)^j\sinh(2g)\\(-1)^j\sinh(2g)&\cosh(2g)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_j^{-1}&0\\0&u_j\end{bmatrix}\biggr)\biggr).$$

这里， $\prod_{1\leq j\leq 2m}^{\rightarrow}A_j:=A_1A_2\cdots A_{2m}$ 对于非交换元素 A_j。由这些定理，我们立即得到以下结果。

推论 1.3。*(1)* 设 $g,\Delta,\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{C}$。假设 实部 $\lambda-|\varepsilon|>0$ 且 $|\Delta|<|\lambda-|\varepsilon||$。那么对于 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$，有

$$\begin{aligned}\zeta\bigl(\widetilde{\mathrm{H}}_{1\mathrm{QRM}}^{(g,\Delta,\varepsilon)};n,\lambda\bigr)&=\zeta(n,\lambda+\varepsilon)+\zeta(n,\lambda-\varepsilon)+\frac{1}{\Gamma(n)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Delta^{2m}}{m}\\&\quad\times\int_{[0,1]^{2m}}\exp\biggl(-4g^2\frac{\Phi_m(u_1,\dots,u_{2m})}{1-\prod_{j=1}^{2m}u_j}\biggr)\frac{\bigl(-\log\prod_{j=1}^{2m}u_j\bigr)^n}{1-\prod_{j=1}^{2m}u_j}\prod_{j=1}^{2m}u_j^{\lambda-(-1)^j\varepsilon-1}\,\mathrm{d}u_j.\end{aligned}$$

(2) 令 g、 Δ、 $\varepsilon\in\mathbb{R}$、 $\lambda\in\mathbb{C}$。假设 实部 $\lambda-|\varepsilon|+\frac{1}{2}>0$ 且 $|\Delta|<\bigl|\lambda-|\varepsilon|+\frac{1}{2}\bigr|$。那么对于 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$，有

$$\begin{aligned}\zeta\bigl(\widetilde{\mathrm{H}}_{2\mathrm{QRM}}^{(g,\Delta,\varepsilon)};n,\lambda\bigr)&=\zeta\biggl(n,\lambda+\varepsilon+\frac{1}{2}\biggr)+\zeta\biggl(n,\lambda-\varepsilon+\frac{1}{2}\biggr)+\frac{1}{\Gamma(n)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Delta^{2m}}{m}\\&\quad\times\int_{[0,1]^{2m}}\frac{1}{\sqrt{\Psi_m^g(u_1,\dots,u_{2m})-2}}\biggl(-\log\prod_{j=1}^{2m}u_j\biggr)^n\prod_{j=1}^{2m}u_j^{\lambda-(-1)^j\varepsilon-1}\,\mathrm{d}u_j.\end{aligned}$$

这些定理细化了 Kimoto–Wakayama [22] 关于 NCHO 谱 ζ 函数的结果。我们也可以利用 Reyes-Bustos–Wakayama [37, 38, 40], 给出的热核计算 1pQRM 的谱 ζ 函数；此外，验证我们得到的特殊值与利用 1pQRM 热核计算出的特殊值是否一致，也是值得研究的。

特别是，$\zeta\big(\widetilde{\mathbf{H}}_1^{(g,\Delta,\varepsilon)}\,\mathrm{QRM};\,n,\lambda\big)$ 的第一项由相对于λ 的微分给出

$$\begin{aligned}R_1^\flat(\lambda;g,\varepsilon)&=\int_{[0,1]^2}\exp\!\left(-4g^2\frac{(1-u)(1-v)}{1-uv}\right)\frac{u^{\lambda+\varepsilon-1}v^{\lambda-\varepsilon-1}}{1-uv}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4g^2)^n}{n!}\int_{[0,1]^2}\frac{(1-u)^n(1-v)^n}{(1-uv)^{n+1}}u^{\lambda+\varepsilon-1}v^{\lambda-\varepsilon-1}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

因此，这个和式中的每一项都被视为 Beukers积分 的一种推广 [3],

$$(-1)^n\int_{[0,1]^2}\frac{(1-u)^n(1-v)^nu^nv^n}{(1-uv)^{n+1}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=A_n\zeta(2)-B_n,\tag{1.1}$$

它被用于证明 $\zeta(2)$的无理性，从而阐明了 Ap´ery 的工作 [2, 43]。Wakayama 也通过 [4, 5]的生成函数 $\sum_{n=0}^{\infty}A_nt^n$ 的模性研究了这项工作 $\{A_n\}$。本文将在第 5 节中，为一般的 λ，ε，寻求 $R_1^\flat(\lambda;\,g,\,\varepsilon)$ 各项的类似于（ 1.1 ）的表达式。

类似地，$\zeta\big(\widetilde{\mathbf{H}}_2^{(g,\Delta,\varepsilon)}\,\mathrm{QRM};\,n,\,\lambda\big)$ 的第一项可表示为对 λ求微分:

$$\begin{aligned}R_1^+(\lambda;g,\varepsilon)&=\operatorname{sech}(2g)\int_{[0,1]^2}\frac{u^{\lambda+\varepsilon-\frac12}v^{\lambda-\varepsilon-\frac12}}{\sqrt{(1-uv)^2-\tanh^2(2g)(u-v)^2}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\operatorname{sech}(2g)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac12\right)_n}{n!}\tanh^{2n}(2g)\int_{[0,1]^2}\frac{(u-v)^{2n}}{(1-uv)^{2n+1}}u^{\lambda+\varepsilon-\frac12}v^{\lambda-\varepsilon-\frac12}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\end{aligned}$$

其中 $\left(\frac12\right)_n:=\frac12\cdot\frac32\cdots\left(n-\frac12\right)$。同样，这个和式中的每一项都被视为 Beukers积分 的类似物（按 Kimoto–Wakayama [22]的说法，即“Ap´ery 类数”）。Wakayama 研究了 $\lambda=\varepsilon=0$的模性 [21]，而 [22] 研究了 $\varepsilon=0$的模性。本文将在第 6 节中，为一般的 λ, ε，寻求 $R_1^+(\lambda;\,g,\,\varepsilon)$各项的类似于（1.1）的表达式。

哈密顿量 $\widetilde{\mathbf{H}}_1^{(g,\Delta,\varepsilon)}\,\mathrm{QRM}$ 在 $L^2(\mathbb{R})\otimes\mathbb{C}^2$ 上经由 Bargmann 变换与 $\mathbb{C}$ 上的 $\mathbb{C}^2$ 值微分算子 $\widetilde{\mathbf{H}}_\flat^{(g,\Delta,\varepsilon)}$ 酉等价（见 (2.5)）。类似地，哈密顿量 $\widetilde{\mathbf{H}}_2^{(g,\Delta,\varepsilon)}\,\mathrm{QRM}$ 在 $L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{even}}\otimes\mathbb{C}^2$ 与 $L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{odd}}\otimes\mathbb{C}^2$ 上的限制，经由拉普拉斯变换与 Cayley 变换，分别与单位圆盘 $\mathbf{D}$上取 $\nu=1/2,3/2$ 的 $\mathbb{C}^2$ 值微分算子 $\widetilde{\mathbf{H}}_\nu^{(g,\Delta,\varepsilon)}$ 酉等价（见 (2.6)），从而我们有

$$\begin{aligned}\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_{1\mathrm{QRM}}^{(g,\Delta,\varepsilon)};s,\lambda\big)&=\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_\flat^{(g,\Delta,\varepsilon)};s,\lambda\big),\\\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_{2\mathrm{QRM}}^{(g,\Delta,\varepsilon)};s,\lambda\big)&=\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_{1/2}^{(g,\Delta,\varepsilon)};s,\lambda\big)+\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_{3/2}^{(g,\Delta,\varepsilon)};s,\lambda\big).\end{aligned}$$

算子 $\widetilde{\mathbf{H}}_\nu^{(g,\Delta,\varepsilon)}$对所有 $\nu>0$ 均有定义，并且通过使用膨胀映射

$$\rho_\nu\colon\mathcal{O}(\mathbf{D})\longrightarrow\mathcal{O}(\sqrt{\nu}\mathbf{D}),\qquad f(z)\longmapsto f(w/\sqrt{\nu}),$$

复合算子 $\rho_\nu\circ\widetilde{\mathbf{H}}_\nu^{(g,\Delta,\varepsilon)}\circ\rho_\nu^{-1}$ 在 $\sqrt{\nu}\mathbf{D}$ 上定义了一个取值于 $\mathbb{C}^2$ 的微分算子。于是，将 [26]，视为形式微分算子，可得极限

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac12\big(\rho_\nu\circ\widetilde{\mathrm{H}}_\nu^{(g/\sqrt{\nu},2\Delta,2\varepsilon)}\circ\rho_\nu^{-1}-\nu\big)=\widetilde{\mathrm{H}}_\flat^{(g,\Delta,\varepsilon)}.$$

这细化了 [39, 44] 中给出的合流过程。特别地，预期

$$2^s \lim_{\nu\to\infty} \zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_\nu^{(g/\sqrt{\nu},2\Delta,2\varepsilon)}; s, 2\lambda-\nu\big) = \zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_\flat^{(g,\Delta,\varepsilon)}; s, \lambda\big)$$

成立。在推论 4.3(3)中，当 $s=n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$ 且对于满足推论 1.3(1)中条件的 λ，Δ，ε 时，验证了这一点。

本文仅在 $\nu=1/2,\ 3/2$时讨论 $\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_\nu^{(g,\Delta,\varepsilon)}; n,\ \lambda\big)$ 与“Ap´ery 类数”的联系；这些参数对应于 $L^2(\mathbb{R})\otimes\mathbb{C}^2$ 上的原始 2pQRM。然而，若 $\nu\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 1}$，则利用球谐函数理论，$\widetilde{\mathrm{H}}_\nu^{(g,\Delta,\varepsilon)}$与多变量推广的 2pQRM 的一个限制酉等价（见下文 [27] 和注释 2.4、2.8）。因此，理想情况下，我们希望找到 ν 除 $1/2,\ 3/2$ 之外的其他取值与“Ap´ery 类数”之间的联系。

2 预备知识

2.1 迹类范数、希尔伯特–施密特范数和 Schatten p-范数

本小节回顾迹类范数、希尔伯特–施密特范数和 Schatten p-范数，例如参见 [41]。设 $\mathcal{H}$ 是一个配备内积$\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 和范数$\|v\|:=\sqrt{\langle v,\ v\rangle}$的可分希尔伯特空间。全文中，对于 $\mathcal{H}$上的有界线性算子 A，其算子范数、迹类范数和希尔伯特–施密特范数分别记为$\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{op}}$、$\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{Tr}}$和 $\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{HS}}$。

$$\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{op}} := \sup_{v\in\mathcal{H},\ \|v\|=1} \|\mathrm{A}v\|, \quad \|\mathrm{A}\|_{\mathrm{Tr}} := \sum_k \big\langle \sqrt{\mathrm{A}^\dagger\mathrm{A}}v_k, v_k\big\rangle, \quad \|\mathrm{A}\|_{\mathrm{HS}} := \left(\sum_k \|\mathrm{A}v_k\|^2\right)^{1/2}.$$

这里，$\{v_k\}\subset\mathcal{H}$ 是一个固定的标准正交基。于是，$\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{Tr}}$，$\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{HS}}$ 不依赖于 $\{v_k\}$的选取。若 $\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{Tr}}<\infty$，则其迹记为 Tr(A)。

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) := \sum_k \langle \mathrm{A}v_k, v_k\rangle.$$

同样，这与 $\{v_k\}$ 的选择无关。我们用 tr(A) 表示通常的矩阵迹，并以算子迹 Tr(A) 加以区分。对于两个有界算子 A,B，以下不等式成立。

$$\|\mathrm{AB}\|_{\mathrm{Tr}} \leq \|\mathrm{A}\|_{\mathrm{Tr}}\|\mathrm{B}\|_{\mathrm{op}}, \qquad \|\mathrm{AB}\|_{\mathrm{Tr}} \leq \|\mathrm{A}\|_{\mathrm{op}}\|\mathrm{B}\|_{\mathrm{Tr}}, \qquad \|\mathrm{AB}\|_{\mathrm{Tr}} \leq \|\mathrm{A}\|_{\mathrm{HS}}\|\mathrm{B}\|_{\mathrm{HS}}.$$

更一般地，对于 $1\leq p\leq\infty$，令 $\|\mathrm{A}\|_p$ 表示 Schatten p-范数，

$$\|\mathrm{A}\|_p := \big(\mathrm{Tr}((\mathrm{A}^\dagger\mathrm{A})^{p/2})\big)^{1/p},$$

因此 $\|\mathrm{A}\|_1=\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{Tr}}$、$\|\mathrm{A}\|_2=\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{HS}}$、$\|\mathrm{A}\|_\infty=\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{op}}$ 成立。当 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$ 时，我们有 Hölder 不等式，

$$\|\mathrm{AB}\|_r \leq \|\mathrm{A}\|_p\|\mathrm{B}\|_q$$

（例如，参见 [10, 推论 4.4], [11, 定理 4.2]），并且递归地，当 $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_n}=1$ 时，我们有

$$\|\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n\|_{\mathrm{Tr}} \leq \|\mathrm{A}_1\|_{p_1}\|\mathrm{A}_2\|_{p_2}\cdots\|\mathrm{A}_n\|_{p_n}. \tag{2.1}$$

接下来，假设 A 是定义在 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子，其定义域稠密 $\{\mu_j\}$，且仅有离散谱 $\{\mu_j\}$，没有聚点。那么，对于 $-$A 的预解式 $\lambda \in \mathbb{C}$ 以及 $s \in \mathbb{C}$，A 的 Hurwitz 型谱 ζ 函数定义为

$$\zeta(\mathrm{A}; s, \lambda) := \sum_j \frac{1}{(\mu_j + \lambda)^s} = \mathrm{Tr}\big((\mathrm{A} + \lambda)^{-s}\big)$$

如果它收敛。特别地，若对某个 $s_0 \in \mathbb{R}$，$(\mathrm{A} + \lambda)^{-s_0}$ 属于迹类，则 $\zeta(\mathrm{A}; s, \lambda)$在实部 $s \geq s_0$处收敛。其对实部 $s < s_0$ 的解析延拓也记为 $\zeta(\mathrm{A};\ s, \lambda)$。

2.2 作用于Fock 空间的半群

我们回顾*Fock* 空间，例如来自 [13, 第1.6],节

$$\mathcal{H}_\flat(\mathbb{C}) := \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \mid \|f\|_\flat^2 := \langle f, f\rangle_\flat < \infty\},$$

由内积定义

$$\langle f, g\rangle_\flat := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} f(w)\overline{g(w)}e^{-|w|^2}\,\mathrm{d}w \qquad (f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})).$$

则 $\mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})$经由*Bergmann* 变换酉同构于 $L^2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{B}\colon L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{H}_\flat(\mathbb{C}), \qquad (\mathcal{B}f)(w) := \pi^{-1/4}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-(x^2+w^2)/2+\sqrt{2}xw}\,\mathrm{d}x,$$

以及 $L^2(\mathbb{R})$上的湮灭算子与产生算子，

$$\mathrm{a} := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right), \qquad \mathrm{a}^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$$

满足

$$(\mathcal{B}\mathrm{a}f)(w) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}(\mathcal{B}f)(w), \qquad (\mathcal{B}\mathrm{a}^\dagger f)(w) = w(\mathcal{B}f)(w).$$

接下来，令 $G_\flat^{\mathbb{C}}$ 和 $\mathfrak{g}_\flat^{\mathbb{C}}$ 分别为如下定义的复李群及其李代数:

$$G_\flat^{\mathbb{C}} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} a, b, d \in \mathbb{C}, \\ c \in \mathbb{C}^\times \end{matrix} \right\}, \qquad \mathfrak{g}_\flat^{\mathbb{C}} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}.$$

$G_\flat^{\mathbb{C}}$ 是 $\left\{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]\right\} \simeq \mathbb{C}^\times$ 与海森堡群 $\left\{\left[\begin{smallmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]\right\}$ 的半直积。接下来，我们在 $G_\flat^{\mathbb{C}}$ 和 $\mathfrak{g}_\flat^{\mathbb{C}}$ 上定义对合反自同构 $\ddagger$:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\ddagger := \begin{bmatrix} 1 & -\overline{d} & \overline{b} \\ 0 & \overline{c} & -\overline{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\ddagger := \begin{bmatrix} 0 & -\overline{d} & \overline{b} \\ 0 & \overline{c} & -\overline{a} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

并令

$$G_\flat := \{\gamma \in G_\flat^{\mathbb{C}} \mid \gamma^\ddagger = \gamma^{-1}\}, \qquad \mathfrak{g}_\flat := \{\gamma \in \mathfrak{g}_\flat^{\mathbb{C}} \mid \gamma^\ddagger = -\gamma\}.$$

那么， $G_\flat^{\mathbb{C}}$和 $\mathfrak{g}_\flat^{\mathbb{C}}$作用于 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数空间 $\mathcal{O}(\mathbb{C})$，其作用方式为

$$\left(\tau_\flat\left(\begin{bmatrix}1 & a & b\\ 0 & c & d\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)f\right)(w) := e^{dw-b}f(cw-a),$$

$$\left(\mathrm{d}\tau_\flat\left(\begin{bmatrix}0 & a & b\\ 0 & c & d\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)f\right)(w) := \left[-a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} - b + cw\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} + dw\right]f(w),$$

并且 $G_\flat$ 在 $\mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})$ 上酉作用，也就是说，对于满足 $a\in\mathbb{C}$、$b\in\mathbb{R}$、$|c|=1$ 的 $\gamma = \begin{bmatrix}1 & a & |a|^2/2+\sqrt{-1}b\\ 0 & c & ac\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \in G_\flat$，我们有

$$\begin{aligned}\|\tau_\flat(\gamma)f\|_\flat^2 &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\left|e^{\overline{a}cw-(|a|^2/2+\sqrt{-1}b)}f(cw-a)\right|^2 e^{-|w|^2}\,\mathrm{d}w\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}|f(cw-a)|^2e^{-|cw-a|^2}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}|f(w)|^2e^{-|w|^2}\,\mathrm{d}w = \|f\|_\flat^2.\end{aligned}$$

此外，作为 $\mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})$ 上的无界算子，对于所有 $\gamma\in\mathfrak{g}_\flat^{\mathbb{C}}$，均有 $\mathrm{d}\tau_\flat(\gamma)^\dagger = \mathrm{d}\tau_\flat(\gamma^\ddagger)$。

接下来，令 $\Gamma_\flat^\circ\subset G_\flat^{\mathbb{C}}$ 为如下给出的半群

$$\Gamma_\flat^\circ := \left\{\gamma = \begin{bmatrix}1 & a & b\\ 0 & c & d\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\in G_\flat^{\mathbb{C}} \;\middle|\; |\det(\gamma)| = |c| < 1\right\}.$$

则有如下结论。

引理 2.1. 对于 $\gamma\in\Gamma_\flat^\circ$，我们有 $\tau_\flat(\gamma)(\mathcal{H}_\flat(\mathbb{C}))\subset\mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})$；并且作为 $\mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})$ 上的算子，我们有 $\tau_\flat(\gamma)^\dagger = \tau_\flat(\gamma^\ddagger)$。

证明。对于 $r>0$，令

$$\mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})(r) := \left\{f\in\mathcal{O}(\mathbb{C}) \;\middle|\; \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}f(w)\overline{g(w)}e^{-|w|^2/r^2}\,\mathrm{d}w<\infty\right\},$$

$$\Gamma_\flat^\circ(r) := \left\{\gamma = \begin{bmatrix}1 & a & b\\ 0 & c & d\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\in G_\flat^{\mathbb{C}} \;\middle|\; |\det(\gamma)| = |c| < r\right\},$$

使得 $\mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})(1) = \mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})$，$\Gamma_\flat^\circ(1) = \Gamma_\flat^\circ$。那么对于 $r>0$，$f\in\mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})(r)$，$\gamma = \begin{bmatrix}1 & a & b\\ 0 & c & d\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\in\Gamma_\flat^\circ(r)$，我们有

$$\begin{aligned}&\|\tau_\flat(\gamma)f\|_\flat^2\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\left|e^{dw-b}f(cw-a)\right|^2e^{-|w|^2}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{|c|^2\pi}\int_{\mathbb{C}}\left|e^{d(w+a)/c-b}f(w)\right|^2e^{-|w+a|^2/|c|^2}\,\mathrm{d}w\\ &\le \frac{1}{|c|^2}\max_{w\in\mathbb{C}}\exp\left(2\,\mathrm{Re}\left(\frac{d(w+a)}{c}-b\right)-\left(\frac{1}{|c|^2}-\frac{1}{r^2}\right)|w|^2-2\frac{\mathrm{Re}\,w\overline{a}}{|c|^2}-\frac{|a|^2}{|c|^2}\right)\\ &\quad\times\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}|f(w)|^2e^{-|w|^2/r^2}\,\mathrm{d}w<\infty,\end{aligned}$$

因此 $\tau_\flat(\Gamma_\flat^\circ(r))(\mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})(r))\subset\mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})$。接下来，由于 $G_\flat$ 在 $\mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})$ 上酉作用，我们有

$$\langle\tau_\flat(\gamma)f,g\rangle_\flat = \langle f,\tau_\flat(\gamma^{-1})g\rangle_\flat = \langle f,\tau_\flat(\gamma^\ddagger)g\rangle_\flat \qquad (f,g\in\mathcal{H}_\flat(\mathbb{C}),\ \gamma\in G_\flat),$$

并且对于 $r>1$，由于 $\mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})(r) \subset \mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})$ 成立，且 $G_\flat \subset \Gamma_\flat^\circ(r)$ 是全实的，我们有

$$\langle \tau_\flat(\gamma) f, g\rangle_\flat = \langle f, \tau_\flat(\gamma^\ddagger) g\rangle_\flat \qquad (f,g \in \mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})(r),\ \gamma \in \Gamma_\flat^\circ(r)).$$

于是，由于 $\Gamma_\flat^\circ \subset \Gamma_\flat^\circ(r)$和 $\mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})(r)$在 $\mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})$中稠密，我们得到

$$\langle \tau_\flat(\gamma) f, g\rangle_\flat = \langle f, \tau_\flat(\gamma^\ddagger) g\rangle_\flat \qquad (f,g \in \mathcal{H}_\flat(\mathbb{C}),\ \gamma \in \Gamma_\flat^\circ),$$

即， $\tau_\flat(\gamma)^\dagger = \tau_\flat(\gamma^\ddagger)$成立。 □

接下来，我们考虑 $\gamma \in \Gamma_\flat^\circ$时 $\tau_\flat(\gamma)$的迹。

定理2.2. 对于 $\gamma = \left[\begin{smallmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \in \Gamma_\flat^\circ$， $\tau_\flat(\gamma)$ 在 $\mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})$ 上是迹类算子，并且有

$$\mathrm{Tr}(\tau_\flat(\gamma)) = \frac{\exp\left(-\frac{ad+b(1-c)}{1-c}\right)}{1-c}.$$

证明。 首先，我们可以直接验证映射

$$\{\gamma \in G_\flat^{\mathbb{C}} \mid \gamma = \gamma^\ddagger,\ \det(\gamma) > 0\} \longrightarrow \{\gamma \in G_\flat^{\mathbb{C}} \mid \gamma = \gamma^\ddagger,\ \det(\gamma) > 0\}, \qquad \gamma \longmapsto \gamma^2$$

是双射，并令 $\gamma \mapsto \sqrt{\gamma}$ 为其逆映射。于是，由于我们有

$$\det\left(\sqrt{\gamma^\ddagger \gamma}\right) = |\det(\gamma)| \qquad (\gamma \in G_\flat^{\mathbb{C}}),$$

$\gamma \in \Gamma_\flat^\circ$ 成立当且仅当 $\sqrt{\gamma^\ddagger\gamma} \in \overline{\Gamma_\flat^\circ}$成立，并且有

$$\|\tau_\flat(\gamma)\|_{\mathrm{Tr}} = \mathrm{Tr}\left(\sqrt{\tau_\flat(\gamma)^\dagger \tau_\flat(\gamma)}\right) = \mathrm{Tr}\left(\tau_\flat\left(\sqrt{\gamma^\ddagger\gamma}\right)\right).$$

因此，只需计算 $\gamma \in \Gamma_\flat^\circ$的 $\mathrm{Tr}(\tau_\flat(\gamma))$。我们考虑标准正交基$\{f_k\}_{k=0}^\infty \subset \mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})$,

$$f_k(w) := \frac{1}{\sqrt{k!}} w^k \qquad (k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

那么，若我们写作

$$(\tau_\flat(\gamma) f_k)(w) = \sum_{j=0}^\infty a_j f_j(w) = \sum_{j=0}^\infty \frac{a_j}{\sqrt{j!}} w^j,$$

则有

$$\begin{aligned} \langle \tau_\flat(\gamma) f_k, f_k\rangle_\flat = a_k &= \frac{\sqrt{k!}}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{|w|=r} (\tau_\flat(\gamma) f_k)(w) w^{-k-1}\,\mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{|w|=r} e^{dw-b}(cw-a)^k w^{-k-1}\,\mathrm{d}w \end{aligned}$$

对于任意 $r>0$。现在固定 $r > \frac{|a|}{1-|c|}$于是，由于 $|c| = |\det(\gamma)| < 1$，对于 $|w| = r$，我们有

$$\left|\frac{cw-a}{w}\right| \leq \frac{|c||w|+|a|}{|w|} = \frac{r|c|+|a|}{r} < 1,$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(\tau_\flat(\gamma)) &= \sum_{k=0}^{\infty}\langle \tau_\flat(\gamma)f_k, f_k\rangle_\flat = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{|w|=r} e^{dw-b}(cw-a)^k w^{-k-1}\,\mathrm{d}w\\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{|w|=r}\sum_{k=0}^{\infty} e^{dw-b}(cw-a)^k w^{-k-1}\,\mathrm{d}w\\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{|w|=r}\frac{e^{dw-b}}{1-(cw-a)w^{-1}}\frac{\mathrm{d}w}{w} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{|w|=r}\frac{\exp(dw-b)}{(1-c)w+a}\,\mathrm{d}w\\ &= \frac{\exp\big(-d\frac{a}{1-c}-b\big)}{1-c} = \frac{\exp\big(-\frac{ad+b(1-c)}{1-c}\big)}{1-c}.\end{aligned}$$

□

例 2.3. 对于 $g\in\mathbb{R}$，$u\in(0,\,1)$，令

$$X(g) := \begin{bmatrix}0 & -g & -g^2\\ 0 & 1 & g\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -g & g^2/2\\ 0 & 1 & -g\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & g & g^2/2\\ 0 & 1 & g\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\in\mathfrak{g}_\flat^{\mathbb{C}},$$

$$u^{X(g)} := \exp(X(g)\log u) = \begin{bmatrix}1 & -g & g^2/2\\ 0 & 1 & -g\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & u & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & g & g^2/2\\ 0 & 1 & g\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\in\Gamma_\flat^\circ,$$

使得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tau_\flat(X(g)) &= w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} + g\bigg(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}+w\bigg) + g^2 = \mathcal{B}\big(\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a} + g(\mathrm{a}+\mathrm{a}^\dagger) + g^2\big)\mathcal{B}^{-1}, \qquad (2.2)\\ \tau_\flat(u^{X(g)}) &= \exp\bigg(\log u\bigg(w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} + g\bigg(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}+w\bigg)+g^2\bigg)\bigg)\end{aligned}$$

在 $\mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})$ 上是自伴的。则它们的特征值集合分别为 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $\{u^k\mid k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$，其共同特征向量为 $\left\{\tau_\flat\left(\begin{bmatrix}1 & -g & g^2/2\\ 0 & 1 & -g\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)w^k \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\right\}$。特别地，对于 $\lambda\in\mathbb{C}$, $\lambda\notin -\mathbb{Z}_{\geq 0}$，预解式 $(\mathrm{d}\tau_\flat(X(g))+\lambda)^{-1}$ 属于希尔伯特–施密特类，其中

$$\big\|(\mathrm{d}\tau_\flat(X(g))+\lambda)^{-1}\big\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{|k+\lambda|^2}, \qquad \big\|(\mathrm{d}\tau_\flat(X(g))+\lambda)^{-1}\big\|_{\mathrm{op}} = \max_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}\frac{1}{|k+\lambda|},$$

对于 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$，我们有

$$\operatorname{Tr}\big((\mathrm{d}\tau_\flat(X(g))+\lambda)^{-n}\big) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+\lambda)^n} = \zeta(n,\lambda),$$

其中 $\zeta(s,\lambda)$ 是 ***Hurwitz zeta***函数。同样，$\tau_\flat(u^{X(g)})$ 是迹类，且

$$\operatorname{Tr}\big(\tau_\flat(u^{X(g)})\big) = \big\|\tau_\flat(u^{X(g)})\big\|_{\mathrm{Tr}} = \sum_{k=0}^{\infty}u^k = \frac{1}{1-u},$$

$$\big\|\tau_\flat(u^{X(g)})\big\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{k=0}^{\infty}(u^k)^2 = \frac{1}{1-u^2}, \qquad \big\|\tau_\flat(u^{X(g)})\big\|_{\mathrm{op}} = \max_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}u^k = 1.$$

2.3 作用于单位圆盘上的半群

设$\mathbf{D}$ 和$\mathbf{H}$分别为单位圆盘和上半平面,

$$\mathbf{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \qquad \mathbf{H} := \{y \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} y > 0\}.$$

对于 $\nu > 0$，我们考虑加权 *Bergman* 空间

$$\mathcal{H}_\nu(\mathbf{D}) := \{f \in \mathcal{O}(\mathbf{D}) \mid \|f\|_\nu^2 := \langle f, f\rangle_\nu < \infty\},$$

其内积定义为：对于 $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k$, $g(z) = \sum_{k=0}^\infty b_k z^k \in \mathcal{O}(\mathbf{D})$,

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle_\nu &:= \sum_{k=0}^\infty \frac{k!}{(\nu)_k} a_k \overline{b_k} && (\nu > 0)\\ &= \frac{\nu - 1}{\pi} \int_{\mathbf{D}} f(z)\overline{g(z)}(1 - |z|^2)^{\nu-2}\,\mathrm{d}z && (\nu > 1),\end{aligned}$$

其中 $(\nu)_k := \nu(\nu + 1)(\nu + 2)\cdots(\nu + k - 1)$。于是， $L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{even}}$和 $L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{odd}}$与 $\mathcal{H}_{1/2}(\mathbf{D})$和 $\mathcal{H}_{3/2}(\mathbf{D})$酉同构，如下所示。令 $\mathcal{L}_{\mathrm{even}}$, $\mathcal{L}_{\mathrm{odd}}$ 为拉普拉斯变换,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{even}} \colon L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{even}} &\longrightarrow \mathcal{O}(\mathbf{H}), \qquad (\mathcal{L}_{\mathrm{even}} f)(y) := \pi^{-1/4} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{x^2 y\sqrt{-1}/2}\,\mathrm{d}x,\\ \mathcal{L}_{\mathrm{odd}} \colon L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{odd}} &\longrightarrow \mathcal{O}(\mathbf{H}), \qquad (\mathcal{L}_{\mathrm{odd}} f)(y) := \sqrt{2}\pi^{-1/4} \int_{\mathbb{R}} f(x) x e^{x^2 y\sqrt{-1}/2}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

令 $\mathcal{I}_{\mathrm{even}}$, $\mathcal{I}_{\mathrm{odd}}$ 为积分变换,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\mathrm{even}} \colon \mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})_{\mathrm{even}} &\longrightarrow \mathcal{O}(\mathbf{D}), \qquad (\mathcal{I}_{\mathrm{even}} f)(z) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} f(w) e^{z\overline{w}^2/2} e^{-|w|^2}\,\mathrm{d}w,\\ \mathcal{I}_{\mathrm{odd}} \colon \mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})_{\mathrm{odd}} &\longrightarrow \mathcal{O}(\mathbf{D}), \qquad (\mathcal{I}_{\mathrm{odd}} f)(z) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} f(w) \overline{w} e^{z\overline{w}^2/2} e^{-|w|^2}\,\mathrm{d}w,\end{aligned}$$

对于 $\nu > 0$，令 $\mathcal{C}_\nu$ 为加权 Cayley 变换,

$$\mathcal{C}_\nu \colon \mathcal{O}(\mathbf{H}) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbf{D}), \qquad (\mathcal{C}_\nu f)(z) := (1 + z)^{-\nu} f\left(\sqrt{-1}\frac{1 - z}{1 + z}\right).$$

那么，下列图表是可交换的。

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{even}} & \xrightarrow{\mathcal{B}} & \mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})_{\mathrm{even}} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{L}_{\mathrm{even}}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{I}_{\mathrm{even}}} \\ \mathcal{O}(\mathbf{H}) & \xrightarrow[\mathcal{C}_{1/2}]{} & \mathcal{O}(\mathbf{D}), \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{odd}} & \xrightarrow{\mathcal{B}} & \mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})_{\mathrm{odd}} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{L}_{\mathrm{odd}}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{I}_{\mathrm{odd}}} \\ \mathcal{O}(\mathbf{H}) & \xrightarrow[\mathcal{C}_{3/2}]{} & \mathcal{O}(\mathbf{D}). \end{array}$$

此外，以下复合

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\mathcal{L}_{1/2} &:= \mathcal{C}_{1/2} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{even}} = \mathcal{I}_{\mathrm{even}} \circ \mathcal{B} \colon L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{even}} \longrightarrow \mathcal{H}_{1/2}(\mathbf{D}),\\ \mathcal{C}\mathcal{L}_{3/2} &:= \mathcal{C}_{3/2} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{odd}} = \mathcal{I}_{\mathrm{odd}} \circ \mathcal{B} \colon L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{odd}} \longrightarrow \mathcal{H}_{3/2}(\mathbf{D})\end{aligned}$$

给出满足以下条件的酉同构：对于 $\nu = 1/2$、 $3/2$,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\mathcal{L}_\nu \circ \left(\mathrm{a}^\dagger \mathrm{a} + \frac{1}{2}\right) &= \left(2z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + \nu\right) \circ \mathcal{C}\mathcal{L}_\nu,\\ \mathcal{C}\mathcal{L}_\nu \circ \frac{1}{2}\mathrm{a}^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \circ \mathcal{C}\mathcal{L}_\nu, &\qquad \mathcal{C}\mathcal{L}_\nu \circ \frac{1}{2}(\mathrm{a}^\dagger)^2 = \left(z^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + \nu z\right) \circ \mathcal{C}\mathcal{L}_\nu.\end{aligned}$$

例如参见 [13,第 4.5 节、第 4.6] 节。

注 2.4。 更一般地，对于 $\nu > 0$，设

$$L^2_\nu(\mathbb{R}_{>0}) := \left\{ f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \|f\|^2_{\nu,\mathbb{R}_{>0}} := \frac{2^\nu}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty |f(t)|^2 t^{\nu-1}\, dt < \infty \right\},$$

$$\mathcal{L}_\nu\colon L^2_\nu(\mathbb{R}_{>0}) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbf{H}), \qquad (\mathcal{L}_\nu f)(y) := \frac{2^\nu}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty f(t) e^{\sqrt{-1}yt} t^{\nu-1}\, dt.$$

于是复合映射

$$\mathcal{CL}_\nu := \mathcal{C}_\nu \circ \mathcal{L}_\nu\colon L^2_\nu(\mathbb{R}_{>0}) \longrightarrow \mathcal{H}_\nu(\mathbf{D})$$

给出了酉同构。此外，对于 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$、 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，令 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上复值多项式的空间，并令

$$\mathcal{HP}_k(\mathbb{R}^n) := \left\{ h \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; h(tx) = t^k h(x) \quad (t \in \mathbb{R}), \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2} = 0 \right\}$$

为次数为 k 的齐次调和多项式空间，并赋予内积

$$\langle h_1, h_2 \rangle_{\mathcal{HP}} := \int_{\mathbb{R}^n} h_1(x) \overline{h_2(x)} e^{-r^2(x)}\, dx,$$

其中 $r^2(x) := x_1^2 + \cdots + x_n^2$。于是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 具有正交分解

$$L^2(\mathbb{R}^n) \simeq \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}^{\oplus} L^2_{k+\frac{n}{2}}(\mathbb{R}_{>0}) \otimes \mathcal{HP}_k(\mathbb{R}^n),$$

其中嵌入由 $f(t) \otimes h(x) \mapsto f(r^2(x)/2)h(x)$ 给出。令 a_j、$a_j^\dagger$ 为关于 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上第 j 个变量的湮灭算子和产生算子。则对于 $\nu = k + \frac{n}{2}$、 $f(t) \in L^2_\nu(\mathbb{R}_{>0})$， $h(x) \in \mathcal{HP}_k(\mathbb{R}^n)$，有

$$(\mathcal{CL}_\nu \otimes Id_{\mathcal{PH}_k(\mathbb{R}^n)}) \left(\sum_{j=1}^n \left(\mathrm{a}_j^\dagger \mathrm{a}_j + \frac{1}{2} \right) \left(f\left(\frac{r^2(x)}{2} \right) h(x) \right) \right) = \left(2z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + \nu \right) (\mathcal{CL}_\nu f)(z) \otimes h(x),$$

$$(\mathcal{CL}_\nu \otimes Id_{\mathcal{PH}_k(\mathbb{R}^n)}) \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \mathrm{a}_j^2 \left(f\left(\frac{r^2(x)}{2} \right) h(x) \right) \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} (\mathcal{CL}_\nu f)(z) \otimes h(x),$$

$$(\mathcal{CL}_\nu \otimes Id_{\mathcal{PH}_k(\mathbb{R}^n)}) \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\mathrm{a}_j^\dagger)^2 \left(f\left(\frac{r^2(x)}{2} \right) h(x) \right) \right) = \left(z^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + \nu z \right) (\mathcal{CL}_\nu f)(z) \otimes h(x).$$

这给出了 *Howe*对偶对对应的一个特例。例如，参见 *[15, 19]*。另请参见*[27]*。

接下来，设

$$G^{\mathbb{C}} := SL(2,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} a,b,c,d \in \mathbb{C}, \\ ad - bc = 1 \end{matrix} \right\}, \quad \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} := \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{C} \right\}.$$

我们将 $G^{\mathbb{C}}$ 和 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 上的对合反自同构定义为 ‡

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^\ddagger := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a} & -\overline{c} \\ -\overline{b} & \overline{d} \end{bmatrix},$$

并令

$$G := SU(1,1) = \{\gamma \in G^{\mathbb{C}} \mid \gamma^{\ddagger} = \gamma^{-1}\}, \qquad \mathfrak{g} := \mathfrak{su}(1,1) = \{\gamma \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid \gamma^{\ddagger} = -\gamma\}.$$

~于是对于 $\nu > 0$, G 的万有覆盖群 G 在 $\mathcal{H}_\nu(\mathbf{D})$ 上酉作用，其作用为

$$\left(\tau_\nu\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}\right) f\right)(z) := (cz+d)^{-\nu} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right). \tag{2.3}$$

我们注意到，当 $\nu \notin \mathbb{Z}$ 时，$(cz+d)^{-\nu}$ 在 $G \times \mathbf{D}$ 上未定义良好；但对于所有 $\nu > 0$，它在万有覆盖空间 $\widetilde{G} \times \mathbf{D}$ 上定义良好。其 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的复化微分作用由 $\mathcal{H}_\nu(\mathbf{D})$ 上的无界算子给出，

$$\left(\mathrm{d}\tau_\nu\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}\right) f\right)(z) := -a\left(2z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + \nu\right) - b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + c\left(z^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + \nu z\right),$$

因此 $\mathrm{d}\tau_\nu(\gamma)^\dagger = \mathrm{d}\tau_\nu(\gamma^\ddagger)$ 成立。

接下来，利用 $G^{\mathbb{C}} = SL(2,\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上的作用，

$$\gamma.z := \frac{az+b}{cz+d} \qquad \left(\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G^{\mathbb{C}},\ z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}\right),$$

我们定义半群 $\Gamma, \Gamma^\circ \subset G^{\mathbb{C}}$ 如下：

$$\Gamma := \{\gamma \in G^{\mathbb{C}} \mid \gamma^{-1}.z \in \mathbf{D} \text{ for all } z \in \mathbf{D}\},$$
$$\Gamma^\circ := \{\gamma \in G^{\mathbb{C}} \mid \gamma^{-1}.z \in \mathbf{D} \text{ for all } z \in \overline{\mathbf{D}}\},$$

其中 $\overline{\mathbf{D}} \subset \mathbb{C}$ 是 $\mathbf{D}$ 的闭包。此外，设 $C, C^\circ \subset \sqrt{-1}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 为下述锥：

$$C := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & -a \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} a \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ b \in \mathbb{C}, \\ a^2 \geq |b|^2 \end{matrix} \right\} = Ad(G)\mathbb{R}_{\geq 0} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$
$$C^\circ := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & -a \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} a \in \mathbb{R}_{> 0},\ b \in \mathbb{C}, \\ a^2 > |b|^2 \end{matrix} \right\} = Ad(G)\mathbb{R}_{> 0} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

于是，下述结论成立。

定理 2.5. *(1) ([12,* 第一部分，定理 *V.1.1])*

$$\Gamma = G\exp(C), \qquad \Gamma^\circ = G\exp(C^\circ).$$

(2) ([12, 第一部分，命题 *V.3* 的证明*.1])* 令 $\gamma \in \Gamma^\circ \subset M(2,\mathbb{C})$。若 $\mathrm{tr}(\gamma) \in \mathbb{R}$，则

$$|\,\mathrm{tr}(\gamma)| > 2.$$

(3) ([12, 第一部分，命题 *V.3.1])* 若 $\gamma \in \Gamma^\circ$，则$\gamma \in M(2,\mathbb{C})$ 的特征值 $\mu(\gamma)$ 之一满足

$$|\mu(\gamma)| < 1.$$

函数 $\gamma \mapsto \mu(\gamma)$ 在 Γ° 上全纯。

~ ~万有覆盖半群 Γ，Γ°的 Γ，Γ°按照与 (2.3) 相同的公式作用于 $\mathcal{H}_\nu(\mathbf{D})$。若 $\gamma \in \exp(C^\circ) \subset \Gamma^\circ$，则 $\tau_\nu(\gamma)$ 是自伴的。此外，对于 $\sim\gamma \in \Gamma^\circ$， $\tau_\nu(\gamma)$ 的迹满足以下性质。

~**定理 2.6** ([12, 第一部分，定理 V.3。2])。 **</style}对于，作用于 (D)** 上的算子 $\tau_\nu(\gamma)$ 是迹类，并且有

$$\mathrm{Tr}(\tau_\nu(\gamma)) = \frac{\mu(\gamma)^\nu}{1-\mu(\gamma)^2},$$

其中 μ（γ）是 γ 的特征值，使得 $|\mu$（γ）$| < 1$。

例 2.7。对于 $g \in \mathbb{R}$， $u \in$ （0，1），令

$$\begin{aligned} Y(g) &:= \begin{bmatrix} -\cosh(2g) & -\sinh(2g) \\ \sinh(2g) & \cosh(2g) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh(g) & -\sinh(g) \\ -\sinh(g) & \cosh(g) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh(g) & \sinh(g) \\ \sinh(g) & \cosh(g) \end{bmatrix} \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \\ u^{Y(g)} &:= \exp(Y(g)\log u) \\ &= \begin{bmatrix} \cosh(g) & -\sinh(g) \\ -\sinh(g) & \cosh(g) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh(g) & \sinh(g) \\ \sinh(g) & \cosh(g) \end{bmatrix} \in \Gamma^\circ, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tau_\nu(Y(g)) &= \cosh(2g)\left(2z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + \nu\right) + \sinh(2g)\left((1+z^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + \nu z\right), \\ \tau_\nu(u^{Y(g)}) &= \exp\left(\log u\left(\cosh(2g)\left(2z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + \nu\right) + \sinh(2g)\left((1+z^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + \nu z\right)\right)\right) \end{aligned}$$

在 $\mathcal{H}_\nu$（**D**）上是自伴的。特别地，对于 $\nu = 1/2$、$3/2$，有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tau_{1/2}(Y(g)) &= \mathcal{CL}_{1/2}\left(\cosh(2g)\left(\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\sinh(2g)}{2}(\mathrm{a}^2 + (\mathrm{a}^\dagger)^2)\right)\Big|_{L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{even}}} \mathcal{CL}_{1/2}^{-1}, \\ \mathrm{d}\tau_{3/2}(Y(g)) &= \mathcal{CL}_{3/2}\left(\cosh(2g)\left(\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\sinh(2g)}{2}(\mathrm{a}^2 + (\mathrm{a}^\dagger)^2)\right)\Big|_{L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{odd}}} \mathcal{CL}_{3/2}^{-1}. \quad (2.4) \end{aligned}$$

$\mathrm{d}\tau_\nu(Y(g))$ 和 $\tau_\nu(u^{Y(g)})$ 的特征值集合分别为 $2\mathbb{Z}_{\geq 0} + \nu$ 和 $\{u^{2k+\nu} \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$，其公共特征向量为 $\left\{\tau_\nu\left(\begin{bmatrix} \cosh(g) & -\sinh(g) \\ -\sinh(g) & \cosh(g) \end{bmatrix}\right) z^k \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\right\}$。特别地，对于 $\lambda \in \mathbb{C}$、$\lambda \notin -(2\mathbb{Z}_{\geq 0} + \nu)$，预解式 $(\mathrm{d}\tau_\nu(Y(g)) + \lambda)^{-1}$ 属于希尔伯特–施密特类，且

$$\left\|(\mathrm{d}\tau_\nu(Y(g))+\lambda)^{-1}\right\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|2k+\lambda+\nu|^2}, \quad \left\|(\mathrm{d}\tau_\nu(Y(g))+\lambda)^{-1}\right\|_{\mathrm{op}} = \max_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \frac{1}{|2k+\lambda+\nu|},$$

对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$，我们有

$$\mathrm{Tr}\big((\mathrm{d}\tau_\nu(Y(g)) + \lambda)^{-n}\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+\lambda+\nu)^n} = 2^{-n}\zeta\left(n, \frac{\lambda+\nu}{2}\right),$$

其中 $\zeta(s,\lambda)$ 是 *Hurwitz zeta*函数。同样， $\tau_\nu(u^{Y(g)})$ 属于迹类，且

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\big(\tau_\nu(u^{Y(g)})\big) &= \left\|\tau_\nu(u^{Y(g)})\right\|_{\mathrm{Tr}} = \sum_{k=0}^{\infty} u^{2k+\nu} = \frac{u^\nu}{1-u^2}, \\ \left\|\tau_\nu(u^{Y(g)})\right\|_{\mathrm{HS}}^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} (u^{2k+\nu})^2 = \frac{u^{2\nu}}{1-u^4}, \qquad \left\|\tau_\nu(u^{Y(g)})\right\|_{\mathrm{op}} = \max_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} u^{2k+\nu} = u^\nu. \end{aligned}$$

2.4 本文讨论的哈密顿算符

本文考虑重整化后的单光子量子拉比模型

$$\widetilde{\mathrm{H}}_{1\mathrm{QRM}}^{(g,\Delta,\varepsilon)} := \mathrm{H}_{1\mathrm{QRM}}^{(g,\Delta,\varepsilon)} + g^2\mathbf{I} = \mathbf{I}(\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a} + g^2) + g\boldsymbol{\sigma}_1(\mathrm{a} + \mathrm{a}^\dagger) + \Delta\boldsymbol{\sigma}_3 + \varepsilon\boldsymbol{\sigma}_1$$

（其中 $g, \Delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$、$\mathbf{I} = \left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]$、 $\boldsymbol{\sigma}_1 = \left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right]$、 $\boldsymbol{\sigma}_2 = \left[\begin{smallmatrix}0&-\sqrt{-1}\\\sqrt{-1}&0\end{smallmatrix}\right]$、 $\boldsymbol{\sigma}_3 = \left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right]$ 为泡利矩阵），重整化的双光子量子 Rabi 模型

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{H}}_{2\mathrm{QRM}}^{(g,\Delta,\varepsilon)} &:= \cosh(2g)\left(\mathrm{H}_{2\mathrm{QRM}}^{(\tanh(2g)/2,\Delta\,\mathrm{sech}(2g),\varepsilon\,\mathrm{sech}(2g))} + \frac{1}{2}\mathbf{I}\right)\\ &= \cosh(2g)\mathbf{I}\left(\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\sinh(2g)}{2}\boldsymbol{\sigma}_1(\mathrm{a}^2 + (\mathrm{a}^\dagger)^2) + \Delta\boldsymbol{\sigma}_3 + \varepsilon\boldsymbol{\sigma}_1\end{aligned}$$

（其中 $g, \Delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$、$\mathbf{I}$ $\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3$ 同上），以及非交换谐振子

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{NCHO}}^{(\alpha,\beta,\eta)} := \frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}}\mathrm{H}_{\mathrm{NCHO}}^{(\alpha,\beta,\eta)}\\ &= \frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}}\\ &\quad\times\left(\begin{bmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{bmatrix}\left(\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a}+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}(\mathrm{a}^2-(\mathrm{a}^\dagger)^2) + 2\eta\sqrt{\alpha\beta-1}\sqrt{-1}\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

（其中 $\alpha, \beta > 0$、 $\alpha\beta > 1$、 $\eta \in \mathbb{R}$）。对于 $g, \Delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$，我们在 $\mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})$ 上定义算子 $\widetilde{\mathrm{H}}_\flat^{(g,\Delta,\varepsilon)}$，如下

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{H}}_\flat^{(g,\Delta,\varepsilon)} &:= \mathbf{I}\left(w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} + g^2\right) + g\boldsymbol{\sigma}_3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} + w\right) + \Delta\boldsymbol{\sigma}_1 + \varepsilon\boldsymbol{\sigma}_3\\ &= \begin{bmatrix}\mathrm{d}\tau_\flat(X(g)) + \varepsilon & \Delta\\ \Delta & \mathrm{d}\tau_\flat(X(-g)) - \varepsilon\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{2.5}$$

其中 $X(g) \in \mathfrak{g}_\flat^{\mathbb{C}}$与例 2.3 中相同。因此，由于

$$\widetilde{\mathrm{H}}_\flat^{(g,\Delta,\varepsilon)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\mathcal{B}\widetilde{\mathrm{H}}_{1\mathrm{QRM}}^{(g,\Delta,\varepsilon)}\mathcal{B}^{-1}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$$

成立，我们有

$$\zeta(\widetilde{\mathrm{H}}_{1\mathrm{QRM}}^{(g,\Delta,\varepsilon)}; s, \lambda) = \zeta(\widetilde{\mathrm{H}}_\flat^{(g,\Delta,\varepsilon)}; s, \lambda).$$

接下来，对于 $\nu > 0$, $g, \Delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$，我们定义作用于 $\mathcal{H}_\nu(\mathbf{D})$ 上的算子 $\widetilde{\mathbf{H}}_\nu^{(g,\Delta,\varepsilon)}$ 如下:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{H}}_\nu^{(g,\Delta,\varepsilon)} &:= \cosh(2g)\mathbf{I}\left(2z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + \nu\right) + \sinh(2g)\boldsymbol{\sigma}_3\left((1+z^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + \nu z\right) + \Delta\boldsymbol{\sigma}_1 + \varepsilon\boldsymbol{\sigma}_3\\ &= \begin{bmatrix}\mathrm{d}\tau_\nu(Y(g)) + \varepsilon & \Delta\\ \Delta & \mathrm{d}\tau_\nu(Y(-g)) - \varepsilon\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{2.6}$$

其中 $Y(g) \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 与例 2.7 中相同。于是，由于

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{H}}_{1/2}^{(g,\Delta,\varepsilon)} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\mathcal{CL}_{1/2}(\widetilde{\mathrm{H}}_{2\mathrm{QRM}}^{(g,\Delta,\varepsilon)}|_{L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{even}}})\mathcal{CL}_{1/2}^{-1}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix},\\ \widetilde{\mathrm{H}}_{3/2}^{(g,\Delta,\varepsilon)} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\mathcal{CL}_{3/2}(\widetilde{\mathrm{H}}_{2\mathrm{QRM}}^{(g,\Delta,\varepsilon)}|_{L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{odd}}})\mathcal{CL}_{3/2}^{-1}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

成立，我们有

$$\zeta(\widetilde{\mathrm{H}}^{(g,\Delta,\varepsilon)}_{\mathrm{2QRM}};s,\lambda)=\zeta(\widetilde{\mathrm{H}}^{(g,\Delta,\varepsilon)}_{1/2};s,\lambda)+\zeta(\widetilde{\mathrm{H}}^{(g,\Delta,\varepsilon)}_{3/2};s,\lambda).$$

S类似地，对于 $\nu,\alpha,\beta>0$, $\alpha\beta>1$, $\eta\in\mathbb{R}$，我们将算子 $\widetilde{\ }\mathrm{Q}^{(\alpha,\beta,\eta)}_{\nu}$ 定义在 $\mathcal{H}_\nu$**(D)** 上如下：

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Q}}^{(\alpha,\beta,\eta)}_{\nu}:=\frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}}\Bigg(&\begin{bmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{bmatrix}\left(2z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}+\nu\right)\\&+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\left((1+z^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}+\nu z\right)+2\eta\sqrt{\alpha\beta-1}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\Bigg).\end{aligned}\tag{2.7}$$

再次，由于

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathrm{Q}}^{(\alpha,\beta,\eta)}_{1/2}\\&=e^{\pi\sqrt{-1}\boldsymbol{\sigma}_3/4}\tau_\nu\big(e^{\pi\sqrt{-1}\boldsymbol{\sigma}_3/4}\big)\mathcal{CL}_{1/2}\big(\widetilde{\mathrm{H}}^{(\alpha,\beta,\eta)}_{\mathrm{NCHO}}\big|_{L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{even}}}\big)\mathcal{CL}^{-1}_{1/2}\tau_\nu\big(e^{-\pi\sqrt{-1}\boldsymbol{\sigma}_3/4}\big)e^{-\pi\sqrt{-1}\boldsymbol{\sigma}_3/4},\\&\widetilde{\mathrm{Q}}^{(\alpha,\beta,\eta)}_{3/2}\\&=e^{\pi\sqrt{-1}\boldsymbol{\sigma}_3/4}\tau_\nu\big(e^{\pi\sqrt{-1}\boldsymbol{\sigma}_3/4}\big)\mathcal{CL}_{3/2}\big(\widetilde{\mathrm{H}}^{(\alpha,\beta,\eta)}_{\mathrm{NCHO}}\big|_{L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{odd}}}\big)\mathcal{CL}^{-1}_{3/2}\tau_\nu\big(e^{-\pi\sqrt{-1}\boldsymbol{\sigma}_3/4}\big)e^{-\pi\sqrt{-1}\boldsymbol{\sigma}_3/4}\end{aligned}$$

成立，其中 $e^{\pm\pi\sqrt{-1}\boldsymbol{\sigma}_3/4}=\begin{bmatrix}e^{\pm\pi\sqrt{-1}/4}&0\\0&e^{\mp\pi\sqrt{-1}/4}\end{bmatrix}$，我们有

$$\zeta(\widetilde{\mathrm{H}}^{(\alpha,\beta,\eta)}_{\mathrm{NCHO}};s,\lambda)=\zeta(\widetilde{\mathrm{Q}}^{(\alpha,\beta,\eta)}_{1/2};s,\lambda)+\zeta(\widetilde{\mathrm{Q}}^{(\alpha,\beta,\eta)}_{3/2};s,\lambda).$$

注 2.8. 我们可以考虑双光子量子 *Rabi* 模型和非交换调和振子在 $L^2(\mathbb{R}^n)\otimes\mathbb{C}^2$ 上的多变量推广，形式如下：

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{H}}^{(g,\Delta,\varepsilon)}_{\mathrm{2QRM},\mathbb{R}^n}&:=\cosh(2g)\mathbf{I}\sum_{j=1}^n\left(\mathrm{a}_j^\dagger\mathrm{a}_j+\frac{1}{2}\right)+\frac{\sinh(2g)}{2}\boldsymbol{\sigma}_1\sum_{j=1}^n(\mathrm{a}_j^2+(\mathrm{a}_j^\dagger)^2)+\Delta\boldsymbol{\sigma}_3+\varepsilon\boldsymbol{\sigma}_1,\\\widetilde{\mathrm{H}}^{(\alpha,\beta,\eta)}_{\mathrm{NCHO},\mathbb{R}^n}&:=\frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}}\Bigg(\begin{bmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{bmatrix}\sum_{j=1}^n\left(\mathrm{a}_j^\dagger\mathrm{a}_j+\frac{1}{2}\right)\\&\quad+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\sum_{j=1}^n(\mathrm{a}_j^2-(\mathrm{a}_j^\dagger)^2)+2\eta\sqrt{\alpha\beta-1}\sqrt{-1}\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\Bigg).\end{aligned}$$

根据注 *2.4* 中对 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的分解，我们有

$$\begin{aligned}\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}^{(g,\Delta,\varepsilon)}_{\mathrm{2QRM},\mathbb{R}^n}|_{L^2_{k+\frac{n}{2}}(\mathbb{R}_{>0})\otimes\mathcal{HP}_k(\mathbb{R}^n)};s,\lambda\big)&=\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}^{(g,\Delta,\varepsilon)}_{k+\frac{n}{2}};s,\lambda\big)\dim\mathcal{HP}_k(\mathbb{R}^n),\\\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}^{(\alpha,\beta,\eta)}_{\mathrm{NCHO},\mathbb{R}^n}|_{L^2_{k+\frac{n}{2}}(\mathbb{R}_{>0})\otimes\mathcal{HP}_k(\mathbb{R}^n)};s,\lambda\big)&=\zeta\big(\widetilde{\mathrm{Q}}^{(\alpha,\beta,\eta)}_{k+\frac{n}{2}};s,\lambda\big)\dim\mathcal{HP}_k(\mathbb{R}^n),\end{aligned}$$

其中 维数 $\mathcal{HP}_k(\mathbb{R}^n)=\binom{k+n-1}{n-1}-\binom{k+n-3}{n-1}$，因此我们有

$$\begin{aligned}\zeta(\widetilde{\mathrm{H}}^{(g,\Delta,\varepsilon)}_{\mathrm{2QRM},\mathbb{R}^n};s,\lambda)&=\sum_{k=0}^\infty\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}^{(g,\Delta,\varepsilon)}_{k+\frac{n}{2}};s,\lambda\big)\dim\mathcal{HP}_k(\mathbb{R}^n),\\\zeta(\widetilde{\mathrm{H}}^{(\alpha,\beta,\eta)}_{\mathrm{NCHO},\mathbb{R}^n};s,\lambda)&=\sum_{k=0}^\infty\zeta\big(\widetilde{\mathrm{Q}}^{(\alpha,\beta,\eta)}_{k+\frac{n}{2}};s,\lambda\big)\dim\mathcal{HP}_k(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

接下来，对于 $\nu>1$，我们考虑希尔伯特空间

$$\mathcal{H}_\nu(\sqrt{\nu}\mathbf{D}):=\left\{f(w)\in\mathcal{O}(\sqrt{\nu}\mathbf{D})\;\middle|\;\frac{\nu-1}{\nu\pi}\int_{\sqrt{\nu}\mathbf{D}}|f(w)|^2\left(1-\frac{|w|^2}{\nu}\right)^{\nu-2}\mathrm{d}w<\infty\right\},$$

以及膨胀映射

$$\rho_\nu\colon\mathcal{H}_\nu(\mathbf{D})\longrightarrow\mathcal{H}_\nu(\sqrt{\nu}\mathbf{D}),\qquad f(z)\longmapsto f(w/\sqrt{\nu}).$$

那么， ρ_ν 是一个酉同构，且复合映射

$$\begin{aligned}&\rho_\nu\circ\widetilde{\mathrm{H}}_\nu^{(g,\Delta,\varepsilon)}\circ\rho_\nu^{-1}\\&=\cosh(2g)\mathbf{I}\left(2w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}+\nu\right)+\sqrt{\nu}\sinh(2g)\boldsymbol{\sigma}_3\left(\left(1+\frac{w^2}{\nu}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}+w\right)+\Delta\boldsymbol{\sigma}_1+\varepsilon\boldsymbol{\sigma}_3\end{aligned}$$

定义了一个取值于 $\mathbb{C}^2$的微分算子，作用在 $\sqrt{\nu}\mathbf{D}$上。那么作为形式微分算子，我们有如下极限

$$\begin{aligned}&\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{2}\big(\rho_\nu\circ\widetilde{\mathrm{H}}_\nu^{(g/\sqrt{\nu},2\Delta,2\varepsilon)}\circ\rho_\nu^{-1}-\nu\big)\\&=\lim_{\nu\to\infty}\left(\mathbf{I}\left(\cosh\left(\frac{2g}{\sqrt{\nu}}\right)w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}+\left(\cosh\left(\frac{2g}{\sqrt{\nu}}\right)-1\right)\frac{\nu}{2}\right)\right.\\&\quad\left.+\frac{\sqrt{\nu}}{2}\sinh\left(\frac{2g}{\sqrt{\nu}}\right)\boldsymbol{\sigma}_3\left(\left(1+\frac{w^2}{\nu}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}+w\right)+\Delta\boldsymbol{\sigma}_1+\varepsilon\boldsymbol{\sigma}_3\right)\\&=\mathbf{I}\left(w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}+g^2\right)+g\boldsymbol{\sigma}_3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}+w\right)+\Delta\boldsymbol{\sigma}_1+\varepsilon\boldsymbol{\sigma}_3=\widetilde{\mathrm{H}}_\flat^{(g,\Delta,\varepsilon)}.\end{aligned}$$

因此，预期

$$2^s\lim_{\nu\to\infty}\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_\nu^{(g/\sqrt{\nu},2\Delta,2\varepsilon)};s,2\lambda-\nu\big)=\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_\flat^{(g,\Delta,\varepsilon)};s,\lambda\big)$$

holds。我们将在推论 4.3 (3 中验证这一点，适用于 $s=n\in\mathbb{Z}_{\geq2}$ 以及合适的 $\lambda,g,\Delta,\varepsilon$).

3 ζ 函数特殊值的幂级数展开

本节将 (2.5)、(2.6) 和 (2.7) 中给出的 $\widetilde{\mathrm{H}}_\flat^{(g,\Delta,\varepsilon)}$、$\widetilde{\mathrm{H}}_\nu^{(g,\Delta,\varepsilon)}$ 和 $\widetilde{\mathrm{Q}}_\nu^{(\alpha,\beta,\eta)}$ 的谱 ζ 函数 $\zeta(\widetilde{\mathrm{H}}_\flat^{(g,\Delta,\varepsilon)};n,\lambda)$、$\zeta(\widetilde{\mathrm{H}}_\nu^{(g,\Delta,\varepsilon)};n,\lambda)$ 和 $\zeta(\widetilde{\mathrm{Q}}_\nu^{(\alpha,\beta,\eta)};n,\lambda)$ 表示为 Δ 或 $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$ 的幂级数。为此，对于 $g\in\mathbb{R}$、$\lambda,\varepsilon\in\mathbb{C}$, 令 $\mathrm{h}_\pm^\flat(\lambda;g,\varepsilon)$ 表示定义在 $\mathcal{H}_\flat(\mathbb{C})$ 上的算子:

$$\mathrm{h}_\pm^\flat(\lambda;g,\varepsilon):=\mathrm{d}\pi_\flat(X(\pm g))\pm\varepsilon+\lambda=w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\pm g\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}+w\right)+g^2\pm\varepsilon+\lambda,$$

其中 $X(g)\in\mathfrak{g}_\flat^{\mathbb{C}}$ 与例 2.3 中相同；若 $\lambda\pm\varepsilon\notin-\mathbb{Z}_{\geq0}$，则对于 $m\in\mathbb{Z}_{\geq1}$，令

$$\begin{aligned}R_m^\flat(\lambda;g,\varepsilon)&:=\mathrm{Tr}\big(\big(\mathrm{h}_+^\flat(\lambda;g,\varepsilon)^{-1}\mathrm{h}_-^\flat(\lambda;g,\varepsilon)^{-1}\big)^m\big),\\C_\flat(\lambda,\varepsilon)&:=\max_{\delta\in\{\pm\}}\big\|\mathrm{h}_\delta^\flat(\lambda;g,\varepsilon)^{-1}\big\|_{\mathrm{op}}=\max_{\delta\in\{\pm\},\;k\in\mathbb{Z}_{\geq0}}\frac{1}{|k+\lambda+\delta\varepsilon|},\\C'_\flat(\lambda,\varepsilon)&:=\max_{\delta\in\{\pm\}}\big\|\mathrm{h}_\delta^\flat(\lambda;g,\varepsilon)^{-1}\big\|_{\mathrm{HS}}=\max_{\delta\in\{\pm\}}\left(\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{|k+\lambda+\delta\varepsilon|^2}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

类似地，对于 $\nu\in\mathbb{R}_{>0}$, $g\in\mathbb{R}$, $\lambda,\varepsilon\in\mathbb{C}$，令 $\mathrm{h}^\nu_\pm(\lambda;\,g,\varepsilon)$ 为作用在 $\mathcal{H}_\nu(\mathbf{D})$ 上的算子，定义如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{h}^\nu_\pm(\lambda;g,\varepsilon)&:=\mathrm{d}\tau_\nu(Y(\pm g))\pm\varepsilon+\lambda\\&=\cosh(2g)\left(2z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}+\nu\right)\pm\sinh(2g)\left((1+z^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}+\nu z\right)\pm\varepsilon+\lambda,\end{aligned}$$

where $Y(g)\in\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 与例 2.7 中相同，并且若 $\lambda\pm\varepsilon\notin-(2\mathbb{Z}_{\geq0}+\nu)$，则对于 $m\in\mathbb{Z}_{\geq1}$，let

$$\begin{aligned}R^\nu_m(\lambda;g,\varepsilon)&:=\mathrm{Tr}\big(\big(\mathrm{h}^\nu_+(\lambda;g,\varepsilon)^{-1}\mathrm{h}^\nu_-(\lambda;g,\varepsilon)^{-1}\big)^m\big),\\C_\nu(\lambda,\varepsilon)&:=\max_{\delta\in\{\pm\}}\big\|\mathrm{h}^\nu_\delta(\lambda;g,\varepsilon)^{-1}\big\|_{\mathrm{op}}=\max_{\delta\in\{\pm\},\ k\in\mathbb{Z}_{\geq0}}\frac{1}{|2k+\lambda+\delta\varepsilon+\nu|},\\C'_\nu(\lambda,\varepsilon)&:=\max_{\delta\in\{\pm\}}\big\|\mathrm{h}^\nu_\delta(\lambda;g,\varepsilon)^{-1}\big\|_{\mathrm{HS}}=\max_{\delta\in\{\pm\}}\left(\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{|2k+\lambda+\delta\varepsilon+\nu|^2}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

于是我们有

$$2C_\nu(2\lambda-\nu,2\varepsilon)=C_\flat(\lambda,\varepsilon),\qquad 2C'_\nu(2\lambda-\nu,2\varepsilon)=C'_\flat(\lambda,\varepsilon).$$

首先，我们证明如下命题。

引理 3.1. 设 $\nu\in\mathbb{R}_{>0}\cup\{\flat\}$, $g\in\mathbb{R}$, $\lambda,\varepsilon\in\mathbb{C}$, $m\in\mathbb{Z}_{\geq1}$。假设当 $\nu=\flat$ 时，$\lambda\pm\varepsilon\notin-\mathbb{Z}_{\geq0}$，且当 $\nu\in\mathbb{R}_{>0}$ 时，$\lambda\pm\varepsilon\notin-(2\mathbb{Z}_{\geq0}+\nu)$。则 $R^\nu_m(\lambda;g,\varepsilon)$ 关于 λ 全纯，并且对于 $n\in\mathbb{Z}_{\geq0}$，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n!}\frac{\partial^nR^\nu_m}{\partial\lambda^n}(\lambda;g,\varepsilon)=(-1)^n\sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq0})^{2m}\\|\mathbf{n}|=n}}\mathrm{Tr}\Big(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq m}}(\mathrm{h}^\nu_+(\lambda;g,\varepsilon)^{-n_{2j-1}-1}\mathrm{h}^\nu_-(\lambda;g,\varepsilon)^{-n_{2j}-1})\Big)\\&=\frac{(-1)^n}{2}\sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq0})^{2m}\\|\mathbf{n}|=n}}\mathrm{Tr}\Bigg(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq2m}}\Bigg(\begin{bmatrix}\mathrm{h}^\nu_+(\lambda;g,\varepsilon)^{-1}&0\\0&\mathrm{h}^\nu_-(\lambda;g,\varepsilon)^{-1}\end{bmatrix}^{n_j+1}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\Bigg)\Bigg).\end{aligned}$$

证明。下文将 $\mathrm{h}^\nu_\pm(\lambda;\,g,\varepsilon)$ 简记为：$\mathrm{h}_\pm$。于是对于 $|\mu|<C_\nu(\lambda,\varepsilon)^{-1}$，我们有

$$\begin{aligned}R^\nu_m(\lambda+\mu;g,\varepsilon)&=\mathrm{Tr}\big(\big((\mathrm{h}_++\mu)^{-1}(\mathrm{h}_-+\mu)^{-1}\big)^m\big)\\&=\mathrm{Tr}\big(\big(\mathrm{h}_+^{-1}(1+\mu\mathrm{h}_+^{-1})^{-1}\mathrm{h}_-^{-1}(1+\mu\mathrm{h}_-^{-1})^{-1}\big)^m\big)\\&=\mathrm{Tr}\Bigg(\Bigg(\Bigg(\sum_{n=0}^\infty(-\mu)^n\mathrm{h}_+^{-n-1}\Bigg)\Bigg(\sum_{n'=0}^\infty(-\mu)^{n'}\mathrm{h}_-^{-n'-1}\Bigg)\Bigg)^m\Bigg)\\&=\mathrm{Tr}\Bigg(\sum_{n=0}^\infty(-\mu)^n\sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq0})^{2m}\\|\mathbf{n}|=n}}\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq m}}(\mathrm{h}_+^{-n_{2j-1}-1}\mathrm{h}_-^{-n_{2j}-1})\Bigg),\end{aligned}$$

并且由于

$$\begin{aligned}&\Bigg\|\sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq0})^{2m}\\|\mathbf{n}|=n}}\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq m}}(\mathrm{h}_+^{-n_{2j-1}-1}\mathrm{h}_-^{-n_{2j}-1})\Bigg\|_{\mathrm{Tr}}\\&\leq\binom{2m+n-1}{n}\max\{\|\mathrm{h}_+^{-1}\|_{\mathrm{HS}},\|\mathrm{h}_-^{-1}\|_{\mathrm{HS}}\}^2\max\{\|\mathrm{h}_+^{-1}\|_{\mathrm{op}},\|\mathrm{h}_-^{-1}\|_{\mathrm{op}}\}^{2m+n-2}\\&=\frac{(2m)_n}{n!}C_\nu(\lambda,\varepsilon)^{2m+n-2}C'_\nu(\lambda,\varepsilon)^2\end{aligned}$$

成立，级数

$$R_m^\nu(\lambda+\mu;g,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}(-\mu)^n\sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{2m}\\|\mathbf{n}|=n}}\mathrm{Tr}\Big(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq m}}(\mathrm{h}_+^{-n_{2j-1}-1}\mathrm{h}_-^{-n_{2j}-1})\Big)$$

绝对收敛。因此它在 $\mu=0$ 处解析，结合泰勒展开

$$R_m^\nu(\lambda+\mu;g,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n R_m^\nu}{\partial\lambda^n}(\lambda;g,\varepsilon)\mu^n,$$

我们得到第一个等式。此外，由

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{2m}\\|\mathbf{n}|=n}}\mathrm{Tr}\Big(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq 2m}}\Big(\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n_j+1}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\Big)\Big)\\&=\sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{2m}\\|\mathbf{n}|=n}}\mathrm{Tr}\Big(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq m}}(\mathrm{h}_+^{-n_{2j-1}-1}\mathrm{h}_-^{-n_{2j}-1})\Big)+\sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{2m}\\|\mathbf{n}|=n}}\mathrm{Tr}\Big(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq m}}(\mathrm{h}_-^{-n_{2j-1}-1}\mathrm{h}_+^{-n_{2j}-1})\Big)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{2m}\\|\mathbf{n}|=n}}\mathrm{Tr}\Big(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq m}}(\mathrm{h}_-^{-n_{2j-1}-1}\mathrm{h}_+^{-n_{2j}-1})\Big)\\&=\sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{2m}\\|\mathbf{n}|=n}}\mathrm{Tr}\Big(\mathrm{h}_+^{-n_{2m}-1}\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq m-1}}(\mathrm{h}_-^{-n_{2j-1}-1}\mathrm{h}_+^{-n_{2j}-1})\mathrm{h}_-^{-n_{2m-1}-1}\Big)\\&=\sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{2m}\\|\mathbf{n}|=n}}\mathrm{Tr}\Big(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq m}}(\mathrm{h}_+^{-n_{2j-1}-1}\mathrm{h}_-^{-n_{2j}-1})\Big),\end{aligned}$$

我们得到第二个等式。 □

下面的定理给出了谱 ζ 函数的展开式。

定理 3.2. *(1)* 设 $g,\Delta,\varepsilon\in\mathbb{R}$，$\lambda\in\mathbb{C}$。假设 $\lambda\pm\varepsilon\notin-\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $|\Delta|<C_\flat(\lambda,\varepsilon)^{-1}$。那么对于 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$，$(\widetilde{\mathrm{H}}_\flat^{(g,\Delta,\varepsilon)}+\lambda)^{-n}$ 是迹类，并且有

$$\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_\flat^{(g,\Delta,\varepsilon)};n,\lambda\big)=\zeta(n,\lambda+\varepsilon)+\zeta(n,\lambda-\varepsilon)+\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Delta^{2m}}{m}\frac{\partial^n R_m^\flat}{\partial\lambda^n}(\lambda;g,\varepsilon).$$

(2) 设 $\nu\in\mathbb{R}_{>0}$，$g,\Delta,\varepsilon\in\mathbb{R}$，$\lambda\in\mathbb{C}$。我们假设 $\lambda\pm\varepsilon\notin-(2\mathbb{Z}_{\geq 0}+\nu)$ 且 $|\Delta|<C_\nu(\lambda,\varepsilon)^{-1}$。那么对于 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$，$(\widetilde{\mathrm{H}}_\nu^{(g,\Delta,\varepsilon)}+\lambda)^{-n}$ 是迹类，并且我们有

$$\begin{aligned}&\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_\nu^{(g,\Delta,\varepsilon)};n,\lambda\big)\\&=2^{-n}\zeta\bigg(n,\frac{\lambda+\varepsilon+\nu}{2}\bigg)+2^{-n}\zeta\bigg(n,\frac{\lambda-\varepsilon+\nu}{2}\bigg)+\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Delta^{2m}}{m}\frac{\partial^n R_m^\nu}{\partial\lambda^n}(\lambda;g,\varepsilon).\end{aligned}$$

(3) 设 $\nu\in\mathbb{R}_{>0}$, $\alpha,\beta,\eta\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{C}$。我们假设 $\alpha\beta>1$, $\lambda\pm2\eta\notin-(2\mathbb{Z}_{\geq0}+\nu)$ 且 $\left|\lambda^{\alpha-\beta}_{\alpha+\beta}\right|C_\nu(\lambda,2\eta)<1$。那么对于 $n\in\mathbb{Z}_{\geq2}$，$(\widetilde{\mathrm{Q}}_\nu^{(\alpha,\beta,\eta)}+\lambda)^{-n}$ 是迹类，并且我们有

$$\begin{aligned}\zeta\big(\widetilde{\mathrm{Q}}_\nu^{(\alpha,\beta,\eta)};n,\lambda\big)&=2^{-n}\zeta\bigg(n,\frac{\lambda+2\eta+\nu}{2}\bigg)+2^{-n}\zeta\bigg(n,\frac{\lambda-2\eta+\nu}{2}\bigg)\\&\quad+\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\bigg(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\bigg)^{2m}\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\lambda^{2m}R_m^\nu\bigg(\lambda;\frac{1}{2}\operatorname{artanh}\bigg(\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\bigg),2\eta\bigg).\end{aligned}$$

证明。 (1), (2) 我们将 $\mathrm{h}_\pm^\nu(\lambda;g,\varepsilon)=:\mathrm{h}_\pm$ 记作简写。对于 $\nu\in\mathbb{R}_{>0}\cup\{\flat\}$，由于我们有

$$\widetilde{\mathrm{H}}_\nu^{(g,\Delta,\varepsilon)}+\lambda=\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^\nu(\lambda;g,\varepsilon)&\Delta\\\Delta&\mathrm{h}_-^\nu(\lambda;g,\varepsilon)\end{bmatrix},$$

对于 $|\Delta|<C_\nu(\lambda,\varepsilon)^{-1}$，其逆映射为

$$\begin{aligned}(\widetilde{\mathrm{H}}_\nu^{(g,\Delta,\varepsilon)}+\lambda)^{-1}&=\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+&\Delta\\\Delta&\mathrm{h}_-\end{bmatrix}^{-1}=\bigg(\mathbf{I}+\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\Delta\\\Delta&0\end{bmatrix}\bigg)^{-1}\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\bigg(-\Delta\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\bigg)^m\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

那么，其 n 次幂中 $(-\Delta)^m$ 的系数等于 m 个 $\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ 与 n 个 $\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}$ 的乘积之和，其中最右侧的一项始终为 $\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}$。也就是说，$n$ 次幂计算如下：

$$\begin{aligned}&(\widetilde{\mathrm{H}}_\nu^{(g,\Delta,\varepsilon)}+\lambda)^{-n}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}(-\Delta)^m\sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq0})^{m+1}\\|\mathbf{n}|=n-1}}\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq m}}\bigg(\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n_j+1}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\bigg)\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n_{m+1}+1}.\end{aligned}$$

那么，其迹类范数有如下界：

$$\begin{aligned}&\big\|(\widetilde{\mathrm{H}}_\nu^{(g,\Delta,\varepsilon)}+\lambda)^{-n}\big\|_{\mathrm{Tr}}\\&\leq\sum_{m=0}^{\infty}|\Delta|^m\sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq0})^{m+1}\\|\mathbf{n}|=n-1}}\bigg\|\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq m}}\bigg(\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n_j+1}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\bigg)\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n_{m+1}+1}\bigg\|_{\mathrm{Tr}}\\&\leq\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+n-1}{m}|\Delta|^m\bigg\|\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}\bigg\|_{\mathrm{op}}^{m+n-2}\bigg\|\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}\bigg\|_{\mathrm{HS}}^2\\&\leq\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(n)_m}{m!}|\Delta|^mC_\nu(\lambda,\varepsilon)^{m+n-2}\cdot2C_\nu'(\lambda,\varepsilon)^2=\frac{2C_\nu(\lambda,\varepsilon)^{n-2}C_\nu'(\lambda,\varepsilon)^2}{(1-C_\nu(\lambda,\varepsilon)|\Delta|)^n}<\infty.\end{aligned}$$

接下来，令 $C_m=\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 为循环群，其通过指标移位作用于 $(\mathbb{Z}_{\geq0})^m$ 。
1

那么根据引理 3.1，对于 $m \geq 1$，有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{m+1}\\ |\mathbf{n}|=n-1}} \operatorname{Tr}\Big(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq m}}\Big(\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n_j+1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\Big)\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n_{m+1}+1}\Big)\\
&= \sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{m+1}\\ |\mathbf{n}|=n-1}} \operatorname{Tr}\Big(\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n_1+n_{m+1}+2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\overrightarrow{\prod_{2\leq j\leq m}}\Big(\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n_j+1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\Big)\Big)\\
&= \sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{m}\\ |\mathbf{n}|=n}} n_1 \operatorname{Tr}\Big(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq m}}\Big(\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n_j+1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\Big)\Big)\\
&= \sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{m}/C_m\\ |\mathbf{n}|=n}} \Big(\sum_{j=1}^{m} n_j\Big) \operatorname{Tr}\Big(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq m}}\Big(\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n_j+1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\Big)\Big)\\
&= n \sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{m}/C_m\\ |\mathbf{n}|=n}} \operatorname{Tr}\Big(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq m}}\Big(\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n_j+1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\Big)\Big)\\
&= \frac{n}{m} \sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{m}\\ |\mathbf{n}|=n}} \operatorname{Tr}\Big(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq m}}\Big(\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n_j+1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\Big)\Big)\\
&= \begin{cases}\dfrac{(-1)^n}{(n-1)!m'}\dfrac{\partial^n R^\nu_{m'}}{\partial\lambda^n}(\lambda;g,\varepsilon) & (m=2m')\\ 0 & (m=2m'+1).\end{cases}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}
&\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}^{(g,\Delta,\varepsilon)}_\nu;n,\lambda\big) = \operatorname{Tr}\big((\widetilde{\mathrm{H}}^{(g,\Delta,\varepsilon)}_\nu+\lambda)^{-n}\big)\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}(-\Delta)^m \sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{m+1}\\ |\mathbf{n}|=n-1}} \operatorname{Tr}\Big(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq m}}\Big(\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n_j+1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\Big)\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n_{m+1}+1}\Big)\\
&= \operatorname{Tr}\Big(\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n}\Big) + \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Delta^{2m}}{m}\frac{\partial^n R^\nu_m}{\partial\lambda^n}(\lambda;g,\varepsilon).
\end{aligned}$$

那么，由于

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\Big(\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n}\Big) &= \operatorname{Tr}(\mathrm{h}_+^\nu(\lambda;g,\varepsilon)^{-n}) + \operatorname{Tr}(\mathrm{h}_-^\nu(\lambda;g,\varepsilon)^{-n})\\
&= \begin{cases}\zeta(n,\lambda+\varepsilon)+\zeta(n,\lambda-\varepsilon) & (\nu=\flat),\\ 2^{-n}\zeta\big(n,\frac{1}{2}(\lambda+\varepsilon+\nu)\big)+2^{-n}\zeta\big(n,\frac{1}{2}(\lambda-\varepsilon+\nu)\big) & (\nu\in\mathbb{R}_{>0})\end{cases}
\end{aligned}$$

根据例 2.3、2.7，我们得到所需的公式。

(3) 令

$$B := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{\alpha} & 0\\ 0 & \sqrt{\beta}\end{bmatrix}.$$

则 $\widetilde{\mathrm{Q}}_\nu^{(\alpha,\beta,\eta)}+\lambda$ 可写为

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\mathrm{Q}}_\nu^{(\alpha,\beta,\eta)}+\lambda\\
&=\frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}}\Bigg(\begin{bmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{bmatrix}\left(2z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}+\nu\right)+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\left((1+z^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}+\nu z\right)\\
&\quad+2\eta\sqrt{\alpha\beta-1}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\Bigg)+\lambda\mathbf{I}\\
&=\frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}}B^\dagger\Bigg(\mathbf{I}\left(2z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}+\nu\right)+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\left((1+z^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}+\nu z\right)\\
&\quad+2\eta\frac{\sqrt{\alpha\beta-1}}{\sqrt{\alpha\beta}}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\Bigg)B+\frac{\lambda}{2\alpha\beta}B^\dagger\begin{bmatrix}\alpha+\beta&\beta-\alpha\\\beta-\alpha&\alpha+\beta\end{bmatrix}B\\
&=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}B^\dagger\Bigg(\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha\beta-1}}\mathbf{I}\left(2z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}+\nu\right)+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta-1}}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\left((1+z^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}+\nu z\right)\\
&\quad+2\eta\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}1&\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}\\\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}&1\end{bmatrix}\Bigg)B\\
&=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}B^\dagger\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^\nu\left(\lambda;\frac{1}{2}\operatorname{artanh}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\right),2\eta\right)&\Delta\lambda\\\Delta\lambda&\mathrm{h}_-^\nu\left(\lambda;\frac{1}{2}\operatorname{artanh}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\right),2\eta\right)\end{bmatrix}B\\
&=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}B^{-1}BB^\dagger\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+&\Delta\lambda\\\Delta\lambda&\mathrm{h}_-\end{bmatrix}B=\frac{1}{1-\Delta^2}B^{-1}\begin{bmatrix}1&-\Delta\\-\Delta&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+&\Delta\lambda\\\Delta\lambda&\mathrm{h}_-\end{bmatrix}B\\
&=B^{-1}\begin{bmatrix}1&\Delta\\\Delta&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+&\Delta\lambda\\\Delta\lambda&\mathrm{h}_-\end{bmatrix}B,
\end{aligned}
$$

其中我们令 $\mathrm{h}_\pm^\nu\left(\lambda;\frac{1}{2}\operatorname{artanh}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\right),2\eta\right)=:\mathrm{h}_\pm$，$\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}=:\Delta$。那么对于 $|\Delta\lambda|<C(\lambda,2\eta)^{-1}$，其逆映射为

$$
\begin{aligned}
&B(\widetilde{\mathrm{Q}}_\nu^{(\alpha,\beta,\eta)}+\lambda)^{-1}B^{-1}=\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+&\Delta\lambda\\\Delta\lambda&\mathrm{h}_-\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&\Delta\\\Delta&1\end{bmatrix}\\
&=\left(\mathbf{I}+\Delta\lambda\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}\left(\mathbf{I}+\Delta\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right)\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\Delta\lambda\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right)^m\left(\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}+\Delta\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

那么对于 $k\geq 0$、$0\leq l\leq n$，$(-\Delta\lambda)^k\Delta^l$ 中 $B(\widetilde{\mathrm{Q}}_\nu^{(\alpha,\beta,\eta)}+\lambda)^{-n}B^{-1}$ 的系数，是 $k+l$ 个 $\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$s 与 $n-l$ 个 $\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}$s 的乘积之和，即

$$
\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq k+l}}\left(\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n_j+1}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n_{k+l+1}}
$$

其中 $\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{k+l+1}$，$|\mathbf{n}|=n-l$。对于每个 $\mathbf{n}$，在 $k+l$ 次 $\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ 中，k 次来自 $\sum_m\left(-\Delta\lambda\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right)^m$，其余 l 次来自 $\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}+\Delta\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1}&0\\0&\mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$。

若 $n_{k+l+1}\geq 1$，则 $l<n$。类似地，若 $n_{k+l+1}=0$，则 $l>0$ 且

最右侧的 $\begin{bmatrix} \mathrm{h}_+^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 总是来自 $\begin{bmatrix} \mathrm{h}_+^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1} \end{bmatrix} + \Delta\begin{bmatrix} \mathrm{h}_+^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$。因此，$B(\widetilde{\mathrm{Q}}_\nu^{(\alpha,\beta,\eta)} + \lambda)^{-n}B^{-1}$ 展开为

$$
\begin{aligned}
&B(\widetilde{\mathrm{Q}}_\nu^{(\alpha,\beta,\eta)} + \lambda)^{-n}B^{-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}(-\Delta\lambda)^k\Delta^l\binom{k+l}{k} \\
&\quad\times \sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{k+l+1} \\ |\mathbf{n}|=n-l-1}} \overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq k+l}}\left(\begin{bmatrix} \mathrm{h}_+^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1} \end{bmatrix}^{n_j+1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \mathrm{h}_+^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1} \end{bmatrix}^{n_{k+l+1}+1} \\
&\quad+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{n}(-\Delta\lambda)^k\Delta^l\binom{k+l-1}{k}\sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{k+l} \\ |\mathbf{n}|=n-l}} \overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq k+l}}\left(\begin{bmatrix} \mathrm{h}_+^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1} \end{bmatrix}^{n_j+1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

那么，其迹类范数有如下界：

$$
\begin{aligned}
&\left\|B(\widetilde{\mathrm{Q}}_\nu^{(\alpha,\beta,\eta)} + \lambda)^{-n}B^{-1}\right\|_{\mathrm{Tr}} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}|\Delta\lambda|^k|\Delta|^l\binom{k+l}{k} \\
&\quad\times \sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{k+l+1} \\ |\mathbf{n}|=n-l-1}} \left\|\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq k+l}}\left(\begin{bmatrix} \mathrm{h}_+^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1} \end{bmatrix}^{n_j+1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \mathrm{h}_+^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1} \end{bmatrix}^{n_{k+l+1}+1}\right\|_{\mathrm{Tr}} \\
&\quad+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{n}|\Delta\lambda|^k|\Delta|^l\binom{k+l-1}{k}\sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{k+l} \\ |\mathbf{n}|=n-l}} \left\|\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq k+l}}\left(\begin{bmatrix} \mathrm{h}_+^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1} \end{bmatrix}^{n_j+1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\right\|_{\mathrm{Tr}} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}|\Delta\lambda|^k|\Delta|^l\binom{k+l}{k}\binom{k+n-1}{n-l-1}\left\|\begin{bmatrix} \mathrm{h}_+^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1} \end{bmatrix}\right\|_{\mathrm{op}}^{k+n-2}\left\|\begin{bmatrix} \mathrm{h}_+^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1} \end{bmatrix}\right\|_{\mathrm{HS}}^2 \\
&\quad+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{n}|\Delta\lambda|^k|\Delta|^l\binom{k+l-1}{k}\binom{k+n-1}{n-l}\left\|\begin{bmatrix} \mathrm{h}_+^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1} \end{bmatrix}\right\|_{\mathrm{op}}^{k+n-2}\left\|\begin{bmatrix} \mathrm{h}_+^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1} \end{bmatrix}\right\|_{\mathrm{HS}}^2 \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}|\Delta\lambda|^k|\Delta|^l\frac{(n)_k}{k!}\binom{n}{l}C_\nu(\lambda,2\eta)^{k+n-2}\cdot 2C'_\nu(\lambda,2\eta)^2 \\
&= \frac{2(1+|\Delta|)^nC_\nu(\lambda,2\eta)^{n-2}C'_\nu(\lambda,2\eta)^2}{(1-C_\nu(\lambda,2\eta)|\Delta\lambda|)^n} < \infty.
\end{aligned}
$$

此外，由引理 3.1 和式 (3.1)，对于 $k+l\geq 1$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{k+l+1} \\ |\mathbf{n}|=n-l-1}} \mathrm{Tr}\left(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq k+l}}\left(\begin{bmatrix} \mathrm{h}_+^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1} \end{bmatrix}^{n_j+1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \mathrm{h}_+^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1} \end{bmatrix}^{n_{k+l+1}+1}\right) \\
&= \begin{cases} \dfrac{2(-1)^{n-l}}{(n-l-1)!(k+l)}\dfrac{\partial^{n-l}R^\nu_{(k+l)/2}}{\partial\lambda^{n-l}}(\lambda;g,2\eta) & (k+l\colon \text{even}) \\ 0 & (k+l\colon \text{odd}), \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$\sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{k+l}\\ |\mathbf{n}|=n-l}} \mathrm{Tr}\Big(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq k+l}}\Big(\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n_j+1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\Big)\Big)$$
$$= \begin{cases} \dfrac{2(-1)^{n-l}}{(n-l)!}\dfrac{\partial^{n-l}R^{\nu}_{(k+l)/2}}{\partial\lambda^{n-l}}(\lambda;g,2\eta) & (k+l\colon \text{even})\\ 0 & (k+l\colon \text{odd}),\end{cases}$$

其中 $g:=\frac{1}{2}\underline{\mathsf{artanh}}\big(\frac{1}{\sqrt{\underline{\alpha\beta}}}\big)$, 因此 $\zeta(\widetilde{\mathsf{Q}}^{(\alpha,\beta,\eta)}_{\nu};\ n,\ \lambda)$ 的计算结果为

$$\begin{aligned}
&\zeta\big(\widetilde{\mathrm{Q}}^{(\alpha,\beta,\eta)}_{\nu};n,\lambda\big)=\mathrm{Tr}\big(B(\widetilde{\mathrm{Q}}^{(\alpha,\beta,\eta)}_{\nu}+\lambda)^{-n}B^{-1}\big)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}(-\Delta\lambda)^k\Delta^l\binom{k+l}{k}\\
&\quad\times\sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{k+l+1}\\ |\mathbf{n}|=n-l-1}}\mathrm{Tr}\Big(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq k+l}}\Big(\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n_j+1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\Big)\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n_{k+l+1}+1}\Big)\\
&\quad+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{n}(-\Delta\lambda)^k\Delta^l\binom{k+l-1}{k}\sum_{\substack{\mathbf{n}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{k+l}\\ |\mathbf{n}|=n-l}}\mathrm{Tr}\Big(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq k+l}}\Big(\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n_j+1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\Big)\Big)\\
&=\mathrm{Tr}\Big(\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n}\Big)\\
&\quad+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{0\leq l\leq n-1\\ k+l\geq 1\colon \text{even}}}(-\Delta\lambda)^k\Delta^l\binom{k+l}{k}\frac{2(-1)^{n-l}}{(n-l-1)!(k+l)}\frac{\partial^{n-l}R^{\nu}_{(k+l)/2}}{\partial\lambda^{n-l}}(\lambda;g,2\eta)\\
&\quad+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{1\leq l\leq n\\ k+l\colon \text{even}}}(-\Delta\lambda)^k\Delta^l\binom{k+l-1}{k}\frac{2(-1)^{n-l}}{(n-l)!}\frac{\partial^{n-l}R^{\nu}_{(k+l)/2}}{\partial\lambda^{n-l}}(\lambda;g,2\eta)\\
&=\mathrm{Tr}\Big(\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n}\Big)\\
&\quad+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{0\leq l\leq n\\ k+l\geq 1\colon \text{even}}}\lambda^k\Delta^{k+l}\binom{n}{l}\frac{2(-1)^{n+k+l}(k+1)_l}{(n-1)!(k+l)}\frac{\partial^{n-l}R^{\nu}_{(k+l)/2}}{\partial\lambda^{n-l}}(\lambda;g,2\eta)\\
&=\mathrm{Tr}\Big(\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n}\Big)\\
&\quad+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\min\{2m,n\}}\lambda^{2m-l}\Delta^{2m}\binom{n}{l}\frac{2(-1)^{n+2m}(2m-l+1)_l}{(n-1)!\cdot 2m}\frac{\partial^{n-l}R^{\nu}_{m}}{\partial\lambda^{n-l}}(\lambda;g,2\eta)\\
&=\mathrm{Tr}\Big(\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n}\Big)+\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Delta^{2m}}{m}\sum_{l=0}^{\min\{2m,n\}}\binom{n}{l}\Big(\frac{\partial^l}{\partial\lambda^l}\lambda^{2m}\Big)\frac{\partial^{n-l}R^{\nu}_{m}}{\partial\lambda^{n-l}}(\lambda;g,2\eta)\\
&=\mathrm{Tr}\Big(\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^{n}\Big)+\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Delta^{2m}}{m}\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\lambda^{2m}R^{\nu}_{m}(\lambda;g,2\eta).
\end{aligned}$$

于是，由于

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\left(\begin{bmatrix}\mathrm{h}_+^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{h}_-^{-1}\end{bmatrix}^n\right) &= \operatorname{Tr}\big(\mathrm{h}_+^{\nu}(\lambda;g,2\eta)^{-n}\big)+\operatorname{Tr}\big(\mathrm{h}_-^{\nu}(\lambda;g,2\eta)^{-n}\big)\\ &= 2^{-n}\zeta\left(n,\frac{\lambda+2\eta+\nu}{2}\right)+2^{-n}\zeta\left(n,\frac{\lambda-2\eta+\nu}{2}\right)\end{aligned}$$

由例 2.7，我们得到所需公式。 □

为后文使用，我们证明如下结果。

引理 3.3. 设 g、Δ、$\varepsilon\in\mathbb{R}$、$\lambda\in\mathbb{C}$、$n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$。我们假设 $\lambda\pm\varepsilon\notin-\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 且 $|\Delta|<C_\flat(\lambda,\varepsilon)^{-1}$。若 $\lim_{\nu\to\infty}R_m^\nu\big(2\lambda-\nu;\frac{g}{\sqrt{\nu}},2\varepsilon\big)$ 在 λ 中于(λ,g,ε)附近收敛于一个全纯函数，则我们有

$$\begin{aligned}&2^n\lim_{\nu\to\infty}\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_\nu^{(g/\sqrt{\nu},2\Delta,2\varepsilon)};n,2\lambda-\nu\big)\\ &=\zeta(n,\lambda+\varepsilon)+\zeta(n,\lambda-\varepsilon)+\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2\Delta)^{2m}}{m}\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\lim_{\nu\to\infty}R_m^\nu\left(2\lambda-\nu;\frac{g}{\sqrt{\nu}},2\varepsilon\right).\end{aligned}$$

证明. 由定理 3.2 (2)，我们有

$$\begin{aligned}&2^n\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_\nu^{(g/\sqrt{\nu},2\Delta,2\varepsilon)};n,2\lambda-\nu\big)\\ &=\zeta(n,\lambda+\varepsilon)+\zeta(n,\lambda-\varepsilon)+\frac{(-2)^n}{(n-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2\Delta)^{2m}}{m}\frac{\partial^n R_m^\nu}{\partial\lambda^n}\left(2\lambda-\nu;\frac{g}{\sqrt{\nu}},2\varepsilon\right)\\ &=\zeta(n,\lambda+\varepsilon)+\zeta(n,\lambda-\varepsilon)+\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2\Delta)^{2m}}{m}\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}R_m^\nu\left(2\lambda-\nu;\frac{g}{\sqrt{\nu}},2\varepsilon\right).\end{aligned}$$

我们取充分小的 $r>0$，使得球 $B:=\{\mu\in\mathbb{C}\mid|\mu-\lambda|\leq r\}$ 与 $\pm\varepsilon-\mathbb{Z}_{\geq 0}$不相交，并且 $C_\flat(B,\varepsilon):=\max_{\mu\in B}C_\flat(\mu,\varepsilon)$、$C'_\flat(B,\varepsilon):=\max_{\mu\in B}C'_\flat(\mu,\varepsilon)$满足$(C_\flat(\lambda,\varepsilon)\leq C_\flat(B,\varepsilon)<|\Delta|^{-1}$。于是我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|(2\Delta)^{2m}|}{m}\frac{n!}{2\pi}\oint_{\partial B}\left|R_m^\nu\left(2\mu-\nu;\frac{g}{\sqrt{\nu}},2\varepsilon\right)\right|\frac{|\mathrm{d}\mu|}{|(\mu-\lambda)^{n+1}|}\\ &\leq\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|2\Delta|^{2m}}{m}\frac{n!}{2\pi}\oint_{\partial B}C_\nu(2\mu-\nu,2\varepsilon)^{2m-2}C'_\nu(2\mu-\nu,2\varepsilon)^2\frac{|\mathrm{d}\mu|}{r^{n+1}}\\ &=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\Delta|^{2m}}{m}\frac{n!}{2\pi}\oint_{\partial B}C_\flat(\mu,\varepsilon)^{2m-2}C'_\flat(\mu,\varepsilon)^2\frac{|\mathrm{d}\mu|}{r^{n+1}}\\ &\leq\frac{n!}{r^n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\Delta|^{2m}}{m}C_\flat(B,\varepsilon)^{2m-2}C'_\flat(B,\varepsilon)^2<\infty\end{aligned}$$

关于 $\nu>0$一致成立。因此，根据控制收敛定理，

$$\begin{aligned}
&\lim_{\nu\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2\Delta)^{2m}}{m}\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}R_m^{\nu}\Big(2\lambda-\nu;\frac{g}{\sqrt{\nu}},2\varepsilon\Big)\\
&=\lim_{\nu\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2\Delta)^{2m}}{m}\frac{n!}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{\partial B}R_m^{\nu}\Big(2\mu-\nu;\frac{g}{\sqrt{\nu}},2\varepsilon\Big)\frac{\mathrm{d}\mu}{(\mu-\lambda)^{n+1}}\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2\Delta)^{2m}}{m}\frac{n!}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{\partial B}\lim_{\nu\to\infty}R_m^{\nu}\Big(2\mu-\nu;\frac{g}{\sqrt{\nu}},2\varepsilon\Big)\frac{\mathrm{d}\mu}{(\mu-\lambda)^{n+1}}\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2\Delta)^{2m}}{m}\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\lim_{\nu\to\infty}R_m^{\nu}\Big(2\lambda-\nu;\frac{g}{\sqrt{\nu}},2\varepsilon\Big)
\end{aligned}$$

当 $\lim_{\nu\to\infty}R_m^{\nu}\big(2\lambda-\nu;\ \frac{g}{\sqrt{\nu}},2\varepsilon\big)$ 在 $\lambda\in B$中全纯时成立。 □

由 (2.2)、(2.4)，对于 $g\in\mathbb{R}$, λ，$\varepsilon\in\mathbb{C}$，其中 $\lambda\pm\varepsilon\notin-\mathbb{Z}_{\geq0}$, $m\in\mathbb{Z}_{\geq1}$，有

$$R_m^{\flat}(\lambda;\,g,\varepsilon)=\mathrm{Tr}\big(\big((\mathsf{a}^{\dagger}\mathsf{a}+g(\mathsf{a}+\mathsf{a}^{\dagger})+g^2+\varepsilon+\lambda)^{-1}(\mathsf{a}^{\dagger}\mathsf{a}-g(\mathsf{a}+\mathsf{a}^{\dagger})+g^2-\varepsilon+\lambda)^{-1}\big)^m\big),$$

对于 $g\in\mathbb{R}$, λ，$\varepsilon\in\mathbb{C}$，其中$\lambda\pm\varepsilon\notin-\big(\mathbb{Z}_{\geq0}+\frac{1}{2}\big)$, $m\in\mathbb{Z}_{\geq1}$，有

$$\begin{aligned}
&R_m^{+}(\lambda;g,\varepsilon):=R_m^{1/2}(\lambda;g,\varepsilon)+R_m^{3/2}(\lambda;g,\varepsilon)\\
&=\mathrm{Tr}\bigg(\bigg(\bigg(\cosh(2g)\Big(\mathrm{a}^{\dagger}\mathrm{a}+\frac{1}{2}\Big)+\frac{\sinh(2g)}{2}(\mathrm{a}^2+(\mathrm{a}^{\dagger})^2)+\varepsilon+\lambda\bigg)^{-1}\\
&\qquad\times\bigg(\cosh(2g)\Big(\mathrm{a}^{\dagger}\mathrm{a}+\frac{1}{2}\Big)-\frac{\sinh(2g)}{2}(\mathrm{a}^2+(\mathrm{a}^{\dagger})^2)-\varepsilon+\lambda\bigg)^{-1}\bigg)^m\bigg),\\
&R_m^{-}(\lambda;g,\varepsilon):=R_m^{1/2}(\lambda;g,\varepsilon)-R_m^{3/2}(\lambda;g,\varepsilon)\\
&=\mathrm{Tr}\bigg(\bigg(\bigg(\cosh(2g)\Big(\mathrm{a}^{\dagger}\mathrm{a}+\frac{1}{2}\Big)+\frac{\sinh(2g)}{2}(\mathrm{a}^2+(\mathrm{a}^{\dagger})^2)+\varepsilon+\lambda\bigg)^{-1}\\
&\qquad\times\bigg(\cosh(2g)\Big(\mathrm{a}^{\dagger}\mathrm{a}+\frac{1}{2}\Big)-\frac{\sinh(2g)}{2}(\mathrm{a}^2+(\mathrm{a}^{\dagger})^2)-\varepsilon+\lambda\bigg)^{-1}\bigg)^m\Big|_{L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{even}}}\bigg)\\
&\quad-\mathrm{Tr}\bigg(\bigg(\bigg(\cosh(2g)\Big(\mathrm{a}^{\dagger}\mathrm{a}+\frac{1}{2}\Big)+\frac{\sinh(2g)}{2}(\mathrm{a}^2+(\mathrm{a}^{\dagger})^2)+\varepsilon+\lambda\bigg)^{-1}\\
&\qquad\times\bigg(\cosh(2g)\Big(\mathrm{a}^{\dagger}\mathrm{a}+\frac{1}{2}\Big)-\frac{\sinh(2g)}{2}(\mathrm{a}^2+(\mathrm{a}^{\dagger})^2)-\varepsilon+\lambda\bigg)^{-1}\bigg)^m\Big|_{L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{odd}}}\bigg).
\end{aligned}\tag{3.2}$$

另外，令

$$C(\lambda,\varepsilon):=\max\{C_{1/2}(\lambda,\varepsilon),C_{3/2}(\lambda,\varepsilon)\}=\max_{\delta\in\{\pm\},\ k\in\mathbb{Z}_{\geq0}}\frac{1}{\big|k+\lambda+\delta\varepsilon+\frac{1}{2}\big|}.$$

由定理 3.2，我们立即得到以下结果。

推论 3.4. *(1)* 设 $g,\Delta,\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{C}$。我们假设 $\lambda\pm\varepsilon\notin-\mathbb{Z}_{\geq0}$且 $|\Delta|<C_{\flat}(\lambda,\varepsilon)^{-1}$。那么对于 $n\in\mathbb{Z}_{\geq2}$，$(\widetilde{\mathrm{H}}_1^{(g,\Delta,\varepsilon)}\,\mathrm{QRM}+\lambda)^{-n}$ 是迹类，并且有

$$\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_{1\mathrm{QRM}}^{(g,\Delta,\varepsilon)};n,\lambda\big)=\zeta(n,\lambda+\varepsilon)+\zeta(n,\lambda-\varepsilon)+\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Delta^{2m}}{m}\frac{\partial^n R_m^{\flat}}{\partial\lambda^n}(\lambda;g,\varepsilon).$$

(2) 设 $g,\Delta,\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{C}$。我们假设 $\lambda\pm\varepsilon\notin-\big(\mathbb{Z}_{\geq 0}+\frac{1}{2}\big)$ 且 $|\Delta|<C(\lambda,\varepsilon)^{-1}$。那么对于 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$, $\big(\widetilde{\ }\mathrm{H}_2^{(g,\Delta,\varepsilon)}{}_{\mathrm{QRM}}+\lambda\big)^{-n}$ 是迹类，并且有

$$\begin{aligned}
&\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{2QRM}}^{(g,\Delta,\varepsilon)};n,\lambda\big)\\
&=\zeta\bigg(n,\lambda+\varepsilon+\frac{1}{2}\bigg)+\zeta\bigg(n,\lambda-\varepsilon+\frac{1}{2}\bigg)+\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Delta^{2m}}{m}\frac{\partial^n R_m^+}{\partial\lambda^n}(\lambda;g,\varepsilon),\\
&\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{2QRM}}^{(g,\Delta,\varepsilon)}\big|_{L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{even}}};n,\lambda\big)-\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{2QRM}}^{(g,\Delta,\varepsilon)}\big|_{L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{odd}}};n,\lambda\big)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\big(\lambda+\varepsilon+\frac{1}{2}+k\big)^n}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\big(\lambda-\varepsilon+\frac{1}{2}+k\big)^n}+\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Delta^{2m}}{m}\frac{\partial^n R_m^-}{\partial\lambda^n}(\lambda;g,\varepsilon).
\end{aligned}$$

(3) 令 $\alpha,\beta,\eta\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{C}$。我们假设 $\alpha\beta>1$, $\lambda\pm 2\eta\notin-\big(\mathbb{Z}_{\geq 0}+\frac{1}{2}\big)$ 和 $\big|\lambda\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\big|C(\lambda,2\eta)<1$。那么对于 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$, $\big(\widetilde{\ }\mathrm{H}^{(\alpha,\beta,\eta)}{}_{\mathrm{NCHO}}+\lambda\big)^{-n}$ 是迹类，并且有

$$\begin{aligned}
&\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{NCHO}}^{(\alpha,\beta,\eta)};n,\lambda\big)\\
&=\zeta\bigg(n,\lambda+2\eta+\frac{1}{2}\bigg)+\zeta\bigg(n,\lambda-2\eta+\frac{1}{2}\bigg)\\
&\quad+\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\bigg(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\bigg)^{2m}\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\lambda^{2m}R_m^+\bigg(\lambda;\frac{1}{2}\operatorname{artanh}\bigg(\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\bigg),2\eta\bigg),\\
&\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{NCHO}}^{(\alpha,\beta,\eta)}\big|_{L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{even}}};n,\lambda\big)-\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{NCHO}}^{(\alpha,\beta,\eta)}\big|_{L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{odd}}};n,\lambda\big)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\big(\lambda+2\eta+\frac{1}{2}+k\big)^n}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\big(\lambda-2\eta+\frac{1}{2}+k\big)^n}\\
&\quad+\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\bigg(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\bigg)^{2m}\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\lambda^{2m}R_m^-\bigg(\lambda;\frac{1}{2}\operatorname{artanh}\bigg(\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\bigg),2\eta\bigg).
\end{aligned}$$

注释 3.5。尤其是，若，则有

$$\begin{aligned}
&\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{NCHO}}^{(\alpha,\beta,0)};n,0\big)\\
&=2\zeta\bigg(n,\frac{1}{2}\bigg)+\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\bigg(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\bigg)^{2m}\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\lambda^{2m}R_m^+\bigg(\lambda;\frac{1}{2}\operatorname{artanh}\bigg(\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\bigg),0\bigg)\bigg|_{\lambda=0}\\
&=2\zeta\bigg(n,\frac{1}{2}\bigg)+\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\sum_{m=1}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2m}\frac{(2m)!}{m}\bigg(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\bigg)^{2m}\frac{\partial^{n-2m}R_m^+}{\partial\lambda^{n-2m}}\bigg(0;\frac{1}{2}\operatorname{artanh}\bigg(\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\bigg),0\bigg)\\
&=2\zeta\bigg(n,\frac{1}{2}\bigg)+\sum_{m=1}^{\lfloor n/2\rfloor}\bigg(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\bigg)^{2m}\frac{(-1)^n n}{m(n-2m)!}\frac{\partial^{n-2m}R_m^+}{\partial\lambda^{n-2m}}\bigg(0;\frac{1}{2}\operatorname{artanh}\bigg(\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\bigg),0\bigg).
\end{aligned}$$

将此与 *Kimoto–Wakayama* 的公式 *[22,* 定理 *2.6],*进行比较

$$\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{NCHO}}^{(\alpha,\beta,0)};n,0\big)=2\zeta\bigg(n,\frac{1}{2}\bigg)+2\sum_{m=1}^{\lfloor n/2\rfloor}\bigg(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\bigg)^{2m}R_{n,m}\bigg(\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta-1}}\bigg),$$

我们的 $R_m^+(\lambda;\ g,\varepsilon)$ 与 $R_{n,\ m}(\kappa)$ 在 *[22]* 中存在如下关系：

$$R_{n,m}(\sinh(2g))=\frac{(-1)^n n}{2m(n-2m)!}\frac{\partial^{n-2m}R_m^+}{\partial\lambda^{n-2m}}(0;g,0),$$

也就是说，我们有

$$R_m^+(\lambda;g,0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2m}{n+2m}R_{n+2m,m}(\sinh(2g))\lambda^n. \tag{3.3}$$

4 各项的积分表达式

本节中，我们给出以下各项的积分表达式

$$\begin{aligned}R_m^\flat(\lambda;g,\varepsilon)&:=\mathrm{Tr}\big(\big((\mathrm{d}\tau_\flat(X(g))+\varepsilon+\lambda)^{-1}(\mathrm{d}\tau_\flat(X(-g))-\varepsilon+\lambda)^{-1}\big)^m\big),\\ R_m^\nu(\lambda;g,\varepsilon)&:=\mathrm{Tr}\big(\big((\mathrm{d}\tau_\nu(Y(g))+\varepsilon+\lambda)^{-1}(\mathrm{d}\tau_\nu(Y(-g))-\varepsilon+\lambda)^{-1}\big)^m\big),\end{aligned}$$

其中，对于 $g\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}X(g)&:=\begin{bmatrix}0&-g&-g^2\\0&1&g\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-g&g^2/2\\0&1&-g\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&g&g^2/2\\0&1&g\\0&0&1\end{bmatrix}\in\mathfrak{g}_\flat^{\mathbb{C}},\\ Y(g)&:=\begin{bmatrix}-\cosh(2g)&-\sinh(2g)\\ \sinh(2g)&\cosh(2g)\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\cosh(g)&-\sinh(g)\\-\sinh(g)&\cosh(g)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cosh(g)&\sinh(g)\\ \sinh(g)&\cosh(g)\end{bmatrix}\in\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\end{aligned}$$

与例 2.3、2.7 中的定义相同。

定理 4.1。*(1)* 设 $g\in\mathbb{R}$, $\lambda,\varepsilon\in\mathbb{C}$, $m\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$。若 实部$\lambda-|$实部 $\varepsilon|>0$，则有

$$R_m^\flat(\lambda;g,\varepsilon)=\int_{[0,1]^{2m}}\exp\Big(-4g^2\frac{\Phi_m(u_1,\dots,u_{2m})}{1-\prod_{j=1}^{2m}u_j}\Big)\frac{\prod_{j=1}^{2m}u_j^{\lambda-(-1)^j\varepsilon-1}}{1-\prod_{j=1}^{2m}u_j}\prod_{j=1}^{2m}\mathrm{d}u_j,$$

其中

$$\Phi_m(u_1,\dots,u_{2m}):=m\Big(1+\prod_{j=1}^{2m}u_j\Big)+\sum_{l=1}^{2m-1}(-1)^l\sum_{k=1}^{2m}\prod_{j=k}^{k+l-1}u_j, \tag{4.1}$$

其中$u_{2m+j}:=u_j$，对于 $j=1$，.....，$2m$。

(2) 设 $\nu>0$，$g\in\mathbb{R}$，λ，$\varepsilon\in\mathbb{C}$，$m\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$。若实部$\lambda-|$实部 $\varepsilon|+\nu>0$，则我们有 e

$$\begin{aligned}R_m^\nu(\lambda;g,\varepsilon)=\int_{[0,1]^{2m}}&\frac{\big(\frac{1}{2}(\sqrt{\Psi_m^g(u_1,\dots,u_{2m})+2}-\sqrt{\Psi_m^g(u_1,\dots,u_{2m})-2})\big)^{2\nu-2}}{\sqrt{\Psi_m^g(u_1,\dots,u_{2m})+2}\sqrt{\Psi_m^g(u_1,\dots,u_{2m})-2}}\\ &\times\prod_{j=1}^{2m}u_j^{\lambda-(-1)^j\varepsilon-1}\,\mathrm{d}u_j,\end{aligned}$$

其中

$$\Psi_m^g(u_1,\dots,u_{2m}):=\mathrm{tr}\Big(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq 2m}}\Big(\begin{bmatrix}\cosh(2g)&(-1)^j\sinh(2g)\\(-1)^j\sinh(2g)&\cosh(2g)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_j^{-1}&0\\0&u_j\end{bmatrix}\Big)\Big). \tag{4.2}$$

(3) 设 $g\in\mathbb{R}$、 λ、 $\varepsilon\in\mathbb{C}$、 $m\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$。如果 实部 $\lambda-|$实部 $\varepsilon|>0$，则有

$$\lim_{\nu\to\infty} 2^{2m}R_m^{\nu}\left(2\lambda-\nu;\frac{g}{\sqrt{\nu}},2\varepsilon\right)=R_m^{\flat}(\lambda;g,\varepsilon).$$

例如，我们有

$$\Phi_1(u_1,u_2)=1+u_1u_2-u_1-u_2=(1-u_1)(1-u_2),$$
$$\Phi_2(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)=2(1+u_1u_2u_3u_4)-u_1-u_2-u_3-u_4+u_1u_2+u_2u_3+u_3u_4+u_4u_1$$
$$-u_1u_2u_3-u_2u_3u_4-u_3u_4u_1-u_4u_1u_2,$$
$$\Psi_1^g(u_1,u_2)=\mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix}\cosh(2g) & -\sinh(2g)\\ -\sinh(2g) & \cosh(2g)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^{-1} & 0\\ 0 & u_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cosh(2g) & \sinh(2g)\\ \sinh(2g) & \cosh(2g)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_2^{-1} & 0\\ 0 & u_2\end{bmatrix}\right)$$
$$=(u_1^{-1}u_2^{-1}+u_1u_2)\cosh^2(2g)-(u_1u_2^{-1}+u_1^{-1}u_2)\sinh^2(2g).$$

为证明该定理，我们先准备以下引理。对于 $u\in(0,\ 1)$，令

$$u^{X(g)}:=\exp(X(g)\log u)\in\Gamma_{\flat}^{\circ},\qquad u^{Y(g)}:=\exp(Y(g)\log u)\in\Gamma^{\circ}$$

如例 2.3、2.7 中所述，因此我们有

$$\mathrm{Tr}(\tau_{\flat}(u^{X(g)}))=\mathrm{Tr}(\tau_{\flat}(u^{X(0)}))=\frac{1}{1-u},\quad \mathrm{Tr}(\tau_{\nu}(u^{Y(g)}))=\mathrm{Tr}(\tau_{\nu}(u^{Y(0)}))=\frac{u^{\nu}}{1-u^2}.\quad(4.3)$$

引理 4.2。 *(1)* 设 $g\in\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, $u_1,\ldots,u_{2m}\in(0,1)$。则有

$$\left\|\tau_{\flat}\left(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq 2m}}u_j^{X(-(-1)^jg)}\right)\right\|_{\mathrm{Tr}}\leq\frac{1}{1-\prod_{j=1}^{2m}u_j},$$
$$\mathrm{Tr}\left(\tau_{\flat}\left(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq 2m}}u_j^{X(-(-1)^jg)}\right)\right)=\exp\left(-4g^2\frac{\Phi_m(u_1,\ldots,u_{2m})}{1-\prod_{j=1}^{2m}u_j}\right)\frac{1}{1-\prod_{j=1}^{2m}u_j},$$

其中 $\Phi_m(u_1,\ldots,u_{2m})$ 与式 *(4.1)* 中相同。

(2) 令 $\nu>0$、 $g\in\mathbb{R}$、 $m\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$、 u_1、…、 $u_{2m}\in(0,1)$。则有

$$\left\|\tau_{\nu}\left(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq 2m}}u_j^{Y(-(-1)^jg)}\right)\right\|_{\mathrm{Tr}}\leq\frac{\prod_{j=1}^{2m}u_j^{\nu}}{1-\prod_{j=1}^{2m}u_j^2},$$
$$\mathrm{Tr}\left(\tau_{\nu}\left(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq 2m}}u_j^{Y(-(-1)^jg)}\right)\right)$$
$$=\frac{\left(\frac{1}{2}(\sqrt{\Psi_m^g(u_1,\ldots,u_{2m})+2}-\sqrt{\Psi_m^g(u_1,\ldots,u_{2m})-2})\right)^{2\nu-2}}{\sqrt{\Psi_m^g(u_1,\ldots,u_{2m})+2}\sqrt{\Psi_m^g(u_1,\ldots,u_{2m})-2}},$$

其中 $\Psi_m^g(u_1,\ldots,u_{2m})$ 与 *(4.2)* 中的定义相同。

(3) 设 $g\in\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, $u_1,\ldots,u_{2m}\in(0,1)$。则有

$$\lim_{\nu\to\infty}\mathrm{Tr}\left(\tau_{\nu}\left(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq 2m}}u_j^{Y(-(-1)^jg/\sqrt{\nu})}\right)\right)\prod_{j=1}^{2m}u_j^{-\nu}=\mathrm{Tr}\left(\tau_{\flat}\left(\overrightarrow{\prod_{1\leq j\leq 2m}}u_j^{2X(-(-1)^jg)}\right)\right).$$

证明。 (1) 首先，设 $u_j = e^{-x_j} \in (0,1)$，并令 $p_j := (\sum_{k=1}^{2m} x_k)/x_j$，使得 $\sum_{j=1}^{2m} p_j^{-1} = 1$。于是，由 H¨older 不等式 (2.1) 和 (4.3)，可得

$$\begin{aligned}
&\left\| \tau_{\flat}\Big(\overrightarrow{\prod_{1\le j\le 2m}} u_j^{X(-(-1)^j g)} \Big) \right\|_{\mathrm{Tr}} \le \prod_{j=1}^{2m} \|\tau_{\flat}(e^{-x_j X(-(-1)^j g)})\|_{p_j} \\
&= \prod_{j=1}^{2m} \big(\mathrm{Tr}\big(\tau_{\flat}(e^{-\sum_{k=1}^{2m} x_k X(-(-1)^j g)})\big)\big)^{1/p_j} = \mathrm{Tr}\big(\tau_{\flat}(e^{-\sum_{k=1}^{2m} x_k X(0)})\big) \\
&= \frac{1}{1-e^{-\sum_{k=1}^{2m} x_k}} = \frac{1}{1-\prod_{j=1}^{2m} u_j} < \infty.
\end{aligned}$$

接下来，我们令

$$\begin{aligned}
\gamma = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &:= \begin{bmatrix} 1 & -g & g^2/2 \\ 0 & 1 & -g \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Big(\overrightarrow{\prod_{1\le j\le 2m}} u_j^{X(-(-1)^j g)} \Big) \begin{bmatrix} 1 & g & g^2/2 \\ 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \overrightarrow{\prod_{1\le j\le 2m}} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2(-1)^j g & 2g^2 \\ 0 & 1 & 2(-1)^j g \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right),
\end{aligned}$$

使得

$$\mathrm{Tr}\left(\tau_{\flat}\Big(\overrightarrow{\prod_{1\le j\le 2m}} u_j^{X(-(-1)^j g)} \Big) \right) = \mathrm{Tr}(\tau_{\flat}(\gamma)) = \frac{\exp\big(-\frac{ad+b(1-c)}{1-c}\big)}{1-c}$$

根据定理2.2。为了计算 γ，由于我们有

$$\gamma \in \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{C}g & \mathbb{C}g^2 \\ 0 & \mathbb{C} & \mathbb{C}g \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由对 m的归纳可知，只需计算 g^n 在 $n = 0$，1，2时的系数。然后， g^0 的系数可计算为

$$\overrightarrow{\prod_{1\le j\le 2m}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \prod_{j=1}^{2m} u_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

g^1 的值计算为

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{2m} \overrightarrow{\prod_{1\le j\le k-1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2(-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2(-1)^k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overrightarrow{\prod_{k\le j\le 2m}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^{2m} \begin{bmatrix} 0 & 2(-1)^k \prod_{j=k}^{2m} u_j & 0 \\ 0 & 0 & 2(-1)^k \prod_{j=1}^{k-1} u_j \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

g^2 的值计算为

$$
\begin{aligned}
&\sum_{1\le k<l\le 2m} \overrightarrow{\prod_{1\le j\le k-1}} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&u_j&0\\0&0&1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0&2(-1)^k&0\\0&0&2(-1)^k\\0&0&0\end{bmatrix} \\
&\quad\times \overrightarrow{\prod_{k\le j\le l-1}} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&u_j&0\\0&0&1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0&2(-1)^l&0\\0&0&2(-1)^l\\0&0&0\end{bmatrix} \overrightarrow{\prod_{l\le j\le 2m}} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&u_j&0\\0&0&1\end{bmatrix} \\
&\quad+\sum_{k=1}^{2m} \overrightarrow{\prod_{1\le j\le k-1}} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&u_j&0\\0&0&1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \overrightarrow{\prod_{k\le j\le 2m}} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&u_j&0\\0&0&1\end{bmatrix} \\
&= \sum_{1\le k<l\le 2m} \begin{bmatrix}0&0&4(-1)^{k+l}\prod_{j=k}^{l-1}u_j\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{2m}\begin{bmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \\
&= \sum_{1\le k<l\le 2m} \begin{bmatrix}0&0&4(-1)^{k+l}\prod_{j=k}^{l-1}u_j\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0&4m\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

因此我们有

$$
\gamma = \begin{bmatrix}1 & 2g\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k\prod_{j=k}^{2m}u_j & 4g^2\sum_{1\le k<l\le 2m}(-1)^{k+l}\prod_{j=k}^{l-1}u_j + 4mg^2\\ 0 & \prod_{j=1}^{2m}u_j & 2g\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k\prod_{j=1}^{k-1}u_j\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.
$$

然后， $ad+b(1-c)$ 计算如下

$$
\begin{aligned}
ad+b(1-c) &= \left(2g\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k\prod_{j=k}^{2m}u_j\right)\left(2g\sum_{l=1}^{2m}(-1)^l\prod_{j=1}^{l-1}u_j\right) \\
&\quad+\left(4g^2\sum_{1\le k<l\le 2m}(-1)^{k+l}\prod_{j=k}^{l-1}u_j + 4mg^2\right)\left(1-\prod_{j=1}^{2m}u_j\right) \\
&= 4g^2\left(\sum_{k=1}^{2m}\prod_{j=1}^{2m}u_j + \sum_{1\le k<l\le 2m}(-1)^{k+l}\prod_{j=1}^{2m}u_j\prod_{j=k}^{l-1}u_j + \sum_{1\le l<k\le 2m}(-1)^{k+l}\prod_{j=1}^{l-1}u_j\prod_{j=k}^{2m}u_j\right) \\
&\quad+4g^2\left(\sum_{1\le k<l\le 2m}(-1)^{k+l}\prod_{j=k}^{l-1}u_j - \sum_{1\le k<l\le 2m}(-1)^{k+l}\prod_{j=1}^{2m}u_j\prod_{j=k}^{l-1}u_j + m\left(1-\prod_{j=1}^{2m}u_j\right)\right) \\
&= 4g^2\left(2m\prod_{j=1}^{2m}u_j + \sum_{1\le l<k\le 2m}(-1)^{k+l}\prod_{j=k}^{2m+l-1}u_j + \sum_{1\le k<l\le 2m}(-1)^{k+l}\prod_{j=k}^{l-1}u_j + m\left(1-\prod_{j=1}^{2m}u_j\right)\right) \\
&= 4g^2\left(m\left(1+\prod_{j=1}^{2m}u_j\right) + \sum_{l'=1}^{2m-1}(-1)^{l'}\sum_{k=2m-l'+1}^{2m}\prod_{j=k}^{k+l'-1}u_j + \sum_{l'=1}^{2m-1}(-1)^{l'}\sum_{k=1}^{2m-l'}\prod_{j=k}^{k+l'-1}u_j\right) \\
&= 4g^2\left(m\left(1+\prod_{j=1}^{2m}u_j\right) + \sum_{l=1}^{2m-1}(-1)^{l}\sum_{k=1}^{2m}\prod_{j=k}^{k+l-1}u_j\right) = 4g^2\Phi_m(u_1,\dots,u_{2m}),
\end{aligned}
$$

whe我们在第 4 个等式处代入 $2m+l-k=:l'$ 或 $l-k=:l'$。因此，根据定理 2， 2,

我们得到

$$\mathrm{Tr}(\tau_\flat(\gamma)) = \frac{\exp\big(-\frac{ad+b(1-c)}{1-c}\big)}{1-c} = \exp\bigg(-4g^2\frac{\Phi_m(u_1,\dots,u_{2m})}{1-\prod_{j=1}^{2m}u_j}\bigg)\frac{1}{1-\prod_{j=1}^{2m}u_j}.$$

(2) 同样，令 $u_j = e^{-x_j} \in (0,\ 1)$，并设 $p_j := (\sum_{k=1}^{2m} x_k)/x_j$，于是 $\sum_{j=1}^{2m} p_j^{-1} = 1$。由 H¨older 不等式 (2.1) 和 (4.3)，可得

$$\begin{aligned}
\bigg\|\tau_\nu\bigg(\overrightarrow{\prod_{1\le j\le 2m}} u_j^{Y(-(-1)^j g)}\bigg)\bigg\|_{\mathrm{Tr}} &\le \prod_{j=1}^{2m}\|\tau_\nu(e^{-x_j Y(-(-1)^j g)})\|_{p_j}\\
&= \prod_{j=1}^{2m}\big(\mathrm{Tr}\big(\tau_\nu(e^{-\sum_{k=1}^{2m}x_k Y(-(-1)^j g)})\big)\big)^{1/p_j} = \mathrm{Tr}\big(\tau_\nu(e^{-\sum_{k=1}^{2m}x_k Y(0)})\big)\\
&= \frac{e^{-\nu\sum_{k=1}^{2m}x_k}}{1-e^{-2\sum_{k=1}^{2m}x_k}} = \frac{\prod_{j=1}^{2m}u_j^\nu}{1-\prod_{j=1}^{2m}u_j^2} < \infty.
\end{aligned}$$

接下来，令

$$\begin{aligned}
\gamma &:= \begin{bmatrix}\cosh(g) & -\sinh(g)\\ -\sinh(g) & \cosh(g)\end{bmatrix}\bigg(\overrightarrow{\prod_{1\le j\le 2m}} u_j^{Y(-(-1)^j g)}\bigg)\begin{bmatrix}\cosh(g) & \sinh(g)\\ \sinh(g) & \cosh(g)\end{bmatrix}\\
&= \overrightarrow{\prod_{1\le j\le 2m}}\bigg(\begin{bmatrix}\cosh(2g) & (-1)^j\sinh(2g)\\ (-1)^j\sinh(2g) & \cosh(2g)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_j^{-1} & 0\\ 0 & u_j\end{bmatrix}\bigg),
\end{aligned}$$

于是 $\mathrm{tr}(\gamma) = \Psi_m^g(u_1,\dots,u_{2m})$，由定理 2.6，

$$\mathrm{Tr}\bigg(\tau_\nu\bigg(\overrightarrow{\prod_{1\le j\le 2m}} u_j^{Y(-(-1)^j g)}\bigg)\bigg) = \mathrm{Tr}(\tau_\nu(\gamma)) = \frac{\mu(\gamma)^\nu}{1-\mu(\gamma)^2},$$

其中 $\mu(\gamma)$ 是 $\gamma \in M(2,\ \mathbb{C})$ 的特征值，且满足 $|\mu| < 1$。于是，对于 $u_j \in (0,\ 1)$，由于 $\gamma \in \Gamma^\circ \cap SL(2,\ \mathbb{R})$，$\mathrm{tr}(\gamma) \in \mathbb{R}$ 成立；由定理 2.5 (2)，$|\mathrm{tr}(\gamma)| > 2$ 成立。此外，由于γ和 **I** 属于 $\Gamma \cap SL(2,\ \mathbb{R})$ 的同一路径连通分支，$\mathrm{tr}(\gamma) > 2$ 成立。因此可得

$$\mu(\gamma)^{\pm 1} = \frac{1}{2}\big(\mathrm{tr}(\gamma) \mp \sqrt{\mathrm{tr}(\gamma)^2-4}\big) = \bigg(\frac{1}{2}\big(\sqrt{\mathrm{tr}(\gamma)+2} \mp \sqrt{\mathrm{tr}(\gamma)-2}\big)\bigg)^2,$$

and

$$\begin{aligned}
\frac{\mu(\gamma)^\nu}{1-\mu(\gamma)^2} &= \frac{\mu(\gamma)^{\nu-1}}{\mu(\gamma)^{-1}-\mu(\gamma)} = \frac{\big(\frac{1}{2}(\sqrt{\mathrm{tr}(\gamma)+2}-\sqrt{\mathrm{tr}(\gamma)-2})\big)^{2\nu-2}}{\sqrt{\mathrm{tr}(\gamma)+2}\sqrt{\mathrm{tr}(\gamma)-2}}\\
&= \frac{\big(\frac{1}{2}(\sqrt{\Psi_m^g(u_1,\dots,u_{2m})+2}-\sqrt{\Psi_m^g(u_1,\dots,u_{2m})-2})\big)^{2\nu-2}}{\sqrt{\Psi_m^g(u_1,\dots,u_{2m})+2}\sqrt{\Psi_m^g(u_1,\dots,u_{2m})-2}}.
\end{aligned}$$

因此，我们得到所需的公式。

（3）由于

$$
\begin{aligned}
&\Psi_m^{g/\sqrt{\nu}}(u_1,\dots,u_{2m})\prod_{j=1}^{2m}u_j\\
&=\cosh^{2m}\Big(\frac{2g}{\sqrt{\nu}}\Big)\operatorname{tr}\Big(\overrightarrow{\prod_{1\le j\le 2m}}\Big(\begin{bmatrix}1 & (-1)^j\tanh(2g/\sqrt{\nu})\\ (-1)^j\tanh(2g/\sqrt{\nu}) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & u_j^2\end{bmatrix}\Big)\Big)\\
&=\Big(1+\frac{4mg^2}{\nu}\Big)\operatorname{tr}\Big(\overrightarrow{\prod_{1\le j\le 2m}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & u_j^2\end{bmatrix}\Big)+\frac{4g^2}{\nu}\sum_{1\le k<l\le 2m}(-1)^{k+l}\\
&\quad\times\operatorname{tr}\Big(\overrightarrow{\prod_{1\le j\le k-1}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & u_j^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\overrightarrow{\prod_{k\le j\le l-1}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & u_j^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\overrightarrow{\prod_{l\le j\le 2m}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & u_j^2\end{bmatrix}\Big)+O(\nu^{-2})\\
&=\Big(1+\frac{4mg^2}{\nu}\Big)\Big(1+\prod_{j=1}^{2m}u_j^2\Big)+\frac{4g^2}{\nu}\sum_{1\le k<l\le 2m}(-1)^{k+l}\Big(\prod_{j=k}^{l-1}u_j^2+\prod_{j=l}^{2m+k-1}u_j^2\Big)+O(\nu^{-2})\\
&=\Big(1+\frac{4mg^2}{\nu}\Big)\Big(1+\prod_{j=1}^{2m}u_j^2\Big)\\
&\quad+\frac{4g^2}{\nu}\Big(\sum_{l'=1}^{2m-1}(-1)^{l'}\sum_{k=1}^{2m-l'}\prod_{j=k}^{k+l'-1}u_j^2+\sum_{l'=1}^{2m-1}(-1)^{l'}\sum_{k'=2m-l'+1}^{2m}\prod_{j=k'}^{k'+l'-1}u_j^2\Big)+O(\nu^{-2})\\
&=\Big(1+\frac{4mg^2}{\nu}\Big)\Big(1+\prod_{j=1}^{2m}u_j^2\Big)+\frac{4g^2}{\nu}\sum_{l=1}^{2m-1}(-1)^{l}\sum_{k=1}^{2m}\prod_{j=k}^{k+l-1}u_j^2+O(\nu^{-2})\\
&=1+\prod_{j=1}^{2m}u_j^2+\frac{4g^2}{\nu}\Phi_m(u_1^2,\dots,u_{2m}^2)+O(\nu^{-2})
\end{aligned}
$$

成立，其中 $\nu\to\infty$，我们令 $(k,\ l-k)=:(k,\ l')$ 或 $(l,\ 2m+k-l)=:(k',\ l')$ 在第 4 个等式处，有

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\Psi_m^{g/\sqrt{\nu}}(u_1,\dots,u_{2m})\pm 2}\\
&=\Big(\prod_{j=1}^{2m}u_j^{-1}\Big(1\pm 2\prod_{j=1}^{2m}u_j+\prod_{j=1}^{2m}u_j^2+\frac{4g^2}{\nu}\Phi_m(u_1^2,\dots,u_{2m}^2)+O(\nu^{-2})\Big)\Big)^{1/2}\\
&=\prod_{j=1}^{2m}u_j^{-1/2}\Big(1\pm\prod_{j=1}^{2m}u_j\Big)\Big(1+\frac{4g^2}{\nu}\Big(1\pm\prod_{j=1}^{2m}u_j\Big)^{-2}\Phi_m(u_1^2,\dots,u_{2m}^2)+O(\nu^{-2})\Big)^{1/2}\\
&=\prod_{j=1}^{2m}u_j^{-1/2}\Big(1\pm\prod_{j=1}^{2m}u_j\Big)\Big(1+\frac{2g^2}{\nu}\Big(1\pm\prod_{j=1}^{2m}u_j\Big)^{-2}\Phi_m(u_1^2,\dots,u_{2m}^2)+O(\nu^{-2})\Big)\\
&=\prod_{j=1}^{2m}u_j^{-1/2}\Big(1\pm\prod_{j=1}^{2m}u_j+\frac{2g^2}{\nu}\Big(1\pm\prod_{j=1}^{2m}u_j\Big)^{-1}\Phi_m(u_1^2,\dots,u_{2m}^2)+O(\nu^{-2})\Big),
\end{aligned}
$$

因此我们得到

$$
\operatorname{Tr}\Big(\tau_\nu\Big(\overrightarrow{\prod_{1\le j\le 2m}}u_j^{Y(-(-1)^j g/\sqrt{\nu})}\Big)\Big)\prod_{j=1}^{2m}u_j^{-\nu}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\Big(\frac{1}{2}\Big(\sqrt{\Psi_m^{g/\sqrt{\nu}}(u_1,\dots,u_{2m})+2}-\sqrt{\Psi_m^{g/\sqrt{\nu}}(u_1,\dots,u_{2m})-2}\Big)\Big)^{2\nu-2}}{\sqrt{\Psi_m^{g/\sqrt{\nu}}(u_1,\dots,u_{2m})+2}\sqrt{\Psi_m^{g/\sqrt{\nu}}(u_1,\dots,u_{2m})-2}}\prod_{j=1}^{2m}u_j^{-\nu}\\
&= \Bigg(\prod_{j=1}^{2m}u_j^{-1/2}\Bigg(\prod_{j=1}^{2m}u_j+\frac{g^2}{\nu}\Bigg(\frac{\Phi_m(u_1^2,\dots,u_{2m}^2)}{1+\prod_{j=1}^{2m}u_j}-\frac{\Phi_m(u_1^2,\dots,u_{2m}^2)}{1-\prod_{j=1}^{2m}u_j}\Bigg)+O(\nu^{-2})\Bigg)\Bigg)^{2\nu-2}\\
&\quad\times\Bigg(\prod_{j=1}^{2m}u_j^{-1}\Bigg(1+\prod_{j=1}^{2m}u_j+O(\nu^{-1})\Bigg)\Bigg(1-\prod_{j=1}^{2m}u_j+O(\nu^{-1})\Bigg)\Bigg)^{-1}\prod_{j=1}^{2m}u_j^{-\nu}\\
&= \Bigg(\prod_{j=1}^{2m}u_j^{1/2}\Bigg(1-\frac{2g^2}{\nu}\frac{\Phi_m(u_1^2,\dots,u_{2m}^2)}{1-\prod_{j=1}^{2m}u_j^2}+O(\nu^{-2})\Bigg)\Bigg)^{2\nu-2}\frac{\prod_{j=1}^{2m}u_j^{-\nu}}{\prod_{j=1}^{2m}u_j^{-1}\big(1-\prod_{j=1}^{2m}u_j^2+O(\nu^{-1})\big)}\\
&= \Bigg(1-\frac{2g^2}{\nu}\frac{\Phi_m(u_1^2,\dots,u_{2m}^2)}{1-\prod_{j=1}^{2m}u_j^2}+O(\nu^{-2})\Bigg)^{2\nu-2}\frac{1}{1-\prod_{j=1}^{2m}u_j^2+O(\nu^{-1})}\\
&\longrightarrow \exp\Bigg(-4g^2\frac{\Phi_m(u_1^2,\dots,u_{2m}^2)}{1-\prod_{j=1}^{2m}u_j^2}\Bigg)\frac{1}{1-\prod_{j=1}^{2m}u_j^2}=\mathrm{Tr}\Bigg(\tau_\flat\Bigg(\overrightarrow{\prod_{1\le j\le 2m}}u_j^{2X(-(-1)^jg)}\Bigg)\Bigg)
\end{aligned}
$$

作为 $\nu\to\infty$。 □

定理 *4.1* 的证明。(1)、(2) 当 $\mathrm{Re}(\lambda\pm\varepsilon)>0$ 时，$(\mathrm{d}\tau_\flat(X(\pm g))+\lambda\pm\varepsilon)^{-1}$ 表示为

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{d}\tau_\flat(X(\pm g))+\lambda\pm\varepsilon)^{-1}&=\int_0^\infty e^{-x\mathrm{d}\tau_\flat(X(\pm g))}e^{-x(\lambda\pm\varepsilon)}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty\tau_\flat(e^{-xX(\pm g)})e^{-x(\lambda\pm\varepsilon)}\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\tau_\flat(u^{X(\pm g)})u^{\lambda\pm\varepsilon-1}\,\mathrm{d}u,
\end{aligned}
$$

而当 $\mathrm{Re}(\lambda\pm\varepsilon)+\nu>0$ 时，$(\mathrm{d}\tau_\nu(Y(\pm g))+\lambda\pm\varepsilon)^{-1}$ 表示为

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{d}\tau_\nu(Y(\pm g))+\lambda\pm\varepsilon)^{-1}&=\int_0^\infty e^{-x\mathrm{d}\tau_\nu(Y(\pm g))}e^{-x(\lambda\pm\varepsilon)}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty\tau_\nu(e^{-xY(\pm g)})e^{-x(\lambda\pm\varepsilon)}\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\tau_\nu(u^{Y(\pm g)})u^{\lambda\pm\varepsilon-1}\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

因此我们有

$$
\begin{aligned}
&\big((\mathrm{d}\tau_\flat(X(+g))+\lambda+\varepsilon)^{-1}(\mathrm{d}\tau_\flat(X(-g))+\lambda-\varepsilon)^{-1}\big)^m\\
&=\int_{[0,1]^{2m}}\tau_\flat(u_1^{X(+g)}u_2^{X(-g)}\cdots u_{2m-1}^{X(+g)}u_{2m}^{X(-g)})u_1^{\lambda+\varepsilon-1}u_2^{\lambda-\varepsilon-1}\cdots u_{2m-1}^{\lambda+\varepsilon-1}u_{2m}^{\lambda-\varepsilon-1}\,\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_{2m},\\
&\big((\mathrm{d}\tau_\nu(Y(+g))+\lambda+\varepsilon)^{-1}(\mathrm{d}\tau_\nu(Y(-g))+\lambda-\varepsilon)^{-1}\big)^m\\
&=\int_{[0,1]^{2m}}\tau_\nu(u_1^{Y(+g)}u_2^{Y(-g)}\cdots u_{2m-1}^{Y(+g)}u_{2m}^{Y(-g)})u_1^{\lambda+\varepsilon-1}u_2^{\lambda-\varepsilon-1}\cdots u_{2m-1}^{\lambda+\varepsilon-1}u_{2m}^{\lambda-\varepsilon-1}\,\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_{2m}.
\end{aligned}
$$

由于下述条件成立，这些积分关于迹类范数以 Bochner 积分的形式收敛

$$
\begin{aligned}
&\big\|\big((\mathrm{d}\tau_\flat(X(+g))+\lambda+\varepsilon)^{-1}(\mathrm{d}\tau_\flat(X(-g))+\lambda-\varepsilon)^{-1}\big)^m\big\|_{\mathrm{Tr}}\\
&\le\int_{[0,1]^{2m}}\Bigg\|\tau_\flat\Bigg(\overrightarrow{\prod_{1\le j\le 2m}}u_j^{X(-(-1)^jg)}\Bigg)\Bigg\|_{\mathrm{Tr}}\prod_{j=1}^{2m}|u_j^{\lambda-(-1)^j\varepsilon-1}|\prod_{j=1}^{2m}\mathrm{d}u_j
\end{aligned}
$$

$$\le \int_{[0,1]^{2m}} \frac{1}{1-\prod_{j=1}^{2m} u_j} \prod_{j=1}^{2m} u_j^{\mathrm{Re}(\lambda-(-1)^j\varepsilon)-1}\,\mathrm{d}u_j = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{[0,1]^{2m}} \prod_{j=1}^{2m} u_j^{\mathrm{Re}(\lambda-(-1)^j\varepsilon)+k-1}\,\mathrm{d}u_j$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\mathrm{Re}(\lambda+\varepsilon)+k)^m(\mathrm{Re}(\lambda-\varepsilon)+k)^m} < \infty,$$

and

$$\big\|\big((\mathrm{d}\tau_\nu(Y(+g))+\lambda+\varepsilon)^{-1}(\mathrm{d}\tau_\nu(Y(-g))+\lambda-\varepsilon)^{-1}\big)^m\big\|_{\mathrm{Tr}}$$
$$\le \int_{[0,1]^{2m}} \bigg\|\tau_\nu\Big(\overrightarrow{\prod_{1\le j\le 2m}} u_j^{Y(-(-1)^j g)}\Big)\bigg\|_{\mathrm{Tr}} \prod_{j=1}^{2m} |u_j^{\lambda-(-1)^j\varepsilon-1}| \prod_{j=1}^{2m} \mathrm{d}u_j$$
$$\le \int_{[0,1]^{2m}} \frac{\prod_{j=1}^{2m} u_j^{\nu}}{1-\prod_{j=1}^{2m} u_j^2} \prod_{j=1}^{2m} u_j^{\mathrm{Re}(\lambda-(-1)^j\varepsilon)-1}\,\mathrm{d}u_j = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{[0,1]^{2m}} \prod_{j=1}^{2m} u_j^{\mathrm{Re}(\lambda-(-1)^j\varepsilon)+\nu+2k-1}\,\mathrm{d}u_j$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\mathrm{Re}(\lambda+\varepsilon)+\nu+2k)^m(\mathrm{Re}(\lambda-\varepsilon)+\nu+2k)^m} < \infty$$

成立。因此，它们的迹计算如下

$$\begin{aligned}
R_m^\flat(\lambda;g,\varepsilon) &= \mathrm{Tr}\big(\big((\mathrm{d}\tau_\flat(X(+g))+\lambda+\varepsilon)^{-1}(\mathrm{d}\tau_\flat(X(-g))+\lambda-\varepsilon)^{-1}\big)^m\big)\\
&= \int_{[0,1]^{2m}} \mathrm{Tr}\bigg(\tau_\flat\Big(\overrightarrow{\prod_{1\le j\le 2m}} u_j^{X(-(-1)^j g)}\Big)\bigg) \prod_{j=1}^{2m} u_j^{\lambda-(-1)^j\varepsilon-1} \prod_{j=1}^{2m} \mathrm{d}u_j,\\
R_m^\nu(\lambda;g,\varepsilon) &= \mathrm{Tr}\big(\big((\mathrm{d}\tau_\nu(Y(+g))+\lambda+\varepsilon)^{-1}(\mathrm{d}\tau_\nu(Y(-g))+\lambda-\varepsilon)^{-1}\big)^m\big)\\
&= \int_{[0,1]^{2m}} \mathrm{Tr}\bigg(\tau_\nu\Big(\overrightarrow{\prod_{1\le j\le 2m}} u_j^{Y(-(-1)^j g)}\Big)\bigg) \prod_{j=1}^{2m} u_j^{\lambda-(-1)^j\varepsilon-1} \prod_{j=1}^{2m} \mathrm{d}u_j.
\end{aligned}$$

因此，由引理 4.2 可得所需公式。

(3) 由于

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,1]^{2m}} \bigg\|\tau_\nu\Big(\overrightarrow{\prod_{1\le j\le 2m}} u_j^{Y(-(-1)^j g/\sqrt{\nu})}\Big)\bigg\|_{\mathrm{Tr}} \prod_{j=1}^{2m} |u_j^{2\lambda-\nu-2(-1)^j\varepsilon-1}| \prod_{j=1}^{2m} \mathrm{d}u_j\\
&\le \int_{[0,1]^{2m}} \frac{\prod_{j=1}^{2m} u_j^{\nu}}{1-\prod_{j=1}^{2m} u_j^2} \prod_{j=1}^{2m} u_j^{\mathrm{Re}(2\lambda-2(-1)^j\varepsilon)-\nu-1}\,\mathrm{d}u_j\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2\,\mathrm{Re}(\lambda+\varepsilon)+2k)^m(2\,\mathrm{Re}(\lambda-\varepsilon)+2k)^m} < \infty
\end{aligned}$$

在 $\nu>0$ 中一致成立，由控制收敛定理可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{\nu\to\infty} 2^{2m} R_m^\nu\Big(2\lambda-\nu;\frac{g}{\sqrt{\nu}},2\varepsilon\Big)\\
&= \lim_{\nu\to\infty} 2^{2m} \int_{[0,1]^{2m}} \mathrm{Tr}\bigg(\tau_\nu\Big(\overrightarrow{\prod_{1\le j\le 2m}} u_j^{Y(-(-1)^j g/\sqrt{\nu})}\Big)\bigg) \prod_{j=1}^{2m} u_j^{2\lambda-\nu-2(-1)^j\varepsilon-1} \prod_{j=1}^{2m} \mathrm{d}u_j\\
&= 2^{2m} \int_{[0,1]^{2m}} \lim_{\nu\to\infty} \mathrm{Tr}\bigg(\tau_\nu\Big(\overrightarrow{\prod_{1\le j\le 2m}} u_j^{Y(-(-1)^j g/\sqrt{\nu})}\Big)\bigg) \prod_{j=1}^{2m} u_j^{2\lambda-\nu-2(-1)^j\varepsilon-1} \prod_{j=1}^{2m} \mathrm{d}u_j
\end{aligned}$$

$$= 2^{2m}\int_{[0,1]^{2m}} \mathrm{Tr}\Big(\tau_\flat\Big(\overrightarrow{\prod_{1\le j\le 2m}} u_j^{2X(-(-1)^j g)}\Big)\Big)\prod_{j=1}^{2m} u_j^{2\lambda-2(-1)^j\varepsilon-1}\prod_{j=1}^{2m}\mathrm{d}u_j$$

$$= \int_{[0,1]^{2m}} \mathrm{Tr}\Big(\tau_\flat\Big(\overrightarrow{\prod_{1\le j\le 2m}} u_j^{X(-(-1)^j g)}\Big)\Big)\prod_{j=1}^{2m} u_j^{\lambda-(-1)^j\varepsilon-1}\prod_{j=1}^{2m}\mathrm{d}u_j$$

$$= R_m^\flat(\lambda; g, \varepsilon). \qquad \square$$

由引理 3.3 和定理 3.2、4.1，我们立即得到以下结果。

推论 4.3. *(1)* 设 $g, \Delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$。假设 实部$\lambda - |\varepsilon| > 0$且 $|\Delta| < |\lambda - |\varepsilon||$。那么对于 $n \in \mathbb{Z}_{\ge 2}$，有

$$\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_\flat^{(g,\Delta,\varepsilon)}; n, \lambda\big) = \zeta(n, \lambda+\varepsilon) + \zeta(n, \lambda-\varepsilon) + \frac{1}{\Gamma(n)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Delta^{2m}}{m}$$
$$\times \int_{[0,1]^{2m}} \exp\Big(-4g^2\frac{\Phi_m(u_1,\dots,u_{2m})}{1-\prod_{j=1}^{2m}u_j}\Big)\frac{\big(-\log\prod_{j=1}^{2m}u_j\big)^n}{1-\prod_{j=1}^{2m}u_j}\prod_{j=1}^{2m}u_j^{\lambda-(-1)^j\varepsilon-1}\,\mathrm{d}u_j,$$

其中 $\Phi_m(u_1, \dots, u_{2m})$ 与 *(4.1)* 中的定义相同。

(2) 设 $\nu > 0$, $g, \Delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$。假设 实部 $\lambda - |\varepsilon| + \nu > 0$ 且 $|\Delta| < |\lambda - |\varepsilon| + \nu|$。那么对于 $n \in \mathbb{Z}_{\ge 2}$，有

$$\zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_\nu^{(g,\Delta,\varepsilon)}; n, \lambda\big) = 2^{-n}\zeta\Big(n, \frac{\lambda+\varepsilon+\nu}{2}\Big) + 2^{-n}\zeta\Big(n, \frac{\lambda-\varepsilon+\nu}{2}\Big) + \frac{1}{\Gamma(n)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Delta^{2m}}{m}$$
$$\times \int_{[0,1]^{2m}} \frac{\big(\frac{1}{2}(\sqrt{\Psi_m^g(u_1,\dots,u_{2m})+2} - \sqrt{\Psi_m^g(u_1,\dots,u_{2m})-2})\big)^{2\nu-2}}{\sqrt{\Psi_m^g(u_1,\dots,u_{2m})+2}\sqrt{\Psi_m^g(u_1,\dots,u_{2m})-2}}$$
$$\times \Big(-\log\prod_{j=1}^{2m}u_j\Big)^n\prod_{j=1}^{2m}u_j^{\lambda-(-1)^j\varepsilon-1}\,\mathrm{d}u_j,$$

其中 $\Psi_m^g(u_1, \dots, u_{2m})$ 与 *(4.2)* 中的定义相同。

(3) 设 $g, \Delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$。假设 实部$\lambda - |\varepsilon| > 0$且 $|\Delta| < |\lambda - |\varepsilon||$。那么对于$n \in \mathbb{Z}_{\ge 2}$，有

$$2^n \lim_{\nu\to\infty} \zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_\nu^{(g/\sqrt{\nu},2\Delta,2\varepsilon)}; n, 2\lambda-\nu\big) = \zeta\big(\widetilde{\mathrm{H}}_\flat^{(g,\Delta,\varepsilon)}; n, \lambda\big).$$

我们回顾

$$R_m^+(\lambda; g, \varepsilon) := R_m^{1/2}(\lambda; g, \varepsilon) + R_m^{3/2}(\lambda; g, \varepsilon),$$
$$R_m^-(\lambda; g, \varepsilon) := R_m^{1/2}(\lambda; g, \varepsilon) - R_m^{3/2}(\lambda; g, \varepsilon)$$

式 (3.2)。那么，它们的积分表达式如下所示。

推论 4.4。 设 $g \in \mathbb{R}$, $\lambda, \varepsilon \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$。若 实部$\lambda - |$实部 $\varepsilon| + \frac{1}{2} > 0$，则有

$$R_m^+(\lambda; g, \varepsilon) = \int_{[0,1]^{2m}} \frac{1}{\sqrt{\Psi_m^g(u_1,\dots,u_{2m})-2}}\prod_{j=1}^{2m}u_j^{\lambda-(-1)^j\varepsilon-1}\,\mathrm{d}u_j,$$

$$R_m^-(\lambda; g, \varepsilon) = \int_{[0,1]^{2m}} \frac{1}{\sqrt{\Psi_m^g(u_1,\dots,u_{2m})+2}}\prod_{j=1}^{2m}u_j^{\lambda-(-1)^j\varepsilon-1}\,\mathrm{d}u_j,$$

其中 $\Psi_m^g(u_1, \dots, u_{2m})$ 与 （*4.2*） 中的相同。

证明。 对于 $\nu = 1/2, 3/2$，由于

$$\frac{\big(\frac{1}{2}(\sqrt{\Psi+2}-\sqrt{\Psi-2})\big)^{2\cdot\frac{1}{2}-2}}{\sqrt{\Psi+2}\sqrt{\Psi-2}} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{\Psi+2}+\sqrt{\Psi-2})}{\sqrt{\Psi+2}\sqrt{\Psi-2}} = \frac{1}{2}\bigg(\frac{1}{\sqrt{\Psi-2}}+\frac{1}{\sqrt{\Psi+2}}\bigg),$$
$$\frac{\big(\frac{1}{2}(\sqrt{\Psi+2}-\sqrt{\Psi-2})\big)^{2\cdot\frac{3}{2}-2}}{\sqrt{\Psi+2}\sqrt{\Psi-2}} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{\Psi+2}-\sqrt{\Psi-2})}{\sqrt{\Psi+2}\sqrt{\Psi-2}} = \frac{1}{2}\bigg(\frac{1}{\sqrt{\Psi-2}}-\frac{1}{\sqrt{\Psi+2}}\bigg)$$

成立，我们有

$$\begin{aligned}
&R_m^{1/2}(\lambda; g, \varepsilon)\\
&= \frac{1}{2}\int_{[0,1]^{2m}}\bigg(\frac{1}{\sqrt{\Psi_m^g(u_1,\dots,u_{2m})-2}}+\frac{1}{\sqrt{\Psi_m^g(u_1,\dots,u_{2m})+2}}\bigg)\prod_{j=1}^{2m}u_j^{\lambda-(-1)^j\varepsilon-1}\,\mathrm{d}u_j,\\
&R_m^{3/2}(\lambda; g, \varepsilon)\\
&= \frac{1}{2}\int_{[0,1]^{2m}}\bigg(\frac{1}{\sqrt{\Psi_m^g(u_1,\dots,u_{2m})-2}}-\frac{1}{\sqrt{\Psi_m^g(u_1,\dots,u_{2m})+2}}\bigg)\prod_{j=1}^{2m}u_j^{\lambda-(-1)^j\varepsilon-1}\,\mathrm{d}u_j.
\end{aligned}$$

因此得到所需的公式。 □

例4.5. 设 $m = 1$。则有

$$\begin{aligned}
&\Phi_1(u,v) = 1+uv-u-v = (1-u)(1-v),\\
&\Psi_1^g(u,v)\pm 2\\
&= \mathrm{tr}\bigg(\begin{bmatrix}\cosh(2g) & -\sinh(2g)\\ -\sinh(2g) & \cosh(2g)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u^{-1} & 0\\ 0 & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cosh(2g) & \sinh(2g)\\ \sinh(2g) & \cosh(2g)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v^{-1} & 0\\ 0 & v\end{bmatrix}\bigg)\pm 2\\
&= (u^{-1}v^{-1}+uv\pm 2)\cosh^2(2g)-(uv^{-1}+u^{-1}v\pm 2)\sinh^2(2g)\\
&= \frac{\cosh^2(2g)}{uv}\big((1\pm uv)^2-\tanh^2(2g)(u\pm v)^2\big)\\
&= \frac{1}{uv}\big((1\pm uv)^2+\sinh^2(2g)(1-u^2)(1-v^2)\big),
\end{aligned}$$

and 因此，对于 $g\in\mathbb{R}$、 λ、 $\varepsilon\in\mathbb{C}$，其中 实部 $\lambda-|$实部$\varepsilon|>0$ 分别为 实部 $\lambda-|$实部 $\varepsilon|+\frac{1}{-2}>0$，我们有 e

$$\begin{aligned}
R_1^{\flat}(\lambda; g, \varepsilon) &= \int_{[0,1]^2}\exp\bigg(-4g^2\frac{(1-u)(1-v)}{1-uv}\bigg)\frac{u^{\lambda+\varepsilon-1}v^{\lambda-\varepsilon-1}}{1-uv}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\\
R_1^{\pm}(\lambda; g, \varepsilon) &= \mathrm{sech}(2g)\int_{[0,1]^2}\frac{u^{\lambda+\varepsilon-\frac{1}{2}}v^{\lambda-\varepsilon-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(1\mp uv)^2-\tanh^2(2g)(u\mp v)^2}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= \int_{[0,1]^2}\frac{u^{\lambda+\varepsilon-\frac{1}{2}}v^{\lambda-\varepsilon-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(1\mp uv)^2+\sinh^2(2g)(1-u^2)(1-v^2)}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

5 1pQRM 首项的计算

在本节中，我们将寻求另一种表达式

$$R_1^{\flat}(\lambda; g, \varepsilon) = \mathrm{Tr}\big((\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a}+g(\mathrm{a}+\mathrm{a}^\dagger)+g^2+\varepsilon+\lambda)^{-1}(\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a}-g(\mathrm{a}+\mathrm{a}^\dagger)+g^2-\varepsilon+\lambda)^{-1}\big).$$

由例4.5可知，对于 $g\in\mathbb{R}$, $\lambda,\varepsilon\in\mathbb{C}$ 且实部 $\lambda-|$实部 $\varepsilon|>0$，我们有

$$\begin{aligned}R_1^\flat(\lambda;g,\varepsilon)&=\int_{[0,1]^2}\exp\left(-4g^2\frac{(1-u)(1-v)}{1-uv}\right)\frac{u^{\lambda+\varepsilon-1}v^{\lambda-\varepsilon-1}}{1-uv}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4g^2)^n}{n!}\int_{[0,1]^2}\frac{(1-u)^n(1-v)^n}{(1-uv)^{n+1}}u^{\lambda+\varepsilon-1}v^{\lambda-\varepsilon-1}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

现在，对于 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$、 λ， $\varepsilon\in\mathbb{C}$，在实部$\lambda-|$实部 $\varepsilon|>0$时，我们令

$$J_n^\flat(\lambda,\varepsilon):=\int_{[0,1]^2}\frac{(1-u)^n(1-v)^n}{(1-uv)^{n+1}}u^{\lambda+\varepsilon-1}v^{\lambda-\varepsilon-1}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

从而

$$R_1^\flat(\lambda;g,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4g^2)^n}{n!}J_n^\flat(\lambda,\varepsilon)$$

成立。

注5.1. 积分 $J_n^\flat(\lambda,\varepsilon)$ 被视为*Beukers*积分 *[3]*的推广，用于在*Ap ´ery*的工作 *[2, 43],*之后证明 $\zeta(2)$ 的无理性

$$J_n^\flat(n+1,0)=\int_{[0,1]^2}\frac{(1-u)^n(1-v)^nu^nv^n}{(1-uv)^{n+1}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

*The Ap ´ery*关于无理性的原始证明使用由下式给出的序列 $\{A_n\}$、 $\{B_n\}$

$$\begin{aligned}A_n&:=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k},\\B_n&:=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}\left(2\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{m-1}}{m^2}+\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^{n+m-1}}{m^2\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}\right).\end{aligned}$$

它们由带有不同初始条件的共同递推关系所刻画，

$$\begin{aligned}&n^2A_n-(11n^2-11n+3)A_{n-1}-(n-1)^2A_{n-2}=0,\qquad A_0=1,\qquad A_1=3,\\&n^2B_n-(11n^2-11n+3)B_{n-1}-(n-1)^2B_{n-2}=0,\qquad B_0=0,\qquad B_1=5.\end{aligned}$$

于是，*Beukers*积分与 *Ap ´ery* 数之间的关系为

$$(-1)^nJ_n^\flat(n+1,0)=A_n\zeta(2)-B_n.\tag{5.1}$$

关于这个等式的证明，参见例如 *[17]*。关于更一般的恒等式，也可参见 *[28]*。根据*[4],*，若取适当的模函数 t，使其相对于 Γ_1（5），则 $\{A_n\}$ 的生成函数 $\sum_{n=0}^{\infty}A_nt^n$ 将成为权*1*模形式。

首先，我们证明如下结论。

命题 5.2。 对于 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$、 λ、 $\varepsilon\in\mathbb{C}$，当 $\lambda\pm\varepsilon\notin-\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 时，我们有

$$J_n^\flat(\lambda,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n!(k+1)_n}{(\lambda+\varepsilon+k)_{n+1}(\lambda-\varepsilon+k)_{n+1}}.$$

证明。 由于 $(1-uv)^{-(n+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+1)_k^{\ k}}{k!}(uv)^k$ 以及 $\frac{(n+1)_k^{\ k}}{k!}=\frac{(k+n)!}{k!\,n!}=\frac{(k+1)_n^{\ n}}{n!}$ 成立，我们有

$$\begin{aligned}
J_n^{\flat}(\lambda,\varepsilon)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+1)_k}{k!}\int_{[0,1]^2}(uv)^k(1-u)^n(1-v)^n u^{\lambda+\varepsilon-1}v^{\lambda-\varepsilon-1}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)_n}{n!}\int_0^1(1-u)^n u^{\lambda+\varepsilon+k-1}\,\mathrm{d}u\int_0^1(1-v)^n v^{\lambda-\varepsilon+k-1}\,\mathrm{d}v\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)_n}{n!}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\lambda+\varepsilon+k)}{\Gamma(\lambda+\varepsilon+k+n+1)}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\lambda-\varepsilon+k)}{\Gamma(\lambda-\varepsilon+k+n+1)}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n!(k+1)_n}{(\lambda+\varepsilon+k)_{n+1}(\lambda-\varepsilon+k)_{n+1}}.
\end{aligned}$$

□

那么每一项都有如下的部分分式分解。

引理 5.3。

$$\begin{aligned}
\frac{n!(x+1)_n}{(\lambda+\varepsilon+x)_{n+1}(\lambda-\varepsilon+x)_{n+1}}=\frac{(-1)^n}{2\varepsilon}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\Bigg(&-\frac{(\lambda+\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_l(1-2\varepsilon)_{n-l}}\frac{1}{\lambda+\varepsilon+x+l}\\
&+\frac{(\lambda-\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_{n-l}(1-2\varepsilon)_l}\frac{1}{\lambda-\varepsilon+x+l}\Bigg).
\end{aligned}$$

证明。令

$$f(x):=\frac{n!(x+1)_n}{(\lambda+\varepsilon+x)_{n+1}(\lambda-\varepsilon+x)_{n+1}},$$

并令

$$f(x)=\sum_{l=0}^{n}\left(\frac{a_l}{\lambda+\varepsilon+x+l}+\frac{b_l}{\lambda-\varepsilon+x+l}\right).$$

为其部分分式分解。于是有

$$\begin{aligned}
a_l&=\lim_{x\to-\lambda-\varepsilon-l}(\lambda+\varepsilon+x+l)f(x)\\
&=\lim_{x\to-\lambda-\varepsilon-l}\frac{n!(x+1)_n}{(\lambda+\varepsilon+x)_l(\lambda+\varepsilon+x+l+1)_{n-l}(\lambda-\varepsilon+x)_{n+1}}\\
&=\frac{n!(-\lambda-\varepsilon-l+1)_n}{(-l)_l(1)_{n-l}(-2\varepsilon-l)_{n+1}}=\frac{(-1)^n n!(\lambda+\varepsilon-n+l)_n}{(-1)^l l!(n-l)!(-2\varepsilon-l)_l(-2\varepsilon)(-2\varepsilon+1)_{n-l}}\\
&=-\frac{(-1)^n}{2\varepsilon}\binom{n}{l}\frac{(\lambda+\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_l(1-2\varepsilon)_{n-l}},
\end{aligned}$$

类似地，

$$b_l=\frac{(-1)^n}{2\varepsilon}\binom{n}{l}\frac{(\lambda-\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_{n-l}(1-2\varepsilon)_l}.$$

□

我们还有以下结果。

引理 5.4。

$$\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{(\lambda+\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_l(1-2\varepsilon)_{n-l}}=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{(\lambda-\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_{n-l}(1-2\varepsilon)_l}.$$

证明。 由引理 5.3 可得

$$\frac{(-1)^n 2\varepsilon n!(x+1)_n x}{(\lambda+\varepsilon+x)_{n+1}(\lambda-\varepsilon+x)_{n+1}}$$
$$=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\left(-\frac{(\lambda+\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_l(1-2\varepsilon)_{n-l}}\frac{x}{\lambda+\varepsilon+x+l}+\frac{(\lambda-\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_{n-l}(1-2\varepsilon)_l}\frac{x}{\lambda-\varepsilon+x+l}\right).$$

然后取极限 $x\to\infty$，我们得到

$$\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\left(-\frac{(\lambda+\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_l(1-2\varepsilon)_{n-l}}+\frac{(\lambda-\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_{n-l}(1-2\varepsilon)_l}\right)=0. \qquad \square$$

现在我们证明如下结论。

定理 5.5. 对于满足 $\lambda\pm\varepsilon\notin-\mathbb{Z}_{\geq 0}$、$\varepsilon\notin\{\pm\frac{1}{2},\pm 1,\dots,\pm\frac{n}{2}\}$ 的 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$、λ、$\varepsilon\in\mathbb{C}$，我们有

$$J_n^\flat(\lambda,\varepsilon)=(-1)^n A_n^\flat(\lambda,\varepsilon)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\lambda+\varepsilon+k)(\lambda-\varepsilon+k)}+(-1)^n B_n^\flat(\lambda,\varepsilon),$$

其中 $A_0^\flat(\lambda,\varepsilon):=1$，$B_0^\flat(\lambda,\varepsilon):=0$，并且对于 $n\geq 1$，

$$A_n^\flat(\lambda,\varepsilon):=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{(\lambda+\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_l(1-2\varepsilon)_{n-l}}=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{(\lambda-\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_{n-l}(1-2\varepsilon)_l}$$
$$=\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m m}{2\cdot n!}\sum_{l=m}^{n}\binom{n}{l}\binom{n}{l-m}\left(\lambda-\frac{m}{2}-n+l\right)_n\left(\frac{1}{\varepsilon-\frac{m}{2}}-\frac{1}{\varepsilon+\frac{m}{2}}\right),$$

$B_n^\flat(\lambda,\varepsilon)$

$$:=\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=0}^{l-1}\binom{n}{l}\left(\frac{(\lambda+\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_l(1-2\varepsilon)_{n-l}}\frac{1}{\lambda+\varepsilon+k}-\frac{(\lambda-\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_{n-l}(1-2\varepsilon)_l}\frac{1}{\lambda-\varepsilon+k}\right)$$
$$=\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m}{2\cdot n!}\sum_{l=m}^{n}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{n}{l}\binom{n}{l-m}\frac{\left(\lambda-\frac{m}{2}-n+l\right)_n}{\lambda-\frac{m}{2}+k}\left(-\frac{1}{\varepsilon-\frac{m}{2}}+\frac{1}{\varepsilon+\frac{m}{2}}\right).$$

证明。 当 $n=0$ 时，由命题 5.2 可知这一点显然。当 $n\geq 1$ 时，对于任意 $N\in\mathbb{Z}_{>0}$，根据引理 5.3，我们有

$$(-1)^n\sum_{k=0}^{N}\frac{n!(k+1)_n}{(\lambda+\varepsilon+k)_{n+1}(\lambda-\varepsilon+k)_{n+1}}$$
$$=\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\left(-\frac{(\lambda+\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_l(1-2\varepsilon)_{n-l}}\frac{1}{\lambda+\varepsilon+k+l}+\frac{(\lambda-\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_{n-l}(1-2\varepsilon)_l}\frac{1}{\lambda-\varepsilon+k+l}\right)$$
$$=\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=l}^{N+l}\binom{n}{l}\left(-\frac{(\lambda+\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_l(1-2\varepsilon)_{n-l}}\frac{1}{\lambda+\varepsilon+k}+\frac{(\lambda-\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_{n-l}(1-2\varepsilon)_l}\frac{1}{\lambda-\varepsilon+k}\right)$$
$$=\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{N}\binom{n}{l}\left(-\frac{(\lambda+\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_l(1-2\varepsilon)_{n-l}}\frac{1}{\lambda+\varepsilon+k}+\frac{(\lambda-\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_{n-l}(1-2\varepsilon)_l}\frac{1}{\lambda-\varepsilon+k}\right)$$
$$+\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=0}^{l-1}\binom{n}{l}\left(\frac{(\lambda+\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_l(1-2\varepsilon)_{n-l}}\frac{1}{\lambda+\varepsilon+k}-\frac{(\lambda-\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_{n-l}(1-2\varepsilon)_l}\frac{1}{\lambda-\varepsilon+k}\right)$$
$$+\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=N+1}^{N+l}\binom{n}{l}\left(-\frac{(\lambda+\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_l(1-2\varepsilon)_{n-l}}\frac{1}{\lambda+\varepsilon+k}+\frac{(\lambda-\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_{n-l}(1-2\varepsilon)_l}\frac{1}{\lambda-\varepsilon+k}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{(\lambda+\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_l(1-2\varepsilon)_{n-l}}\sum_{k=0}^{N}\left(-\frac{1}{\lambda+\varepsilon+k}+\frac{1}{\lambda-\varepsilon+k}\right)\\
&\quad+\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=0}^{l-1}\binom{n}{l}\left(\frac{(\lambda+\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_l(1-2\varepsilon)_{n-l}}\frac{1}{\lambda+\varepsilon+k}-\frac{(\lambda-\varepsilon-n+l)_n}{(1+2\varepsilon)_{n-l}(1-2\varepsilon)_l}\frac{1}{\lambda-\varepsilon+k}\right)\\
&\quad+O(N^{-1}),
\end{aligned}
$$

其中，第四个等式用到了引理 5.4。然后，取极限 $N\to\infty$，得到 $A_n^\flat(\lambda,\ \varepsilon)$ $B_n^\flat(\lambda,\ \varepsilon)$ 的前几个等式。为证明后几个等式，我们考虑 $A_n^\flat(\lambda,\ \varepsilon)$ $B_n^\flat(\lambda,\ \varepsilon)$ 关于 ε 的部分分式分解。对于 $A_n^\flat(\lambda,\ \varepsilon)$，由于分子与分母的次数相等，只需计算极限 $\varepsilon\to\infty$ 以及所有极点处的留数。首先，极限 $\varepsilon\to\infty$ 的计算结果为

$$
\lim_{\varepsilon\to\infty}A_n^\flat(\lambda,\varepsilon)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{1}{2^l(-2)^{n-l}}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^n=0.
$$

接下来，对于 $m=1,\ 2,\ \ldots,\ n$，极点 $\varepsilon=\frac{m}{2}$ 处的留数计算如下

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to\frac{m}{2}}\left(\varepsilon-\frac{m}{2}\right)A_n^\flat(\lambda,\varepsilon)&=\lim_{\varepsilon\to\frac{m}{2}}2\varepsilon\left(\varepsilon-\frac{m}{2}\right)\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{(-1)^{n-l}(\lambda+\varepsilon-n+l)_n}{(2\varepsilon-n+l)_{n-l}(2\varepsilon)(2\varepsilon+1)_l}\\
&=\lim_{\varepsilon\to\frac{m}{2}}\varepsilon(2\varepsilon-m)\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(-1)^{n-l}\frac{(\lambda+\varepsilon-n+l)_n}{(2\varepsilon-n+l)_{n+1}}\\
&=\lim_{\varepsilon\to\frac{m}{2}}\varepsilon\sum_{l=0}^{n-m}\binom{n}{l}(-1)^{n-l}\frac{(\lambda+\varepsilon-n+l)_n}{(2\varepsilon-n+l)_{n-l-m}(2\varepsilon-m+1)_{l+m}}\\
&=\frac{m}{2}\sum_{l=0}^{n-m}\binom{n}{l}(-1)^{n-l}\frac{\left(\lambda+\frac{m}{2}-n+l\right)_n}{(m-n+l)_{n-l-m}(1)_{l+m}}\\
&=\frac{m}{2}\sum_{l=0}^{n-m}\binom{n}{l}(-1)^{m}\frac{\left(\lambda+\frac{m}{2}-n+l\right)_n}{(n-l-m)!(l+m)!}\\
&=\frac{(-1)^m m}{2\cdot n!}\sum_{l=0}^{n-m}\binom{n}{l}\binom{n}{l+m}\left(\lambda+\frac{m}{2}-n+l\right)_n\\
&=\frac{(-1)^m m}{2\cdot n!}\sum_{l=m}^{n}\binom{n}{l-m}\binom{n}{l}\left(\lambda-\frac{m}{2}-n+l\right)_n.
\end{aligned}
$$

类似地，我们有

$$
\lim_{\varepsilon\to-\frac{m}{2}}\left(\varepsilon+\frac{m}{2}\right)A_n^\flat(\lambda,\varepsilon)=-\frac{(-1)^m m}{2\cdot n!}\sum_{l=m}^{n}\binom{n}{l}\binom{n}{l-m}\left(\lambda-\frac{m}{2}-n+l\right)_n.
$$

因此，我们得到 $A_n^\flat(\lambda,\ \varepsilon)$ 的后一个等式。接下来，对于 $B_n^\flat(\lambda,\ \varepsilon)$，由于分子的次数低于分母的次数，只需计算

所有极点处的留数。对于 $m=1,2,\ldots,n$，极点 $\varepsilon=\frac{m}{2}$ 处的留数计算如下

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to\frac{m}{2}}\left(\varepsilon-\frac{m}{2}\right)B_n^{\flat}(\lambda,\varepsilon)\\
&=\lim_{\varepsilon\to\frac{m}{2}}\left(\varepsilon-\frac{m}{2}\right)\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=0}^{l-1}\binom{n}{l}\left(\frac{(\lambda+\varepsilon-n+l)_n}{(2\varepsilon-n+l)_{n+1}}\frac{(-1)^{n-l}}{\lambda+\varepsilon+k}+\frac{(\lambda-\varepsilon-n+l)_n}{(-2\varepsilon-n+l)_{n+1}}\frac{(-1)^{n-l}}{\lambda-\varepsilon+k}\right)\\
&=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to\frac{m}{2}}\left(\sum_{l=1}^{n-m}\sum_{k=0}^{l-1}\binom{n}{l}\frac{(\lambda+\varepsilon-n+l)_n}{(2\varepsilon-n+l)_{n-l-m}(2\varepsilon-m+1)_{l+m}}\frac{(-1)^{n-l}}{\lambda+\varepsilon+k}\right.\\
&\qquad\left.-\sum_{l=m}^{n}\sum_{k=0}^{l-1}\binom{n}{l}\frac{(\lambda-\varepsilon-n+l)_n}{(-2\varepsilon-n+l)_{n-l+m}(-2\varepsilon+m+1)_{l-m}}\frac{(-1)^{n-l}}{\lambda-\varepsilon+k}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{n-m}\sum_{k=0}^{l-1}\binom{n}{l}\frac{\left(\lambda+\frac{m}{2}-n+l\right)_n}{(m-n+l)_{n-l-m}(1)_{l+m}}\frac{(-1)^{n-l}}{\lambda+\frac{m}{2}+k}\right.\\
&\qquad\left.-\sum_{l=m}^{n}\sum_{k=0}^{l-1}\binom{n}{l}\frac{\left(\lambda-\frac{m}{2}-n+l\right)_n}{(-m-n+l)_{n-l+m}(1)_{l-m}}\frac{(-1)^{n-l}}{\lambda-\frac{m}{2}+k}\right)\\
&=\frac{(-1)^m}{2\cdot n!}\left(\sum_{l=1}^{n-m}\sum_{k=0}^{l-1}\binom{n}{l}\binom{n}{l+m}\frac{\left(\lambda+\frac{m}{2}-n+l\right)_n}{\lambda+\frac{m}{2}+k}\right.\\
&\qquad\left.-\sum_{l=m}^{n}\sum_{k=0}^{l-1}\binom{n}{l}\binom{n}{l-m}\frac{\left(\lambda-\frac{m}{2}-n+l\right)_n}{\lambda-\frac{m}{2}+k}\right)\\
&=\frac{(-1)^m}{2\cdot n!}\left(\sum_{l=m+1}^{n}\sum_{k=0}^{l-m-1}\binom{n}{l-m}\binom{n}{l}\frac{\left(\lambda-\frac{m}{2}-n+l\right)_n}{\lambda+\frac{m}{2}+k}\right.\\
&\qquad\left.-\sum_{l=m}^{n}\sum_{k=0}^{l-1}\binom{n}{l}\binom{n}{l-m}\frac{\left(\lambda-\frac{m}{2}-n+l\right)_n}{\lambda-\frac{m}{2}+k}\right)\\
&=\frac{(-1)^m}{2\cdot n!}\left(\sum_{l=m+1}^{n}\sum_{k=m}^{l-1}\binom{n}{l-m}\binom{n}{l}\frac{\left(\lambda-\frac{m}{2}-n+l\right)_n}{\lambda-\frac{m}{2}+k}\right.\\
&\qquad\left.-\sum_{l=m}^{n}\sum_{k=0}^{l-1}\binom{n}{l}\binom{n}{l-m}\frac{\left(\lambda-\frac{m}{2}-n+l\right)_n}{\lambda-\frac{m}{2}+k}\right)\\
&=-\frac{(-1)^m}{2\cdot n!}\sum_{l=m}^{n}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{n}{l}\binom{n}{l-m}\frac{\left(\lambda-\frac{m}{2}-n+l\right)_n}{\lambda-\frac{m}{2}+k}.
\end{aligned}
$$

此外，由于 $B_n^{\flat}(\lambda,\varepsilon)$ 关于 ε 是偶函数，我们得到

$$
\lim_{\varepsilon\to-\frac{m}{2}}\left(\varepsilon+\frac{m}{2}\right)B_n^{\flat}(\lambda,\varepsilon)=\frac{(-1)^m}{2\cdot n!}\sum_{l=m}^{n}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{n}{l}\binom{n}{l-m}\frac{\left(\lambda-\frac{m}{2}-n+l\right)_n}{\lambda-\frac{m}{2}+k}.
$$

因此，我们得到 $B_n^{\flat}(\lambda,\varepsilon)$ 的后一个等式。 □

注 5.6. 尽管 $A_n^{\flat}(\lambda,\varepsilon)$ 和 $B_n^{\flat}(\lambda,\varepsilon)$ 在 $\varepsilon\in\left\{\pm\frac{1}{2},\pm1,\ldots,\pm\frac{n}{2}\right\}$ 处有极点，由于

$$
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\lambda+\varepsilon+k)(\lambda-\varepsilon+k)}=\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda-\varepsilon+k}-\frac{1}{\lambda+\varepsilon+k}\right)
$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon}\left(\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{\lambda-\varepsilon+k}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda-\varepsilon+m+k}-\frac{1}{\lambda+\varepsilon+k}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{\lambda-\varepsilon+k}+\frac{\varepsilon-\frac{m}{2}}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\lambda+\varepsilon+k)(\lambda-\varepsilon+m+k)}$$

对 $m=1$、2、.....、n 成立，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to\frac{m}{2}}\left(\varepsilon-\frac{m}{2}\right)A_n^\flat(\lambda,\varepsilon)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\lambda+\varepsilon+k)(\lambda-\varepsilon+k)}=-\lim_{\varepsilon\to\frac{m}{2}}\left(\varepsilon-\frac{m}{2}\right)B_n^\flat(\lambda,\varepsilon)$$
$$=\frac{(-1)^m}{2\cdot n!}\sum_{l=m}^{n}\binom{n}{l}\binom{n}{l-m}\left(\lambda-\frac{m}{2}-n+l\right)_n\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{\lambda-\frac{m}{2}+k}.$$

因此， $J_n^\flat(\lambda,\varepsilon)$ 在 $\varepsilon=\frac{m}{2}$ 处的留数为零。由于 $J_n^\flat(\lambda,-\varepsilon)=J_n^\flat(\lambda,\varepsilon)$ 成立，在 $\varepsilon=-\frac{m}{2}$ 处的留数也为零，即 $J_n^\flat(\lambda,\varepsilon)$ 在 $\varepsilon\in\{\pm\frac{1}{2},\pm1,\ldots,\pm\frac{n}{2}\}$ 处全纯。

注记 5.7. 由 *(5.1)*， $A_n^\flat(\lambda,\varepsilon)$ $B_n^\flat(\lambda,\varepsilon)$ 与阿佩里数 A_n, B_n 之间存在如下关系

$$A_n^\flat(n+1,0)=A_n,\qquad B_n^\flat(n+1,0)=A_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-B_n. \tag{5.2}$$

事实上，*(5.2)* 的前一个公式可直接验证如下：

$$A_n^\flat(n+1,0)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{(l+1)_n}{(1)_l(1)_{n-l}}=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}^2\frac{(l+1)_n}{n!}=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}^2\binom{n+l}{l}=A_n.$$

另一方面，*(5.2)* 的后一个公式并非显然。

由定理 5.5，我们立即得到以下结论。

推论5.8. 对于满足 $\lambda\pm\varepsilon\notin-\mathbb{Z}_{\geq0}$, $\varepsilon\notin\pm\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq1}$ 的 $g\in\mathbb{R}$, $\lambda,\varepsilon\in\mathbb{C}$，有

$$R_1^\flat(\lambda;g,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4g^2)^n}{n!}\left(A_n^\flat(\lambda,\varepsilon)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\lambda+\varepsilon+k)(\lambda-\varepsilon+k)}+B_n^\flat(\lambda,\varepsilon)\right)$$

其中 $A_n^\flat(\lambda,\varepsilon)$ $B_n^\flat(\lambda,\varepsilon)$ 与定理 *5.5* 中的一致。

6 2pQRM 首项的计算

在本节中，我们寻求另一种表达式

$$R_1^+(\lambda;g,\varepsilon):=R_1^{1/2}(\lambda;g,\varepsilon)+R_1^{3/2}(\lambda;g,\varepsilon)$$
$$=\mathrm{Tr}\Bigg(\left(\cosh(2g)\left(\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a}+\frac{1}{2}\right)+\frac{\sinh(2g)}{2}(\mathrm{a}^2+(\mathrm{a}^\dagger)^2)+\varepsilon+\lambda\right)^{-1}$$
$$\times\left(\cosh(2g)\left(\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a}+\frac{1}{2}\right)-\frac{\sinh(2g)}{2}(\mathrm{a}^2+(\mathrm{a}^\dagger)^2)-\varepsilon+\lambda\right)^{-1}\Bigg),$$

$$
\begin{aligned}
&R_1^-(\lambda;g,\varepsilon):=R_1^{1/2}(\lambda;g,\varepsilon)-R_1^{3/2}(\lambda;g,\varepsilon)\\
&=\mathrm{Tr}\bigg(\bigg(\cosh(2g)\Big(\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a}+\frac12\Big)+\frac{\sinh(2g)}{2}(\mathrm{a}^2+(\mathrm{a}^\dagger)^2)+\varepsilon+\lambda\bigg)^{-1}\\
&\qquad\times\bigg(\cosh(2g)\Big(\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a}+\frac12\Big)-\frac{\sinh(2g)}{2}(\mathrm{a}^2+(\mathrm{a}^\dagger)^2)-\varepsilon+\lambda\bigg)^{-1}\Big|_{L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{even}}}\bigg)\\
&\quad-\mathrm{Tr}\bigg(\bigg(\cosh(2g)\Big(\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a}+\frac12\Big)+\frac{\sinh(2g)}{2}(\mathrm{a}^2+(\mathrm{a}^\dagger)^2)+\varepsilon+\lambda\bigg)^{-1}\\
&\qquad\times\bigg(\cosh(2g)\Big(\mathrm{a}^\dagger\mathrm{a}+\frac12\Big)-\frac{\sinh(2g)}{2}(\mathrm{a}^2+(\mathrm{a}^\dagger)^2)-\varepsilon+\lambda\bigg)^{-1}\Big|_{L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{odd}}}\bigg).
\end{aligned}
$$

那么由例4.5可知，对于 $\delta\in\{\pm\}$, $g\in\mathbb{R}$, $\lambda,\varepsilon\in\mathbb{C}$ 满足实部 $\lambda-|\text{实部}\,\varepsilon|+\frac12\succ 0$，我们有

$$
\begin{aligned}
R_1^\delta(\lambda;g,\varepsilon)&=\mathrm{sech}(2g)\int_{[0,1]^2}\frac{u^{\lambda+\varepsilon-\frac12}v^{\lambda-\varepsilon-\frac12}}{\sqrt{(1-\delta uv)^2-\tanh^2(2g)(u-\delta v)^2}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=\int_{[0,1]^2}\frac{u^{\lambda+\varepsilon-\frac12}v^{\lambda-\varepsilon-\frac12}}{\sqrt{(1-\delta uv)^2+\sinh^2(2g)(1-u^2)(1-v^2)}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.
\end{aligned}
$$

由于 $\big|\frac{u-\delta v}{1-\delta uv}\big|<1$ 对 $u,\ v\in(0,\ 1)$ 成立，我们有

$$
\begin{aligned}
R_1^\delta(\lambda;g,\varepsilon)&=\mathrm{sech}(2g)\int_{[0,1]^2}\frac{u^{\lambda+\varepsilon-\frac12}v^{\lambda-\varepsilon-\frac12}}{1-\delta uv}\bigg(1-\tanh^2(2g)\Big(\frac{u-\delta v}{1-\delta uv}\Big)^2\bigg)^{-1/2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=\mathrm{sech}(2g)\sum_{n=0}^\infty\frac{\left(\frac12\right)_n}{n!}\tanh^{2n}(2g)\int_{[0,1]^2}\frac{(u-\delta v)^{2n}}{(1-\delta uv)^{2n+1}}u^{\lambda+\varepsilon-\frac12}v^{\lambda-\varepsilon-\frac12}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.
\end{aligned}
$$

现在，对于 $\delta\in\{\pm\}$, $n\in\mathbb{Z}_{\geq0}$, λ, $\varepsilon\in\mathbb{C}$ 且 $\mathrm{Re}\ \lambda-|\mathrm{Re}\ \varepsilon|+\frac12>0$，我们令

$$
J_n^\delta(\lambda,\varepsilon):=\int_{[0,1]^2}\frac{(u-\delta v)^n}{(1-\delta uv)^{n+1}}u^{\lambda+\varepsilon-\frac12}v^{\lambda-\varepsilon-\frac12}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,
$$

从而

$$
R_1^\delta(\lambda;g,\varepsilon)=\mathrm{sech}(2g)\sum_{n=0}^\infty\frac{\left(\frac12\right)_n}{n!}\tanh^{2n}(2g)J_{2n}^\delta(\lambda,\varepsilon)
$$

成立。

注6.1. *(1)* $\{J_n^\delta(\lambda,\varepsilon)\}_n$ 还有其他生成函数

$$
\begin{aligned}
U_\delta(t;\lambda,\varepsilon)&:=\int_{[0,1]^2}\frac{u^{\lambda+\varepsilon-\frac12}v^{\lambda-\varepsilon-\frac12}}{1-\delta uv-t(u-\delta v)}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\sum_{n=0}^\infty J_n^\delta(\lambda,\varepsilon)t^n,\\
V_\delta(t;\lambda,\varepsilon)&:=\frac12\big(U_\delta(\sqrt{t};\lambda,\varepsilon)+U_\delta(-\sqrt{t};\lambda,\varepsilon)\big)\\
&=\int_{[0,1]^2}\frac{(1-\delta uv)u^{\lambda+\varepsilon-\frac12}v^{\lambda-\varepsilon-\frac12}}{(1-\delta uv)^2-t(u-\delta v)^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\sum_{n=0}^\infty J_{2n}^\delta(\lambda,\varepsilon)t^n.
\end{aligned}\tag{6.1}
$$

我们有 $U_+(t;\lambda,0)=U_+(-t;\lambda,0)=V_+(t^2;\lambda,0)$，因为 $J_{2n+1}^+(\lambda,0)=0$ 成立。

(2) 在 *[22], "Ap ́ery* 型数" $J_k(n)$ $(k\in\mathbb{Z}_{\geq 2}, n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ 中，使用生成函数引入

$$R_{k,1}(\kappa)=\frac{k}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!}J_k(n)(-\kappa^2)^n.$$

将其与注释 *3.5* 中的 *(3.3)* 进行比较，我们得到

$$\begin{aligned}R_1^+(\lambda;g,0)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(-1)^k}{k+2}R_{k+2,1}(\sinh(2g))\lambda^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k+n}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!}J_{k+2}(n)\sinh^{2n}(2g)\lambda^k,\end{aligned}$$

也就是说，我们有

$$\int_{[0,1]^2}\frac{(1-u^2)^n(1-v^2)^n}{(1-uv)^{2n+1}}u^{\lambda-\frac{1}{2}}v^{\lambda-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kJ_{k+2}(n)\lambda^k.$$

这还有另一个生成函数

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_+(s;\lambda,0):=\frac{1}{1-s}V_+\left(\frac{s}{s-1};\lambda,0\right)&=\int_{[0,1]^2}\frac{(1-uv)u^{\lambda-\frac{1}{2}}v^{\lambda-\frac{1}{2}}}{(1-uv)^2-s(1-u^2)(1-v^2)}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kJ_{k+2}(n)\lambda^ks^n.\end{aligned}$$

首先证明如下结论。

P命题 6.2. 对于 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$、$\delta\in\{\pm\}$、λ、$\varepsilon\in\mathbb{C}$ 且满足 $\lambda\pm\varepsilon\notin-\left(\mathbb{Z}_{\geq 0}+\frac{1}{2}\right)$，我们有 e

$$J_n^{\delta}(\lambda,\varepsilon)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda-\frac{n-1}{2}\right)_n}{\left(\lambda+k-\frac{n-1}{2}\right)_{n+1}}\left(\frac{1}{\lambda-\varepsilon+k+\frac{1}{2}}+\frac{(-\delta)^n}{\lambda+\varepsilon+k+\frac{1}{2}}\right)\delta^k.$$

证明。将积分域分为 $\{0\leq v\leq u\leq 1\}$ 和 $\{0\leq u\leq v\leq 1\}$，在第二个积分域交换 u 和 v，并令 $v=uw$，即可得到

$$\begin{aligned}&J_n^{\delta}(\lambda,\varepsilon):=\int_{[0,1]^2}\frac{(u-\delta v)^n}{(1-\delta uv)^{n+1}}u^{\lambda+\varepsilon-\frac{1}{2}}v^{\lambda-\varepsilon-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\int_{0\leq v\leq u\leq 1}\frac{(u-\delta v)^n}{(1-\delta uv)^{n+1}}(u^{\lambda+\varepsilon-\frac{1}{2}}v^{\lambda-\varepsilon-\frac{1}{2}}+(-\delta)^nv^{\lambda+\varepsilon-\frac{1}{2}}u^{\lambda-\varepsilon-\frac{1}{2}})\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\int_{[0,1]^2}\frac{(u-\delta uw)^n}{(1-\delta u^2w)^{n+1}}(u^{\lambda+\varepsilon-\frac{1}{2}}(uw)^{\lambda-\varepsilon-\frac{1}{2}}+(-\delta)^n(uw)^{\lambda+\varepsilon-\frac{1}{2}}u^{\lambda-\varepsilon-\frac{1}{2}})u\,\mathrm{d}u\mathrm{d}w\\&=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{(1-\delta w)^n}{(1-\delta u^2w)^{n+1}}u^{2\lambda+n}\,\mathrm{d}u\right)(w^{\lambda-\varepsilon-\frac{1}{2}}+(-\delta)^nw^{\lambda+\varepsilon-\frac{1}{2}})\,\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

然后计算内积分，得到

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{(1-\delta w)^n}{(1-\delta u^2 w)^{n+1}} u^{2\lambda+n}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+1)_k}{k!} (\delta u^2 w)^k \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (-\delta w)^{n-l} u^{2\lambda+n}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)_n}{n!} \binom{n}{l} (-1)^{n-l} (\delta w)^{k+n-l} u^{2\lambda+2k+n}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=n-l}^{\infty} \frac{(k+l-n+1)_n}{n!} \binom{n}{l} (-1)^{n+l} (\delta w)^k u^{2\lambda+2k+2l-n}\,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=\max\{n-k,0\}}^{n} \frac{(k+l-n+1)_n}{n!} \binom{n}{l} \frac{(-1)^{n+l}(\delta w)^k}{2\lambda+2k+2l-n+1} \\
&= \frac{(-1)^n}{2\cdot n!} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (-1)^l \frac{(k-n+1+l)_n}{\lambda+k-\frac{n-1}{2}+l} (\delta w)^k,
\end{aligned}
$$

其中，在第2个等式中我们使用了 $\frac{(n+1)_k}{k!} = \frac{(n+k)!}{k!n!} = \binom{k+1)_n}{n}$，并在第3个等式中将 k 替换为 $k+l-n$。注意到 $0 \le l \le n-k-1$ 蕴含 $(k+l-n+1)_n = 0$，因此在最后一个等式中，我们可以将 l 的范围从 $\max\{n-k,0\} \le l \le n$ 扩展至 $0 \le l \le n$。接下来，对于一般的 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$，我们考虑以下等式，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (-1)^l \frac{(\alpha+l)_n}{\beta+l} = \frac{(\alpha)_n}{\beta} \sum_{l=0}^{n} \frac{(-n)_l (\alpha+n)_l (\beta)_l}{l!(\alpha)_l (\beta+1)_l} = \frac{(\alpha)_n}{\beta} {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n, \alpha+n, \beta \\ \alpha, \beta+1\end{matrix}; 1\right) \\
&= \frac{(\alpha)_n}{\beta} \frac{(\beta-\alpha-n+1)_n (1)_n}{(\beta+1)_n (1-\alpha-n)_n} = (-1)^n \frac{(\beta-\alpha-n+1)_n n!}{(\beta)_{n+1}},
\end{aligned}
$$

这由 Pfaff–Saalschütz 公式 [1,定理2.2.6],得出

$$
{}_3F_2\left(\begin{matrix}-n, a, b \\ 1+a+b-c-n, c\end{matrix}; 1\right) = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n (c-a-b)_n}.
$$

将该公式应用于 $\alpha = k-n+1$、$\beta = \lambda + k - \frac{n-1}{2}$，得到

$$
\int_0^1 \frac{(1-\delta w)^n}{(1-\delta u^2 w)^{n+1}} u^{2\lambda+n}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda - \frac{n-1}{2}\right)_n}{\left(\lambda + k - \frac{n-1}{2}\right)_{n+1}} (\delta w)^k.
$$

因此得到

$$
\begin{aligned}
J_n^{\delta}(\lambda, \varepsilon) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{(1-\delta w)^n}{(1-\delta u^2 w)^{n+1}} u^{2\lambda+n}\,\mathrm{d}u \right) (w^{\lambda-\varepsilon-\frac{1}{2}} + (-\delta)^n w^{\lambda+\varepsilon-\frac{1}{2}})\,\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda - \frac{n-1}{2}\right)_n}{\left(\lambda + k - \frac{n-1}{2}\right)_{n+1}} (\delta w)^k (w^{\lambda-\varepsilon-\frac{1}{2}} + (-\delta)^n w^{\lambda+\varepsilon-\frac{1}{2}})\,\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda - \frac{n-1}{2}\right)_n}{\left(\lambda + k - \frac{n-1}{2}\right)_{n+1}} \left(\frac{1}{\lambda - \varepsilon + k + \frac{1}{2}} + \frac{(-\delta)^n}{\lambda + \varepsilon + k + \frac{1}{2}} \right) \delta^k.
\end{aligned}
$$

□

$J_n^{\delta}(\lambda, \varepsilon)$ 满足以下递推关系。

命题 6.3。 对于 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$、 $\delta\in\{\pm\}$、 λ、$\varepsilon\in\mathbb{C}$，当 $\lambda\pm\varepsilon\notin-\big(\mathbb{Z}_{\geq 0}+\frac{1}{2}\big)$、 $\varepsilon\neq\pm\frac{n}{2}$ 时，有

$$J_n^\delta(\lambda,\varepsilon)=\frac{\big(\lambda+\frac{n-1}{2}\big)\big(\lambda-\frac{n-1}{2}\big)}{\big(\varepsilon+\frac{n}{2}\big)\big(\varepsilon-\frac{n}{2}\big)}J_{n-2}^\delta(\lambda,\varepsilon)-\begin{cases}\dfrac{\lambda}{(n-1)\big(\varepsilon+\frac{n}{2}\big)\big(\varepsilon-\frac{n}{2}\big)} & (\delta=+,\ n\colon even),\\ \dfrac{\varepsilon}{n\big(\varepsilon+\frac{n}{2}\big)\big(\varepsilon-\frac{n}{2}\big)} & (\delta=+,\ n\colon odd),\\ \dfrac{1}{2\big(\varepsilon+\frac{n}{2}\big)\big(\varepsilon-\frac{n}{2}\big)} & (\delta=-).\end{cases}$$

证明。 根据命题 6.2，我们有

$$\begin{aligned}
&J_n^\delta(\lambda,\varepsilon)-\frac{\big(\lambda+\frac{n-1}{2}\big)\big(\lambda-\frac{n-1}{2}\big)}{\big(\varepsilon+\frac{n}{2}\big)\big(\varepsilon-\frac{n}{2}\big)}J_{n-2}^\delta(\lambda,\varepsilon)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\big(\lambda-\frac{n-1}{2}\big)_n}{\big(\lambda+k-\frac{n-1}{2}\big)_{n+1}}-\frac{\big(\lambda+\frac{n-1}{2}\big)\big(\lambda-\frac{n-1}{2}\big)}{\big(\varepsilon+\frac{n}{2}\big)\big(\varepsilon-\frac{n}{2}\big)}\frac{\big(\lambda-\frac{n-3}{2}\big)_{n-2}}{\big(\lambda+k-\frac{n-3}{2}\big)_{n-1}}\right)\\
&\qquad\qquad\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda-\varepsilon+k+\frac{1}{2}}+\frac{(-\delta)^n}{\lambda+\varepsilon+k+\frac{1}{2}}\right)\delta^k\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\big(\lambda-\frac{n-1}{2}\big)_n\big(\big(\varepsilon+\frac{n}{2}\big)\big(\varepsilon-\frac{n}{2}\big)-\big(\lambda+k-\frac{n-1}{2}\big)\big(\lambda+k+\frac{n+1}{2}\big)\big)}{\big(\lambda+k-\frac{n-1}{2}\big)_{n+1}\big(\varepsilon+\frac{n}{2}\big)\big(\varepsilon-\frac{n}{2}\big)}\\
&\qquad\qquad\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda-\varepsilon+k+\frac{1}{2}}+\frac{(-\delta)^n}{\lambda+\varepsilon+k+\frac{1}{2}}\right)\delta^k\\
&=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\big(\lambda-\frac{n-1}{2}\big)_n\big(\lambda+\varepsilon+k+\frac{1}{2}\big)\big(\lambda-\varepsilon+k+\frac{1}{2}\big)}{\big(\lambda+k-\frac{n-1}{2}\big)_{n+1}\big(\varepsilon+\frac{n}{2}\big)\big(\varepsilon-\frac{n}{2}\big)}\frac{\big(\lambda+\varepsilon+k+\frac{1}{2}\big)+(-\delta)^n\big(\lambda-\varepsilon+k+\frac{1}{2}\big)}{2\big(\lambda+\varepsilon+k+\frac{1}{2}\big)\big(\lambda-\varepsilon+k+\frac{1}{2}\big)}\delta^k\\
&=-\frac{\big(\lambda-\frac{n-1}{2}\big)_n}{\big(\varepsilon+\frac{n}{2}\big)\big(\varepsilon-\frac{n}{2}\big)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\delta^k}{\big(\lambda+k-\frac{n-1}{2}\big)_{n+1}}\\
&\qquad\times\begin{cases}\dfrac{\big(\lambda+k+\frac{n+1}{2}\big)\big(\lambda+k+\frac{n-1}{2}\big)-\big(\lambda+k-\frac{n-1}{2}\big)\big(\lambda+k-\frac{n-3}{2}\big)}{2(n-1)} & ((-\delta)^n=+1)\\ \dfrac{\varepsilon\big(\big(\lambda+k+\frac{n+1}{2}\big)-\big(\lambda+k-\frac{n-1}{2}\big)\big)}{n} & ((-\delta)^n=-1)\end{cases}\\
&=-\frac{\big(\lambda-\frac{n-1}{2}\big)_n}{\big(\varepsilon+\frac{n}{2}\big)\big(\varepsilon-\frac{n}{2}\big)}\\
&\qquad\times\begin{cases}\dfrac{1}{2(n-1)}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\delta^k}{\big(\lambda+k-\frac{n-1}{2}\big)_{n-1}}-\frac{\delta^k}{\big(\lambda+k-\frac{n-5}{2}\big)_{n-1}}\right) & ((-\delta)^n=+1)\\ \dfrac{\varepsilon}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\big(\lambda+k-\frac{n-1}{2}\big)_n}-\frac{1}{\big(\lambda+k-\frac{n-3}{2}\big)_n}\right) & ((-\delta)^n=-1)\end{cases}\\
&=\begin{cases}\dfrac{-\big(\lambda-\frac{n-1}{2}\big)_n}{2(n-1)\big(\varepsilon+\frac{n}{2}\big)\big(\varepsilon-\frac{n}{2}\big)}\left(\dfrac{1}{\big(\lambda-\frac{n-1}{2}\big)_{n-1}}+\dfrac{\delta}{\big(\lambda-\frac{n-3}{2}\big)_{n-1}}\right) & ((-\delta)^n=+1)\\ \dfrac{-\varepsilon\big(\lambda-\frac{n-1}{2}\big)_n}{n\big(\varepsilon+\frac{n}{2}\big)\big(\varepsilon-\frac{n}{2}\big)}\dfrac{1}{\big(\lambda-\frac{n-1}{2}\big)_n} & ((-\delta)^n=+1)\end{cases}\\
&=\begin{cases}-\dfrac{\big(\lambda+\frac{n-1}{2}\big)+\delta\big(\lambda-\frac{n-1}{2}\big)}{2(n-1)\big(\varepsilon+\frac{n}{2}\big)\big(\varepsilon-\frac{n}{2}\big)} & ((-\delta)^n=+1)\\ -\dfrac{\varepsilon}{n\big(\varepsilon+\frac{n}{2}\big)\big(\varepsilon+\frac{n}{2}\big)} & ((-\delta)^n=-1)\end{cases}
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{\lambda}{(n-1)\left(\varepsilon+\frac{n}{2}\right)\left(\varepsilon-\frac{n}{2}\right)} & (\delta=+,\ n\colon \text{even}) \\ -\dfrac{\varepsilon}{n\left(\varepsilon+\frac{n}{2}\right)\left(\varepsilon-\frac{n}{2}\right)} & (\delta=+,\ n\colon \text{odd}) \\ -\dfrac{1}{2\left(\varepsilon+\frac{n}{2}\right)\left(\varepsilon-\frac{n}{2}\right)} & (\delta=-). \end{cases}$$ □

现在证明如下结论。

定理 6.4. 对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\delta \in \{\pm\}$, $\lambda, \varepsilon \in \mathbb{C}$，其中 $\lambda \pm \varepsilon \notin -\left(\mathbb{Z}_{\geq 0} + \frac{1}{2}\right)$, $\varepsilon \notin \left\{-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+1, \ldots, \frac{n}{2}\right\}$，我们有

$$J_n^\delta(\lambda,\varepsilon) = \frac{A_n^\delta(\lambda,\varepsilon)}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda-\varepsilon+k+\frac{1}{2}} - \frac{\delta^n}{\lambda+\varepsilon+k+\frac{1}{2}}\right)\delta^k + B_n^\delta(\lambda,\varepsilon),$$

其中

$$A_n^\delta(\lambda,\varepsilon) := \frac{\left(\lambda-\frac{n-1}{2}\right)_n}{\left(\varepsilon-\frac{n}{2}\right)_{n+1}} = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)_{n/2}\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)_{n/2}}{\varepsilon(1+\varepsilon)_{n/2}(1-\varepsilon)_{n/2}} & (n\colon \textit{even}), \\ -\dfrac{\lambda(1+\lambda)_{\lfloor n/2\rfloor}(1-\lambda)_{\lfloor n/2\rfloor}}{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)_{\lceil n/2\rceil}\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)_{\lceil n/2\rceil}} & (n\colon \textit{odd}), \end{cases}$$

$B_0^\delta(\lambda,\varepsilon) = 0$，对于 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} & B_n^\delta(\lambda,\varepsilon) \\ &:= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\lceil n/2\rceil-1}\frac{(-1)^{m+1}}{m!(n-m)!}\left(\frac{1}{\varepsilon-\frac{n}{2}+m} - \frac{(-\delta)^n}{\varepsilon+\frac{n}{2}-m}\right)\sum_{k=0}^{n-2m-1}\frac{\left(\lambda-\frac{n-1}{2}\right)_n}{\lambda+k-\frac{n-1}{2}+m}\delta^k \\ &= \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=0}^{n/2-1}\frac{\lambda\left(\lambda-\frac{n-1}{2}\right)_l\left(-\lambda-\frac{n-1}{2}\right)_l}{(n-2l-1)\left(\varepsilon-\frac{n}{2}\right)_{l+1}\left(-\varepsilon-\frac{n}{2}\right)_{l+1}} & (\delta=+,\ n\colon \textit{even}), \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\lceil n/2\rceil-1}\frac{\varepsilon\left(\lambda-\frac{n-1}{2}\right)_l\left(-\lambda-\frac{n-1}{2}\right)_l}{(n-2l)\left(\varepsilon-\frac{n}{2}\right)_{l+1}\left(-\varepsilon-\frac{n}{2}\right)_{l+1}} & (\delta=+,\ n\colon \textit{odd}), \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\lceil n/2\rceil-1}\frac{\left(\lambda-\frac{n-1}{2}\right)_l\left(-\lambda-\frac{n-1}{2}\right)_l}{2\left(\varepsilon-\frac{n}{2}\right)_{l+1}\left(-\varepsilon-\frac{n}{2}\right)_{l+1}} & (\delta=-). \end{cases} \end{aligned}$$

证明。首先，我们求出每一项的部分分式分解

$$J_n^\delta(\lambda,\varepsilon) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda-\frac{n-1}{2}\right)_n}{\left(\lambda+k-\frac{n-1}{2}\right)_{n+1}}\left(\frac{1}{\lambda-\varepsilon+k+\frac{1}{2}} + \frac{(-\delta)^n}{\lambda+\varepsilon+k+\frac{1}{2}}\right)\delta^k.$$

令

$$f(x) = \frac{1}{\left(\lambda+x-\frac{n-1}{2}\right)_{n+1}}\frac{1}{\lambda-\varepsilon+x+\frac{1}{2}}.$$

那么，$f(x)$ 在极点 $x = -\lambda + \frac{n-1}{2} - m$ $(0 \leq m \leq n)$ 处的留数为

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to-\lambda+\frac{n-1}{2}-m}\left(\lambda+x-\frac{n-1}{2}+m\right)f(x) \\ &= \lim_{x\to-\lambda+\frac{n-1}{2}-m}\frac{1}{\left(\lambda+x-\frac{n-1}{2}\right)_m\left(\lambda+x-\frac{n-1}{2}+m+1\right)_{n-m}}\frac{1}{\lambda-\varepsilon+x+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{(-m)_m(1)_{n-m}}\frac{1}{-\varepsilon+\frac{n}{2}-m} = \frac{(-1)^{m+1}}{m!(n-m)!}\frac{1}{\varepsilon-\frac{n}{2}+m}, \end{aligned}$$

而在极点 $x=-\lambda+\varepsilon-\frac{1}{2}$ 处的留数为 –

$$\lim_{x\to-\lambda+\varepsilon-\frac{1}{2}}\left(\lambda-\varepsilon+x+\frac{1}{2}\right)f(x)=\frac{1}{\left(\varepsilon-\frac{n}{2}\right)_{n+1}}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\left(\lambda+x-\frac{n-1}{2}\right)_{n+1}}\frac{1}{\lambda-\varepsilon+x+\frac{1}{2}}\\&=\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{m+1}}{m!(n-m)!}\frac{1}{\varepsilon-\frac{n}{2}+m}\frac{1}{\lambda+x-\frac{n-1}{2}+m}+\frac{1}{\left(\varepsilon-\frac{n}{2}\right)_{n+1}}\frac{1}{\lambda-\varepsilon+x+\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

并将 ε 改为 $-\varepsilon$、将 m 改为 $n-m$，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\left(\lambda+x-\frac{n-1}{2}\right)_{n+1}}\frac{1}{\lambda+\varepsilon+x+\frac{1}{2}}\\&=\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{m}}{m!(n-m)!}\frac{1}{\varepsilon+\frac{n}{2}-m}\frac{1}{\lambda+x-\frac{n-1}{2}+m}+\frac{1}{\left(-\varepsilon-\frac{n}{2}\right)_{n+1}}\frac{1}{\lambda+\varepsilon+x+\frac{1}{2}}\\&=\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!m!}\frac{1}{\varepsilon-\frac{n}{2}+m}\frac{1}{\lambda+x+\frac{n+1}{2}-m}+\frac{(-1)^{n+1}}{\left(\varepsilon-\frac{n}{2}\right)_{n+1}}\frac{1}{\lambda+\varepsilon+x+\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\left(\lambda-\frac{n-1}{2}\right)_{n}}J_n^{\delta}(\lambda,\varepsilon)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{m+1}}{m!(n-m)!}\frac{1}{\varepsilon-\frac{n}{2}+m}\frac{1}{\lambda+k-\frac{n-1}{2}+m}+\frac{1}{\left(\varepsilon-\frac{n}{2}\right)_{n+1}}\frac{1}{\lambda-\varepsilon+k+\frac{1}{2}}\\&\quad+\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{m}\delta^n}{m!(n-m)!}\frac{1}{\varepsilon-\frac{n}{2}+m}\frac{1}{\lambda+k+\frac{n+1}{2}-m}-\frac{\delta^n}{\left(\varepsilon-\frac{n}{2}\right)_{n+1}}\frac{1}{\lambda+\varepsilon+k+\frac{1}{2}}\Bigg)\delta^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\Bigg(\frac{1}{\left(\varepsilon-\frac{n}{2}\right)_{n+1}}\left(\frac{1}{\lambda-\varepsilon+k+\frac{1}{2}}-\frac{\delta^n}{\lambda+\varepsilon+k+\frac{1}{2}}\right)\\&\quad+\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{m+1}}{m!(n-m)!}\frac{1}{\varepsilon-\frac{n}{2}+m}\left(\frac{1}{\lambda+k-\frac{n-1}{2}+m}-\frac{\delta^n}{\lambda+k+\frac{n+1}{2}-m}\right)\Bigg)\delta^k.\end{aligned}$$

那么对于 $n\geq 1$，第二项计算为以下表达式的极限 $N\to\infty$。

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{m+1}}{m!(n-m)!}\frac{1}{\varepsilon-\frac{n}{2}+m}\left(\frac{1}{\lambda+k-\frac{n-1}{2}+m}-\frac{\delta^n}{\lambda+k+\frac{n+1}{2}-m}\right)\delta^k\\&=\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{\lceil n/2\rceil-1}\frac{(-1)^{m+1}}{m!(n-m)!}\frac{1}{\varepsilon-\frac{n}{2}+m}\left(\frac{1}{\lambda+k-\frac{n-1}{2}+m}-\frac{\delta^n}{\lambda+k+\frac{n+1}{2}-m}\right)\delta^k\\&\quad+\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{\lceil n/2\rceil-1}\frac{(-1)^{n-m+1}}{m!(n-m)!}\frac{1}{\varepsilon+\frac{n}{2}-m}\left(\frac{1}{\lambda+k+\frac{n+1}{2}-m}-\frac{\delta^n}{\lambda+k-\frac{n-1}{2}+m}\right)\delta^k\\&=\sum_{m=0}^{\lceil n/2\rceil-1}\frac{(-1)^{m+1}}{m!(n-m)!}\frac{1}{\varepsilon-\frac{n}{2}+m}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{\delta^k}{\lambda+k-\frac{n-1}{2}+m}-\sum_{k=n-2m}^{N+n-2m}\frac{\delta^k}{\lambda+k-\frac{n-1}{2}+m}\right)\\&\quad+\sum_{m=0}^{\lceil n/2\rceil-1}\frac{(-1)^{n-m+1}}{m!(n-m)!}\frac{1}{\varepsilon+\frac{n}{2}-m}\left(\sum_{k=n-2m}^{N+n-2m}\frac{\delta^{k+n}}{\lambda+k-\frac{n-1}{2}+m}-\sum_{k=0}^{N}\frac{\delta^{k+n}}{\lambda+k-\frac{n-1}{2}+m}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{\lceil n/2\rceil-1} \frac{(-1)^{m+1}}{m!(n-m)!}\frac{1}{\varepsilon-\frac{n}{2}+m}\Bigg(\sum_{k=0}^{n-2m-1}\frac{\delta^k}{\lambda+k-\frac{n-1}{2}+m}-\sum_{k=N+1}^{N+n-2m}\frac{\delta^k}{\lambda+k-\frac{n-1}{2}+m}\Bigg)\\
&\quad+\sum_{m=0}^{\lceil n/2\rceil-1} \frac{(-1)^{n-m+1}}{m!(n-m)!}\frac{1}{\varepsilon+\frac{n}{2}-m}\Bigg(\sum_{k=N+1}^{N+n-2m}\frac{\delta^{k+n}}{\lambda+k-\frac{n-1}{2}+m}-\sum_{k=0}^{n-2m-1}\frac{\delta^{k+n}}{\lambda+k-\frac{n-1}{2}+m}\Bigg)\\
&= \sum_{m=0}^{\lceil n/2\rceil-1} \frac{(-1)^{m+1}}{m!(n-m)!}\Bigg(\frac{1}{\varepsilon-\frac{n}{2}+m}-\frac{(-\delta)^n}{\varepsilon+\frac{n}{2}-m}\Bigg)\sum_{k=0}^{n-2m-1}\frac{\delta^k}{\lambda+k-\frac{n-1}{2}+m}+O(N^{-1}).
\end{aligned}
$$

因此，我们得到 $A_n^\delta(\lambda,\ \varepsilon)$、 $B_n^\delta(\lambda,\ \varepsilon)$ 的第一个等式。特别地，对于 $n=0$，1，我们有

$$
\begin{aligned}
J_0^\delta(\lambda,\varepsilon)&=\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\Bigg(\frac{1}{\lambda-\varepsilon+k+\frac12}-\frac{1}{\lambda+\varepsilon+k+\frac12}\Bigg)\delta^k,\\
J_1^\delta(\lambda,\varepsilon)&=\frac{\lambda}{2\left(\varepsilon-\frac12\right)\left(\varepsilon+\frac12\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\Bigg(\frac{1}{\lambda-\varepsilon+k+\frac12}-\frac{\delta}{\lambda+\varepsilon+k+\frac12}\Bigg)\delta^k-\frac12\Bigg(\frac{1}{\varepsilon-\frac12}+\frac{\delta}{\varepsilon+\frac12}\Bigg).
\end{aligned}
$$

$A_n^\delta(\lambda,\ \varepsilon)$、 $B_n^\delta(\lambda,\ \varepsilon)$中的第二个等式由命题6.3中的递推关系得出。

□

注记6.5。尽管 $A_n^\delta(\lambda,\varepsilon)$ 和 $B_n^\delta(\lambda,\varepsilon)$ 分别在 $\varepsilon\in\left\{-\frac{n}{2},-\frac{n}{2}+1,\ldots,\frac{n}{2}\right\}$ 和 $\varepsilon\in\left\{-\frac{n}{2},-\frac{n}{2}+1,\ldots,\frac{n}{2}\right\}\setminus\{0\}$ 处有极点，因为

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\Bigg(\frac{1}{\lambda-\varepsilon+k+\frac12}-\frac{\delta^n}{\lambda+\varepsilon+k+\frac12}\Bigg)\delta^k\\
&=\sum_{k=0}^{n-2m-1}\frac{\delta^k}{\lambda-\varepsilon+k+\frac12}+\sum_{k=0}^{\infty}\Bigg(\frac{\delta^{k+n-2m}}{\lambda-\varepsilon+k+n-2m+\frac12}-\frac{\delta^{k+n}}{\lambda+\varepsilon+k+\frac12}\Bigg)\\
&=\sum_{k=0}^{n-2m-1}\frac{\delta^k}{\lambda-\varepsilon+k+\frac12}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2\varepsilon-n+2m)\delta^{k+n}}{\left(\lambda-\varepsilon+k+n-2m+\frac12\right)\left(\lambda+\varepsilon+k+\frac12\right)}
\end{aligned}
$$

对 $m=0$、1、.....、$\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$成立，我们有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to\frac{n}{2}-m}\left(\varepsilon-\frac{n}{2}+m\right)\frac{A_n^\delta(\lambda,\varepsilon)}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\Bigg(\frac{1}{\lambda-\varepsilon+k+\frac12}-\frac{\delta^n}{\lambda+\varepsilon+k+\frac12}\Bigg)\delta^k\\
&=\lim_{\varepsilon\to\frac{n}{2}-m}\frac{\left(\lambda-\frac{n-1}{2}\right)_n}{2\left(\varepsilon-\frac{n}{2}\right)_m\left(\varepsilon-\frac{n}{2}+m+1\right)_{n-m}}\sum_{k=0}^{n-2m-1}\frac{\delta^k}{\lambda-\varepsilon+k+\frac12}\\
&=\frac{\left(\lambda-\frac{n-1}{2}\right)_n}{2(-m)_m(1)_{n-m}}\sum_{k=0}^{n-2m-1}\frac{\delta^k}{\lambda+k-\frac{n-1}{2}+m}\\
&=\frac{(-1)^m\left(\lambda-\frac{n-1}{2}\right)_n}{2\cdot m!(n-m)!}\sum_{k=0}^{n-2m-1}\frac{\delta^k}{\lambda+k-\frac{n-1}{2}+m}\\
&=-\lim_{\varepsilon\to\frac{n}{2}-m}\left(\varepsilon-\frac{n}{2}+m\right)B_n^\delta(\lambda,\varepsilon).
\end{aligned}
$$

因此， $J_n^\delta(\lambda,\varepsilon)$ 处的留数为零。由于 $J_n^\delta(\lambda,-\varepsilon)=(-\delta)^nJ_n^\delta(\lambda,\varepsilon)$ 成立， $\varepsilon=-\frac{n}{2}+m$ 处的留数也为零，即， $J_n^\delta(\lambda,\varepsilon)$ 在 $\varepsilon\in\left\{-\frac{n}{2},-\frac{n}{2}+1,\ldots,\frac{n}{2}\right\}$ 处全纯。

由定理 6.4，我们立即得到以下结论。

推论 6.6. 对于 $g\in\mathbb{R}$, $\lambda,\varepsilon\in\mathbb{C}$，当 $\lambda\pm\varepsilon\notin-\big(\mathbb{Z}_{\geq 0}+\frac{1}{2}\big)$, $\varepsilon\notin\pm\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 时，我们有

$$\begin{aligned}R_1^+(\lambda;g,\varepsilon)=&\left({}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\lambda,\frac{1}{2}-\lambda,\\ 1+\varepsilon,1-\varepsilon\end{matrix};\tanh^2(2g)\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\big(\lambda+\varepsilon+k+\frac{1}{2}\big)\big(\lambda-\varepsilon+k+\frac{1}{2}\big)}\right.\\&\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\big(\frac{1}{2}\big)_n}{n!}\tanh^{2n}(2g)\sum_{l=0}^{n-1}\frac{\lambda\big(\lambda-n+\frac{1}{2}\big)_l\big(-\lambda-n+\frac{1}{2}\big)_l}{(2n-2l-1)(\varepsilon-n)_{l+1}(-\varepsilon-n)_{l+1}}\right)\operatorname{sech}(2g),\\R_1^-(\lambda;g,\varepsilon)=&\left({}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\lambda,\frac{1}{2}-\lambda,\\ 1+\varepsilon,1-\varepsilon\end{matrix};\tanh^2(2g)\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\big(\lambda+\varepsilon+k+\frac{1}{2}\big)\big(\lambda-\varepsilon+k+\frac{1}{2}\big)}\right.\\&\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\big(\frac{1}{2}\big)_n}{n!}\tanh^{2n}(2g)\sum_{l=0}^{n-1}\frac{\big(\lambda-n+\frac{1}{2}\big)_l\big(-\lambda-n+\frac{1}{2}\big)_l}{2(\varepsilon-n)_{l+1}(-\varepsilon-n)_{l+1}}\right)\operatorname{sech}(2g).\end{aligned}$$

公式 $R_1^+(0;g,0)$ 与 [31] 得出的结果一致。

注记 6.7. *(1)* 关于 λ，当 $\delta\in\{\pm\}$ 时，$R_1^+(\lambda;\ g,\varepsilon)$ 的偶部和 $R_1^-(\lambda;\ g,\varepsilon)$ 的奇部可简化为：

$$\begin{aligned}&R_1^\delta(\lambda;g,\varepsilon)+\delta R_1^\delta(-\lambda;g,\varepsilon)\\&=\operatorname{sech}(2g){}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\lambda,\frac{1}{2}-\lambda,\\ 1+\varepsilon,1-\varepsilon\end{matrix};\tanh^2(2g)\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\delta^k}{\big(\lambda+\varepsilon+k+\frac{1}{2}\big)\big(\lambda-\varepsilon+k+\frac{1}{2}\big)}\\&=\operatorname{sech}(2g){}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{4}+\frac{\lambda+\varepsilon}{2},\frac{1}{4}-\frac{\lambda-\varepsilon}{2},\\ 1+\varepsilon\end{matrix};\tanh^2(2g)\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{4}-\frac{\lambda+\varepsilon}{2},\frac{1}{4}+\frac{\lambda-\varepsilon}{2},\\ 1-\varepsilon\end{matrix};\tanh^2(2g)\right)\\&\qquad\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\delta^k}{\big(\lambda+\varepsilon+k+\frac{1}{2}\big)\big(\lambda-\varepsilon+k+\frac{1}{2}\big)}\\&=\operatorname{sech}^3(2g){}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{3}{4}+\frac{\lambda+\varepsilon}{2},\frac{3}{4}-\frac{\lambda-\varepsilon}{2},\\ 1+\varepsilon\end{matrix};\tanh^2(2g)\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{3}{4}-\frac{\lambda+\varepsilon}{2},\frac{3}{4}+\frac{\lambda-\varepsilon}{2},\\ 1-\varepsilon\end{matrix};\tanh^2(2g)\right)\\&\qquad\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\delta^k}{\big(\lambda+\varepsilon+k+\frac{1}{2}\big)\big(\lambda-\varepsilon+k+\frac{1}{2}\big)}.\end{aligned}$$

第 *2* 个和第 *3* 个等式由 *[1,* 习题 *2.13*，*(2.2.7)],* 得出

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},a-b+\frac{1}{2},b-a+\frac{1}{2};\\ a+b+\frac{1}{2},\frac{3}{2}-a-b\end{matrix}x\right)={}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\ a+b+\frac{1}{2};\end{matrix}x\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}-a,\frac{1}{2}-b;\\ \frac{3}{2}-a-b\end{matrix}x\right),$$

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\ c;\end{matrix}x\right)=(1-x)^{c-a-b}{}_2F_1\left(\begin{matrix}c-a,c-b\\ c;\end{matrix}x\right).$$

(2) 类似地，式（*6.1*）中的生成函数 $V_\delta(t;\ \lambda,\varepsilon)$ 计算如下

$$\begin{aligned}V_+(t;\lambda,\varepsilon)=&{}_3F_2\left(\begin{matrix}1,\frac{1}{2}+\lambda,\frac{1}{2}-\lambda,\\ 1+\varepsilon,1-\varepsilon\end{matrix};t\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\big(\lambda+\varepsilon+k+\frac{1}{2}\big)\big(\lambda-\varepsilon+k+\frac{1}{2}\big)}\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{\lambda\big(\lambda-n+\frac{1}{2}\big)_l\big(-\lambda-n+\frac{1}{2}\big)_l}{(2n-2l-1)(\varepsilon-n)_{l+1}(-\varepsilon-n)_{l+1}}t^n,\end{aligned}$$

$$V_-(t;\lambda,\varepsilon)={}_3F_2\left(\begin{matrix}1,\frac12+\lambda,\frac12-\lambda,\\ 1+\varepsilon,1-\varepsilon\end{matrix};t\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\left(\lambda+\varepsilon+k+\frac12\right)\left(\lambda-\varepsilon+k+\frac12\right)}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{\left(\lambda-n+\frac12\right)_l\left(-\lambda-n+\frac12\right)_l}{2(\varepsilon-n)_{l+1}(-\varepsilon-n)_{l+1}}t^n.$$

于是，关于 λ 的 $V_+(t;\ \lambda,\varepsilon)$ 的偶部以及 $V_-(t;\ \lambda,\varepsilon)$ 的奇部可简化为（ $\delta\in\{\pm\}$ 时），

$$V_\delta(t;\lambda,\varepsilon)+\delta V_\delta(t;-\lambda,\varepsilon)$$
$$={}_3F_2\left(\begin{matrix}1,\frac12+\lambda,\frac12-\lambda,\\ 1+\varepsilon,1-\varepsilon\end{matrix};t\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\delta^k}{\left(\lambda+\varepsilon+k+\frac12\right)\left(\lambda-\varepsilon+k+\frac12\right)}.$$

特别地，对于 $\varepsilon=0$，我们有

$$\begin{aligned}V_+(t;\lambda,0)+V_+(t;-\lambda,0)&=\int_{[0,1]^2}\frac{(1-uv)(u^\lambda v^\lambda+u^{-\lambda}v^{-\lambda})}{(1-uv)^2-t(u-v)^2}u^{-\frac12}v^{-\frac12}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\frac{\pi^2}{\cos^2(\pi\lambda)}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac12+\lambda,\frac12-\lambda,\\ 1\end{matrix};t\right),\qquad(6.2)\\V_-(t;\lambda,0)-V_-(t;-\lambda,0)&=\int_{[0,1]^2}\frac{(1+uv)(u^\lambda v^\lambda-u^{-\lambda}v^{-\lambda})}{(1+uv)^2-t(u+v)^2}u^{-\frac12}v^{-\frac12}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=-\frac{\pi^2\sin(\pi\lambda)}{\cos^2(\pi\lambda)}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac12+\lambda,\frac12-\lambda,\\ 1\end{matrix};t\right).\end{aligned}$$

公式 *(6.2)* 与 *[22, (4.2)*、命题 *4.2]*一致。

(3) 通过将 *[21],*代入

$$s=s(\tau)=-\frac{\theta_2(\tau)^4}{\theta_4(\tau)^4}=\frac{\eta(\tau)^8\eta(4\tau)^{16}}{\eta(2\tau)^{24}}$$

代入 $\widetilde{V}_+(s;0,\ 0)$：$=\frac{1}{1-s}V_+\left(\frac{s}{s-1};0、\ 0\right)$，其中 $\theta_j(\tau)$ 是椭圆*theta*函数，而$\eta(\tau)$ 是 *Dedekind eta*函数，我们得到

$$\widetilde{V}_+(s;0,0)=\frac{\pi^2}{2(1-s)}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac12,\frac12,\\ 1\end{matrix};\frac{s}{s-1}\right)=\frac{\pi^2}{2}\frac{\theta_4(\tau)^4}{\theta_3(\tau)^2}=\frac{\pi^2}{2}\frac{\eta(2\tau)^{22}}{\eta(\tau)^{12}\eta(4\tau)^8},$$

这是一个权 *1* 的 $\Gamma(2)$-模形式。 *[22,* 问题 *4.1–4.3]*提出了一个问题，即为 $V_+(t;\ \lambda,\ 0)\ +\ V_+(t;\ -\lambda,\ 0)$寻找类似的模性质；对于一般的 λ、ε，考虑关于 $V_+(t;\ \lambda、\ \varepsilon)\ +\ V_+(t;\ -\lambda、\ \varepsilon)$ 的类似问题似乎是很自然的。

参考文献

[1] G.E. Andrews、R. Askey 和 R. Roy，特殊函数。《数学应用百科全书》第 71 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1999 年。xvi+664 页。

[2] R. Ap´ery，《style id='3'>无理性´的 $\zeta2$ 与 $\zeta3$。Luminy 算术会议，Ast´erisque 第 61 号（1979年），11–13。

[3] F. Beukers，关于 $\zeta(2)$ 和 $\zeta(3)$ 的无理性札记。《伦敦数学会会报》11（1979年），第 3 期，268–272。[4] F. Beukers， π^2的无理性、椭圆曲线的周期以及 $\Gamma_1(5)$。《丢番图逼近与超越数》（Luminy，1982），47–66。数学进展丛书，31，Birkhäuser，波士顿，马萨诸塞州，1983年。[5] F. Beukers，利用模形式证明无理性。贝桑松算术日（Besançon，1985），Ast´erisque 第 147–148 号（1987年），271–283，345。[6] D. Braak，Rabi 模型的可积性。《物理评论快报》107（2011年），100401，共 4 页。[7] D. Braak，量子 Rabi 模型的广义 G 函数。《物理年鉴》525（2013年），第 3 期，L23–L28。[8] D. Braak，双光子量子 Rabi 模型的谱行列式。《物理年鉴》，柏林版，535（2023年），第 3 期，文章编号 2200519，共 14 页；勘误见同刊 536（2024年），第 6 期，文章编号 2400005，共 2 页。[9] L. Duan、Y.F. Xie、D. Braak 和 Q.H. Chen，双光子 Rabi 模型：解析解与谱塌缩。《J. Phys. A》49（2016年），第 46 期，464002，共 13 页。[10] T. Fack，关于特征值的概念。《算子理论杂志》7（1982年），第 2 期，307–333。[11] T. Fack 和 H. Kosaki， s可测算子的广义 τ数。《太平洋数学杂志》123（1986年），第 2 期，269–300。[12] J. Faraut、S. Kaneyuki、A. Kor´ányi、Q.k. Lu 和 G. Roos，复齐性域上的分析与几何。数学进展丛书，185。Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，2000年。[13] G.B. Folland，相空间中的调和分析。《数学年刊研究》，122，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1989年。x +277 页。[14] F. Hiroshima 和 T. Shirai，Rabi 模型的重整化谱 ζ 函数与基态。预印本，arXiv:2405.09158。[15] R. Howe，关于经典不变量理论的评论。《美国数学会汇刊》313（1989年），第 2 期，539–570。[16]T. Ichinose 和 M. Wakayama，非交换谐振子的谱的 ζ 函数。《Comm. Math. Phys.》258（2005年），第 3 期，697–739。[17] L. Jain 和 P. Tzermias，Beukers 积分与 Ap´éry 递推式。《整数数列杂志》8（2005年），第 1 期，文章 05.1.1，共 7 页。[18] E.T. Jaynes 和 F.W. Cummings，量子辐射理论与半经典辐射理论的比较及其在束流脉泽中的应用。《IEEE 会刊》51（1963年），89–109。[19] M. Kashiwara 和 M. Vergne，关于 Segal–Shale–Weil 表示与调和多项式。《数学发明》44（1978年），第 1 期，1–47。[20] K. Kimoto、C. Reyes-Bustos 和 M. Wakayama，非对称量子 Rabi 模型的约束多项式行列式表达式及其谱。《Int. Math. Res. Not. IMRN》（2021年），第 12 期，9458–9544。

[21] *K. Kimoto* 和 *M. Wakayama*，非交换调和振子的谱 ζ 函数所产生的椭圆曲线以及 Γ_0*(4)*-模形式。《 *L*-函数会议》，*201–218*。世界科技出版公司，新泽西州哈肯萨克，*2007*年。[22] *K. Kimoto* 和 *M. Wakayama*，非交换调和振子的 *Ap´ery* 类数与自守积分。*Ann. Inst. Henri Poincar´é D 10*（*2023*年），第*2*期，*205–275*。[23] *C.F. Lo*，揭秘双光子拉比模型中的谱塌缩。《科学报告》*10*，文章编号：*14792*（*2020*年），*5*页。[24] *M. Malagutti*，关于二阶半正则非交换调和振子的谱 ζ 函数。《数学科学通报》*187*（*2023*年），论文编号：*103286*，*29*页。[25] *M. Malagutti* 和 *A. Parmeggiani*，半正则非交换调和振子的谱渐近性质。*Comm. Math. Phys. 405*（*2024*年），第*2*期，论文编号：*46*，*49*页。[26] *R. Nakahama*，非交换调和振子与双光子量子 *Rabi* 模型之间的等价性。*Int. Math. Res. Not. IMRN 2025*年，第*7*期，*rnaf066*，*9*页。[27] *R. Nakahama*，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{su}(1,1)$ 的表示论与非交换调和振子的推广。《后量子密码学的数学基础》，*51–73*。*Math. Ind.*（东京）*40*，施普林格，新加坡，*2026*年。[28]*Y.V. Nesterenko*，积分恒等式与 ζ 值逼近的构造。《波尔多数论杂志》*15*（*2003*年），第*2*期，*535–550*。[29] *H. Ochiai*，非交换调和振子与 *Fuchs* 型常微分算子。*Comm. Math. Phys. 217*（*2001*年），第*2*期，*357–373*。[30] *H. Ochiai*，非交换调和振子谱 ζ 函数的一个特殊值。*Lett. Math. Phys. 70*（*2004*年），第*2*期，*133–139*。[31] *H. Ochiai*，非交换调和振子谱 ζ 函数的一个特殊值。《拉马努金杂志》*15*（*2008* 年），第 *1* 期，*31–36*。[32] *A. Parmeggiani*，非交换调和振子及相关问题。《米兰数学杂志》*82*（*2014*年），*343–387*。[33] *A. Parmeggiani* 和 *A. Venni*，关于某些非交换振子的本质谱。《数学物理杂志》*54*（*2013*年），第*12*期，*121507*，*10*页。[34] *A. Parmeggiani* 和 *M. Wakayama*，振子表示与常微分方程组。《美国国家科学院院刊》*98*（*2001*年），*26–30*。[35] *A. Parmeggiani* 和 *M. Wakayama*，非交换调和振子 *I*。《数学论坛》*14*（*2002*年），第*4*期，*539–604*。[36] *A. Parmeggiani* 和 *M. Wakayama*，非交换调和振子 *II*。《数学论坛》*14*（*2002*年），第*5*期，*669–690*。

[37] C. Reyes-Bustos 和 M. Wakayama，量子 *Rabi* 模型的热核：*II.* 传播子与谱行列式。J. Phys. A**54**（2021年），第11期，论文编号：115202，30页。[38] C. Reyes-Bustos 和 M. Wakayama，量子 *Rabi* 模型的热核。Adv. Theor. Math. Phys.**26** （2022年），第5期，1347–1447。[39] C. Reyes-Bustos 和 M. Wakayama，非对称量子 *Rabi* 模型的覆盖族： η-平移非交换调和振子。Comm. Math. Phys.**403**（2023年），第3期，1429–1476。[40] C. Reyes-Bustos 和 M. Wakayama，量子 *Rabi* 模型谱的 ζ极限。《数学物理杂志》**65** （2024年），第9期，论文编号：093503。[41] R. Schatten，完全连续算子的范数理想。数学及其边界领域丛书，（新系列），第27册，施普林格出版社，柏林—哥廷根—海德堡，1960年。 vii+81 页。[42] S. Sugiyama，量子 *Rabi* 模型的谱 ζ 函数。Nagoya Math. J.**229**（2018年），52–98。[43] A. van der Poorten，欧拉遗漏的一个证明……*Ap ´ery* 关于无理性的证明$\zeta(3)$。非正式报告，Math. Intelligencer**1** （1978/79年），第4期，195–203。[44] M. Wakayama，非交换调和振子的特征值问题与 *Heun* 微分方程全纯解的存在性、本征态简并以及 *Rabi* 模型之间的等价性。Int. Math. Res. Not. IMRN（2016年），第3期，759–794。[45] Q. Xie、H. Zhong、M.T. Batchelor 和 C. Lee，量子 *Rabi* 模型：解与动力学。J. Phys. A**50**（2017年），第11期，113001，40页。[46] Y.F. Xie 和 Q.H. Chen，非对称双光子拉比模型中与隐藏对称性相关的双重简并。Phys. Rev. Research **3**（2021年），033057，14页。