arXiv:2602.01707v1 [math.NA] 2 Feb 2026

保曲率分形插值函数：一种混合几何方法

K. R. Tyada[2][0000-0002-3780-0357]

印度安得拉邦普塔帕蒂 Prasanthi Nilayam，斯里萨蒂亚赛高等教育学院数学与计算机科学系 - 515134
kurmaraotyada@sssihl.edu.in

摘要。 由迭代函数系统（IFS）生成的分形插值函数（FIF）为建模自相似和不规则数据提供了强有力的框架，但传统构造往往忽视曲率等几何保真度。本文基于经典三次样条插值函数，提出一种保曲率的分形插值函数变体。我们定义了一种曲率感知迭代函数系统（IFS），并通过基于惩罚项的方法优化其参数，以尽量减小其曲率与经典样条曲率之间的偏差。本文推导了插值和曲率近似的理论条件。我们通过多个示例比较了所提出的分形插值函数与经典三次样条及离散数据曲率的曲率。该方法既能实现数据插值，又能保持形状保真度，相比标准样条能更准确地保留曲率。该方法有望应用于几何建模、计算机图形学和科学数据插值。

关键词：分形插值、曲率保持、样条、迭代函数系统、保形插值、数值优化

1 引言

插值方案在数值分析、生物技术、计算机设计、图形学和科学计算等诸多领域发挥着不可或缺的作用，尤其适用于离散数据的连续可视化。任何插值函数都应具备一项理想特性，即能够保留数据中固有的关键几何特征。经典的保形插值技术可保持正性、单调性或凸性，在文献中已有充分研究（例如参见 [1]-[7]）。这类插值函数通常具有分段光滑或全局光滑的导数。然而，这些方法依赖于导数正则性的假设，因此在处理具有不规则、振荡或分形行为的数据时适用性有限，因为这类数据缺乏高阶光滑性。经典方法（如三次样条）能够保证全局光滑性和连续性，但在建模形状变化显著的数据时，往往无法捕捉曲率等几何不变量

此外，对于给定数据集，经典多项式样条插值函数是唯一的，且往往缺乏保留更精细几何特征的灵活性。在这种情况下，分形插值成为一种更有效的建模工具。Barnsley（[8], [9]）提出了分形插值，它提供了一种递归框架，能够捕捉自仿射结构和不规则结构。尽管标准分形插值函数具有灵活性，但它们更注重自相似性，而非几何保真度。

分形插值函数（FIFs）最初由 Barnsley 提出，是作为迭代函数系统（IFS）的吸引子构造而成，并以其在适当函数空间上对 Read-Bajraktarević 算子的不变性为特征。它们为插值提供了一种灵活的递归机制，具有内在的自相似性。尽管早期研究侧重于连续性和逼近精度，近期研究已将分形插值函数扩展至保形变体。Barnsley和Harrington [10]通过在特定边界条件下构造C^k-连续样条分形插值函数，拓展了这一理论。后续研究将基于样条的分形插值函数的理论框架扩展到了更一般的情形；与此同时，Chand和Navascués [11], [12]研究了具有 Hermite型边界条件的 α-分形多项式样条。多年来，为了增强形状控制、光滑性和局部适应性，人们提出了许多变体，例如有理分形插值函数、Hermite分形插值函数和 α-分形函数（例如参见 [13]-[21]）。

然而，传统分形插值函数要么用于数据拟合，要么用于再现视觉上的自相似性，并未明确考虑曲率保真度，因此仍存在一个显著的缺口。为了在对几何形状敏感的应用中使用分形插值函数，亟需开发能够使插值函数的曲率与底层模型的曲率明确保持一致的方法。我们提出的框架朝这一方向迈出了重要一步：通过引入惩罚泛函，最小化分形函数的曲率与参考样条的曲率之间的偏差。由此，我们开发出保曲率三次分形插值函数（CFIF），既能保持数据值，也能保留底层几何结构。通过将曲率对齐嵌入插值过程中，我们的方法提高了分形模型的几何精度，使其能够有效应用于形状细节至关重要的场景。

所提出的 CFIF 框架融合了经-典样条的平滑性与规律性，以及分形扰动的适应性，为具备几何感知能力的建模提供了强大工具。这对于计算机辅助设计/计算机辅助制造、生物医学形状重建和图像边界建模等领域尤为有益，因为曲率蕴含着重要的形状信息。我们的递归构造采用缩放参数 λ_i，并通过曲率约束惩罚策略进行优化，以确保插值函数不仅与数据相匹配，还能紧密遵循参考样条的曲率轮廓。此外，该方法还可扩展至高维插值、参数曲线和约束建模场景。曲率保持分形插值能够在保留全局形状属性的同时提供局部几何控制，从而为理论插值和实际建模带来重大进展；未来研究方向包括自适应优化、机器学习分形结构以及

建模，未来方向包括自适应优化、机器学习分形结构和随机推广。

我们首先在第2节介绍构造分形插值函数的一般方法。第3节在基于惩罚的优化框架内提出保曲率三次分形插值函数（CFIFs）。第4节给出理论分析，包括收敛性质、为保证曲率保持而推导缩放因子的界，以及研究缩放参数发生扰动时的曲率稳定性。第5节在多个数据集上进行全面的数值实验，展示所提方法的实际有效性。本文最后总结研究发现，并指出未来工作的潜在方向。

2 分形插值函数的一般框架

我们从分形插值的基本构造开始。映射族 $\mathcal{I} = \{X, w_t\}_{n=1}^{N}$ 构成一个迭代函数系统（IFS）。当每个映射 w_i 都表现出压缩行为时，系统 $\mathcal{I}$ 是双曲的。

设 $\Im := \{1, 2, \ldots, M\}$ 且 $\Im^* := \{1, 2, \ldots, M-1\}$。考虑由点 $x_1 < x_2 < \cdots < x_M$ 划分的紧区间$I = [u_1, u_M]$，以及数据点$\{(x_t, u_t) \in I \times K : t \in \Im_M\}$，其中 $K \subset \mathbb{R}$ 是紧的。对每个子区间 $I_s = [x_s, x_{s+1}]$（其中 $s \in \Im^*$），引入满足如下边界条件的压缩同胚 $L_s : I \to I_s$:

$$L_s(x_1) = x_s,\ L_s(x_M) = x_{s+1},\ \text{for } s \in \Im^*, \tag{1}$$

$$|L_s(x) - L_s(x^*)| \le l_s|x - x^*|,\ \text{for all } x, x^* \in I,\ \text{with } 0 < l_s < 1. \tag{2}$$

定义空间 $C = I \times K$，并对每个指标 i，考虑满足以下条件的连续函数F_i：$C \to K$

$$F_s(x_1, u_1) = u_s,\ F_s(x_M, u_M) = u_{s+1}, \tag{3}$$

$$|F_s(x, u) - F_s(x, u^*)| \le |\lambda_s||u - u^*|,\ \text{for all } x \in I,\ u, u^* \in K,\ |\lambda_s| < 1. \tag{4}$$

映射 w_s 随后构造如下：$C \to I_s \times K$

$$w_s(x, u) = (L_s(x), F_s(x, u)),\ \text{for } s \in \Im^*.$$

命题 1。*(Barnsley [8])* 迭代函数系统 $\{C, w_i : s \in \Im^*\}$ 存在唯一的吸引子 G^*，它表示一个连续插值函数的图像ψ^*：$I \to K$ 该函数对所有数据点 $\psi^*(x_t) = u_u$ 进行插值，其中 $t \in \Im$。

该插值函数 ψ^*称为分形插值函数（FIF），它源自 Read–Bajraktarević算子的不动点。为推导其函数表示，考虑空间:

$$\mathcal{G} = \{g : I \to \mathbb{R} \mid g \text{ is continuous}, g(x_1) = u_1,\ g(x_M) = u_M\}.$$

赋予一致范数度量 ν 后，（$\mathcal{G}, \nu$）构成一个完备度量空间。Read-Bajraktarević算子 Υ： $\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ 规定为

$$\Upsilon g(x) = F_s\left(L_s^{-1}(x),\ g\left(L_s^{-1}(x)\right)\right),\ x \in I_s = [x_s, x_{s+1}],\ s \in \Im^*. \tag{5}$$

算子 Υ 在子区间和内节点处保持连续性，同时满足压缩性质：

$$\nu(\Upsilon f, \Upsilon g) = \|\Upsilon f - \Upsilon g\|_\infty \le |\lambda|_1 \|f - g\|_\infty, \tag{6}$$

其中 $|\lambda|_1 = \max\{|\lambda_s| : s \in \Im^*\} < 1$。根据巴拿赫压缩原理，可确保存在唯一不动点 $\psi^* \in \mathcal{G}$，其由以下自参照方程刻画：

$$\Upsilon(\psi^*) = \psi^* \Leftrightarrow \psi^*(x) = F_s\left(L_s^{-1}(x),\ \psi^*\left(L_s^{-1}(x)\right)\right),\ x \in I_s,\ s \in \Im^*.$$

一种特别有用的特例采用仿射映射：

$$L_s(x) = a_s x + b_s,\ F_s(x,u) = \lambda_s u + H_s(x),\ s \in \Im^*. \tag{7}$$

此处， $H_s : I \to \mathbb{R}$ 表示满足插值约束的连续函数，而参数 λ_i（共同构成尺度向量 λ）决定了插值函数的分形特征。这些缩放因子带来了传统插值方法之外的几何灵活性。

基于样条的分形插值函数由 Barnsley 和 Harrington [10]，开创，随后 Chand 等人 [16] 将其推广为有理样条分形插值函数，从而拓展了构造光滑且保形的分形插值函数的框架。

定理*1.* 设 $\{(x_t, u_t) : t \in \Im\}$ 是一组满足 $x_1 < x_2 < \cdots < x_M$ 的数据。考虑由 $L_s(x) = a_s x + b_s$ 定义的仿射变换，其中 $a_s = \frac{x_{s+1}-x_s}{x_M - x_1}$ $b_s = \frac{x_M x_s - x_1 x_{s+1}}{x_M - x_1}$ $F_s\ x\ u\ = \lambda_s u +,,$ 且垂 $H_s\ x$ $p \in \mathbb{N}$ $|\lambda_s| < a_s^p$ 直映射为 *(,) ( )*。对于某个，假设缩放参数对所有 s 均满足条件。定义 $F(m)_s(x,u)$ $= {}^{\lambda_s f^{(m)} + H_s^{(m)}(x)}\, a_s^m,\ m \in \mathbb{N}_p,$ 以及 $f_1^{(m)} = {}^{H_1^{(m)}}(x_1)\, a_1^m - \lambda_1,\ f(m)_n = H_{n-1}^{(m)}(x_M)\, a_M^m - \lambda_M$。假设以下匹配条件成立： $F(m)_s(x_M, u_M^{(m)}) = F(m)_{s+1}(x_1, u_1^{(m)})$，其中 $i \in \Im^*,\ m \in \mathbb{N}_p$。那么，*IFS* $\{I \times K,\ w_s(x,f) = (L_s(x), F_s(x,u)\}_{s \in \Im^*}$ 确定一个有理分形插值函数 $F \in C^p[x_1, x_M]$，使得 $F(L_s(x)) = \lambda_s f + H_s(x)$，且 m^{th} 导数 $F^{(m)}$ 是相对于 *IFS* $\{L_s(x)\ F_s^{(m)}(x,u)\}_{i \in \Im^*}$ 的分形插值函数，对每个 $m \in \mathbb{N}_p$ 均成立。

3 保曲率三次分形插值函数（CP-CFIFs）的构造

本节介绍一种保持曲率的分形插值方案，该方案以经典三次样条为基础，并融入递归自仿结构。该构造对传统 IFS 进行修改，使其与给定参考样条的曲率保持一致。

3.1 三次 FIF 的一般框架

本节基于定理2.1，构造一个 $\mathcal{C}^1$ 连续的三次 FIF（CFIF）。给定插值数据 $\{(x_t, u_t) : t \in \Im\}$，其中序列 $x_1 < x_2 < \cdots < x_M$ 严格单调，我们定义 IFS $\{I \times K; w_s(x, F) = (L_s(x)\ F_s(x, F)) : s \in \Im^*\}$。仿射映射的形式为 $L_s(x) = a_s x + b_s$，函数分量则由下式确定：

$$F(L_s(x)) = \lambda_s F(x) + U_i(1-\theta)^3 + V_i\theta(1-\theta)^2 + W_i\theta^2(1-\theta) + X_i\theta^3, \quad (8)$$

其中 $\theta = \frac{x-x_1}{\ell}$，$\ell = x_M - x_1$ 和缩放参数满足 $|\lambda_s| < a_s$ for$s \in \Im^*$。

通过条件 $F_s(x_1, u_1) = u_i$, $F_s(x_M, u_M) = u_{s+1}$, $F_{(1)s}(x_1, d_1) = d_s$ 以及 $F_{(1)s}(x_M, d_M) = d_{s+1}$ 施加 $\mathcal{C}^1$ 连续性，可确保 IFS 吸引子构成一个 $\mathcal{C}^1$-连续的 CFIF 的图像。这些条件给出系数：

$$U_i = y_i - \lambda_i y_1,\ V_i = 3(y_i - \lambda_i y_1) + l(a_i d_i - \lambda_i d_1),$$
$$W_i = 3(y_{i+1} - \lambda_i y_N) - l(a_i d_{i+1} - \lambda_i d_N),\ X_i = y_{i+1} - \lambda_i y_N.$$

将这些系数代入公式（8），即可得到所需的 $\mathcal{C}^1$-连续 CFIF。

注*1*。若 $\lambda_s = 0$ for $s \in \Im^*$，则 CFIF F 退化为传统三次插值函数 $S(x)$。经过参数变换 $z = \frac{x-x_s}{x_{s+1}-x_s}$后，该经典样条可写为：

$$S(x) = \bar{U}_i(1-z)^3 + \bar{V}_i z(1-z)^2 + \bar{W}_i z^2(1-z) + \bar{X}_i z^3, \quad (9)$$

其中，系数可简化为 $U_i = y_i$, $V_i = 3y_i + \ell(a_i d_i)$, $W_i = 3y_{i+1} - \ell(a_i d_{i+1})$ 和 $X_i = y_{i+1}$。

3.2 保曲率三次分形插值函数

为了解决在保留分形插值自仿射灵活性的同时保持曲率这一难题，我们提出了一种改进的保曲率分形插值函数构造方法。该方法在经典迭代函数系框架中加入传统三次样条插值函数以及经过精心控制的递归扰动。其目标是定义一种分形插值函数，使其不仅能够插值给定数据，还能逼近三次样条的曲率。为此，我们通过基于惩罚项的泛函优化局部缩放参数，该泛函用于度量曲率偏差。随后，我们将详细介绍保曲率分形插值函数的递归构造，推导满足插值条件和曲率一致性的必要条件，并介绍用于确保几何保真度的优化框架。

考虑数据 $\{(x_s, y_s)\}_{s\in\Im^*}$，其中序列$x_s$严格单调递增。定义仿射压缩映射 $L_s : [x_1, x_M] \to [x_s, x_{s+1}]$ 如下：

$$L_s(x) = a_s x + b_s,\ \text{where } a_s = \frac{x_{s+1} - x_s}{x_M - x_1},\ b_s = x_s - a_s x_1.$$

记经典样条 $S(x)$，修正分形插值函数 $F(x)$通过以下递归关系构造：

$$F(L_s(x)) = \lambda_s F(x) + S(x) + \delta_s(x), \tag{10}$$

其中 $\lambda_s \in (-1,1)$ 是局部垂直缩放参数， $\delta_s(x)$ 是光滑修正函数。为确保 F 满足插值条件 $F(x_t) = u_t$，定义修正函数 $\delta_s(x)$，使其与参考样条保持一致。一个自然的选择是

$$\delta_s(x) = (1 - \lambda_s)\left[S(x) - L_s^{\sharp}(x)\right],$$

其中 $L_s^{\sharp}(x)$ 是经过 (x_s, u_s) 和 (x_{s+1}, y_{s+1}) 的线性插值。该公式保证 F 对给定数据进行插值，同时保留样条 S 的局部几何特征。

注 *2.* 由方程 (10) 给出的 F，可得 $F(x_t) = u_t, \forall t \in \Im$。

3.3 基于惩罚项的优化框架

为实现曲率保持，我们定义一个惩罚泛函，用于量化分形插值函数 F 与参考样条 S 之间的曲率偏差：

$$J(\lambda) = \int_{x_1}^{x_N} \left(\kappa_F(x) - \kappa_S(x)\right)^2 \, dx,$$

其中， $\kappa_F(x)$ 和 $\kappa_S(x)$ 分别表示 F 和 S 的曲率。优化问题是在缩放参数约束下最小化泛函 $J(\lambda)$：$\min_{\lambda_i \in (-1,1)} J(\lambda)$。这将产生一个非线性约束优化问题，可通过数值方法求解。

4 理论分析

现在，我们为上一节定义的保曲率分形插值函数建立严格分析所需的理论框架。我们将证明其插值性质，在适当条件下证明分形插值函数收敛到参考三次样条，推导以缩放因子 λ_i 表示的曲率偏差界，并分析曲率近似的数值稳定性。首先，我们证明所提出的分形插值函数 F 会一致收敛到经典插值函数 S，当缩放参数 $\lambda_i \to 0$ 时。这一关键的一致性性质确保了分形模型是对经典方案的推广。

定理*2.* 设 $F(x)$ 是由 $F(L_s(x)) = \lambda_s F(x) + S(x) + \delta_s(x)$ 定义的分形函数，其中 $\lambda_s \in (-1, 1)$，且 $\delta_s(x)$ 满足 $\delta_s(x) = (1-\lambda_s)[S(x) - L_s^{\sharp}(x)]$。那么，当 $\max_s |\lambda_s| \to 0$ 时，有 $\|F - S\|_\infty \to 0$，即 F 一致收敛于 S。

证明。 定义作用于 Banach空间 $C(I)$ 上的算子 Υ^*：

$$(\Upsilon^* f)(x) = \lambda_s f(L_s^{-1}(x)) + S(L_s^{-1}(x)) + \delta_s(L_s^{-1}(x)), x \in I_s := [x_s, x_{s+1}].$$

由于 $|\lambda_s| < 1$, Υ^* 是压缩映射，因此存在唯一的不动点 $F \in C(I)$。注意，当 $\lambda_s = 0$ 时， Υ^* 在 S 上变为恒等算子，因为此时 $\delta_s(x) = S(x) - L_s^{\natural}(x)$ 且 $F = S$。

设 $\epsilon > 0$。由于 $S \in C(I)$，它是一致连续且有界的。因为 Υ^* 是压缩映射，压缩因子为 $\|\lambda\|_\infty$，根据 Banach不动点定理可得：

$$\|F - S\|_\infty \leq \frac{\|\lambda\|_\infty}{1 - \|\lambda\|_\infty} \|S + \delta - S\|_\infty = \frac{\|\lambda\|_\infty}{1 - \|\lambda\|_\infty} \|\delta\|_\infty.$$

由于当 $\|\lambda\|_\infty \to 0$ 时 $\|\delta\|_\infty \to 0$ ，我们得出 $\|F - S\|_\infty \to 0$。

现在我们给出曲率偏差的一个简化理论界。接下来的定理阐明了缩放参数对分形函数曲率行为的直接影响。

定理*3*（曲率约束缩放因子界）。设 $F(x)$ 是由递归关系 $F(L_s(x)) = \lambda_s F(x) + S(x)$ 定义的三次连续分形插值函数，其中 $L_s(x) = a_s x + b_s$，且 $|a_s| < 1$，以及 $S(x) \in C^2([x_1, x_M])$。假设 S 的导数有界，即对所有 $x \in [x_1, x_M]$，均有 $|S'(x)| \leq K$，$|S''(x)| \leq C$。那么，为使 *CFIF* 的曲率保持接近样条的曲率，即 $|\kappa_F(x) - \kappa_S(x)| \leq \varepsilon$，一个充分条件是：

$$|\lambda_s| \leq \min \left\{ a_s, \frac{3C}{\varepsilon(1 + K^2)^{3/2}}, \frac{\varepsilon \cdot (1 + K^2)^{3/2}}{\|F''(x)\|_\infty} \right\}, \ \forall s,$$

其中 $\|F''(x)\|_\infty$ = 上确界$_{x \in [x_1, x_M]} |F''(x)|$。

证明。 令分形插值函数 $F(x)$ 通过以下函数方程递归定义：

$$F(L_s(x)) = \lambda_s F(x) + S(x) + \delta_s(x), \text{ with } \delta_s(x) = (1 - \lambda_s)[S(x) - L_s^{\natural}(x)],$$

其中， $L_s(x) = a_s x + b_s$ 是一个仿射映射，满足 $L_s(x_1) = x_s$、 $L_s(x_M) = x_{s+1}$，而 $L_s^{\natural}(x)$ 是连接 (x_s, u_s) 和 (x_{s+1}, u_{s+1}) 的线性插值。函数 $S(x)$ 表示经典三次样条插值函数。

因此，分形插值函数 F 与样条S 之间的曲率差为：

$$|\kappa_F(x) - \kappa_S(x)| = \left| \frac{|F''(x)|}{(1 + (F'(x))^2)^{3/2}} - \frac{|S''(x)|}{(1 + (S'(x))^2)^{3/2}} \right|.$$

利用三角不等式，并假设当 λ_s较小时， $|F'(x) - S'(x)|$与 $|F''(x) - S''(x)|$ 均较小，我们近似得到：

$$\kappa_F(x) - \kappa_S(x)| \lesssim \frac{|F''(x) - S''(x)|}{(1 + K^2)^{3/2}},$$

其中 $K = \|S'\|_\infty$。为确保 $|\kappa_F(x) - \kappa_S(x)| < \varepsilon$，只需有 $\|F''(x) - S''(x)\|_\infty < \varepsilon(1+K^2)^{3/2}$。

根据 $F(x)$ 的递归结构，对函数方程求两次导数可得

$$F''(L_s(x))a_i^2 = \lambda_s F''(x) + (2-\lambda_s)S''(x).$$

因此，

$$F''(x) - S''(x) = \frac{1}{\lambda_s}\left(F''(L_s(x))a_s^2 - 2S''(x)\right).$$

取范数，并假设 $\|F''\|_\infty \approx \|S''\|_\infty = C$ 和 $a_s \le 1$，可得：

$$\|F''(x) - S''(x)\|_\infty \le \frac{a_s^2 C + 2C}{|\lambda_i|} \le \frac{3C}{|\lambda_s|}.$$

代入曲率条件后，得到

$$\frac{3C}{|\lambda_s|} < \varepsilon(1+K^2)^{3/2} \;\Rightarrow\; |\lambda_s| < \frac{3C}{\varepsilon(1+K^2)^{3/2}}.$$

假设扰动 $\delta_s(x)$ 很小（当 λ_s 接近 1 时），我们将 $F(x)$ 建模为 $S(x)$ 的一阶扰动，即 $F(x) \approx S(x) + \lambda_s H(x)$，其中 $H(x)$ 是某个辅助函数。

这意味着 $F'(x) \approx S'(x) + \lambda_s H'(x)$ $F''(x) \approx S''(x) + \lambda_s H''(x)$。因此，曲率偏差近似为：

$$|\kappa_F(x) - \kappa_S(x)| = \left|\frac{|F''(x)|}{(1+F'(x)^2)^{3/2}} - \frac{|S''(x)|}{(1+S'(x)^2)^{3/2}}\right|.$$

假设 λ_s 足够小，使得 $F'(x) \approx S'(x)$，则分母可从下方界定为：

$$(1+F'(x)^2)^{3/2} \ge (1+\|S'\|_\infty^2)^{3/2} =: (1+K^2)^{3/2}.$$

对于分子，我们估计：

$$|F''(x) - S''(x)| \le |\lambda_s| \cdot \|H''\|_\infty \approx |\lambda_s| \cdot \|S''\|_\infty =: |\lambda_s| C.$$

综合这些结果，我们得到更紧的曲率界 $|\kappa_F(x) - \kappa_S(x)| \le \frac{|\lambda_s| C}{(1+K^2)^{3/2}}$。施加约束 $|\kappa_F - \kappa_S| < \varepsilon$ 可得 $|\lambda_i| < \frac{\varepsilon}{C}(1+K^2)^{3/2}$。

4.1 稳定性分析

任何插值方案的一个关键性质是其对参数扰动的稳定性。以下定理证明，所提出的三次分形插值函数（CFIF）的曲率在垂直缩放因子发生微小变化时是稳定的。

定理4（曲率稳定性）。设 F 与 F 为定义在区间 $I = [x_1, x_N]$上的两个三次分形插值函数，由迭代函数系统映射生成：

$$F(L_s(x)) = \lambda_s F(x) + P_s(x), \quad \bar{F}(L_s(x)) = \bar{\lambda}_s \bar{F}(x) + P_s(x),$$

对于 $s \in \Im^*$，其中 $|\lambda_s|$，$|\lambda_s| < 1$，且 P_s（x）是满足端点条件的三次多项式。令 κ_F和 $\kappa_{\bar{F}}$分别表示 F和 F 的曲率。那么，对于足够小的扰动 $\|\lambda-\lambda\|_\infty = \max_s |\lambda_s-\lambda_s|$，存在常数 C_1，$C_2 > 0$，使得：

$$|\kappa_F(x) - \kappa_{\bar{F}}(x)| \le C_1\|\bar{\lambda} - \lambda\|_\infty + C_2\|\bar{\lambda} - \lambda\|_\infty^2, \quad \forall x \in I.$$

证明。令 $e(x) = F(x) - F(x)$ 表示两个插值函数之差。根据迭代函数系统方程，e 在一个子区间上的取值满足：

$$e(L_s(x)) = F(L_s(x)) - \bar{F}(L_s(x)) = \lambda_s F(x) + P_s(x) - \left(\bar{\lambda}_s \bar{F}(x) + P_s(x)\right).$$

化简并加上再减去 $\lambda_s F(x)$，得到：

$$e(L_s(x)) = \lambda_s(F(x) - \bar{F}(x)) + (\lambda_s - \bar{\lambda}_s)\bar{F}(x) = \lambda_s e(x) - \delta\lambda_s \cdot \bar{F}(x),$$

其中 $\delta\lambda_s = \lambda_s - \lambda_s$。关于 $e(x)$ 的这个函数方程本身就是一个分形函数。由于 $\max_s |\lambda_s| \le \alpha < 1$ 和 F 在紧区间 I 上有界，根据迭代函数系统的性质可得：

$$\|e\|_\infty = \mathcal{O}(\|\bar{\lambda} - \lambda\|_\infty).$$

通过对迭代函数系统关系求导，并对 $e'(x)$ 和 $e''(x)$ 应用类似推理，我们得到导数的相应界：

$$\|e'\|_\infty = \mathcal{O}(\|\bar{\lambda} - \lambda\|_\infty), \quad \|e''\|_\infty = \mathcal{O}(\|\bar{\lambda} - \lambda\|_\infty).$$

曲率由 $\kappa_F(x) = \frac{F''}{(x)(1+(F'(x))^2)^{3/2}}$ 给出。考虑该差分：

$$|\kappa_F(x) - \kappa_{\bar{F}}(x)| = \left|\frac{F''}{(1+(F')^2)^{3/2}} - \frac{\bar{F}''}{(1+(\bar{F}')^2)^{3/2}}\right|.$$

通过加上并减去 $\frac{\bar{F}''}{(1+(F')^2)^{3/2}}$，我们可以拆分该差分：

$$|\kappa_F - \kappa_{\bar{F}}| \le \underbrace{\frac{|F'' - \bar{F}''|}{(1+(F')^2)^{3/2}}}_{T_1} + \underbrace{|\bar{F}''|\left|\frac{1}{(1+(F')^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1+(\bar{F}')^2)^{3/2}}\right|}_{T_2}.$$

由于 F' 远离无穷大，因此 T_1 中的分母有下界，这意味着 $T_1 = \mathcal{O}(\|e''\|_\infty) = \mathcal{O}(\|\lambda - \lambda\|_\infty)$。对于 T_2，函数 $\phi(a) =(1 + a^2)^{-3/2}$ 连续可微，且 $\bar{F}''$ 有界。根据中值定理，$T_2 = \mathcal{O}(|F' - F'|) = \mathcal{O}(\|e'\|_\infty) = \mathcal{O}(\|\lambda - \lambda\|_\infty)$。在考察函数误差与其导数误差之间的相互作用时，对 T_2 进行更细致的展开，会产生潜在的二次项。综合这些估计即可得到所需结果。

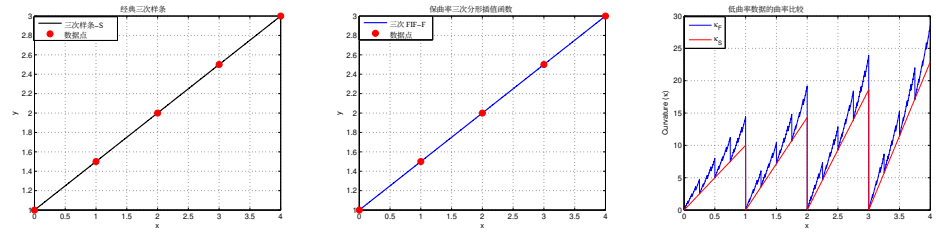
这一结果正式证实，CFIF 的曲率以 Lipschitz连续的方式依赖于垂直缩放参数。因此，所提出的方法是稳定的：无论缩放因子的微小扰动来自优化、数值计算还是噪声，都会使最终几何形状仅发生相应比例的微小变化。

5 数值结果

我们针对三个具有不同几何复杂度的数据集进行了数值实验。对于每种情况，我们比较经典三次样条插值函数 $S(x)$ 与所提出的分形插值函数 $F(x)$ 的曲率。我们计算曲率误差（定义为 $|\kappa_F(x) - \kappa_S(x)|$），以及 $F(x)$ 与 $S(x)$ 之间的均方根误差（RMSE），并根据定理3中得到的相应缩放因子 λ_s 进行汇总：

5.1 测试案例1：低曲率数据

我们先从一个近似线性的数据集开始： $\{(0, 1), (1, 1.5), (2, 2), (3, 2.5), (4, 3)\}$，它代表一种低曲率情形。在这种情况下，很容易验证最大斜率为 $K = 0.5$，且二阶导数为零，即 $M = 0$。因此，根据定理3，可以选择缩放因子使得 $\lambda_i < 1$。由于数据段是分段线性的，曲率恒为零，因此对于任意$\lambda_i < 1$，曲率约束都会自动满足。图1展示了经典三次样条、相应的保曲率三次分形插值函数，以及这两个插值函数的曲率轮廓图。正如预期，在这一低复杂度情形下，曲率偏差可以忽略不计，证明了所提方法的有效性。



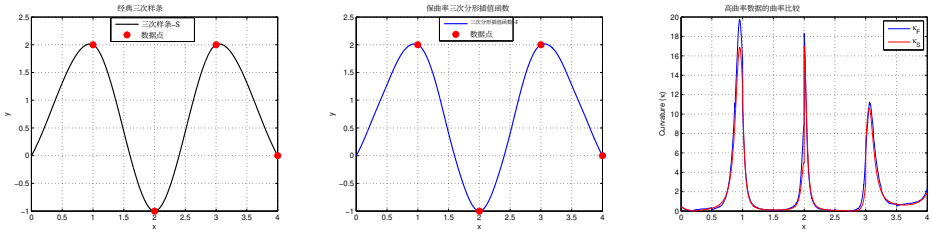
(a) 经典三次样条 S (b) 三次分形插值函数 F (c) 曲率比较

图 1：低曲率数据的曲率比较和误差

5.2 测试用例 2：高曲率数据

现在，我们考察一个呈现急剧几何弯折的数据集： $\{(0, 0), (1, 2), (2, -1), (3, 2), (4, 0)\}$ 该数据集旨在评估斜率快速

变化时的曲率保真度。在这种情况下，曲率偏差显著增大，尤其是在梯度较大的区域。通过直接分析可得，$K \approx 3.587$ 为最大斜率，$M \approx 14.571$ 约为二阶导数的最大值。根据定理3，缩放因子必须满足 $\lambda_i < 0.303$ ，以确保曲率偏差保持在可接受范围内。图2展示了经典三次样条、保曲率分形插值函数，以及两者曲率分布的对比。



（a）经典三次样条 S (b) 三次分形插值函数 F (c) 曲率比较

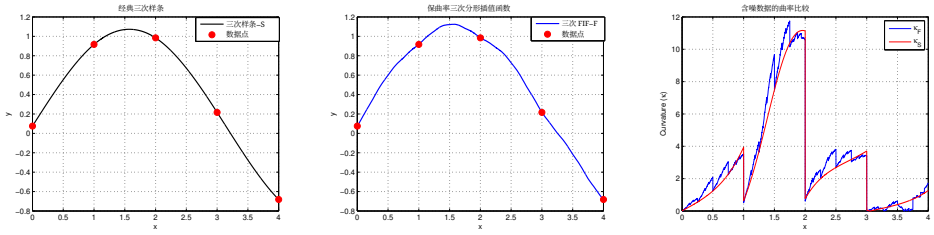
图 2：高曲率数据的曲率比较与误差

5.3 测试案例 3：噪声数据

最后，我们考虑一个通过扰动正弦函数生成的含噪数据集：$y_i = \sin(x_i) + \varepsilon_i$，$\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 0.1)$，在均匀网格上采样。我们取 $\epsilon_i = 0.1$。此测试案例模拟了现实场景：原本平滑的数据受到随机测量噪声的干扰。可以直接观察到，最大斜率约为 $K \approx 1.310$ ，估计的最大二阶导数为$M \approx 2.559$。根据定理3，缩放因子应满足约束 $\lambda_i < 0.149$ ，以确保曲率误差保持有界。图3展示了经典三次样条、保曲率分形插值函数，以及二者曲率分布的对比。

表1中的这些结果表明，保曲率分形插值函数在低曲率情形下表现良好，并且在存在噪声或急剧变化时，比经典三次样条具有更高的保真度。

我们进行了计时实验，在所有数据集上将我们的保曲率三次分形插值函数与经典插值方法（线性、三次样条和分段三次 Hermite 插值多项式）进行了比较。表2显示了不同评估点数量下的平均执行时间。结果表明，与三次样条相比，计算开销约为 200–250×，且在各数据集上保持一致。这一成本源于迭代分形细化和曲率优化。然而，绝对执行时间仍具有实用性（低于一秒），而鉴于前文所示的优越曲率保持性能，这种权衡是合理的。计算复杂度呈现出近似线性标度（对于低曲率数据为 $O(n^{0.16})$），而



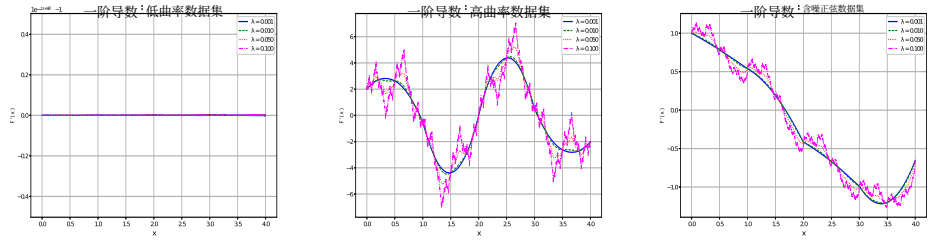
（a）经典三次样条 S (b) 三次 FIF F (c) 曲率比较

图 3：含噪数据的曲率比较与误差

经典方法则表现出近似恒定的时间复杂度。我们的三次 FIF 框架为实现几何保真度提供了一种基础方法。尽管有理分形插值等高级方案 [14]-[17] 可提供额外的形状控制，但它们会增加参数复杂度和计算成本。我们的方法在数学可处理性与曲率保持保证之间实现了平衡。未来的工作包括扩展至有理分形方案和更高维的建模，这将进一步阐明模型复杂度与几何保真度之间的权衡。

表1：不同数据集的均方根误差和最大曲率误差

数据集类型	λ 值	均方根误差 $\|F - S\|$	最大曲率误差
低曲率	$[0.01,\ 0.011,\ 0.012,\ 0.013]$	4.4408×10^{-16}	5.7674
高曲率	$[0.01,\ 0.011,\ 0.012,\ 0.013]$	0.0390	3.9932
含噪数据	$[0.01,\ 0.011,\ \mathbf{0.012},\ 0.013]$	0.0060	2.1922



(a) CFIF 的一阶导数：低曲率数据 (b) CFIF 的一阶导数：低曲率数据 (c) CFIF 的一阶导数：低曲率数据

图4：参数敏感性分析，展示不同缩放因子下所有数据集的一阶导数 λ。

表2：计算性能比较（执行时间，单位：秒）

数据集	方法	10 个点	20 个点	50 个点	100 个点	200 个点	500 个点	
Low 曲率	线性	0.00021	0.00011	0.00012	0.00010	0.00011	0.00013	
	三次	0.00078	0.00024	0.00025	0.00023	0.00023	0.00023	
	分段二次 Hermite 插值多项式	0.00028	0.00026	0.00026	0.00025	0.00025	0.00026	
	FIF	**0.05463**	**0.05074**	**0.05117**	**0.05470**	**0.08347**	**0.09417**	
High 曲率	线性	0.00014	0.00010	0.00009	0.00010	0.00015	0.00011	
	三次	0.00026	0.00027	0.00023	0.00029	0.00023	0.00030	
	分段二次 Hermite 插值多项式	0.00033	0.00140	0.00027	0.00031	0.00026	0.00058	
	FIF	**0.05848**	**0.05235**	**0.05086**	**0.05411**	**0.05369**	**0.05389**	
含噪 Sine	线性	0.00012	0.00009	0.00009	0.00009	0.00010	0.00010	
	三次	0.00025	0.00022	0.00022	0.00022	0.00022	0.00023	
	分段二次 Hermite 插值多项式	0.00028	0.00061	0.00026	0.00025	0.00025	0.00026	
	FIF	**0.05410**	**0.05054**	**0.05100**	**0.05270**	**0.05324**	**0.05343**	

我们分析了垂直缩放因子 λ_i 对保曲率三次分形插值函数的影响。图 4 展示了所有数据集上 $\lambda \in [0.001, 0.1]$ 的一阶导数。结果表明，该方法具有可预测的敏感性：较小的 λ 值会产生近似经典插值的行为，而较大的值则会引入可控的分形振荡。该方法在 $\lambda \in [0.001, 0.1]$上均保持稳定，对大多数应用而言，在 $[0.01, 0.05]$ 中效果最佳。这种可控的敏感性确保了方法具有实用性，无需进行大量参数调优。

6 结论

我们提出了一种保曲率分形插值框架，将三次样条与分形扰动相结合。该方法构造的插值函数不仅经过数据点，还能与底层样条的曲率轮廓高度吻合。我们采用基于惩罚项的优化来最小化曲率偏差，从而确保该方法在平滑和曲率变化剧烈的数据集（即使存在噪声）上都具有较高的几何保真度。数值实验验证了该方法在保持曲率和插值精度方面的优异性能。未来的工作将把该方法扩展至有理分形插值函数或 Hermite 型分形插值函数，并推广至曲面插值和三维建模；在这些领域，曲率保持对于计算机辅助设计、生物医学建模和几何感知数据拟合等应用尤为重要。

参考文献

1. Fiorot, J. C., and Tabka, J.: 保形 $\mathcal{C}^2$ 三次多项式插值样条。计算数学 **57**195, 291—298 (1991) 2. Hussain, M. Z., Sarfraz, M., and Shaikh, T. S.: 保持正且凸数据形状的有理三次样条。《埃及信息学期刊》 **12**(3), 231—236 (2011)

3. Lamberti, P., and Manni, C.: 通过参数三次多项式实现保形 $\mathcal{C}^2$ 函数插值。《数值算法》 **28**, 229—254 (2001) 4. Sarfraz, M., Hussain, M. Z., Shaikh, T. S., and Iqbal, R.: 使用保形 $\mathcal{C}^2$ 有理样条进行数据可视化。第15届信息可视化国际会议（IV-11）论文集，第528—533页，伦敦，(2011) 5. Duan, Q., Wang, L., and Twizell, E. H.: 一种基于函数值并对插值曲线进行约束控制的新型 $\mathcal{C}^2$ 有理插值。《应用数学与计算》 **161**(1), 311—322 (2005) 6. Sarfraz, M., Hussain, M. Z., and Hussain, M.: 保形曲线插值。《国际计算数学杂志》 **89**(1), 35—53 (2012) 7. Greiner, H.: 关于利用具有指定形状的样条进行单变量数据插值与逼近的综述。《数学与计算机建模》 **15**(10), 97—108 (1991) 8. Barnsley, M. F.: 分形函数与插值。《构造逼近》**2**(4), 303—329 (1986) 9. Barnsley, M. F.: 《分形无处不在》。第2版。Morgan Kaufmann 出版社 (1993) 10. Barnsley, M. F., Harrington, A. N.: 分形插值函数微积分。《逼近理论杂志》。**57**(1), 14–34 (1989) 11. Chand, A. K. B., and Navascués, M. A.: 广义 Hermite 分形插值，《皇家科学院评论》，萨拉戈萨。**64**, 107—120 (2009) 12. Jha, S., Chand, A. K. B., and Navascués, M. A.: 采用可变缩放因子的保形分形函数逼近。《计算》 **58**(1), (2021) 13. Chand, A. K., Viswanathan, P.: 保持形状的有理三次样条分形插值函数。《应用数学与计算》。**251**, 278—292 (2015) 14. Navascués, M. A.: 分形逼近。《皇家科学院杂志》 **96**(1), 73—84 (2002) 15. Tyada, K. R., Chand, A. K. B., Sajid, M.: 保形有理三次三角分形插值函数。《数学与计算机仿真》**190**, 866–891 (2021) 16. Navascués, M. A., Chand, A. K. B., Veedu, V. P., and Sebastián, M. V.: 分形插值函数：简要综述。《应用数学》**5**(12), 1834–1841 (2014) 17. Viswanathan, P., Chand, A. K. B., and Navascués, M. A.: 保持基本形状的分形扰动：缩放因子的界。《数学分析与应用杂志》 **419**(2), 804—817 (2014) 18. Chand, A. K. B., Tyada, K. R.: 使用有理三次分形函数进行约束二维数据插值。数学分析及其应用新趋势国际会议论文集-ICRTMAA-14，第593–607页。Springer, 印度 (2015)。19. Chand, A. K. B., and Tyada, K. R.: 保持正性的有理三次三角分形插值函数。第一届数学与计算国际会议论文集：ICMC-15，第187–202页。Sringer India (2015)。20. Chand, A. K. B., Tyada, K. R.: 约束保形有理三次分形插值函数。《落基山数学杂志》 **48**(1), 75—105 (2018) 21. Chand, A. K. B., Tyada, K. R.: 保形约束单调有理五次分形插值函数。《先进工程科学与应用数学国际期刊》**10**(1), 15—33 (2018)