arXiv:2602.01706v1 [math.DG] 2 Feb 2026

双曲三维空间中的双曲广义标架曲面

Donghe Pei、Masatomo Takahashi、Anjie Zhou

摘要

我们将双曲标架曲面和单参数双曲标架曲线族加以推广，引入双曲广义标架曲面的概念，并建立它们在双曲三维空间中的关系。我们给出了光滑曲面成为双曲广义标架基曲面的充要条件，随后分析了双曲广义标架基曲面的奇点。此外，我们还探讨了双曲广义标架曲面、广义标架曲面与光锥标架曲面之间的关系。作为双曲广义标架曲面的应用，我们研究了极限圆曲面的性质。

1 引言

在微分几何中，奇异曲面长期以来一直是研究的核心主题，分析这类曲面的有力工具也日益增多。在欧几里得空间中，Fukunaga 与第二作者提出的标架曲面是一种广泛使用的工具（参见 [4]）。标架曲面在其奇点处具有光滑的活动标架，因此能够研究这些点处的性质。许多文章将标架曲面理论应用于各类曲面，并取得了大量成果（参见 [2, 3, 6, 15, 16]）。然而，有些曲面并非标架曲面，典型例子是标架曲线的单参数族；文献 [5] 探讨了标架曲线的单参数族与标架曲面之间的关系。为研究更广泛的奇异曲面，第二作者与 Yu 在文献 [13] 中引入了广义标架曲面。广义标架曲面既包含标架曲面，也是标架曲线单参数族的一种推广。借助这一理论，可以研究更多奇异曲面，例如具有余秩一奇点的曲面。

为了研究不同外围空间中的奇异曲面，我们引入了配备光锥标架的光锥标架曲面，用以研究洛伦兹-闵可夫斯基3-空间中带奇点的混合型曲面（参见 [10]）。光锥标架曲面与欧几里得三维空间中的广义标架曲面密切相关，见 [10] 中的定理 3.5。作为双曲几何的一个模型，双曲空间也得到了广泛研究（参见 [7, 8, 9, 12, 17, 18, 19, 20]）。在双曲三维空间中，双曲标架曲线已被用于研究各种几何对象（参见[17, 19]）。第一作者与第三作者在 [20] 中定义了双曲标架曲面。双曲三维空间中曲率为 1、挠率为 0 的曲线称为极限圆。将极限圆视为“直线”，便得到地平球几何（参见 [7]）。等距圆的单参数族称为曲率线曲面，如命题 5.2 所示，它未必满足双曲标架基曲面的定义。类似地，单参数双曲标架曲线族未必是双曲标架曲面。这些以及其他例子促使我们在双曲三维空间中发展更一般的奇异曲面概念。

本文旨在引入双曲三维空间中双曲广义标架曲面的概念，将双曲标架曲面和单参数双曲标架曲线族推广到这一概念。在第2节中，我们回顾双曲三维空间中的双曲标架曲面和单参数双曲标架曲线族、欧几里得三维空间中的广义标架曲面，以及洛伦兹-闵可夫斯基三维空间中的光锥标架曲面相关理论。第3节中，我们定义双曲广义标架曲面并研究其性质。我们建立了

2020年数学主题分类：53A05、57R45、53B30、58K05；关键词和短语：双曲广义曲面、曲率线曲面、奇点、双曲三维空间

双曲广义标架曲面、双曲标架曲面和单参数双曲标架曲线族之间的关系（命题3.5和3.7）。通过考察标架旋转，我们还展示了它们的基曲面之间的关系（命题3.11和命题3.12）。此外，我们给出了光滑曲面成为双曲广义标架基曲面的充要条件（定理 3.13）。我们利用其基本不变量分析此类基曲面的奇点，并给出若干示例。第4节中，我们讨论双曲广义标架曲面、欧几里得三维空间中的广义标架曲面与洛伦兹-闵可夫斯基三维空间中的光锥标架曲面之间的联系。作为应用，第5节表明曲率线曲面是双曲广义标架基曲面，并探讨其性质。

除非另有说明，本文所考虑的所有映射与流形均为 C^∞ 类。

致谢 第一作者与第三作者得到国家自然科学基金委员会（项目编号11671070）的部分资助。第二作者得到日本学术振兴会科研费（项目编号JP 24K06728）的部分资助。第三作者感谢中国国家留学基金委—室兰工业大学奖学金（项目编号202506620020）提供的经费支持。

2 预备知识

我们简要回顾双曲标架曲面、双曲标架曲线的单参数族、广义标架曲面以及光锥标架曲面的理论。

设 $\mathbb{R}^n_1$ 表示洛伦兹-闵可夫斯基n维空间，其伪内积为 $\langle \boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2\rangle = -x_1^1x_1^2 + \sum_{j=2}^n x_j^1x_j^2$，伪向量积为

$$\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{n-1} = \det \begin{pmatrix} -\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \\ x_1^1 & x_2^1 & \cdots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{x}_i = (x_1^i,\ x_2^i,\ \ldots\ldots,\ x_n^i) \in \mathbb{R}^n_1$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n-1)$，且 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是$\mathbb{R}^n_1$的标准基。对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_1$，容易验证 $\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{n-1}\rangle = \det(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \ldots\ldots,\ \boldsymbol{x}_{n-1})$，从而 $\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{n-1}$ 与任意 $\boldsymbol{x}_i$ 伪正交。向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_1 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ 在 $\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\rangle > 0$、$\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\rangle = 0$ 或 $\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\rangle < 0$ 时分别~~为类空~~、类光或类时。向量 $\boldsymbol{x}$ 的范数由 $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{|\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\rangle|}$ 给出

我们将双曲三维空间定义为

$$H^3 = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4_1 \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = -1\right\}$$

并将德西特三维空间定义为

$$S^3_1 = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4_1 \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = 1\right\}.$$

子流形 Δ_5 在 [1] 中定义为 $\Delta_5 = \left\{(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) \in S^3_1 \times S^3_1 \mid \langle \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2\rangle = 0\right\}$.

众所周知，双曲三维空间有两个连通分支。这里我们只考虑分支 $\left\{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in H^3 \mid x_1 > 0\right\}$ 上的曲线或曲面，并仍将其记为 H^3。

In 在本文中，我们用 U 表示 $\mathbb{R}^2$ 中的一个单连通开子集，用 I 表示 $\mathbb{R}$中的一个区间 .

2.1 双曲标架曲面

定义 2.1（[20]）。如果对所有 $(u,v) \in U$，都有$\langle \boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{n}\rangle(u,v) = \langle \boldsymbol{x}_v, \boldsymbol{n}\rangle(u,v) = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}\rangle(u,v) = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}\rangle(u,v) = 0$，其中 $\boldsymbol{x}_u(u,v) = (\partial \boldsymbol{x}/\partial u)\ (u,v)$，$\boldsymbol{x}_v(u,v) = (\partial \boldsymbol{x}/\partial v)\ (u,v)$，则称 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})$：$U \to H^3 \times \Delta_5$ 为双曲标架曲面。 $\boldsymbol{x}$：如果存在 $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})$：$U \to \Delta_5$，使得 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})$：$U \to H^3 \times \Delta_5$ 为双曲标架曲面，则称 $U \to H^3$ 为双曲标架基曲面。

Let $\boldsymbol{t}(u,v) = (\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{s})(u,v)$。于是，$\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}\}$ 是沿着 $\boldsymbol{x}$的活动标架。因此，我们得到

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_u(u,v)\\ \boldsymbol{n}_u(u,v)\\ \boldsymbol{s}_u(u,v)\\ \boldsymbol{t}_u(u,v)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & a_1(u,v) & b_1(u,v)\\ 0 & 0 & e_1(u,v) & f_1(u,v)\\ a_1(u,v) & -e_1(u,v) & 0 & g_1(u,v)\\ b_1(u,v) & -f_1(u,v) & -g_1(u,v) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(u,v)\\ \boldsymbol{n}(u,v)\\ \boldsymbol{s}(u,v)\\ \boldsymbol{t}(u,v)\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_v(u,v)\\ \boldsymbol{n}_v(u,v)\\ \boldsymbol{s}_v(u,v)\\ \boldsymbol{t}_v(u,v)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & a_2(u,v) & b_2(u,v)\\ 0 & 0 & e_2(u,v) & f_2(u,v)\\ a_2(u,v) & -e_2(u,v) & 0 & g_2(u,v)\\ b_2(u,v) & -f_2(u,v) & -g_2(u,v) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(u,v)\\ \boldsymbol{n}(u,v)\\ \boldsymbol{s}(u,v)\\ \boldsymbol{t}(u,v)\end{pmatrix},$$

其中 $a_i, b_i, e_i, f_i, g_i\colon U\to\mathbb{R}$, $i=1,2$ 是光滑函数。它们称为 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s})$ 的基本不变量。

2.2 双曲标架曲线的单参数族

定义 2.2. 若对所有 $(u,v)\in U$, $i=1,2$，都有 $\langle\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu}_i\rangle(u,v) = \langle\boldsymbol{\gamma}_u,\boldsymbol{\nu}_i\rangle(u,v) = 0$（分别地，$\langle\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu}_i\rangle(u,v) = \langle\boldsymbol{\gamma}_v,\boldsymbol{\nu}_i\rangle(u,v) = 0$），则称 $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)\colon U\to H^3\times\Delta_5$ 是关于 u（分别地，关于 v）的单参数双曲标架曲线族，其中 $\boldsymbol{\gamma}_u(u,v) = (\partial\boldsymbol{\gamma}/\partial u)(u,v), \boldsymbol{\gamma}_v(u,v) = (\partial\boldsymbol{\gamma}/\partial v)(u,v)$。若存在 $(\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)\colon U\to\Delta_5$，使得 $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)\colon U\to H^3\times\Delta_5$ 是关于 u（分别地，关于 v）的单参数双曲标架曲线族，则称 $\boldsymbol{\gamma}\colon U\to H^3$ 是关于 u（分别地，关于 v）的单参数双曲标架基曲线族。

定义 $\boldsymbol{\mu}(u,v) = (\boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{\nu}_1\wedge\boldsymbol{\nu}_2)(u,v)$，则 $\{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\mu}\}$ 是沿着 $\boldsymbol{\gamma}$的活动标架。

设 $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$ 是关于 u的单参数双曲标架曲线族。我们有以下公式

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}_u(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_{1u}(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_{2u}(u,v)\\ \boldsymbol{\mu}_u(u,v)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & m_1(u,v)\\ 0 & 0 & n_1(u,v) & a_1(u,v)\\ 0 & -n_1(u,v) & 0 & b_1(u,v)\\ m_1(u,v) & -a_1(u,v) & -b_1(u,v) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_1(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_2(u,v)\\ \boldsymbol{\mu}(u,v)\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}_v(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_{1v}(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_{2v}(u,v)\\ \boldsymbol{\mu}_v(u,v)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & P_1(u,v) & Q_1(u,v) & M_1(u,v)\\ P_1(u,v) & 0 & N_1(u,v) & A_1(u,v)\\ Q_1(u,v) & -N_1(u,v) & 0 & B_1(u,v)\\ M_1(u,v) & -A_1(u,v) & -B_1(u,v) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_1(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_2(u,v)\\ \boldsymbol{\mu}(u,v)\end{pmatrix},$$

其中 $m_1, n_1, a_1, b_1, P_1, Q_1, M_1, N_1, A_1, B_1\colon U\to\mathbb{R}$ 是光滑函数。它们称为关于 u的单参数双曲标架曲线族的曲率。

If $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$ 是关于 v的单参数双曲标架曲线族，我们有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}_u(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_{1u}(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_{2u}(u,v)\\ \boldsymbol{\mu}_u(u,v)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & P_2(u,v) & Q_2(u,v) & M_2(u,v)\\ P_2(u,v) & 0 & N_2(u,v) & A_2(u,v)\\ Q_2(u,v) & -N_2(u,v) & 0 & B_2(u,v)\\ M_2(u,v) & -A_2(u,v) & -B_2(u,v) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_1(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_2(u,v)\\ \boldsymbol{\mu}(u,v)\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}_v(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_{1v}(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_{2v}(u,v)\\ \boldsymbol{\mu}_v(u,v)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & m_2(u,v)\\ 0 & 0 & n_2(u,v) & a_2(u,v)\\ 0 & -n_2(u,v) & 0 & b_2(u,v)\\ m_2(u,v) & -a_2(u,v) & -b_2(u,v) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_1(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_2(u,v)\\ \boldsymbol{\mu}(u,v)\end{pmatrix},$$

其中，光滑函数 m_2、n_2、a_2、b_2、M_2、N_2、A_2、B_2、P_2、$Q_2\colon U\to\mathbb{R}$ 被称为关于 v 的单参数双曲标架曲线族的曲率。

2.3 欧几里得三维空间中的广义标架曲面

令 $\mathbb{R}^3$ 表示带有内积 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ 和向量积的欧几里得三维空间

$$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y} = \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$，且 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$的标准基。记作$\Delta=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in S^2\times S^2\mid \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0\}$，其中 $S^2=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\mid \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=1\}$。

定义 2.3（[13]）。若存在光滑函数 $\overline{\alpha},\overline{\beta}\colon U\to\mathbb{R}$，使得对于所有 $(u,v)\in U$，$(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\nu}}_1,\overline{\boldsymbol{\nu}}_2)\colon U\to\mathbb{R}^3\times\Delta$ 满足 $(\overline{\boldsymbol{x}}_u\times\overline{\boldsymbol{x}}_v)(u,v)=\overline{\alpha}(u,v)\overline{\boldsymbol{\nu}}_1(u,v)+\overline{\beta}(u,v)\overline{\boldsymbol{\nu}}_2(u,v)$，则称其为广义标架曲面。若存在 $(\overline{\boldsymbol{\nu}}_1,\overline{\boldsymbol{\nu}}_2)\colon U\to\Delta$，使得 $\overline{\boldsymbol{x}}\colon U\to\mathbb{R}^3$ 满足 $(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\nu}}_1,\overline{\boldsymbol{\nu}}_2)$ 是广义标架曲面，则称其为广义标架基曲面。

令 $\overline{\boldsymbol{\nu}}_3(u,v)=(\overline{\boldsymbol{\nu}}_1\times\overline{\boldsymbol{\nu}}_2)(u,v)$，则 $\{\overline{\boldsymbol{\nu}}_1,\overline{\boldsymbol{\nu}}_2,\overline{\boldsymbol{\nu}}_3\}$ 是沿着 $\overline{\boldsymbol{x}}$的活动标架。

2.4 洛伦兹-闵可夫斯基三维空间中的光锥标架曲面

子流形 Δ_4 在 [1] 中定义为 $\Delta_4=\{(\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)\in LC^*\times LC^*\mid\langle\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2\rangle=-2\}$，其中 $LC^*=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3_1\setminus\{\boldsymbol{0}\}\mid\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=0\}$。

定义 2.4（[10]）。若存在光滑函数 $\widetilde{\alpha},\beta\colon U\to\mathbb{R}$，使得对于所有 $(u,v)\in U$，$(\widetilde{\boldsymbol{x}}_u\wedge\widetilde{\boldsymbol{x}}_v)(u,v)=\widetilde{\alpha}(u,v)\boldsymbol{\ell}^+(u,v)+\beta(u,v)\boldsymbol{\ell}^-(u,v)$，则称 $(\widetilde{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{\ell}^+,\boldsymbol{\ell}^-)\colon U\to\mathbb{R}^3_1\times\Delta_4$ 为光锥标架曲面。若存在 $(\boldsymbol{\ell}^+,\boldsymbol{\ell}^-)\colon U\to\Delta_4$，使得 $(\widetilde{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{\ell}^+,\boldsymbol{\ell}^-)$ 是光锥标架曲面，则称 $\widetilde{\boldsymbol{x}}\colon U\to\mathbb{R}^3_1$ 为光锥标架基曲面。

3 双曲广义标架曲面

我们给出一个 d 义，并研究其性质 .

定义 3.1。若 $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1\rangle(u,v)=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_2\rangle(u,v)=0$，且存在光滑函数 $\alpha,\beta\colon U\to\mathbb{R}$，使得对于所有 $(u,v)\in U$，$(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{x}_u\wedge\boldsymbol{x}_v)(u,v)=\alpha(u,v)\boldsymbol{\nu}_1(u,v)+\beta(u,v)\boldsymbol{\nu}_2(u,v)$，则称 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)\colon U\to H^3\times\Delta_5$ 为双曲广义标架曲面。若存在 $(\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)\colon U\to\Delta_5$，使得 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)\colon U\to H^3\times\Delta_5$ 是双曲广义标架曲面，则定义 $\boldsymbol{x}\colon U\to H^3$ 为双曲广义标架基曲面。

设 $\boldsymbol{\nu}_3(u,v)=(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{\nu}_1\wedge\boldsymbol{\nu}_2)(u,v)$。那么，$\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3\}$ 是沿着 $\boldsymbol{x}$的活动标架。因此，我们得到

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_u(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_{1u}(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_{2u}(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_{3u}(u,v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a_1(u,v)&b_1(u,v)&c_1(u,v)\\ a_1(u,v)&0&e_1(u,v)&f_1(u,v)\\ b_1(u,v)&-e_1(u,v)&0&g_1(u,v)\\ c_1(u,v)&-f_1(u,v)&-g_1(u,v)&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_1(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_2(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_3(u,v)\end{pmatrix},\tag{1}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_v(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_{1v}(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_{2v}(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_{3v}(u,v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a_2(u,v)&b_2(u,v)&c_2(u,v)\\ a_2(u,v)&0&e_2(u,v)&f_2(u,v)\\ b_2(u,v)&-e_2(u,v)&0&g_2(u,v)\\ c_2(u,v)&-f_2(u,v)&-g_2(u,v)&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_1(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_2(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_3(u,v)\end{pmatrix},\tag{2}$$

其中，$a_i,b_i,c_i,e_i,f_i,g_i\colon U\to\mathbb{R}$, $i=1,2$ 是满足 $a_1b_2-a_2b_1=0$的光滑函数。它们称为 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$ 的基本不变量。记

$$\boldsymbol{a}(u,v)=\big(a_1(u,v)\ a_2(u,v)\big)^T,\boldsymbol{b}(u,v)=\big(b_1(u,v)\ b_2(u,v)\big)^T,\boldsymbol{c}(u,v)=\big(c_1(u,v)\ c_2(u,v)\big)^T,$$

其中，$\boldsymbol{a}^T$ 表示 $\boldsymbol{a}$的转置。因此，我们可以得到

$$\alpha(u,v)=\det\big(\boldsymbol{b}(u,v)\ \boldsymbol{c}(u,v)\big),\ \beta(u,v)=\det\big(\boldsymbol{c}(u,v)\ \boldsymbol{a}(u,v)\big).$$

由于 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$ 是光滑的，因此 $\boldsymbol{x}_{uv}=\boldsymbol{x}_{vu},\boldsymbol{\nu}_{1uv}=\boldsymbol{\nu}_{1vu}$和 $\boldsymbol{\nu}_{2uv}=\boldsymbol{\nu}_{2vu}$成立。由此可得可积条件:

$$\begin{cases}a_{1v}-b_1e_2-c_1f_2=a_{2u}-b_2e_1-c_2f_1,\\ b_{1v}+a_1e_2-c_1g_2=b_{2u}+a_2e_1-c_2g_1,\\ c_{1v}+a_1f_2+b_1g_2=c_{2u}+a_2f_1+b_2g_1,\end{cases}\tag{3}$$

$$\begin{cases}e_{1v}-f_1g_2=e_{2u}-f_2g_1,\\ f_{1v}+e_1g_2+a_1c_2=f_{2u}+e_2g_1+a_2c_1,\\ g_{1v}-e_1f_2+b_1c_2=g_{2u}-e_2f_1+b_2c_1.\end{cases}\tag{4}$$

接下来，我们利用双曲广义标架曲面的基本不变量，给出其基本定理。

定义 3.2. 设 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$、$(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\nu}}_1,\overline{\boldsymbol{\nu}}_2)$：$U\to H^3\times\Delta_5$ 是两个双曲广义标架曲面。若存在 $\boldsymbol{A}\in SO(1,3)$，使得对于所有 $(u,v)\in U$，均有 $\overline{\boldsymbol{x}}(u,v)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(u,v))$，$\overline{\boldsymbol{\nu}}_1(u,v)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nu}_1(u,v))$，$\overline{\boldsymbol{\nu}}_2(u,v)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nu}_2(u,v))$，则称 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$ 与 $(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\nu}}_1,\overline{\boldsymbol{\nu}}_2)$ 作为双曲广义标架曲面是合同的。这里，

$$SO(1,3)=\left\{\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_4(\mathbb{R})\mid\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{G},\ \det(\boldsymbol{A})=1,\ \boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right\}.$$

定理 3.3（双曲广义标架曲面的存在性定理）。设 $a_i,b_i,c_i,e_i,f_i,g_i\colon U\to\mathbb{R},\ i=1,2$ 为满足 $a_1b_2-a_2b_1=0$ 以及可积条件 (3) 和 (4) 的光滑函数。则存在一个双曲广义标架曲面 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)\colon U\to H^3\times\Delta_5$，其相应的基本不变量为 $a_i,b_i,c_i,e_i,f_i,g_i\colon U\to\mathbb{R},\ i=1,2$。

证明。由于可积条件 (3) 和 (4) 成立，方程组 (1) 和 (2) 有解 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3)\colon U\to H^3\times\Delta_5\times S_1^3$，它满足 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3$ 是伪正交的且 $\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{\nu}_1\wedge\boldsymbol{\nu}_2=\boldsymbol{\nu}_3$。由此可得 $(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{x}_u\wedge\boldsymbol{x}_v)(u,v)=(b_1c_2-b_2c_1)(u,v)\boldsymbol{\nu}_1(u,v)+(c_1a_2-c_2a_1)(u,v)\boldsymbol{\nu}_2(u,v)$。因此，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)\colon U\to H^3\times\Delta_5$ 是一个双曲广义标架曲面，其基本不变量为 $a_i,b_i,c_i,e_i,f_i,g_i,\ i=1,2$。□

定理 3.4（双曲广义标架曲面的唯一性定理）。设 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$、$(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\nu}}_1,\overline{\boldsymbol{\nu}}_2)\colon U\to H^3\times\Delta_5$ 是具有相同基本不变量 $a_i,b_i,c_i,e_i,f_i,g_i\colon U\to\mathbb{R},\ i=1,2$ 的两个双曲广义标架曲面。那么 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$ 与 $(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\nu}}_1,\overline{\boldsymbol{\nu}}_2)$ 作为双曲广义标架曲面是合同的。

证明。设 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$ 和 $(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\nu}}_1,\overline{\boldsymbol{\nu}}_2)$ 是具有相同基本不变量 $a_i,b_i,c_i,e_i,f_i,g_i,\ i=1,2$ 的两个双曲广义标架曲面。令 $\boldsymbol{\nu}_3(u,v)=(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{\nu}_1\wedge\boldsymbol{\nu}_2)(u,v)$ 和 $\overline{\boldsymbol{\nu}}_3(u,v)=(\overline{\boldsymbol{x}}\wedge\overline{\boldsymbol{\nu}}_1\wedge\overline{\boldsymbol{\nu}}_2)(u,v)$。对于某个固定点 $(u_0,v_0)\in U$，存在满足以下条件的 $\boldsymbol{A}\in SO(1,3)$：$\overline{\boldsymbol{x}}(u_0,v_0)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(u_0,v_0))$，$\overline{\boldsymbol{\nu}}_1(u_0,v_0)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nu}_1(u_0,v_0))$，$\overline{\boldsymbol{\nu}}_2(u_0,v_0)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nu}_2(u_0,v_0))$。于是有$\overline{\boldsymbol{\nu}}_3(u_0,v_0)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nu}_3(u_0,v_0))$。考虑两个映射 $(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nu}_1)\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nu}_2)\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nu}_3))\colon U\to H^3\times\Delta_5\times S_1^3$和 $(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\nu}}_1,\overline{\boldsymbol{\nu}}_2,\overline{\boldsymbol{\nu}}_3)\colon U\to H^3\times\Delta_5\times S_1^3$。它们都是系统 (1) 和 (2) 的解。因此 $(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nu}_1)\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nu}_2)\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nu}_3))=(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\nu}}_1,\overline{\boldsymbol{\nu}}_2,\overline{\boldsymbol{\nu}}_3)$。也就是说，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$ 和 $(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\nu}}_1,\overline{\boldsymbol{\nu}}_2)$ 作为双曲广义标架曲面是合同的。□

3.1 双曲广义标架曲面、双曲标架曲面与双曲标架曲线单参数族之间的关系。

由双曲广义标架曲面与双曲标架曲面的基本不变量之间的关系，我们得到如下结论。

命题 3.5. (1) 设 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s})\colon U\to H^3\times\Delta_5$ 为具有基本不变量 $a_i,b_i,e_i,f_i,g_i,\ i=1,2$ 的双曲标架曲面。则 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s})$ 是满足 $\alpha(u,v)=(a_1b_2-a_2b_1)(u,v)$，$\beta(u,v)=0$ 的双曲广义标架曲面。(2) 设 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)\colon U\to H^3\times\Delta_5$ 为具有基本不变量$a_i,b_i,c_i,e_i,f_i,g_i,\ i=1,2$ 的双曲广义标架曲面。(i) 若对所有 $(u,v)\in U$ 有 $a_1(u,v)=a_2(u,v)=0$，则 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$ 是双曲标架曲面。(ii) 若对所有 $(u,v)\in U$ 有 $b_1(u,v)=b_2(u,v)=0$，则 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_1)$ 是双曲标架曲面。

证明。(1) 若 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s})$ 是一个双曲标架曲面，则 $\boldsymbol{x}$ 的法向量为 $(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{x}_u\wedge\boldsymbol{x}_v)(u,v)=(a_1b_2-a_2b_1)(u,v)\boldsymbol{n}(u,v)$，这意味着 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s})$ 是一个双曲广义标架曲面，且 $\alpha(u,v)=(a_1b_2-a_2b_1)(u,v)$，$\beta(u,v)=0$。

（2）如果双曲广义标架曲面（$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{\nu}_1$，$\boldsymbol{\nu}_2$）的基本不变量满足：对于所有（u，v）$\in U$，$a_1(u,v)=a_2(u,v)=0$，则可得 $\langle\boldsymbol{x}_u,\boldsymbol{\nu}_1\rangle(u,v)=\langle\boldsymbol{x}_v,\boldsymbol{\nu}_1\rangle(u,v)=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1\rangle(u,v)=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_2\rangle(u,v)=\langle\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2\rangle(u,v)=0$，对于所有（$u$，$v$）$\in U$均成立。因此，（$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{\nu}_1$，$\boldsymbol{\nu}_2$）是一个双曲标架曲面。如果对于所有（$u$，$v$）$\in U$，$b_1(u,v)=b_2(u,v)=0$，则通过类似讨论可以得出结论。□

注3.6. 双曲三维空间中的正则曲面是双曲标架基曲面，因此，正则曲面也是双曲广义标架基曲面。

我们还讨论双曲广义标架曲面与单参数双曲标架曲线族之间的关系。

命题 3.7. (1) (i) 设 $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)\colon U\to H^3\times\Delta_5$ 是关于 u的单参数双曲标架曲线族。那么，$(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$ 是一个双曲广义标架曲面，且 $\alpha(u,v)=-m_1(u,v)Q_1(u,v)$，$\beta(u,v)=m_1(u,v)P_1(u,v)$。(ii) 设 $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)\colon U\to H^3\times\Delta_5$ 是关于 v的单参数双曲标架曲线族。那么，$(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$是一个双曲广义标架曲面，且 $\alpha(u,v)=m_2(u,v)Q_2(u,v)$，$\beta(u,v)=-m_2(u,v)P_2(u,v)$。(2) 设 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)\colon U\to H^3\times\Delta_5$ 是一个双曲广义标架曲面，其基本不变量为a_i,b_i,c_i,e_i,f_i,g_i, $i=1,2$。(i) 若对所有$(u,v)\in U$，均有 $a_1(u,v)=b_1(u,v)=0$，则$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$和$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_1)$是关于 u的单参数双曲标架曲线族。(ii) 若对所有$(u,v)\in U$，均有 $a_2(u,v)=b_2(u,v)=0$，则$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$和$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_1)$是关于 v的单参数双曲标架曲线族。

证明. (1) (i) 若 $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$ 是关于 u 的单参数双曲标架曲线族，则 $(\boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{\gamma}_u\wedge\boldsymbol{\gamma}_v)(u,v)=-m_1(u,v)Q_1(u,v)\boldsymbol{\nu}_1(u,v)+m_1(u,v)P_1(u,v)\boldsymbol{\nu}_2(u,v)$，因此，$(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$ 是一个满足 $\alpha(u,v)=-m_1(u,v)Q_1(u,v)$，$\beta(u,v)=m_1(u,v)P_1(u,v)$ 的双曲广义标架曲面。对于情形 (ii)，类似的分析可以得出结论。

(2) 若双曲广义标架曲面 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$ 的基本不变量满足 $a_1(u,v)=b_1(u,v)=0$，对所有 $(u,v)\in U$ 均成立，则可得 $\langle\boldsymbol{x}_u,\boldsymbol{\nu}_1\rangle(u,v)=\langle\boldsymbol{x}_u,\boldsymbol{\nu}_2\rangle(u,v)=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1\rangle(u,v)=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_2\rangle(u,v)=\langle\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2\rangle(u,v)=0$，对所有 $(u,v)\in U$ 均成立。由此可知，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$ 和 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_1)$ 是关于 u 的单参数双曲标架曲线族。若 $a_2(u,v)=b_2(u,v)=0$ 对所有 $(u,v)\in U$ 均成立，类似的讨论也可得出结论。□

3.2 $\mathbf{Re}\,U$中的标架反射与标架旋转，以及参数变换。

通过直接计算，我们得到如下结果。

命题 3.8. 设 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)\colon U\to H^3\times\Delta_5$ 是一个双曲广义标架曲面，其基本不变量为 a_i,b_i,c_i,e_i,f_i,g_i, $i=1,2$。则有

(1) $(\boldsymbol{x},-\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)\colon U\to H^3\times\Delta_5$ 是一个双曲广义标架曲面，其基本不变量为$-a_i,b_i,-c_i,-e_i,f_i,-g_i$, $i=1,2$。(2) $(\boldsymbol{x},-\boldsymbol{\nu}_1,-\boldsymbol{\nu}_2)\colon U\to H^3\times\Delta_5$ 是一个双曲广义标架曲面，其基本不变量为$-a_i,-b_i,c_i,e_i,-f_i,-g_i$, $i=1,2$。(3) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_1)\colon U\to H^3\times\Delta_5$ 是一个双曲广义标架曲面，其基本不变量为$b_i,a_i,-c_i,-e_i,-g_i,-f_i$, $i=1,2$。

设 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)\colon U\to H^3\times\Delta_5$ 是一个具有基本不变量a_i,b_i,c_i,e_i,f_i,g_i, $i=1,2$ 的双曲广义标架曲面。记

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\nu}_1^\theta(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_2^\theta(u,v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta(u,v) & -\sin\theta(u,v)\\ \sin\theta(u,v) & \cos\theta(u,v)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\nu}_1(u,v)\\ \boldsymbol{\nu}_2(u,v)\end{pmatrix},\tag{5}$$

其中 $\theta\colon U\to\mathbb{R}$ 是一个光滑函数。可以验证，$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1^\theta\rangle(u,v)=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_2^\theta\rangle(u,v)=0$ 且

$$(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{x}_u\wedge\boldsymbol{x}_v)(u,v)=(\alpha\cos\theta-\beta\sin\theta)(u,v)\boldsymbol{\nu}_1^\theta(u,v)+(\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta)(u,v)\boldsymbol{\nu}_2^\theta(u,v),$$

则 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1^\theta,\boldsymbol{\nu}_2^\theta)\colon U\to H^3\times\Delta_5$ 也是一个双曲广义标架曲面，其中 $\alpha^\theta(u,v)=(\alpha\cos\theta-\beta\sin\theta)(u,v)$，且 $\beta^\theta(u,v)=(\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta)(u,v)$。

命题 3.9. 在上述记号下，对任意光滑函数 $\theta: U \to \mathbb{R}$，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}_1^\theta, \boldsymbol{\nu}_2^\theta)$ 的基本不变量 $(a_i^\theta, b_i^\theta, c_i^\theta, e_i^\theta, f_i^\theta, g_i^\theta)$ $(i = 1, 2)$ 由下式给出

$$\begin{pmatrix} a_1^\theta(u,v) & b_1^\theta(u,v) & c_1^\theta(u,v) \\ a_2^\theta(u,v) & b_2^\theta(u,v) & c_2^\theta(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(u,v) & b_1(u,v) & c_1(u,v) \\ a_2(u,v) & b_2(u,v) & c_2(u,v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta(u,v) & \sin\theta(u,v) & 0 \\ -\sin\theta(u,v) & \cos\theta(u,v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} e_1^\theta(u,v) \\ e_2^\theta(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1(u,v) - \theta_u(u,v) \\ e_2(u,v) - \theta_v(u,v) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_1^\theta(u,v) & g_1^\theta(u,v) \\ f_2^\theta(u,v) & g_2^\theta(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(u,v) & g_1(u,v) \\ f_2(u,v) & g_2(u,v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta(u,v) & \sin\theta(u,v) \\ -\sin\theta(u,v) & \cos\theta(u,v) \end{pmatrix}.$$

接下来，我们考虑定义域 U 的参数变换。

命题 3.10. 设 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2): U \to H^3 \times \Delta_5$ 是一个双曲广义标架曲面，其基本不变量为 $a_i, b_i, c_i, e_i, f_i, g_i$, $i = 1, 2$，且 $\boldsymbol{\phi}: V \to U$ 是一个参数变换，其中$\boldsymbol{\phi}(p,q) = (u(p,q)\ v(p,q))$。那么 $(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\nu}}_1, \overline{\boldsymbol{\nu}}_2) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) \circ \boldsymbol{\phi}: V \to H^3 \times \Delta_5$ 是一个双曲广义标架曲面，且

$$\overline{\alpha}(p,q) = \alpha \circ \boldsymbol{\phi}(p,q) \det \begin{pmatrix} u_p(p,q) & v_p(p,q) \\ u_q(p,q) & v_q(p,q) \end{pmatrix},\ \overline{\beta}(p,q) = \beta \circ \boldsymbol{\phi}(p,q) \det \begin{pmatrix} u_p(p,q) & v_p(p,q) \\ u_q(p,q) & v_q(p,q) \end{pmatrix}$$

其基本不变量为

$$\begin{pmatrix} \overline{a}_1(p,q) & \overline{b}_1(p,q) & \overline{c}_1(p,q) \\ \overline{a}_2(p,q) & \overline{b}_2(p,q) & \overline{c}_2(p,q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_p(p,q) & v_p(p,q) \\ u_q(p,q) & v_q(p,q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \circ \boldsymbol{\phi}(p,q) & b_1 \circ \boldsymbol{\phi}(p,q) & c_1 \circ \boldsymbol{\phi}(p,q) \\ a_2 \circ \boldsymbol{\phi}(p,q) & b_2 \circ \boldsymbol{\phi}(p,q) & c_2 \circ \boldsymbol{\phi}(p,q) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \overline{e}_1(p,q) & \overline{f}_1(p,q) & \overline{g}_1(p,q) \\ \overline{e}_2(p,q) & \overline{f}_2(p,q) & \overline{g}_2(p,q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_p(p,q) & v_p(p,q) \\ u_q(p,q) & v_q(p,q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \circ \boldsymbol{\phi}(p,q) & f_1 \circ \boldsymbol{\phi}(p,q) & g_1 \circ \boldsymbol{\phi}(p,q) \\ e_2 \circ \boldsymbol{\phi}(p,q) & f_2 \circ \boldsymbol{\phi}(p,q) & g_2 \circ \boldsymbol{\phi}(p,q) \end{pmatrix}.$$

3.3 双曲广义标架基曲面、双曲标架基曲面、双曲标架基曲线的单参数族与光滑曲面之间的关系。

首先，我们给出双曲广义标架基曲面成为双曲标架基曲面或双曲标架基曲线单参数族的条件。

命题 3.11. 设 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2): U \to H^3 \times \Delta_5$ 是一个双曲广义标架曲面，其基本不变量为 $a_i, b_i, c_i, e_i, f_i, g_i$, $i = 1, 2$。若存在一个光滑函数 $\theta: U \to \mathbb{R}$，使得对所有 $(u,v) \in U$，$(a_1 \cos\theta - b_1 \sin\theta)(u,v) = (a_2 \cos\theta - b_2 \sin\theta)(u,v) = 0$ 成立，则 $\boldsymbol{x}$ 是一个双曲标架基曲面。

证明. 考虑双曲广义标架曲面 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}_1^\theta, \boldsymbol{\nu}_2^\theta)$，其中 $\boldsymbol{\nu}_1^\theta, \boldsymbol{\nu}_2^\theta$ 由方程 (5) 定义。根据命题 3.9，我们得到 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}_1^\theta, \boldsymbol{\nu}_2^\theta)$ 的基本不变量满足 $a_1^\theta(u,v) = a_2^\theta(u,v) = 0$，对所有 $(u,v) \in U$ 均成立。由命题 3.5 可知，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}_1^\theta, \boldsymbol{\nu}_2^\theta)$ 是一个双曲标架曲面，且 $\boldsymbol{x}$ 是一个双曲标架基曲面。 □

命题 3.12. 设 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2): U \to H^3 \times \Delta_5$ 为具有基本不变量 $a_i, b_i, c_i, e_i, f_i, g_i$, $i = 1, 2$ 的双曲广义标架曲面。

(1) 假设存在一个光滑函数 $\theta: U \to \mathbb{R}$，使得对所有 $(u,v) \in U$，$(a_1 \cos\theta - b_1 \sin\theta)(u,v) = 0$。(i) 若对所有 $(u,v) \in U$，$c_1(u,v) = 0$，则 $\boldsymbol{x}$ 是关于 u 的单参数双曲标架基曲线族。(ii) 若存在一点 $(u_0, v_0) \in U$，使得 $c_1(u_0, v_0) \neq 0$，则 $\boldsymbol{x}$ 至少在 (u_0, v_0) 附近局部地构成关于 u 的单参数双曲标架基曲线族。(2) 假设存在一个光滑函数 $\theta: U \to \mathbb{R}$，使得对所有 $(u,v) \in U$，$(a_2 \cos\theta - b_2 \sin\theta)(u,v) = 0$。(i) 若对所有 $(u,v) \in U$，$c_2(u,v) = 0$，则 $\boldsymbol{x}$ 是关于 v 的单参数双曲标架基曲线族。(ii) 若存在一点 $(u_0, v_0) \in U$，使得 $c_2(u_0, v_0) \neq 0$，则 $\boldsymbol{x}$ 至少在 (u_0, v_0) 附近局部地构成关于 v 的单参数双曲标架基曲线族。

证明。(1) (i) 若对所有 $(u,v) \in U$，$(a_1\cos\theta - b_1\sin\theta)(u,v) = c_1(u,v) = 0$，则根据命题 3.9，对所有 $(u,v) \in U$，有 $a_1^\theta(u,v) = c_1^\theta(u,v) = 0$，其中 a_1^θ, c_1^θ 是 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}_1^\theta, \boldsymbol{\nu}_2^\theta)$ 的基本不变量。记 $\boldsymbol{\nu}_3^\theta(u,v) = (\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{\nu}_1^\theta \wedge \boldsymbol{\nu}_2^\theta)(u,v)$。于是命题 3.7 表明，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}_1^\theta, \boldsymbol{\nu}_3^\theta)$ 和 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}_3^\theta, \boldsymbol{\nu}_1^\theta)$ 是分别关于 u 和 $\boldsymbol{x}$ 的单参数双曲标架曲线族，而 $\boldsymbol{x}$ 是关于 u 的单参数双曲标架基曲线族。

(ii) 如果存在一点 (u_0, v_0)，使得 $c_1(u_0,v_0) \neq 0$，那么 $c_1(u,v) \neq 0$ 至少在 (u_0,v_0) 附近的局部范围内成立。取 $\overline{\boldsymbol{\nu}}_1(u,v) = \boldsymbol{\nu}_1^\theta(u,v)$，并且

$$\overline{\boldsymbol{\nu}}_2(u,v) = \frac{-b_1^\theta \boldsymbol{\nu}_3^\theta + c_1 \boldsymbol{\nu}_2^\theta}{\sqrt{(b_1^\theta)^2 + c_1^2}}(u,v).$$

我们可以验证，$\langle \boldsymbol{x}_u, \overline{\boldsymbol{\nu}}_1\rangle(u,v) = \langle \boldsymbol{x}_u, \overline{\boldsymbol{\nu}}_2\rangle(u,v) = \langle \overline{\boldsymbol{\nu}}_1, \overline{\boldsymbol{\nu}}_2\rangle(u,v) = \langle \boldsymbol{x}, \overline{\boldsymbol{\nu}}_1\rangle(u,v) = \langle \boldsymbol{x}, \overline{\boldsymbol{\nu}}_2\rangle(u,v) = 0$ 至少在 (u_0,v_0) 附近的局部范围内成立，这意味着 $(\boldsymbol{x}, \overline{\boldsymbol{\nu}}_1, \overline{\boldsymbol{\nu}}_2)$ 和 $(\boldsymbol{x}, \overline{\boldsymbol{\nu}}_2, \overline{\boldsymbol{\nu}}_1)$ 是关于 u 的单参数双曲标架曲线族，而 $\boldsymbol{x}$ 是关于 u 的单参数双曲标架基曲线族，至少在 (u_0,v_0) 附近的局部范围内成立。

对于情形（2），通过类似的分析可以得出结论。 □

我们给出光滑曲面成为双曲广义标架基曲面的一个条件

定理 3.13. 设 $\boldsymbol{x}: U \to H^3$ 是一个光滑曲面。当且仅当存在一个光滑映射 $\boldsymbol{\nu}: U \to S_1^3$，使得 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}\rangle(u,v) = \langle \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{x}_u \wedge \boldsymbol{x}_v, \boldsymbol{\nu}\rangle(u,v) = 0$ 对所有 $(u,v) \in U$成立时，$\boldsymbol{x}$ 是双曲广义标架基曲面。

证明。由于 $\boldsymbol{x}$ 是双曲广义标架基曲面，存在 $(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$: $U \to \Delta_5$，使得 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ 是双曲广义标架曲面。因此，存在光滑函数α, β: $U \to \mathbb{R}$，使得 $(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{x}_u \wedge \boldsymbol{x}_v)(u,v) = \alpha(u,v)\boldsymbol{\nu}_1(u,v) + \beta(u,v)\boldsymbol{\nu}_2(u,v)$。令 $\boldsymbol{\nu}(u,v) = (\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{\nu}_1 \wedge \boldsymbol{\nu}_2)(u,v)$。则对于所有 $(u,v) \in U$，$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}\rangle(u,v) = \langle \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{x}_u \wedge \boldsymbol{x}_v, \boldsymbol{\nu}\rangle(u,v) = 0$。

反之，假设 $\boldsymbol{\nu}: U \to S_1^3$满足 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}\rangle(u,v) = \langle \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{x}_u \wedge \boldsymbol{x}_v, \boldsymbol{\nu}\rangle(u,v) = 0$ 对所有 $(u,v) \in U$均成立。记 $\boldsymbol{\nu}(u,v) = (a,b,c,d)(u,v)$，且 $\boldsymbol{x}(u,v) = (x_0,x_1,x_2,x_3)(u,v)$，则存在光滑函数 $\theta, \varphi: U \to \mathbb{R}$，使得 $\boldsymbol{\nu}$ 可表示为

$$\boldsymbol{\nu}(u,v) = \left(a, \sqrt{1+a^2}\sin\theta\sin\varphi, \sqrt{1+a^2}\sin\theta\cos\varphi, \sqrt{1+a^2}\cos\theta\right)(u,v).$$

由于

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}\rangle(u,v) = \left(-ax_0 + x_1\sqrt{1+a^2}\sin\theta\sin\varphi + x_2\sqrt{1+a^2}\sin\theta\cos\varphi + x_3\sqrt{1+a^2}\cos\theta\right)(u,v) = 0,$$

我们有

$$(x_1\sin\theta\sin\varphi + x_2\sin\theta\cos\varphi + x_3\cos\theta)(u,v) = \frac{ax_0}{\sqrt{1+a^2}}(u,v). \tag{6}$$

记

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{\nu}}_1(u,v) &= (0, \cos\theta\sin\varphi, \cos\theta\cos\varphi, -\sin\theta)(u,v),\\ \overline{\boldsymbol{\nu}}_2(u,v) &= (0, \cos\varphi, -\sin\varphi, 0)(u,v).\end{aligned}$$

由方程 (6)，我们有

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{x} \wedge \overline{\boldsymbol{\nu}}_1 \wedge \overline{\boldsymbol{\nu}}_2)(u,v)\\ =&(x_1\sin\theta\sin\varphi + x_2\sin\theta\cos\varphi + x_3\cos\theta, x_0\sin\theta\sin\varphi, x_0\sin\theta\cos\varphi, x_0\cos\theta)(u,v)\\ =&\left(\frac{ax_0}{\sqrt{1+a^2}}, x_0\sin\theta\sin\varphi, x_0\sin\theta\cos\varphi, x_0\cos\theta\right)(u,v)\\ =&\frac{x_0}{\sqrt{1+a^2}}(u,v)\left(a, \sqrt{1+a^2}\sin\theta\sin\varphi, \sqrt{1+a^2}\sin\theta\cos\varphi, \sqrt{1+a^2}\cos\theta\right)(u,v)\\ =&\frac{x_0}{\sqrt{1+a^2}}(u,v)\boldsymbol{\nu}(u,v).\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{x}, \overline{\boldsymbol{\nu}}_1, \overline{\boldsymbol{\nu}}_2$ 在与 $\boldsymbol{\nu}$ 伪正交的超平面上线性无关，存在 $\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2: U \to S_1^3$，使得 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2$ 伪正交，且 $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{\nu}_1 \wedge \boldsymbol{\nu}_2$ 平行于 $\boldsymbol{\nu}$。由此可知，$\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \boldsymbol{\nu}\}$ 是沿着 $\boldsymbol{x}$ 的活动标架，并且 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}_1\rangle(u,v) = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}_2\rangle(u,v) = 0$。因此，存在光滑函数 $\alpha, \beta: U \to \mathbb{R}$，使得 $(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{x}_u \wedge \boldsymbol{x}_v)(u,v) = \alpha(u,v)\boldsymbol{\nu}_1(u,v) + \beta(u,v)\boldsymbol{\nu}_2(u,v)$，这意味着 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ 是一个双曲广义标架曲面。 □

注 3.14. 若在定理 3.13 的证明中直接求出 $\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2$，对于线性无关向量 $\boldsymbol{x}, \overline{\boldsymbol{\nu}}_1, \overline{\boldsymbol{\nu}}_2$，通过施密特正交化可得到非零向量 $\widetilde{\boldsymbol{\nu}}_1 = \overline{\boldsymbol{\nu}}_1 - k\boldsymbol{x}$，满足$\langle \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_1, \boldsymbol{x}\rangle = 0$，以及满足 $\langle \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_2, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_2, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_1\rangle = 0$ 的 $\widetilde{\boldsymbol{\nu}}_2 = \overline{\boldsymbol{\nu}}_2 - k_1\boldsymbol{x} - k_2\widetilde{\boldsymbol{\nu}}_1$，其中 k, k_1, k_2： $U \to \mathbb{R}$ 是光滑函数。经过计算可推得 $|\widetilde{\boldsymbol{\nu}}_1|^2 = 1 + k^2 > 0$ 和 $|\widetilde{\boldsymbol{\nu}}_2|^2 = 1 + k_1^2/(1 + k^2) > 0$。此外，我们有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nu}_1(u,v) &= \frac{\widetilde{\boldsymbol{\nu}}_1}{|\widetilde{\boldsymbol{\nu}}_1|}(u,v) = \frac{(-kx_0, -kx_1 + \cos\theta\sin\varphi, -kx_2 + \cos\theta\cos\varphi, -kx_3 - \sin\theta)}{\sqrt{1+k^2}}(u,v),\\
\boldsymbol{\nu}_2(u,v) &= \frac{\widetilde{\boldsymbol{\nu}}_2}{|\widetilde{\boldsymbol{\nu}}_2|}(u,v) = \frac{\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1+k^2+k_1^2}}(u,v)(-k_1x_0 + kk_2x_0, \cos\varphi - k_1x_1 + kk_2x_1 - k_2\cos\theta\sin\varphi,\\
&\qquad -\sin\varphi - k_1x_2 + kk_2x_2 - k_2\cos\theta\cos\varphi, -k_1x_3 + kk_2x_3 + k_2\sin\theta)(u,v),
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
k(u,v) &= (-x_1\cos\theta\sin\varphi - x_2\cos\theta\cos\varphi + x_3\sin\theta)(u,v),\\
k_1(u,v) &= (-x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi)(u,v),\\
k_2(u,v) &= \frac{-kx_1\cos\varphi + kx_2\sin\varphi}{-(kx_0)^2 + (-kx_1 + \cos\theta\sin\varphi)^2 + (-kx_2 + \cos\theta\cos\varphi)^2 + (kx_3 + \sin\theta)^2}(u,v).
\end{aligned}$$

3.4 双曲广义有框架基曲面的奇点

我们称点 $\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的交叉帽奇点（分别地，$S_1^{\pm}$ 奇点），如果在 $\boldsymbol{p}$ 处，$\boldsymbol{x}$ 与 $(u,v) \mapsto (u, v^2, uv)$（分别地，与 $(u,v) \mapsto (u, v^2, v(u^2 \pm v^2))$）$\mathcal{A}$-等价。我们使用以下引理来获得交叉帽和 $S_1^{\pm}$ 奇点的条件。

引理 3.15（[11, 14]）。设 $\boldsymbol{x}: (U, \boldsymbol{p}) \to (H^3, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}))$ 为一个映射芽，且 $\boldsymbol{p} = (u_0, v_0)$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的余秩一奇点。那么，

(1) $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{p}$ 处与交叉帽 $\mathcal{A}$-等价，当且仅当 $d\varphi(u_0, v_0) \neq \boldsymbol{0}$。(2) $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{p}$ 处与 S_1^+ 奇点 $\mathcal{A}$-等价，当且仅当 $d\varphi(u_0, v_0) = \boldsymbol{0}$，$\det \mathrm{Hess}\ \varphi(u_0, v_0) < 0$，且 $\xi\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$ 和 $\eta\eta\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$ 线性无关。(3) $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{p}$ 处与 S_1^- 奇点 $\mathcal{A}$-等价，当且仅当 $d\varphi(u_0, v_0) = \boldsymbol{0}$ 且 $\det \mathrm{Hess}\ \varphi(u_0, v_0) > 0$。

这里，$\varphi(u,v) = \det(\boldsymbol{x}, \xi\boldsymbol{x}, \eta\boldsymbol{x}, \eta\eta\boldsymbol{x})(u_0, v_0)$，$\xi$ 是与零向量场 η 横截的向量场，且 $\det \mathrm{Hess}\ \varphi(u,v) = (\varphi_{uu}\varphi_{vv} - \varphi_{uv}^2)(u,v)$。

命题 3.16. 设 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$： $U \to H^3 \times \Delta_5$ 是一个双曲广义标架曲面，其基本不变量为 $a_i, b_i, c_i, e_i, f_i, g_i$，$i = 1, 2$。若 $\boldsymbol{p} = (u_0, v_0)$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的奇点，即 $\alpha(u_0, v_0) = \det(\boldsymbol{b}(u_0, v_0)\ \boldsymbol{c}(u_0, v_0)) = 0$ 且 $\beta(u_0, v_0) = \det(\boldsymbol{c}(u_0, v_0)\ \boldsymbol{a}(u_0, v_0)) = 0$。那么，

(1) $\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的交叉帽奇点，当且仅当 $(a_1, a_2, b_1, b_2)(u_0, v_0) = (0, 0, 0, 0)$，$(c_1, c_2)(u_0, v_0) \neq (0, 0)$，且 $(\det(\boldsymbol{b}_u\ \boldsymbol{c})\det(\boldsymbol{a}_v\ \boldsymbol{c}) - \det(\boldsymbol{b}_v\ \boldsymbol{c})\det(\boldsymbol{a}_u\ \boldsymbol{c}))(u_0, v_0) \neq 0$。(2) $\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的 S_1^+奇点，当且仅当 $(a_1, a_2, b_1, b_2)(u_0, v_0) = (0, 0, 0, 0)$，$(c_1, c_2)(u_0, v_0) \neq (0, 0)$，$(\det(\boldsymbol{b}_u\ \boldsymbol{c})\det(\boldsymbol{a}_v\ \boldsymbol{c}) - \det(\boldsymbol{b}_v\ \boldsymbol{c})\det(\boldsymbol{a}_u\ \boldsymbol{c}))(u_0, v_0) = 0$，$\det \mathrm{Hess}\ \varphi(u_0, v_0) < 0$ 且$(-c_1\det(\boldsymbol{a}_v\ \boldsymbol{c}) + c_2\det(\boldsymbol{a}_u\ \boldsymbol{c}),\ c_2\det(\boldsymbol{b}_u\ \boldsymbol{c}) - c_1\det(\boldsymbol{b}_v\ \boldsymbol{c}))(u_0, v_0) \neq (0, 0)$。(3) $\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的S_1^-奇点，当且仅当 $(a_1, a_2, b_1, b_2)(u_0, v_0) = (0, 0, 0, 0)$，$(c_1, c_2)(u_0, v_0) \neq (0, 0)$，$(\det(\boldsymbol{b}_u\ \boldsymbol{c})\det(\boldsymbol{a}_v\ \boldsymbol{c}) - \det(\boldsymbol{b}_v\ \boldsymbol{c})\det(\boldsymbol{a}_u\ \boldsymbol{c}))(u_0, v_0) = 0$ 且$\det \mathrm{Hess}\ \varphi(u_0, v_0) > 0$。

证明。若 $(a_1, a_2, b_1, b_2)(u_0, v_0) \neq (0, 0, 0, 0)$，则可假设 $a_1(u_0, v_0) \neq 0$。于是，至少在 $\boldsymbol{p}$ 附近的局部范围内，$a_1(u,v) \neq 0$。将存在一个光滑函数 $\theta: U \to \mathbb{R}$，使得

$$\cos\theta(u,v) = \frac{b_1(u,v)}{\sqrt{a_1^2(u,v) + b_1^2(u,v)}},\ \sin\theta(u,v) = \frac{a_1(u,v)}{\sqrt{a_1^2(u,v) + b_1^2(u,v)}}.$$

由命题 3.11 可知，至少在 $\boldsymbol{p}$ 的局部邻域内，$\boldsymbol{x}$ 是一个双曲标架基曲面；在这种情况下，$\boldsymbol{x}$ 不是交叉帽，或者 $S_1^{\pm}$ 不是 $\boldsymbol{p}$ 处的奇点。由于交叉帽和

$S_1^{\pm}$ 奇点的余秩均为一，因此 $(\boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v)(u_0, v_0) = (c_1\boldsymbol{\nu}_3, c_2\boldsymbol{\nu}_3)(u_0, v_0) \neq (0, 0)$，也就是说，$(c_1, c_2)(u_0, v_0) \neq (0, 0)$。由此可知，至少在 $\boldsymbol{p}$ 的局部邻域内，$(c_1(u, v)\ c_2(u, v)) \neq (0, 0)$。由于

$$c_2(u, v)\boldsymbol{x}_u(u, v) - c_1(u, v)\boldsymbol{x}_v(u, v) = -\beta(u, v)\boldsymbol{\nu}_1(u, v) + \alpha(u, v)\boldsymbol{\nu}_2(u, v),$$

我们可以取零向量场 $\eta(u, v) = c_2(u, v)\partial/\partial u - c_1(u, v)\partial/\partial v$。与$\eta$ 横截的向量场可表示为 $\xi(u, v) = c_1(u, v)\partial/\partial u + c_2(u, v)\partial/\partial v.$。通过计算，我们得到

$$\begin{aligned}
\xi\boldsymbol{x}(u, v) &= (a_1c_1 + a_2c_2)(u, v)\boldsymbol{\nu}_1(u, v) + (b_1c_1 + b_2c_2)(u, v)\boldsymbol{\nu}_2(u, v) + (c_1^2 + c_2^2)(u, v)\boldsymbol{\nu}_3(u, v),\\
\eta\eta\boldsymbol{x}(u, v) &= (\alpha^2 + \beta^2)(u, v)\boldsymbol{x}(u, v) + ((c_1\beta_v - c_2\beta_u) + \alpha(c_1e_2 - c_2e_1))(u, v)\boldsymbol{\nu}_1(u, v)\\
&\quad + ((c_2\alpha_u - c_1\alpha_v) + \beta(c_1e_2 - c_2e_1))(u, v)\boldsymbol{\nu}_2(u, v)\\
&\quad + (\beta(c_1f_2 - c_2f_1) + \alpha(c_2g_1 - c_1g_2))(u, v)\boldsymbol{\nu}_3(u, v).
\end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}
\varphi(u, v) &= \det(\boldsymbol{x}, \xi\boldsymbol{x}, \eta\boldsymbol{x}, \eta\eta\boldsymbol{x})(u, v)\\
&= \det\begin{pmatrix} a_1c_1 + a_2c_2 & -\beta & c_1\beta_v - c_2\beta_u + \alpha(c_1e_2 - c_2e_1)\\ b_1c_1 + b_2c_2 & \alpha & c_2\alpha_u - c_1\alpha_v + \beta(c_1e_2 - c_2e_1)\\ c_1^2 + c_2^2 & 0 & \beta(c_1f_2 - c_2f_1) + \alpha(c_2g_1 - c_1g_2)\end{pmatrix}(u, v).
\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}
\varphi_u(u_0, v_0) &= (c_1(c_1^2 + c_2^2)(\alpha_v\beta_u - \alpha_u\beta_v))(u_0, v_0),\\
\varphi_v(u_0, v_0) &= (c_2(c_1^2 + c_2^2)(\alpha_v\beta_u - \alpha_u\beta_v))(u_0, v_0).
\end{aligned}$$

由此可知，$d\varphi(u_0, v_0) = \boldsymbol{0}$ 当且仅当

$$(\alpha_v\beta_u - \alpha_u\beta_v)(u_0, v_0) = \left(\det\left(\boldsymbol{b}_u\ \boldsymbol{c}\right)\det\left(\boldsymbol{a}_v\ \boldsymbol{c}\right) - \det\left(\boldsymbol{b}_v\ \boldsymbol{c}\right)\det\left(\boldsymbol{a}_u\ \boldsymbol{c}\right)\right)(u_0, v_0) = 0.$$

通过计算，我们还可得到

$$\begin{aligned}
\varphi_{uu}(u_0, v_0) &= ((c_1^2 + c_2^2)(2c_1(\beta_u\alpha_{uv} - \alpha_u\beta_{uv}) + c_1(\beta_{uu}\alpha_v - \alpha_{uu}\beta_v) + c_2(\alpha_u\beta_{uu} - \beta_u\alpha_{uu})\\
&\quad - 2(c_1e_2 - c_2e_1)(\alpha_u^2 + \beta_u^2)))(u_0, v_0),\\
\varphi_{vv}(u_0, v_0) &= ((c_1^2 + c_2^2)(2c_1(\alpha_v\beta_{uv} - \beta_v\alpha_{uv}) + c_1(\beta_v\alpha_{vv} - \alpha_v\beta_{vv}) + c_2(\alpha_{vv}\beta_u - \alpha_u\beta_{vv})\\
&\quad - 2(c_1e_2 - c_2e_1)(\alpha_v^2 + \beta_v^2)))(u_0, v_0),\\
\varphi_{uv}(u_0, v_0) &= ((c_1^2 + c_2^2)(c_1(\alpha_{vv}\beta_u - \alpha_u\beta_{vv}) + c_2(\alpha_v\beta_{uu} - \alpha_{uu}\beta_v)\\
&\quad - 2(c_1e_2 - c_2e_1)(\alpha_u\alpha_v + \beta_u\beta_v)))(u_0, v_0)
\end{aligned}$$

and

$$\det \mathrm{Hess}\ \varphi(u_0, v_0) = (\varphi_{uu}\varphi_{vv} - \varphi_{uv}^2)(u_0, v_0).$$

由于 $\xi\boldsymbol{x}(u_0, v_0) = (c_1^2 + c_2^2)(u_0, v_0)\boldsymbol{\nu}_3(u_0, v_0)$，并且

$$\begin{aligned}
\eta\eta\boldsymbol{x}(u_0, v_0) &= \left(-c_1\det\left(\boldsymbol{a}_v\ \boldsymbol{c}\right) + c_2\det\left(\boldsymbol{a}_u\ \boldsymbol{c}\right)\right)(u_0, v_0)\boldsymbol{\nu}_1(u_0, v_0)\\
&\quad + \left(c_2\det\left(\boldsymbol{b}_u\ \boldsymbol{c}\right) - c_1\det\left(\boldsymbol{b}_v\ \boldsymbol{c}\right)\right)(u_0, v_0)\boldsymbol{\nu}_2(u_0, v_0),
\end{aligned}$$

$\xi\boldsymbol{x}(u_0, v_0)$ 和 $\eta\eta\boldsymbol{x}(u_0, v_0)$ 在 $\boldsymbol{p} = (u_0, v_0)$ 处线性无关，当且仅当

$$\left(-c_1\det\left(\boldsymbol{a}_v\ \boldsymbol{c}\right) + c_2\det\left(\boldsymbol{a}_u\ \boldsymbol{c}\right), c_2\det\left(\boldsymbol{b}_u\ \boldsymbol{c}\right) - c_1\det\left(\boldsymbol{b}_v\ \boldsymbol{c}\right)\right)(u_0, v_0) \neq (0, 0).$$

利用引理 3.15 中关于交叉帽和 $S_1^{\pm}$奇点的判据，我们得到断言 (1)、(2)、(3)。

□

3.5 示例

下面给出几个双曲广义标架曲面的应用示例。例3.17（余秩一奇点）。设 $\boldsymbol{x} : (\mathbb{R}^2, (0, 0)) \to (H^3, \boldsymbol{x}(0, 0))$ 为

$$\boldsymbol{x}(u, v) = \left(\sqrt{u^2 + f^2(u, v) + g^2(u, v) + 1}, u, f(u, v), g(u, v)\right),$$

其中 $f,g\colon U\to\mathbb{R}$ 是光滑函数，且 $f_v(0,0)=g_v(0,0)=0$。通过直接计算可得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{x}_u\wedge\boldsymbol{x}_v)(u,v)=\Big((g_vf-f_vg)(u,v)+u(f_vg_u-f_ug_v)(u,v),\\ \frac{(1+u^2)(f_vg_u-f_ug_v)(u,v)+u(g_vf-f_vg)(u,v)}{\sqrt{u^2+(f^2+g^2)(u,v)+1}},\\ \frac{(g_v+g_vf^2-f_vgf)(u,v)+u(ff_vg_u-ff_ug_v)(u,v)}{\sqrt{u^2+(f^2+g^2)(u,v)+1}},\\ \frac{(-f_v+g_vfg-f_vg^2)(u,v)+u(gf_vg_u-gf_ug_v)(u,v)}{\sqrt{u^2+(f^2+g^2)(u,v)+1}}\Big).\end{aligned}$$

存在单位类空向量

$$\boldsymbol{\nu}_1(u,v)=\frac{\sqrt{(g(u,v)-ug_u(u,v))^2+g_u^2(u,v)+1}}{\sqrt{p(u,v)}}(\overline{\boldsymbol{\nu}}_1-k\overline{\boldsymbol{\nu}}_2)(u,v)$$

and

$$\boldsymbol{\nu}_2(u,v)=\frac{(ug_u(u,v)-g(u,v))\boldsymbol{x}(u,v)+(0,g_u(u,v),0,-1)}{\sqrt{(g(u,v)-ug_u(u,v))^2+g_u^2(u,v)+1}}$$

使得 $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1\rangle(u,v)=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_2\rangle(u,v)=\langle\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2\rangle(u,v)=0$ 并且

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{x}_u\wedge\boldsymbol{x}_v)(u,v)\\ =&\frac{g_v(u,v)\sqrt{p(u,v)}}{\sqrt{u^2+(f^2+g^2)(u,v)+1}\sqrt{(g(u,v)-ug_u(u,v))^2+g_u^2(u,v)+1}}\boldsymbol{\nu}_1(u,v)\\ &+\frac{q(u,v)}{\sqrt{u^2+(f^2+g^2)(u,v)+1}\sqrt{(g(u,v)-ug_u(u,v))^2+g_u^2(u,v)+1}}\boldsymbol{\nu}_2(u,v),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{\nu}}_1(u,v)&=\Big((f(u,v)-uf_u(u,v))\sqrt{u^2+(f^2+g^2)(u,v)+1},uf(u,v)-(1+u^2)f_u(u,v),\\ &\qquad 1+f^2(u,v)-uf(u,v)f_u(u,v),f(u,v)g(u,v)-ug(u,v)f_u(u,v)\Big),\\ \overline{\boldsymbol{\nu}}_2(u,v)&=(ug_u(u,v)-g(u,v))\boldsymbol{x}(u,v)+(0,g_u(u,v),0,-1),\\ k(u,v)&=\frac{-(gf+g_uf_u)(u,v)+u(g_uf+gf_u)(u,v)-u^2f_u(u,v)g_u(u,v)}{(g(u,v)-ug_u(u,v))^2+g_u^2(u,v)+1},\\ p(u,v)&=(f(u,v)-uf_u(u,v))^2+(g(u,v)-ug_u(u,v))^2+((f_ug-g_uf)^2+f_u^2+g_u^2)(u,v)+1,\\ q(u,v)&=g_v(u,v)(-(gf+g_uf_u)(u,v)+u(g_uf+gf_u)(u,v)-u^2f_u(u,v)g_u(u,v))\\ &\quad+f_v(u,v)((g(u,v)-ug_u(u,v))^2+g_u^2(u,v)+1).\end{aligned}$$

因此，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$ 是一个双曲广义标架曲面，且

$$\begin{aligned}\alpha(u,v)&=\frac{g_v(u,v)\sqrt{p(u,v)}}{\sqrt{u^2+(f^2+g^2)(u,v)+1}\sqrt{(g(u,v)-ug_u(u,v))^2+g_u^2(u,v)+1}},\\ \beta(u,v)&=\frac{q(u,v)}{\sqrt{u^2+(f^2+g^2)(u,v)+1}\sqrt{(g(u,v)-ug_u(u,v))^2+g_u^2(u,v)+1}}.\end{aligned}$$

例3.18（一个交叉帽）。设 $\boldsymbol{x}:(\mathbb{R}^2,(0,0))\to(H^3,\boldsymbol{x}(0,0))$ 由下式给出

$$\boldsymbol{x}(u,v)=\left(\sqrt{u^2+v^4+u^2v^2+1},u,v^2,uv\right).$$

通过直接计算，我们得到

$$(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{x}_u\wedge\boldsymbol{x}_v)(u,v)=\frac{\left(uv^2\sqrt{u^2+v^4+u^2v^2+1},v^2(u^2+2),u(v^4+1),u^2v^3-2v\right)}{\sqrt{u^2+v^4+u^2v^2+1}}.$$

记

$$\boldsymbol{\nu}(u,v)=\left(\frac{u\sqrt{v^2+1}}{\sqrt{v^4+1}},\frac{\sqrt{u^2+v^4+u^2v^2+1}}{\sqrt{v^2+1}\sqrt{v^4+1}},0,\frac{v\sqrt{u^2+v^4+u^2v^2+1}}{\sqrt{v^2+1}\sqrt{v^4+1}}\right).$$

于是我们得到 $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}\rangle(u,v)=\langle \boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{x}_u\wedge\boldsymbol{x}_v,\boldsymbol{\nu}\rangle(u,v)=0$。根据定理 3.13，我们得出 $\boldsymbol{x}$ 是一个双曲广义标架基曲面。此外，存在单位类空向量

$$\boldsymbol{\nu}_1(u,v)=\left(\frac{v^2\sqrt{u^2+v^4+u^2v^2+1}}{\sqrt{v^4+1}},\frac{uv^2}{\sqrt{v^4+1}},\sqrt{v^4+1},\frac{uv^3}{\sqrt{v^4+1}}\right)$$

and

$$\boldsymbol{\nu}_2(u,v)=\left(0,\frac{v}{\sqrt{v^2+1}},0,-\frac{1}{\sqrt{v^2+1}}\right)$$

使得 $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1\rangle(u,v)=\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_2\rangle(u,v)=\langle \boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2\rangle(u,v)=0$ 并且

$$(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{x}_u\wedge\boldsymbol{x}_v)(u,v)=\frac{u\sqrt{v^4+1}}{\sqrt{u^2+v^4+u^2v^2+1}}\boldsymbol{\nu}_1(u,v)+\frac{2v\sqrt{v^2+1}}{\sqrt{u^2+v^4+u^2v^2+1}}\boldsymbol{\nu}_2(u,v).$$

因此，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$ 是一个双曲广义标架曲面，其

$$\alpha(u,v)=\frac{u\sqrt{v^4+1}}{\sqrt{u^2+v^4+u^2v^2+1}},\ \beta(u,v)=\frac{2v\sqrt{v^2+1}}{\sqrt{u^2+v^4+u^2v^2+1}}$$

以及基本不变量

$$\begin{pmatrix}a_1(u,v) & b_1(u,v) & c_1(u,v)\\ a_2(u,v) & b_2(u,v) & c_2(u,v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{\sqrt{v^4+1}\sqrt{v^2+1}}{\sqrt{u^2+v^4+u^2v^2+1}}\\ \frac{2v}{\sqrt{v^4+1}} & -\frac{u}{\sqrt{v^2+1}} & \frac{uv(1-v^4-2v^2)}{\sqrt{u^2+v^4+u^2v^2+1}\sqrt{v^4+1}\sqrt{v^2+1}}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}e_1(u,v) & f_1(u,v) & g_1(u,v)\\ e_2(u,v) & f_2(u,v) & g_2(u,v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{v^2\sqrt{v^2+1}}{\sqrt{u^2+v^4+u^2v^2+1}} & 0\\ -\frac{uv^2}{\sqrt{v^4+1}\sqrt{v^2+1}} & \frac{uv^3(1-v^4-2v^2)}{(v^4+1)\sqrt{u^2+v^4+u^2v^2+1}\sqrt{v^2+1}} & \frac{\sqrt{u^2+v^4+u^2v^2+1}}{(v^2+1)\sqrt{v^4+1}}\end{pmatrix}.$$

例 3.19（双曲直纹面）。设 $\boldsymbol{\gamma}:(-\pi,\pi]\to H^3$，

$$\boldsymbol{\gamma}(u)=\left(\frac{13}{5},\frac{9\cos u-3\cos 3u}{5},\frac{9\sin u-3\sin 3u}{5},\frac{6\sqrt{3}\cos u}{5}\right)$$

是 H^3 中的一条光滑曲线，且 $\boldsymbol{\delta}:(-\pi,\pi]\to S^3_1$，

$$\boldsymbol{\delta}(u)=\frac{\left(-156\sin u,-97\sin 2u+18\sin 4u,-50\sin^2 u-144\sin^4 u+25,-36\sqrt{3}\sin 2u\right)}{5\sqrt{144\sin^2 u+25}}.$$

Then

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(u,v)&=\cosh v\boldsymbol{\gamma}(u)+\sinh v\boldsymbol{\delta}(u)\\&=\left(\frac{13\cosh v}{5}-\frac{156\sin u\sinh v}{5\sqrt{144\sin^2 u+25}},\frac{(9\cos u-3\cos 3u)\cosh v}{5}-\frac{(97\sin 2u-18\sin 4u)\sinh v}{5\sqrt{144\sin^2 u+25}},\right.\\&\quad\frac{(9\sin u-3\sin 3u)\cosh v}{5}-\frac{(50\sin^2 u+144\sin^4 u-25)\sinh v}{5\sqrt{144\sin^2 u+25}},\\&\quad\left.\frac{6\sqrt{3}\cos u\cosh v}{5}-\frac{36\sqrt{3}\sin 2u\sinh v}{5\sqrt{144\sin^2 u+25}}\right)\end{aligned}$$

是由 $\boldsymbol{\gamma}$和 $\boldsymbol{\delta}$生成的双曲直纹面，其中 $(u,v)\in(-\pi,\pi]\times\mathbb{R}$。通过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{x}_u\wedge\boldsymbol{x}_v)(u,v)=&\frac{-12\sqrt{3}\sin u\cosh v+\sinh v\sqrt{432\sin^2 u+75}}{5}\boldsymbol{\nu}_1(u,v)\\&+\frac{65\sinh v}{\sqrt{144\sin^2 u+25}}\boldsymbol{\nu}_2(u,v),\end{aligned}$$

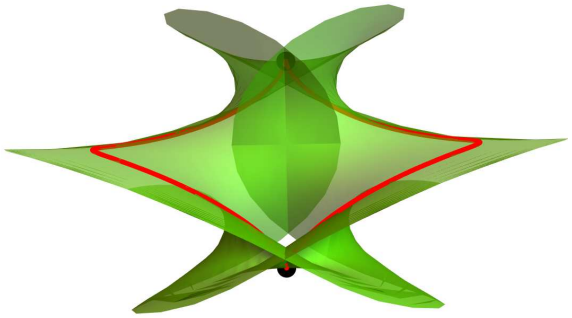

图1：投影到庞加莱 3-圆盘中的曲线 $\boldsymbol{\gamma}$ 和双曲直纹面 $\boldsymbol{x}$ 。两个黑点是 $\boldsymbol{x}$的交叉帽奇点。

其中

$$\boldsymbol{\nu}_1(u,v)=\frac{\left(24\cos u,13\cos 2u,13\sin 2u,13\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{144\sin^2 u+25}},$$
$$\boldsymbol{\nu}_2(u,v)=\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2u,-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2u,\frac{1}{2}\right)$$

以及 $\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\nu}_1\rangle(u,\ v)=\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\nu}_2\rangle(u,\ v)=\langle \boldsymbol{\nu}_1,\ \boldsymbol{\nu}_2\rangle(u,\ v)=0$。因此，$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\nu}_1,\ \boldsymbol{\nu}_2)$ 是一个具有以下性质的双曲广义标架曲面

$$\alpha(u,v)=\frac{-12\sqrt{3}\sin u\cosh v+\sinh v\sqrt{432\sin^2 u+75}}{5},\ \beta(u,v)=\frac{65\sinh v}{\sqrt{144\sin^2 u+25}}$$

以及基本不变量

$$\begin{pmatrix}a_1(u,v) & b_1(u,v) & c_1(u,v)\\ a_2(u,v) & b_2(u,v) & c_2(u,v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{65\sinh v}{\sqrt{144\sin^2 u+25}} & \frac{-12\sqrt{3}\sin u\cosh v+\sinh v\sqrt{432\sin^2 u+75}}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}e_1(u,v) & f_1(u,v) & g_1(u,v)\\ e_2(u,v) & f_2(u,v) & g_2(u,v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{65\cosh v}{144\sin^2 u+25} & \frac{12\sqrt{3}\sin u\sinh v-\cosh v\sqrt{432\sin^2 u+75}}{5}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

由于 $\alpha(0,0)=\beta(0,0)=0$，$(a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2)(0,0)=(0,0,0,0)$，$(c_1,\ c_2)(0,0)=(0,1)\neq(0,0)$，并且

$$\left(\det\left(\boldsymbol{b}_u\ \boldsymbol{c}\right)\det\left(\boldsymbol{a}_v\ \boldsymbol{c}\right)-\det\left(\boldsymbol{b}_v\ \boldsymbol{c}\right)\det\left(\boldsymbol{a}_u\ \boldsymbol{c}\right)\right)(0,0)=12\sqrt{3}\neq 0,$$

根据命题 3.16，我们可以得到，$\boldsymbol{x}$ 在 $(0,0)$ 处与交叉帽 $\mathcal{A}$-等价。类似的讨论可得出结论：$\boldsymbol{x}$ 在 $(\pi,0)$ 处也与交叉帽 $\mathcal{A}$-等价，见图1。

例3.20（双曲直纹面）。设 $\boldsymbol{\gamma}:\ (-\pi,\ \pi]\to H^3$,

$$\boldsymbol{\gamma}(u)=\left(\frac{13}{5},-\frac{3}{5}\cos 3u+\frac{9}{5}\cos u,-\frac{3}{5}\sin 3u+\frac{9}{5}\sin u,\frac{6\sqrt{3}}{5}\cos u\right)$$

是 H^3 和 $\boldsymbol{\delta}$ 中的一条光滑曲线：$(-\pi,\pi]\to S^3_1$,

$$\boldsymbol{\delta}(u)=\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2u,-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2u,\frac{1}{2}\right).$$

Then

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(u,v)&=\cosh v\boldsymbol{\gamma}(u)+\sinh v\boldsymbol{\delta}(u)\\ &=\left(\frac{13}{5}\cosh v,\left(-\frac{3}{5}\cos 3u+\frac{9}{5}\cos u\right)\cosh v-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2u\sinh v,\right.\\ &\quad\left.\left(-\frac{3}{5}\sin 3u+\frac{9}{5}\sin u\right)\cosh v-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2u\sinh v,\frac{6\sqrt{3}}{5}\cos u\cosh v+\frac{1}{2}\sinh v\right)\end{aligned}$$

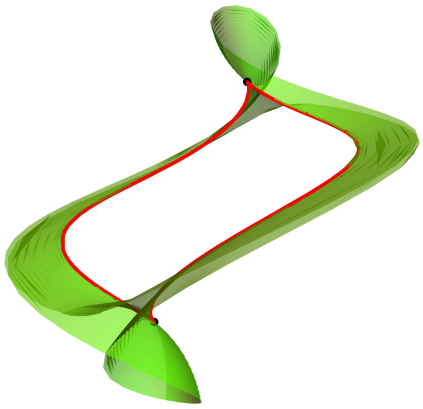

图2：投影到庞加莱3-圆盘上的曲线 $\boldsymbol{\gamma}$ 和双曲直纹面 $\boldsymbol{x}$ 。两个黑点是 $\boldsymbol{x}$的燕尾奇点。 $\boldsymbol{\gamma}$ 上的其他点是 $\boldsymbol{x}$ 的尖点边奇点。

是由 $\boldsymbol{\gamma}$ 和 $\boldsymbol{\delta}$ 生成的双曲直纹面，其中 $(u,v) \in (-\pi,\pi]\times\mathbb{R}$。通过直接计算，我们得到

$$(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{x}_u\wedge\boldsymbol{x}_v)(u,v)=\left(\frac{12\sqrt{3}\cos u\sinh v}{5},\frac{13\sqrt{3}\cos 2u\sinh v}{10},\frac{13\sqrt{3}\sin 2u\sinh v}{10},\frac{39\sinh v}{10}\right).$$

记

$$\boldsymbol{\nu}_1(u,v)=\frac{\left(24\cos u,13\cos 2u,13\sin 2u,13\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{144\sin^2 u+25}}$$

and

$$\boldsymbol{\nu}_2(u,v)=\frac{\left(-156\sin u,-97\sin 2u+18\sin 4u,-50\sin^2 u-144\sin^4 u+25,-36\sqrt{3}\sin 2u\right)}{5\sqrt{144\sin^2 u+25}}.$$

于是得到 $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1\rangle(u,v)=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_2\rangle(u,v)=\langle\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2\rangle(u,v)=0$ 以及

$$(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{x}_u\wedge\boldsymbol{x}_v)(u,v)=\frac{\sqrt{432\sin^2 u+75}\sinh v}{5}\boldsymbol{\nu}_1(u,v).$$

因此，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$ 是一个双曲广义标架曲面，且

$$\alpha(u,v)=\frac{\sqrt{432\sin^2 u+75}\sinh v}{5},\ \beta(u,v)=0$$

以及基本不变量

$$\begin{pmatrix}a_1(u,v) & b_1(u,v) & c_1(u,v)\\ a_2(u,v) & b_2(u,v) & c_2(u,v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{\sqrt{432\sin^2 u+75}\sinh v}{5} & \frac{12\sqrt{3}\sin u}{5}\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}e_1(u,v) & f_1(u,v) & g_1(u,v)\\ e_2(u,v) & f_2(u,v) & g_2(u,v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{65}{144\sin^2 u+25} & 0 & -\frac{\sqrt{432\sin^2 u+75}\cosh v}{5}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

根据命题3.5和3.7，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$ 既是一个双曲标架曲面，也是一个关于 v的单参数双曲标架曲线族。

我们研究发现， $\boldsymbol{x}$ 的奇点位于 *[20]*中的 $\boldsymbol{\gamma}$ 上。在$\boldsymbol{\gamma}$的奇点上， $\boldsymbol{x}$具有燕尾奇点，而在其他点上， $\boldsymbol{x}$ 具有尖点边奇点，参见图2。

4 H^3中的双曲广义标架曲面、 $\mathbb{R}^3$ 中的广义标架曲面与 $\mathbb{R}^3_1$中的光锥标架曲面之间的关系

4.1 双曲广义标架曲面与广义标架曲面之间的关系

庞加莱3-圆盘 $D^3=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2<1\}$ 是欧几里得空间的一个开子集。已知存在从 H^3 到 D^3的微分同胚 $\boldsymbol{\pi}$,

$$\boldsymbol{\pi}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left(\frac{x_2}{x_1+1},\frac{x_3}{x_1+1},\frac{x_4}{x_1+1}\right).$$

$\boldsymbol{\pi}$ 的逆映射为

$$\boldsymbol{\pi}^{-1}(x_1,x_2,x_3)=\frac{(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2,2x_1,2x_2,2x_3)}{1-x_1^2-x_2^2-x_3^2}.$$

若将 D^3 视为带有诱导度量的 $\mathbb{R}^3$ 的子集，则通过 H^3 与 D^3之间的微分同胚，我们可以得到双曲广义标架曲面与广义标架曲面之间的关系。

命题4.1. 设 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)\colon U\to H^3\times\Delta_5$ 是一个双曲广义标架曲面。记$\boldsymbol{x}(u,v)=(x_1,x_2,x_3,x_4)(u,v)$、 $\boldsymbol{\nu}_1(u,v)=(y_1,y_2,y_3,y_4)(u,v)$以及 $\boldsymbol{\nu}_2(u,v)=(z_1,z_2,z_3,z_4)(u,v)$。则 $(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\nu}}_1,\overline{\boldsymbol{\nu}}_2)\colon U\to D^3\times\Delta$ 是一个广义标架曲面，其中

$$\begin{aligned}
&\overline{\boldsymbol{x}}(u,v)=\left(\frac{x_2}{x_1+1},\frac{x_3}{x_1+1},\frac{x_4}{x_1+1}\right)(u,v),\\
&\overline{\boldsymbol{\nu}}_1(u,v)=\frac{(p_1,q_1,r_1)}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}}(u,v), \qquad \overline{\boldsymbol{\nu}}_2(u,v)=\frac{(p_2,q_2,r_2)}{\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}(u,v),\\
&p_1(u,v)=(x_2y_1-x_1y_2-y_2)(u,v), \qquad q_1(u,v)=(x_3y_1-x_1y_3-y_3)(u,v),\\
&r_1(u,v)=(x_4y_1-x_1y_4-y_4)(u,v), \qquad p_2(u,v)=(x_2z_1-x_1z_2-z_2)(u,v),\\
&q_2(u,v)=(x_3z_1-x_1z_3-z_3)(u,v), \qquad r_2(u,v)=(x_4z_1-x_1z_4-z_4)(u,v).
\end{aligned}$$

证明。由于 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)\colon U\to H^3\times\Delta_5$ 是一个双曲广义标架曲面，因此存在光滑函数 $\alpha,\beta\colon U\to\mathbb{R}$, 使得

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{x}_u\wedge\boldsymbol{x}_v)(u,v)=\big(&-x_2(x_{3u}x_{4v}-x_{4u}x_{3v})+x_3(x_{2u}x_{4v}-x_{4u}x_{2v})-x_4(x_{2u}x_{3v}-x_{3u}x_{2v}),\\
&-x_1(x_{3u}x_{4v}-x_{4u}x_{3v})+x_3(x_{1u}x_{4v}-x_{4u}x_{1v})-x_4(x_{1u}x_{3v}-x_{1v}x_{3u}),\\
&-x_1(x_{2v}x_{4u}-x_{4v}x_{2u})+x_2(x_{1v}x_{4u}-x_{1u}x_{4v})-x_4(x_{1v}x_{2u}-x_{1u}x_{2v}),\\
&-x_1(x_{2u}x_{3v}-x_{3u}x_{2v})+x_2(x_{1u}x_{3v}-x_{1v}x_{3u})-x_3(x_{1u}x_{2v}-x_{1v}x_{2u})\big)(u,v)\\
=&(\alpha y_1+\beta z_1,\alpha y_2+\beta z_2,\alpha y_3+\beta z_3,\alpha y_4+\beta z_4)(u,v).
\end{aligned}$$

于是我们有

$$\begin{cases}
(-x_2(x_{3u}x_{4v}-x_{4u}x_{3v})+x_3(x_{2u}x_{4v}-x_{4u}x_{2v})-x_4(x_{2u}x_{3v}-x_{3u}x_{2v}))(u,v)=(\alpha y_1+\beta z_1)(u,v),\\
(-x_1(x_{3u}x_{4v}-x_{4u}x_{3v})+x_3(x_{1u}x_{4v}-x_{4u}x_{1v})-x_4(x_{1u}x_{3v}-x_{1v}x_{3u}))(u,v)=(\alpha y_2+\beta z_2)(u,v),\\
(-x_1(x_{2v}x_{4u}-x_{4v}x_{2u})+x_2(x_{1v}x_{4u}-x_{1u}x_{4v})-x_4(x_{1v}x_{2u}-x_{1u}x_{2v}))(u,v)=(\alpha y_3+\beta z_3)(u,v),\\
(-x_1(x_{2u}x_{3v}-x_{3u}x_{2v})+x_2(x_{1u}x_{3v}-x_{1v}x_{3u})-x_3(x_{1u}x_{2v}-x_{1v}x_{2u}))(u,v)=(\alpha y_4+\beta z_4)(u,v).
\end{cases}\tag{7}$$

Let

$$\overline{\boldsymbol{x}}(u,v)=\boldsymbol{\pi}\circ\boldsymbol{x}(u,v)=\left(\frac{x_2}{x_1+1},\frac{x_3}{x_1+1},\frac{x_4}{x_1+1}\right)(u,v).$$

通过计算,

$$
\begin{aligned}
&(\overline{\boldsymbol{x}}_u \times \overline{\boldsymbol{x}}_v)(u,v)\\
=\ &\frac{1}{(x_1+1)^3}(u,v)\Big(x_2(\alpha y_1+\beta z_1)-x_1(\alpha y_2+\beta z_2)-(\alpha y_2+\beta z_2),\\
&\qquad\qquad x_3(\alpha y_1+\beta z_1)-x_1(\alpha y_3+\beta z_3)-(\alpha y_3+\beta z_3),\\
&\qquad\qquad x_4(\alpha y_1+\beta z_1)-x_1(\alpha y_4+\beta z_4)-(\alpha y_4+\beta z_4)\Big)(u,v)\\
=\ &\frac{1}{(x_1+1)^3}(u,v)\left(\alpha(p_1,q_1,r_1)+\beta(p_2,q_2,r_2)\right)(u,v)\\
=\ &\frac{\alpha\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}}{(x_1+1)^3}(u,v)\frac{(p_1,q_1,r_1)}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}}(u,v)+\frac{\beta\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}{(x_1+1)^3}(u,v)\frac{(p_2,q_2,r_2)}{\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}(u,v),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&p_1(u,v)=(x_2y_1-x_1y_2-y_2)(u,v),\quad q_1(u,v)=(x_3y_1-x_1y_3-y_3)(u,v),\\
&r_1(u,v)=(x_4y_1-x_1y_4-y_4)(u,v),\quad p_2(u,v)=(x_2z_1-x_1z_2-z_2)(u,v),\\
&q_2(u,v)=(x_3z_1-x_1z_3-z_3)(u,v),\quad r_2(u,v)=(x_4z_1-x_1z_4-z_4)(u,v).
\end{aligned}
$$

记

$$
\overline{\boldsymbol{\nu}}_1(u,v)=\frac{(p_1,q_1,r_1)}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}}(u,v),\ \overline{\boldsymbol{\nu}}_2(u,v)=\frac{(p_2,q_2,r_2)}{\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}(u,v).
$$

接下来证明$\overline{\boldsymbol{\nu}}_1,\overline{\boldsymbol{\nu}}_2\colon U\to S^2$是良定义的。假设存在$(u_0,v_0)\in U$，使得$(p_1,q_1,r_1)(u_0,v_0)=(0,0,0)$，则有

$$
y_2(u_0,v_0)=\frac{x_2y_1}{x_1+1}(u_0,v_0),\ y_3(u_0,v_0)=\frac{x_3y_1}{x_1+1}(u_0,v_0),\ y_4(u_0,v_0)=\frac{x_4y_1}{x_1+1}(u_0,v_0).
$$

由于$(-y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)(u_0,v_0)=1$，我们可以得到$(y_2,y_3,y_4)(u_0,v_0)\neq(0,0,0)$。不妨设$y_2(u_0,v_0)=(x_2y_1/(x_1+1))(u_0,v_0)\neq0$，这意味着$y_1(u_0,v_0)\neq0$。

由此可得

$$
\begin{aligned}
\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1\rangle(u_0,v_0)&=(-x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)(u_0,v_0)\\
&=\left(-x_1y_1+\frac{x_2^2y_1}{x_1+1}+\frac{x_3^2y_1}{x_1+1}+\frac{x_4^2y_1}{x_1+1}\right)(u_0,v_0)\\
&=-y_1(u_0,v_0)\neq0.
\end{aligned}
$$

这与对所有$(u,v)\in U$，$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1\rangle(u,v)=0$矛盾。因此$(p_1,q_1,r_1)(u,v)\neq(0,0,0)$。类似地，可以证明对所有$(u,v)\in U$，$(p_2,q_2,r_2)(u,v)\neq(0,0,0)$。此外，我们还可以验证，对所有$(u,v)\in U$，$(\overline{\boldsymbol{\nu}}_1\cdot\overline{\boldsymbol{\nu}}_2)(u,v)=0$。因此，$(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\nu}}_1,\overline{\boldsymbol{\nu}}_2)$是一个广义标架曲面。□

命题 4.2. 设$(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\nu}}_1,\overline{\boldsymbol{\nu}}_2)\colon U\to D^3\times\Delta$是一个广义标架曲面。记$\overline{\boldsymbol{x}}(u,v)=(x_1,x_2,x_3)(u,v)$、$\overline{\boldsymbol{\nu}}_1(u,v)=(y_1,y_2,y_3)(u,v)$以及$\overline{\boldsymbol{\nu}}_2(u,v)=(z_1,z_2,z_3)(u,v)$。那么$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)\colon$

$U \to H^3 \times \Delta_5$ 是一个双曲广义标架曲面，其中

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(u,v) &= \frac{(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2, 2x_1, 2x_2, 2x_3)}{1-x_1^2-x_2^2-x_3^2}(u,v),\\
\boldsymbol{\nu}_1(u,v) &= \frac{(p_1,q_1,r_1,s_1)}{\sqrt{-p_1^2+q_1^2+r_1^2+s_1^2}}(u,v),\\
\boldsymbol{\nu}_2(u,v) &= \frac{(p_2,q_2,r_2,s_2)}{\sqrt{-p_2^2+q_2^2+r_2^2+s_2^2}}(u,v),\\
p_1(u,v) &= 2(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)(u,v),\\
q_1(u,v) &= ((1+x_1^2-x_2^2-x_3^2)y_1+2x_1x_2y_2+2x_1x_3y_3)(u,v),\\
r_1(u,v) &= (2x_1x_2y_1+(1-x_1^2+x_2^2-x_3^2)y_2+2x_2x_3y_3)(u,v),\\
s_1(u,v) &= (2x_1x_3y_1+2x_2x_3y_2+(1-x_1^2-x_2^2+x_3^2)y_3)(u,v),\\
p_2(u,v) &= 2(x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3)(u,v),\\
q_2(u,v) &= ((1+x_1^2-x_2^2-x_3^2)z_1+2x_1x_2z_2+2x_1x_3z_3)(u,v),\\
r_2(u,v) &= (2x_1x_2z_1+(1-x_1^2+x_2^2-x_3^2)z_2+2x_2x_3z_3)(u,v),\\
s_2(u,v) &= (2x_1x_3z_1+2x_2x_3z_2+(1-x_1^2-x_2^2+x_3^2)z_3)(u,v).
\end{aligned}
$$

证明。由于 $(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\nu}}_1,\overline{\boldsymbol{\nu}}_2)\colon U \to D^3\times\Delta$ 是一个广义标架曲面，因此存在光滑函数$\overline{\alpha},\overline{\beta}\colon U\to\mathbb{R}$ 使得

$$
\begin{aligned}
(\overline{\boldsymbol{x}}_u \times \overline{\boldsymbol{x}}_v)(u,v) &= (x_{2u}x_{3v}-x_{2v}x_{3u}, x_{3u}x_{1v}-x_{3v}x_{1u}, x_{1u}x_{2v}-x_{1v}x_{2u})(u,v)\\
&= (\overline{\alpha}y_1+\overline{\beta}z_1, \overline{\alpha}y_2+\overline{\beta}z_2, \overline{\alpha}y_3+\overline{\beta}z_3)(u,v).
\end{aligned}
$$

于是我们有

$$
\begin{cases}
(x_{2u}x_{3v}-x_{2v}x_{3u})(u,v) = (\overline{\alpha}y_1+\overline{\beta}z_1)(u,v),\\
(x_{3u}x_{1v}-x_{3v}x_{1u})(u,v) = (\overline{\alpha}y_2+\overline{\beta}z_2)(u,v),\\
(x_{1u}x_{2v}-x_{1v}x_{2u})(u,v) = (\overline{\alpha}y_3+\overline{\beta}z_3)(u,v).
\end{cases}
$$

Let

$$
\boldsymbol{x}(u,v) = \boldsymbol{\pi}^{-1}\circ\overline{\boldsymbol{x}}(u,v) = \frac{(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2, 2x_1, 2x_2, 2x_3)}{1-x_1^2-x_2^2-x_3^2}(u,v).
$$

通过计算，

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{x}_u\wedge\boldsymbol{x}_v)(u,v)\\
=&-\frac{4}{(1-x_1^2-x_2^2-x_3^2)^3(u,v)}\Big(2x_1(\overline{\alpha}y_1+\overline{\beta}z_1)+2x_2(\overline{\alpha}y_2+\overline{\beta}z_2)+2x_3(\overline{\alpha}y_3+\overline{\beta}z_3),\\
&(1+x_1^2-x_2^2-x_3^2)(\overline{\alpha}y_1+\overline{\beta}z_1)+2x_1x_2(\overline{\alpha}y_2+\overline{\beta}z_2)+2x_1x_3(\overline{\alpha}y_3+\overline{\beta}z_3),\\
&2x_1x_2(\overline{\alpha}y_1+\overline{\beta}z_1)+(1-x_1^2+x_2^2-x_3^2)(\overline{\alpha}y_2+\overline{\beta}z_2)+2x_2x_3(\overline{\alpha}y_3+\overline{\beta}z_3),\\
&2x_1x_3(\overline{\alpha}y_1+\overline{\beta}z_1)+2x_2x_3(\overline{\alpha}y_2+\overline{\beta}z_2)+(1-x_1^2-x_2^2+x_3^2)(\overline{\alpha}y_3+\overline{\beta}z_3)\Big)(u,v)\\
=&-\frac{4}{(1-x_1^2-x_2^2-x_3^2)^3(u,v)}\left(\overline{\alpha}(p_1,q_1,r_1,s_1)+\overline{\beta}(p_2,q_2,r_2,s_2)\right)(u,v)\\
=&-\frac{4\overline{\alpha}\sqrt{-p_1^2+q_1^2+r_1^2+s_1^2}}{(1-x_1^2-x_2^2-x_3^2)^3}(u,v)\frac{(p_1,q_1,r_1,s_1)}{\sqrt{-p_1^2+q_1^2+r_1^2+s_1^2}}(u,v)\\
&-\frac{4\overline{\beta}\sqrt{-p_2^2+q_2^2+r_2^2+s_2^2}}{(1-x_1^2-x_2^2-x_3^2)^3}(u,v)\frac{(p_2,q_2,r_2,s_2)}{\sqrt{-p_2^2+q_2^2+r_2^2+s_2^2}}(u,v),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
p_1(u,v) &= 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)(u,v),\\
q_1(u,v) &= ((1 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)y_1 + 2x_1x_2y_2 + 2x_1x_3y_3)(u,v),\\
r_1(u,v) &= (2x_1x_2y_1 + (1 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)y_2 + 2x_2x_3y_3)(u,v),\\
s_1(u,v) &= (2x_1x_3y_1 + 2x_2x_3y_2 + (1 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2)y_3)(u,v),\\
p_2(u,v) &= 2(x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)(u,v),\\
q_2(u,v) &= ((1 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)z_1 + 2x_1x_2z_2 + 2x_1x_3z_3)(u,v),\\
r_2(u,v) &= (2x_1x_2z_1 + (1 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)z_2 + 2x_2x_3z_3)(u,v),\\
s_2(u,v) &= (2x_1x_3z_1 + 2x_2x_3z_2 + (1 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2)z_3)(u,v).
\end{aligned}
$$

记

$$
\boldsymbol{\nu}_1(u,v) = \frac{(p_1,q_1,r_1,s_1)}{\sqrt{-p_1^2+q_1^2+r_1^2+s_1^2}}(u,v),\ \boldsymbol{\nu}_2(u,v) = \frac{(p_2,q_2,r_2,s_2)}{\sqrt{-p_2^2+q_2^2+r_2^2+s_2^2}}(u,v).
$$

可以验证，$(-p_1^2+q_1^2+r_1^2+s_1^2)(u,v) > 0$ 且 $(-p_2^2+q_2^2+r_2^2+s_2^2)(u,v) > 0$. 因此，$\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2 : U \to S_1^3$ 是良定义的。此外，计算表明，$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}_1\rangle(u,v) = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}_2\rangle(u,v) = \langle \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2\rangle(u,v) = 0$. 因此，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ 是一个双曲广义标架曲面。 □

4.2 双曲广义标架基曲面与光锥标架基曲面之间的关系

为了研究 H^3 中的双曲广义标架基曲面与 $\mathbb{R}_1^3$ 中的光锥标架基曲面之间的关系，我们考虑投影 $\boldsymbol{\pi}_i$: $H^3 \to \mathbb{R}_1^3$ $(i = 2,3,4)$，其中 $\boldsymbol{\pi}_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1,x_3,x_4)$，$\boldsymbol{\pi}_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1,x_2,x_4)$，且 $\boldsymbol{\pi}_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1,x_2,x_3)$。

命题4.3. 设 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) : U \to H^3 \times \Delta_5$ 是一个双曲广义标架曲面。若 $\boldsymbol{\pi}_i \circ \boldsymbol{\nu}_3(u,v)$ 对所有 $(u,v) \in U$ 均为类空，则 $\widetilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\pi}_i \circ \boldsymbol{x} : U \to \mathbb{R}_1^3$ 是一个光锥标架基曲面，$i = 2, 3, 4$。

证明. 我们讨论 $i = 4$ 的情形，其他情形的证明类似。记 $\boldsymbol{x}(u,v) = (x_1,x_2,x_3,x_4)(u,v)$，$\boldsymbol{\nu}_1(u,v) = (y_1,y_2,y_3,y_4)(u,v)$，以及 $\boldsymbol{\nu}_2(u,v) = (z_1,z_2,z_3,z_4)(u,v)$。由于 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ 是一个双曲广义标架曲面，存在光滑函数 $\alpha, \beta : U \to \mathbb{R}$，使得等式 (7) 成立。令

$$
\widetilde{\boldsymbol{x}}(u,v) = \boldsymbol{\pi}_4 \circ \boldsymbol{x}(u,v) = (x_1,x_2,x_3)(u,v).
$$

通过计算，

$$
\begin{aligned}
&(\widetilde{\boldsymbol{x}}_u \wedge \widetilde{\boldsymbol{x}}_v)(u,v)\\
&= \alpha(u,v)\left(y_4(x_1,x_2,x_3) - x_4(y_1,y_2,y_3)\right)(u,v) + \beta(u,v)\left(z_4(x_1,x_2,x_3) - x_4(z_1,z_2,z_3)\right)(u,v).
\end{aligned}
$$

记 $\boldsymbol{\nu}_3(u,v) = (\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{\nu}_1 \wedge \boldsymbol{\nu}_2)(u,v) = (w_1,w_2,w_3,w_4)(u,v)$，以及 $\boldsymbol{\pi}_4 \circ \boldsymbol{\nu}_3(u,v) = (w_1,w_2,w_3)(u,v)$。于是可得 $\langle \widetilde{\boldsymbol{x}}_u \wedge \widetilde{\boldsymbol{x}}_v, \boldsymbol{\pi}_4 \circ \boldsymbol{\nu}_3\rangle(u,v) = 0$ 对所有 $(u,v) \in U$ 均成立。由于 $\boldsymbol{\pi}_4 \circ \boldsymbol{\nu}_3$ 是类空的，我们可以取

$$
\boldsymbol{t}(u,v) = \frac{\boldsymbol{\pi}_4 \circ \boldsymbol{\nu}_3}{|\boldsymbol{\pi}_4 \circ \boldsymbol{\nu}_3|}(u,v).
$$

在 [10], $\langle \widetilde{\boldsymbol{x}}_u \wedge \widetilde{\boldsymbol{x}}_v, \boldsymbol{t}\rangle(u,v)$ 中应用定理 3.4，得到对于所有 $(u,v) \in U$，$= 0$ $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ 是一个光锥标架基曲面。 □

从 $\mathbb{R}_1^3$ 到 H^3，我们考虑映射 $\boldsymbol{p}_i : \mathbb{R}_1^3 \to H^3$ $(i = 2, 3, 4)$，其中

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_2(a,b,c) &= \left(a, \sqrt{-1 + a^2 - b^2 - c^2}, b, c\right),\\
\boldsymbol{p}_3(a,b,c) &= \left(a, b, \sqrt{-1 + a^2 - b^2 - c^2}, c\right),\\
\boldsymbol{p}_4(a,b,c) &= \left(a, b, c, \sqrt{-1 + a^2 - b^2 - c^2}\right)
\end{aligned}
$$

以及 $a^2 - b^2 - c^2 > 1$。

命题 4.4. 设 $(\widetilde{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{\ell}^+,\boldsymbol{\ell}^-)\colon U\to\mathbb{R}^3_1\times\Delta_4$ 是一个光锥标架曲面。记 $\widetilde{\boldsymbol{x}}(u,v)=(x_1,x_2,x_3)(u,v)$ 若对所有 $(u,v)\in U$，都有 $(x_1^2-x_2^2-x_3^2)(u,v)>1$，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}_i\circ\widetilde{\boldsymbol{x}}\colon U\to H^3$ 是一个双曲广义标架基曲面，$i=2,3,4$。

证明。在不失一般性的情况下，设 $i=4$，其余情况可类似证明。记 $\boldsymbol{\ell}^+(u,v)=(y_1,y_2,y_3)(u,v)$，以及 $\boldsymbol{\ell}^-(u,v)=(z_1,z_2,z_3)(u,v)$。由于 $(\widetilde{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{\ell}^+,\boldsymbol{\ell}^-)$ 是一个光锥标架曲面，因此存在光滑函数 $\widetilde{\alpha},\beta\colon U\to\mathbb{R}$，使得

$$\begin{aligned}(\widetilde{\boldsymbol{x}}_u\wedge\widetilde{\boldsymbol{x}}_v)(u,v)&=(-x_{2u}x_{3v}+x_{2v}x_{3u},x_{3u}x_{1v}-x_{3v}x_{1u},x_{1u}x_{2v}-x_{1v}x_{2u})(u,v)\\&=(\widetilde{\alpha}y_1+\widetilde{\beta}z_1,\widetilde{\alpha}y_2+\widetilde{\beta}z_2,\widetilde{\alpha}y_3+\widetilde{\beta}z_3)(u,v).\end{aligned}$$

Let

$$\boldsymbol{x}(u,v)=\boldsymbol{p}_4\circ\widetilde{\boldsymbol{x}}(u,v)=\left(x_1,x_2,x_3,\sqrt{-1+x_1^2-x_2^2-x_3^2}\right)(u,v).$$

记 $x_4=\sqrt{-1+x_1^2-x_2^2-x_3^2}$。通过计算可得，

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{x}_u\wedge\boldsymbol{x}_v)(u,v)\\&=\widetilde{\alpha}(u,v)\left(-\frac{1}{x_4}(y_1,y_2,y_3,0)+\frac{x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3}{x_4}(x_1,x_2,x_3,x_4)\right)(u,v)\\&\quad+\widetilde{\beta}(u,v)\left(-\frac{1}{x_4}(z_1,z_2,z_3,0)+\frac{x_1z_1-x_2z_2-x_3z_3}{x_4}(x_1,x_2,x_3,x_4)\right)(u,v).\end{aligned}$$

Take

$$\boldsymbol{\nu}(u,v)=\frac{(-x_4(y_2z_3-y_3z_2),-x_4(y_1z_3-y_3z_1),x_4(y_1z_2-y_2z_1),-\langle\widetilde{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{\ell}^+\wedge\boldsymbol{\ell}^-\rangle)}{\sqrt{4x_4^2+(\langle\widetilde{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{\ell}^+\wedge\boldsymbol{\ell}^-\rangle)^2}}(u,v).$$

可以验证，对于所有 $(u,v)\in U$，$\langle\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}\rangle(u,v)=1$ 以及 $\langle\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{x}\rangle(u,v)=\langle\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{x}_u\wedge\boldsymbol{x}_v\rangle(u,v)=0$。利用定理 3.13，我们可以得出 $\boldsymbol{x}$ 是一个双曲广义标架基曲面。 □

5 极限圆曲面

设 $\boldsymbol{a}_0\colon I\to H^3$ 和 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\colon I\to S^3_1$ 为光滑映射，对于所有 $u\in I$，都有 $\langle\boldsymbol{a}_i(u)\ \boldsymbol{a}_j(u)\rangle=0$ $(i\neq j,i,j\in\{0,1,2\})$。记 $\boldsymbol{a}_3(u)=(\boldsymbol{a}_0\wedge\boldsymbol{a}_1\wedge\boldsymbol{a}_2)(u)$，则 $\{\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^4_1$ 的伪正交标架，并且有以下结论。

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_0'(u)\\\boldsymbol{a}_1'(u)\\\boldsymbol{a}_2'(u)\\\boldsymbol{a}_3'(u)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&h_1(u)&h_2(u)&h_3(u)\\h_1(u)&0&h_4(u)&h_5(u)\\h_2(u)&-h_4(u)&0&h_6(u)\\h_3(u)&-h_5(u)&-h_6(u)&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_0(u)\\\boldsymbol{a}_1(u)\\\boldsymbol{a}_2(u)\\\boldsymbol{a}_3(u)\end{pmatrix},$$

其中 $h_i\colon I\to\mathbb{R}$ 为光滑函数，$i=1$、2、.....、6。

定义 5.1（[8]）。设 $\boldsymbol{x}$ 是 H^3中的一个光滑曲面，若 $\boldsymbol{x}$ 在任意一点附近都可局部参数化为围绕该点的等距圆的单参数族，则称其为极限圆曲面，即

$$\boldsymbol{x}(u,v)=\boldsymbol{a}_0(u)+v\boldsymbol{a}_1(u)+\frac{v^2}{2}(\boldsymbol{a}_0(u)+\boldsymbol{a}_2(u)),$$

其中（u，v）$\in I\times\mathbb{R}$。

我们可以证明，极限圆曲面是双曲广义有框架基曲面。

命题 **n** 5.2. 在上述记号下，设 $\boldsymbol{x}\colon I\times\mathbb{R}\to H^3$ 是由下式给出的曲率线曲面

$$\boldsymbol{x}(u,v)=\boldsymbol{a}_0(u)+v\boldsymbol{a}_1(u)+\frac{v^2}{2}(\boldsymbol{a}_0(u)+\boldsymbol{a}_2(u)).$$

那么 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$ 是一个双曲广义标架曲面，其中

$$\boldsymbol{\nu}_1(u,v)=\boldsymbol{a}_3(u),\ \boldsymbol{\nu}_2(u,v)=-\frac{v^2}{2}\boldsymbol{a}_0(u)-v\boldsymbol{a}_1(u)+\left(1-\frac{v^2}{2}\right)\boldsymbol{a}_2(u)$$

with

$$\alpha(u,v)=vh_1(u)-h_2(u)-vh_4(u),\ \beta(u,v)=\left(1+\frac{v^2}{2}\right)h_3(u)+vh_5(u)+\frac{v^2}{2}h_6(u)$$

以及基本不变量

$$\begin{aligned}
&a_1(u,v)=\left(1+\frac{v^2}{2}\right)h_3(u)+vh_5(u)+\frac{v^2}{2}h_6(u), && a_2(u,v)=0,\\
&b_1(u,v)=-vh_1(u)+h_2(u)+vh_4(u), && b_2(u,v)=0,\\
&c_1(u,v)=\left(\frac{v^2}{2}-1\right)h_1(u)-vh_2(u)-\frac{v^2}{2}h_4(u), && c_2(u,v)=-1,\\
&e_1(u,v)=\frac{v^2}{2}h_3(u)+vh_5(u)+\left(\frac{v^2}{2}-1\right)h_6(u), && e_2(u,v)=0,\\
&f_1(u,v)=vh_3(u)+h_5(u)+vh_6(u), && f_2(u,v)=0,\\
&g_1(u,v)=-\frac{v^2}{2}h_1(u)+vh_2(u)+\left(1+\frac{v^2}{2}\right)h_4(u), && g_2(u,v)=1.
\end{aligned}$$

推论5.3。由于 $a_2(u,v)=b_2(u,v)=0$，根据命题 3.7 (2)(ii)，我们知道，曲率线曲面是关于 v的双曲标架基曲线的单参数族。

曲率线曲面是直纹曲面的类似物。 [8] 中的作者研究了曲率线曲面的平坦性，并进一步对这些曲面进行了分类。利用双曲广义标架曲面的基本不变量，我们得出以下分类结果。

命题5.4。设 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$：$I\times\mathbb{R}\to H^3\times\Delta_5$ 是一个双曲广义标架曲面，其基本不变量为 $a_i,b_i,c_i,e_i,f_i,g_i(i=1,2)$，如定理 5.2 中所示。那么有以下结论。

(1) $\boldsymbol{x}$ 是曲率线平坦曲面，当且仅当对于所有 $(u,v)\in U$，$c_1(u,v)+g_1(u,v)=b_1(u,v)=0$。(2) $\boldsymbol{x}$ 是广义 horo 锥，当且仅当对于所有 $(u,v)\in U$，$c_1(u,v)=g_1(u,v)=b_1(u,v)=(v^2+2)a_1(u,v)-v^2e_1(u,v)-2vf_1(u,v)=0$。(3) $\boldsymbol{x}$ 是具有单顶点的 horo 锥，当且仅当对于所有 $(u,v)\in U$，$c_1(u,v)=g_1(u,v)=b_1(u,v)=(v^2+2)a_1(u,v)-v^2e_1(u,v)-2vf_1(u,v)=f_1(u,v)-v(a_1(u,v)-e_1(u,v))=0$ 且 $a_1(u,v)-e_1(u,v)\neq0$。(4) $\boldsymbol{x}$ 是具有两个顶点的 horo 锥，当且仅当对于所有 $(u,v)\in U$，$c_1(u,v)=g_1(u,v)=b_1(u,v)=(v^2+2)a_1(u,v)-v^2e_1(u,v)-2vf_1(u,v)=0$ 且 $f_1(u,v)-v(a_1(u,v)-e_1(u,v))=\lambda(a_1(u,v)-e_1(u,v))\neq0$，其中 $\lambda\in\mathbb{R}$。(5) $\boldsymbol{x}$ 是圆锥形 horosphere，当且仅当对于所有 $(u,v)\in U$，$c_1(u,v)=g_1(u,v)=b_1(u,v)=a_1(u,v)-e_1(u,v)=e_1(u,v)-vf_1(u,v)=0$ 且 $f_1(u,v)\neq0$。

证明。根据 [7, 8], 中类 horo 平坦曲面的结果，$\boldsymbol{x}$ 是曲率线平坦曲面，当且仅当 $h_2(u)=h_4(u)-h_1(u)=0$。当 $h_1(u)=h_2(u)=h_3(u)=h_4(u)=0$时，$\boldsymbol{x}$ 是广义 horo 锥。具有 $h_5(u)=0$ 和 $h_6(u)\neq0$ 的广义 horo 锥称为具有单顶点的 horo 锥。具有两个顶点的 horo 锥是满足 $h_5(u)\neq0$ 且 $h_5(u)=\lambda h_6(u)$的广义 horo 锥，其中 $\lambda\in\mathbb{R}$。如果 $h_1(u)=h_2(u)=h_3(u)=h_4(u)=h_6(u)=0$ 且 $h_5(u)\neq0$，则 $\boldsymbol{x}$ 称为圆锥形 horosphere。

经过计算，我们有 $c_1(u,v)+g_1(u,v)=h_4(u)-h_1(u)$，$b_1(u,v)-v(c_1(u,v)+g_1(u,v))=h_2(u)$,$a_1(u,v)-e_1(u,v)=h_3(u)+h_6(u)$，$f_1(u,v)-v(a_1(u,v)-e_1(u,v))=h_5(u)$ and $(v^2+2)a_1(u,v)-v^2e_1(u,v)-2vf_1(u,v)=2h_3(u)$。根据上述定义和讨论，我们可以得出结论（1）—（5）。 □

此外，我们还可以考察曲率线曲面的奇点。文献 [8] 已研究过极限圆曲面的交叉帽奇点。作为命题 3.16 的推论，我们得到如下结果。

推论 5.5. 设 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$: $U \to H^3 \times \Delta_5$ 是一个双曲广义标架曲面，其基本不变量为 $a_i, b_i, c_i, e_i, f_i, g_i (i = 1, 2)$，定义如定理 5.2。假设 $\boldsymbol{p} = (u_0, v_0)$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的一个奇点，也就是说， $a_1(u_0, v_0) = b_1(u_0, v_0) = 0$. 则

(1) $\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的交叉帽奇点，当且仅当 $(a_{1u}b_{1v} - a_{1v}b_{1u})(u_0, v_0) \neq 0$。(2) $\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的 S_1^+ 奇点，当且仅当 $(a_{1u}b_{1v} - a_{1v}b_{1u})(u_0, v_0) = 0$, $(c_1a_{1v} + a_{1u}, c_1b_{1v} + b_{1u})(u_0, v_0) \neq (0, 0)$, 且 det Hess $\varphi(u_0, v_0) < 0$。(3) $\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的 S_1^- 奇点，当且仅当 $(a_{1u}b_{1v} - a_{1v}b_{1u})(u_0, v_0) = 0$，且 det Hess $\varphi(u_0, v_0) > 0$。

参考文献

[1] L. Chen 和 S. Izumiya，半欧几里得空间中伪球面的 Legendrian 对偶曼荼罗，Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 85(4), 49–54 (2009)[2] B. Doˇgan Yazıcı、Z. I.sbilir 和 M. Tosun，奇异曲线的广义密切型直纹曲面，Math. Methods Appl. Sci. 46(8), 8532–8545 (2023).. [3] K. Eren、O. G. Yıldız 和 M. Akyiˇgit，与欧几里得三维空间中标架基曲线相关的管状曲面，Math. Methods Appl. Sci. 45(18), 12110–12118 (2022)[4] T. Fukunaga 和 M. Takahashi，欧几里得空间中的标架曲面，Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 50(1), 37–65 (2019)[5] T. Fukunaga 和 M. Takahashi，欧几里得三维空间中的标架曲面与标架曲线单参数族，J. Singul. 21, 30–49 (2020)[6] T. Fukunaga 和 M. Takahashi，欧几里得三维空间中平移曲面的奇点，Results Math. 77(2), Paper No. 89, 28 (2022)[7] S. Izumiya，双曲空间中的地平球几何，Adv. Stud. Pure Math. 55, 31–49 (2009)[8] S. Izumiya、K. Saji 和 M. Takahashi，双曲三维空间中的地平球平坦曲面，J. Math. Soc. Japan. 62(3), 789–849 (2010)[9] S. Izumiya 和 F. Tari，双曲空间中的超曲面向超地平球面和超平面的投影，Rev. Mat. Iberoam. 24(3), 895–920 (2008)[10] M. Li、D. Pei 和 M. Takahashi，洛伦兹-闵可夫斯基三维空间中的光锥标架曲面，J. Korean Math. Soc. 62(6), 1313–1333 (2025)[11] K. Saji，尖点 S_k 奇点的判据及其应用，J. G¨okova Geom. Topol. 4, 67–81 (2010)[12] K. Saji 和 K. Teramoto，双曲空间和德西特空间中平坦前沿尖点边上微分几何不变量的对偶性，Mediterr. J. Math. 17(2), Paper No. 42, 20 (2020)[13] M. Takahashi 和 H. Yu，关于欧几里得空间中的广义标架曲面，AIMS Math. 9(7), 17716–17742 (2024)[14] H. Whitney，光滑函数集的一般类型奇点，Duke Math. J. 10, 161–172 (1943).[15] O. G. Yıldız，欧几里得三维空间中标架曲线的演化，Math. Methods Appl. Sci. 45(18), 12158–12166 (2022).[16] O. G. Yıldız、M. Akyiˇgit 和 M. Tosun，欧几里得空间中标架基曲线的轨迹直纹曲面，Math. Methods Appl. Sci. 44(9), 7463–7470 (2021)[17] H. Yu 和 L. Chen，从 Legendrian 对偶观点看双曲三维空间中标架曲线的焦曲面与渐屈线，Mediterr. J. Math. 22(7), Paper No. 188 (2025)[18] H. Yu、L. Chen 和 Y. Wang，从对偶观点看三维球面中尖点边平坦对偶曲面的奇点，Mediterr. J. Math. 21(3), Paper No. 103, 17 (2024)[19] A. Zhou、K. Yao 和 D. Pei，双曲三维空间中的 k型双曲标架斜螺线，Filomat. 38(11), 3839–3850 (2024)

[20] A. Zhou 和 D. Pei，双曲三维空间中的双曲标架曲面，预印本。（2025）

Donghe Pei 数学与统计学院 东北师
范大学 长春 130024 中华人民共和国
peidh340@nenu.edu.cn

Masatomo Takahashi 室兰工
业大学 室兰 0508585 日本
masato
mo@muroran-it.ac.jp

Anjie Zhou 数学与统计学院 东北师
范大学 长春 130024 中华人民共和国
zhouaj882@nenu.edu.cn