arXiv:2602.01638v1 [math.FA] 2 Feb 2026

非交换球码

K. MAHESH KRISHNA

数学与自然科学学院
Chanakya大学全球校区
NH-648，哈拉卢鲁村
德瓦纳哈里塔卢克，班加罗尔北区
卡纳塔克邦 ，562 110 ，印度
电子邮箱：kmaheshak@gmail.com

日期：2026年2月3日

摘要：球面码拥有近五个世纪的丰富历史，至今仍是活跃的数学探索领域，远未得到充分理解。这些码自然出现于几何、组合学和信息论问题中，其复杂结构与未解问题持续挑战着研究者。受 Polya“变换问题”启发式原则的启发，我们通过引入非交换球面码的概念来拓展经典框架，并特别强调非交换 Newton–Gregory 接吻数问题。这一推广超越了传统的欧几里得空间，进入算子代数与 Hilbert C*-模的领域，从而开辟了新的研究途径。球面码研究的基石是著名的 Delsarte–Goethals–Seidel–Kabatianskii–Levenshtein 线性规划界，它在过去半个世纪中逐步发展而成。该界利用 Gegenbauer 多项式为球面码的规模建立了尖锐的上界，并已成为编码理论与离散几何中的基本工具。值得注意的是，Pfender [*J. Combin. Theory Ser.A, 2007*] 最近给出的一个优雅的单行证明，为该界的一个变体提供了精简的推导。我们证明，Pfender 的论证可以自然地推广到 Hilbert C*-模的情形，从而以非交换类比丰富这一理论。

关键词：球码、接吻数、线性规划、Hilbert C*-模。**数学主题分类（2020）**：94B65、52C17、52C35、46L08。

1. Introduction

在欧几里得空间中，单位球面上满足特定条件的有限点集，是一个对数学、物理学、化学、工程学和生物学等众多科学领域都具有深远影响的概念。这一课题是经久不衰的科学研究领域之一。若干经典问题聚焦于研究球面上的此类有限点集。下面列举其中几个。

(i) Tammes 问题：该问题研究如何在球面上排列给定数量的点，使任意两点之间的最小距离达到最大。(ii) Thomson 问题：该问题也称为 Steve Smale 所列“下个世纪的数学问题”中的第 7 题，旨在寻找球面上给定数量点的一种构型，使总静电势能最小。(iii) 球面设计问题：该领域致力于寻找点集，使其在球面上高度均匀分布，从而能够准确近似球面上的多项式积分。

(iv) 球面码问题：与 Tammes 问题类似，该问题旨在最大化各点之间的最小角间距（或距离），这与通信和编码理论中的应用相关。

(v) 等角直线问题：该问题旨在求经过原点且任意两条之间夹角均相同的直线的最大数量。

本文关注球面码。我们回顾其定义。设 $d \in \mathbb{N}$ 和 $\theta \in [0, 2\pi)$。若 $\{\tau_j\}_{j=1}^n$ 个单位向量属于 $\mathbb{R}^d$，且满足以下条件，则称其为 $\mathbb{R}^d$ 中的（d，n，θ）**-球面码** [40]：

$$\langle \tau_j, \tau_k \rangle \leq \cos\theta, \quad \forall 1 \leq j, k \leq n, j \neq k. \tag{1}$$

由于

$$\langle \tau, \omega \rangle = \frac{2 - \|\tau - \omega\|^2}{2}, \quad \forall \tau, \omega \in \mathbb{R}^d,$$

我们可以将不等式（1）改写为

$$\|\tau_j - \tau_k\| \geq \sqrt{2(1 - \cos\theta)}, \quad \forall 1 \leq j, k \leq n, j \neq k.$$

与球面码相关的基本问题如下。

问题1.1。 给定 d 和 θ，存在一个位于 $\mathbb{R}^d$中的（d、n、θ）球面码$\{\tau_j\}_{j=1}^n$ 时， n 的最大值是多少？

情形 $\theta = \pi/3$被称为著名的**（牛顿-格雷戈里）接吻数问题**（KNP）。KNP 在每个维度上仍未完全解决（但已在维度 $d = 1$（$n = 2$）、 $d = 2$（n =6）、 $d = 3$（$n = 12$）、 $d = 4$（$n = 24$）、 $d = 8$（$n = 240$）、 $d = 24$（$n = 196560$）中解决） [1,2,7,13,14,20–28、30–34,37]。关于球面码的更多信息，请参阅 [3–6、8–12、15、17–19, 29, 35, 36, 38] 。问题1.1甚至与重要的球堆积问题 [16]有关。获取球面码上界的一种反复使用的方法是德尔萨特-戈特斯-赛德尔-卡巴蒂安斯基-列文施泰因界。它使用 Gegenbauer 多项式获得。令 $n \in \mathbb{N}$ 固定。Gegenbauer 多项式通过递推定义如下：

$$\begin{aligned}
G_0^{(n)}(r) &:= 1, \quad \forall r \in [-1, 1], \\
G_1^{(n)}(r) &:= r, \quad \forall r \in [-1, 1], \\
&\vdots \\
G_k^{(n)}(r) &:= \frac{(2k + n - 4) r G_{k-1}^{(n)}(r) - (k-1) G_{k-2}^{(n)}(r)}{k + n - 3}, \quad \forall r \in [-1, 1], \quad \forall k \geq 2.
\end{aligned}$$

那么，族 $\{G_k^{(n)}\}_{k=0}^\infty$ 在区间 $[-1, 1]$ 上关于权函数正交

$$\rho(r) := (1 - r^2)^{\frac{n-3}{2}}, \quad \forall r \in [-1, 1].$$

定理 1.2。 *[18, 19]*（德尔萨特-戈特尔斯-塞德尔-卡巴蒂安斯基-列文施泰因线性规划界）设 $\{\tau_j\}_{j=1}^n$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个（d，n，θ）球码。设 P 是满足以下条件的实系数多项式。

(i) $P(r) \leq 0$ 对所有 $-1 \leq r \leq \cos\theta$均成立。(ii) 盖根鲍尔展开中的系数

$$P = \sum_{k=0}^m a_k G_k^{(n)}$$

满足

$$a_0 > 0, \quad a_k \geq 0, \ \forall 1 \leq k \leq m.$$

Then

$$n \leq \frac{P(1)}{a_0}.$$

2007年，Pfender 取得了一项突破，为定理 1.2 的一个变体给出了一行证明。

定理 1.3. *[33]*(***Delsarte-Goethals-Seidel-Kabatianskii-Levenshtein-Pfender*** 界) 设$\{\tau_j\}_{j=1}^n$是$\mathbb{R}^d$中的一个(d, n, θ)球码。设 $c > 0$和 $\phi\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$是满足以下条件的函数。

(i)

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \phi(\langle \tau_j, \tau_k \rangle) \geq 0.$$

(ii) $\phi(r) + c \leq 0$ 对所有 $-1 \leq r \leq \cos\theta$。

Then

$$n \leq \frac{\phi(1) + c}{c}.$$

特别地，如果 $\phi(1) + c \leq 1$，那么 $n \leq 1/c$。

本文中，我们引入了非交换球面码的概念。我们证明，定理 1.3 可以推广到 Hilbert C*-模。

2. Noncommutative Spherical Codes

设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺 C*-代数。对于 $d \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{A}^d$ 为标准（左）Hilbert C*-模 [39]，其配备的内积为

$$\langle (a_j)_{j=1}^d, (b_j)_{j=1}^d \rangle := \sum_{j=1}^{d} a_j b_j^*, \quad \forall (a_j)_{j=1}^d, (b_j)_{j=1}^d \in \mathcal{A}^d$$

以及范数

$$\|(a_j)_{j=1}^d\| := \left\| \sum_{j=1}^{d} a_j a_j^* \right\|^{\frac{1}{2}}, \quad \forall (a_j)_{j=1}^d \in \mathcal{A}^d.$$

我们如下引入非交换球面码。

定义 2.1. 设 $d \in \mathbb{N}$ 和 $\theta \in [0, 2\pi)$。令 $\mathcal{A}$ 为一个含幺 C*-代数。若向量集 $\{\tau_j\}_{j=1}^n$ 属于 $\mathcal{A}^d$，且满足以下条件，则称其为 $\mathcal{A}^d$ 中的非交换 (d, n, θ)-球面码 或(d, n, θ)-模码。

(i) 对所有 $1 \leq j \leq n$, $\langle \tau_j, \tau_j \rangle = 1$。

(ii)

$$2 - \langle \tau_j, \tau_k \rangle - \langle \tau_k, \tau_j \rangle = \langle \tau_j - \tau_k, \tau_j - \tau_k \rangle \geq 2(1 - \cos\theta), \quad \forall 1 \leq j, k \leq n, j \neq k. \tag{2}$$

我们将情形 $\theta = \pi/3$ 称为非交换接吻数问题。

注意，尽管每当 $\mathcal{A}=\mathbb{C}$时不等式（2）都会化为不等式（1），不等式（2）即使对于交换 C*-代数也仍然具有挑战性。原因在于，我们比较的是C*代数中的正元，这比由范数引出的不等式更难处理。

例 2.2. 设 $\{\tau_j\}_{j=1}^d$ 为 $\mathcal{A}^d$的一个正交归一基。则对每个 $\theta\in[0,\pi/2,\quad \{\tau_j\}_{j=1}^n$ 是$\mathcal{A}^d$ 中的(d,d,θ)-模码)。

例 2.3. 设 $\{\tau_j\}_{j=1}^n$ 为 $\mathcal{A}^d$ 中的任意集合（特别地，一个框架），使得对所有$1\leq j\leq n$有 $\langle\tau_j、\ \tau_j\rangle=1$ 。选取 $\theta\in[0,2\pi)$，使得对所有 $1\leq j、\ k\leq n、\ j\neq k.$有 $\langle\tau_j-\tau_k、\ \tau_j-\tau_k\rangle\geq 2(1-\cos\theta)$ 。则$\{\tau_j\}_{j=1}^n$是 $\mathcal{A}^d$中的(d,n,θ)-模码。

设 $\{\tau_j\}_{j=1}^n$为 $\mathcal{A}^d$中的非交换（d,n,θ）-球码。由于平方根保持C*-代数中正元的序，我们有

$$\|\tau_j-\tau_k\|\geq\sqrt{2(1-\cos\theta)},\quad \forall 1\leq j,k\leq n,j\neq k. \tag{3}$$

不过请注意，不等式（3）未必能推出不等式（2）。下面给出定理 1.3 的非交换版本。

定理 2.4. *(*非交换 ***Delsarte-Goethals-Seidel-Kabatianskii-Levenshtein-Pfender*** 球面码界*)* 设 $\mathcal{A}$ 为一个含幺 C*-代数，$\mathcal{A}^+:=\{a^*a:\ a\in\mathcal{A}\}$ 为 $\mathcal{A}$ 中所有正元素的集合。设 $\{\tau_j\}_{j=1}^n$为 $\mathcal{A}^d$ 中的一个非交换(d,n,θ)-球码。设 $c\in(0,\infty)$ 和ϕ: $\mathcal{A}^+\to\mathbb{R}$ 为满足以下条件的函数。

(i) $\sum_{1\leq j,k\leq n}\phi(\langle\tau_j-\tau_k,\tau_j-\tau_k\rangle)\geq 0$.(ii) 对所有 满足 $a\geq 2(1-\cos\theta)$。的 $a\in\mathcal{A}^+$，$\phi(a)+c\leq 0$

Then

$$n\leq\frac{\phi(0)+c}{c}.$$

特别地，如果 ϕ（0）$+c\leq 1$，那么 $n\leq 1/c$。

证明。 定义 $\psi:\ \mathcal{A}^+\ni a\mapsto\psi(a):=\phi(a)+c\in\mathbb{R}$。于是

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq j,k\leq n}\psi(\langle\tau_j-\tau_k,\tau_j-\tau_k\rangle)&=\sum_{j=1}^n\psi(0)+\sum_{1\leq j,k\leq n,j\neq k}\psi(\langle\tau_j-\tau_k,\tau_j-\tau_k\rangle)\\&=n(\phi(0)+c)+\sum_{1\leq j,k\leq n,j\neq k}(\phi(\langle\tau_j-\tau_k,\tau_j-\tau_k\rangle)+c)\\&\leq n(\phi(0)+c)+0=n(\phi(0)+c).\end{aligned}$$

我们还有

$$\sum_{1\leq j,k\leq n}\psi(\langle\tau_j-\tau_k,\tau_j-\tau_k\rangle)=\sum_{1\leq j,k\leq n}(\phi(\langle\tau_j-\tau_k,\tau_j-\tau_k\rangle)+c)=\sum_{1\leq j,k\leq n}\phi(\langle\tau_j-\tau_k,\tau_j-\tau_k\rangle)+cn^2.$$

因此

$$cn^2\leq\sum_{1\leq j,k\leq n}\phi(\langle\tau_j-\tau_k,\tau_j-\tau_k\rangle)+cn^2=\sum_{1\leq j,k\leq n}\psi(\langle\tau_j-\tau_k,\tau_j-\tau_k\rangle)\leq n(\phi(0)+c).$$

□

推论2.5. *(*非交换***Delsarte-Goethals-Seidel-Kabatianskii-Levenshtein-Pfender***接吻数界）设 $\{\tau_j\}_{j=1}^n$ 是 $(d,n,\pi/3)$-球码，位于 $\mathcal{A}^d$中。设$c\in(0,\infty)$ 以及 $\phi:\ \mathcal{A}^+\to\mathbb{R}$ 为满足以下条件的函数。4

(i) $\sum_{1\le j,k\le n}\phi(\langle\tau_j-\tau_k,\tau_j-\tau_k\rangle)\ge 0$。

(ii) $\phi(a)+c\le 0$ 对所有 $a\in\mathcal{A}^+$ 满足 $a\ge 1$。

Then

$$n\le\frac{\phi(0)+c}{c}.$$

特别地，如果 $\phi(0)+c\le 1$，那么 $n\le 1/c$。

下面对定理 2.4 的推广显而易见。

定理 2 .6. 设 $\{\tau_j\}_{j=1}^n$ 是 $\mathcal{A}^d$ 中的一个非交换(d,n,θ)-球面码。设 $c\in(0,\ \infty)$ 且

$$\phi:\{\langle\tau_j-\tau_k,\tau_j-\tau_k\rangle:1\le j,k\le n\}\to\mathbb{R}$$

是满足以下条件的函数。

(i) $\sum_{1\le j,\ k\le n}\phi(\langle\tau_j-\tau_k,\ \tau_j-\tau_k\rangle)\ge 0$。(ii) $\phi(a)+c\le 0$ 对所有 $a\in\{\langle\tau_j-\tau_k,\tau_j-\tau_k\rangle:\ 1\le j,\ k\le n,\ j\ne k\}$。

Then

$$n\le\frac{\phi(0)+c}{c}.$$

特别地，如果 $\phi(0)+c\le 1$，那么 $n\le 1/c$。

我们指出，Gegenbauer 多项式中的所有结果都使用了实数的性质，例如交换性、非零数的逆元、勒贝格测度以及实数的全序性质。由于这些性质对 C*-代数并不适用，Gegenbauer 多项式不能用于非交换情形。

3. Conclusion

我们通过引入非交换球面码，对球面码进行了深远的推广。我们证明，针对球面码得到的 Pfender界可以推广到 Hilbert C*-模。不同于实数情形，我们观察到，非交换球面码极难解决。由于球面码本身在五个世纪之后仍未得到完全理解，我们相信，即使经过数千年，非交换球面码也不会得到完全理解。因此，本文将永远被持续引用和参考。

4. Acknowledgments

作者感谢匿名审稿人提出的多项建议，这些建议提升了本文的质量。

References

[1] Kurt M. Anstreicher. 十三个球：一个新的证明。 *Discrete Comput. Geom.*, 31(4):613–625, 2004年。[2] Christine Bachoc 和 Frank Vallentin. 通过半定规划得到的接吻数新上界。 *J.Amer. Math. Soc.*, 21(3):909–924, 2008年。[3] Christine Bachoc 和 Frank Vallentin. 半定规划、多元正交多项式与球冠码。 *European J. Combin.*, 30(3):625–637, 2009。[4] Eiichi Bannai 和 Etsuko Bannai. 球面设计与球面上的代数组合学综述。 *European J.Combin.*, 30(6):1392–1425, 2009。[5] Eiichi Bannai 和 N. J. A. Sloane. 某些球面码的唯一性。 *Canadian J. Math.*, 33(2):437–449, 1981。[6] Alexander Barg 和 Oleg R. Musin. 球冠码。 *Adv. Math. Commun.*, 1(1):131–149, 2007年。

[7] K´aroly B¨or¨oczky. 重新探讨牛顿-格雷戈里问题。载于 *Discrete geometry*，第253卷，第103–110页。Dekker，纽约，2003年。[8] K´aroly J. B¨or¨oczky 和 Alexey Glazyrin. 最优球面码的稳定性。 *Monatsh. Math.*, 205(3):455–475, 2024年。[9] P. G. Boyvalenkov、P. D. Dragnev、D. P. Hardin、E. B. Saff 和 M. M. Stoyanova. 球面码势能的通用下界。 *Constr. Approx.*, 44(3):385–415, 2016 年。[10] P. G. Boyvalenkov 、 P. D. Dragnev 、 D. P. Hardin 、 E. B. Saff 和 M. M. Stoyanova. 球面码的界：扩展列文施泰因框架。 *Math. Comp.*, 90(329):1323–1356, 2021年。[11] Peter Boyvalenkov 和 Danyo Danev. 关于多项式度量空间中的极大码。载于 *Applied algebra, algebraicalgorithms and error-correcting codes*, *Lecture Notes in Comput. Sci.*第1255卷，第29–38页。Springer，柏林，1997年。[12] Peter Boyvalenkov、Danyo Danev 和 Ivan Landgev. 关于极大球面码。II。 *J. Combin. Des.*, 7(5):316–326, 1999年。[13] Peter Boyvalenkov、Stefan Dodunekov 和 Oleg Musin. 接吻数综述。 *Serdica Math. J.*, 38(4):507–522, 2012年。[14] Bill Casselman. 三维空间中接吻问题的难点。 *Notices Amer. Math. Soc.*, 51(8):884–885, 2004年。[15]Henry Cohn、Yang Jiao、Abhinav Kumar 和 Salvatore Torquato. 球面码的刚性。 *Geom. Topol.*, 15(4):2235–2273, 2011年。[16] Henry Cohn 和 Yufei Zhao. 通过球面码得到的球堆积界。 *Duke Math. J.*, 163(10):1965–2002, 2014年。[17] J. H. Conway 和 N. J. A. Sloane. *Sphere packings, lattices and groups*. Springer-Verlag，纽约，1999年。[18] P. Delsarte、J. M. Goethals 和 J. J. Seidel. 球面码与设计。 *Geometriae Dedicata*, 6(3):363–388, 1977年。[19] Thomas Ericson 和 Victor Zinoviev. *Codes on Euclidean spheres*, *North-Holland Mathematical Library*第63卷。North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹，2001年。[20]Alexey Glazyrin. 三维接吻数问题的简短解法。 *Discrete Comput. Geom.*, 69(3):931–935, 2023年。[21] Matthew Jenssen、Felix Joos 和 Will Perkins. 关于高维中的接吻数与球面码。 *Adv.Math.*, 335:307–321, 2018年。[22] Kenz Kallal、Tomoka Kan 和 Eric Wang. 第25至31维接吻数下界的改进。*SIAM J. Discrete Math.*, 31(3):1895–1908, 2017年。[23] N. A. Kuklin. 高维空间接吻数问题中的德尔萨特方法。 *Proc. Steklov Inst.Math.*, 284(1):S108–S123, 2014年。[24] John Leech. 十三个球的问题。 *Math. Gaz.*, 40:22–23, 1956年。[25] Leo Liberti. 接吻数的数学规划界。载于 *Optimization and decision science: methodologies and applications*， *Springer Proc. Math. Stat.*第217卷，第213–222页。Springer，Cham，2017年。[26] Fabr´ıcio Caluza Machado 和 Fernando M´ario de Oliveira Filho. 利用多项式对称性改进接吻数的半定规划界。 *Exp. Math.*, 27(3):362–369, 2018年。[27] H. Maehara. 十三个球问题——面向本科生的证明。 *European J. Combin.*, 28(6):1770–1778, 2007年。[28] Hans D. Mittelmann 和 Frank Vallentin. 接吻数的高精度半定规划界。 *Ex-periment. Math.*, 19(2):175–179, 2010年。[29] O. R. Musin. 通过半定规划得到的码的界。 *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 263:143–158, 2008年。[30] Oleg R. Musin. 三维接吻问题。 *Discrete Comput. Geom.*, 35(3):375–384, 2006年。[31] Oleg R. Musin. 四维接吻数。 *Ann. of Math. (2)*, 168(1):1–32, 2008年。[32] A. M. Odlyzko 和 N. J. A. Sloane. 关于单位球能与一个单位球相切的单位球数量的新界： n维。 *J. Combin. Theory Ser. A*, 26(2):210–214, 1979年。[33]Florian Pfender. 低维球面码的德尔萨特界改进。 *J. Combin. Theory Ser. A*, 114(6):1133–1147, 2007年。[34] Florian Pfender 和 G¨unter M. Ziegler. 接吻数、球堆积与一些意想不到的证明。 *Notices Amer.Math. Soc.*, 51(8):873–883, 2004年。[35]Alex Samorodnitsky. 关于球面码与设计的线性规划界。 *Discrete Comput. Geom.*, 31(3):385–394, 2004年。[36] Naser Talebizadeh Sardari 和 Masoud Zargar. 球面码与堆积的新上界。 *Math. Ann.*, 389(4):3653–3703, 2024年。

[37] K. Sch¨utte与B. L. van der Waerden. 十三个球的问题. *Math. Ann.*, 125:325–334, 1953.[38] N. J. A. Sloane. 球堆积与球码表. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 27(3):327–338, 1981.[39] Niels Erik Wegge-Olsen. *K-theory and C*-algebras: a friendly approach*. 牛津：牛津大学出版社, 1993.[40] 宗传明. *Sphere packings*. Universitext. Springer-Verlag, 纽约, 1999年.