arXiv:2602.01784v1 [math.NT] 2 Feb 2026

算术局部对称空间的 Benjamini–Schramm 收敛

MIKOŁAJ FRA CZYK、SEBASTIAN HURTADO 和 JEAN RAIM BAULT

摘要。我们证明，算术定义的局部对称空间的薄部分所占体积极小，并由此推导出关于其贝蒂数的渐近结果。

目录

1. 引言 1 2. 代数群与算术格 8 3. Benjamini–Schramm 收敛 15 4. 伽罗瓦上同调 19 5. 有界度下的 Benjamini–Schramm 收敛 21 6. 轨道积分的局部与整体估计 30 7. 小高度元素数量的估计 37 8. 贝蒂数 41 参考文献 44

1. 引言

在 [2] 中引入了有限体积局部对称空间序列的 Benjamini–Schramm 收敛概念，并在 [3]中将其推广到黎曼流形。这给出了对称空间 X的有限体积商空间所构成空间的一个紧化，其代价是所引入的极限点一般本身并非流形，而是幺模随机流形：满足一个附加齐性条件的随机带基点流形。此类对象最简单的例子是有限体积流形（其根点可按归一化体积测度随机选取）以及对称空间（存在唯一根点）。在局部对称空间的框架下，一个几乎等价的概念（经由李群的离散子群与局部对称空间之间的对应）是等距群的不变随机子群，它不过是闭子群的 Chabauty 空间上的一个不变概率分布。该空间中的收敛通常称为*Benjamini–Schramm* 收敛。

在图的背景下，Benjamini–Schramm 收敛于 [9] 中首次提出；它与（离散群中的）不变随机子群之间的关系于 [4] 中首次提出。 [23] 对这一主题作了综述，重点关注局部对称情形。具体而言，对于一个有限体积流形序列 M_n ，它们局部同构于对称空间 X，Benjamini–Schramm 收敛到 X （下文

简称“BS-收敛”）等价于以下条件：

$$\forall R > 0 \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{vol}((M_n)_{\leq R})}{\mathrm{vol}\, M_n} = 0 \tag{1.1}$$

对于黎曼流形 M，我们将其 $M_{\leq R}$ 薄部分记为 R，即单射半径至多为 R 的点的子集。（对于轨形，我们也可以定义 R薄部分，其中将包括奇异轨迹。）

由 Stuck–Zimmer 定理 [54] 可知，当 X 为不含实双曲或复双曲因子的高秩空间时，对于不可约流形的真序列，始终有向 X 的本雅明–施拉姆收敛（见 [2, 定理 1。5]）。除高秩情形外，发生此类收敛的一个影响深远的例子是固定流形的同余覆盖 [2, 定理 1。12]在 [20] 中，第一作者证明，对于实双曲 2-流形和 3-流形，非可公度算术流形的序列也具有这一性质。本文的主要结果是将这一结果推广到所有对称空间 X （关于同余格的一般定义，见 2.5）。

定理 A. 设 G为一个非紧半单李群， X 为其对称空间， Γ_n 为一列两两非共轭的同余算术格。则对于局部对称空间序列 $\Gamma_n\backslash X$，(1.1) 成立。

我们注意到，若取一列不一定是同余格的算术格，但其中不包含两两可交换格构成的无限子序列（甚至不包含包含于同一个极大算术格中的无限格序列），该定理仍然成立。这个看似更一般的陈述事实上可由上述定理直接推出，因为众所周知，极大算术格是同余格（见下文命题 5.1）。事实上，我们在定理 A 的证明中直接处理极大格。

引入 Benjamini–Schramm 收敛的一个主要动机是：当一列有限体积的 X 流形收敛到 X 时，可以推导出其贝蒂数（更一般地，自守表示的重数）的渐近界。Abért–Bergeron–Biringer–Gelander 在 [1, 推论 1.4] 中给出了一个关于负曲率流形的非常一般的结果。由他们的结果和定理 A 可立即得到以下推论。

定理 B. 设 Γ_n 是半单李群 G 中一列两两不同的无挠不可约同余算术格，或一列两两不可交换的不可约算术格。设 $\beta_i^{(2)}(X)$ 是对称空间 X 的 L^2-贝蒂数（下文 *1.1* 节将简要介绍）。那么：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_i(\Gamma_n\backslash X)}{\mathrm{vol}(\Gamma_n\backslash X)} = \begin{cases} \beta_i^{(2)}(X) \ \textit{if } i = \dim(X)/2; \\ 0 \ \textit{otherwise.} \end{cases}$$

当所有 Γ_n 都一致时，我们无需借助 [1] 的一般结果来证明这一点，因为可以从关于自守表示极限重数的更一般结果中推导出这一结论。下文 1.2 节将对此作详细说明。在迹域次数趋于无穷的情形下，根据我们先前的工作 [21, 定理 D]（见下文定理 D），我们对几何收敛有更精确的估计，并且可以对中间次数以外的贝蒂数给出更精确的界。

定理 C. 设 $i \in 0,\ 1,\ \ldots\ldots,$ 维数 X。那么

$$b_i(\Gamma\backslash X) = \mathrm{vol}(\Gamma\backslash X) \cdot \left(\beta_i^{(2)}(X) + O([k:\mathbb{Q}]^{-1})\right)$$

对所有一致算术格 $\Gamma \subset G$ 均成立。

值得指出的是，只有当 $[k:\mathbb{Q}] \to \infty$ 时，这一结果才有意义；这排除了非一致格。

1.0.1. 定理 *A* 的证明。我们首先区分这样两种情形来证明定理 A：算术格是由相对于 $\mathbb{Q}$ 次数有界或无界的数域定义的（迹域的定义见下文 2.5）。我们在先前的一篇论文中处理了后一种情形，并在那里得到了以下定量结果。

定理 D。 [21, 定理 D] 设 G 是一个半单李群，其对应的对称空间为 X。存在正的常数 $c = c_X$、$\eta = \eta_X$，使得任意迹域为 k 的算术格 $\Gamma \subset G$ 都满足

$$\mathrm{vol}((\Gamma\backslash X)_{\leq \eta[k:\mathbb{Q}]}) \leq \mathrm{vol}(\Gamma\backslash X) e^{-c[k:\mathbb{Q}]}.$$

本文通过证明以下结果，处理定理 A 的证明中（大部分）剩余情形。

定理 E。 设 G 是一个非紧半单李群， X 是其对称空间。设 Γ_n 是 G 中的一列两两不同的极大算术格，且假设存在 $d \in \mathbb{N}$ ，使得每个Γ_n 的迹域都是 $\mathbb{Q}$的一个 d 次扩张。那么，对于局部对称空间序列 $\Gamma_n\backslash X$，(1.1) 成立。

由这两个结果以及 [2]中的另一个结果，我们可以立即推出定理 A 中的一般性结论。为方便起见，我们在此详细说明论证：设Γ_n 是 G中的一列同余算术格。取一个子序列后，不妨设

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{vol}((\Gamma_n\backslash X)_{\leq R})}{\mathrm{vol}(\Gamma_n\backslash X)} = \ell, \tag{1.2}$$

对某个 $\ell \geq 0$成立。一旦证明任何这样的极限 ℓ 都为零，定理 A 即得证。设 k_n 是 Γ_n 的迹域，并设 $d_n = [k_n :\ \mathbb{Q}]$. 。如果 d_n 无界，则由定理 D 可得$\ell = 0$ 。如果 d_n 有界，则选取一列极大算术格 Δ_n，使得对每个 n，都有 $\Gamma_n \subset \Delta_n$ 。如果 Δ_n 是有限集，则由定理 1 得 $\ell = 0$ [2, 12]。最后，如果序列 Δ_n 是无限的，我们可以应用定理 E 来证明

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{vol}((\Gamma_n\backslash X)_{\leq R})}{\mathrm{vol}(\Gamma_n\backslash X)} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{vol}((\Delta_n\backslash X)_{\leq R})}{\mathrm{vol}(\Delta_n\backslash X)} = 0$$

由此完成定理 A 的证明。

本文的大部分内容致力于证明定理 E。由于 [21, 定理 D] 比我们证明 A 所需的结果精确得多，我们还将为迹域次数无界的格给出一个较短的非定量性结论证明（见下文 3.3）。

1.0.2. 定理 E 的证明概要。本文中定理 E 的证明与 [21]中定理 D 的证明截然不同。它沿用了 [20], 对塞尔伯格迹公式几何侧进行估计时 A_1 群所用的证明思路，尽管在高秩情形下，我们无法对所有项都得到定量结果。最后，我们不得不采用一种类似于 [22]中的非有效论证。

与 [20]，中一样，我们将薄部分的体积表示为某个卷积算子的迹。回忆一下，$X = G/K$，其中 K 是 G 的极大紧子群。在 G 上存在唯一的双 K 不变半度量，使得 G 中一个 R 球的像恰好是 X 中一个 R 球。令 $1_R\colon G \to \mathbb{R}$ 为 G 中半径为 R 的球的示性函数。点 $\Gamma gK \in \Gamma\backslash X$ 属于 R- 薄部分，当且仅当对于某个非中心的 $\gamma \in \Gamma$，γgK 属于以 gK 为中心的 R 球。因此，$\Gamma gK \in \Gamma\backslash X \in (\Gamma\backslash X)^{\leq R}$ 当且仅当 $\sum_{\gamma\in\Gamma\backslash Z(\Gamma)} 1_R(g^{-1}\gamma g) > 0$。只要证明积分，Benjamini–Schramm 收敛性便随之成立

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma_n\backslash G)}\int_{G/\Gamma_n}\sum_{\gamma\in\Gamma_n\backslash Z(\Gamma)} 1_R(g^{-1}\gamma g)dg$$

当 $n \to \infty$ 时收敛到零。利用紧商空间的塞尔伯格迹公式几何侧的惯用处理（见 [6, I.1]），该积分等于

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma_n\backslash G)}\sum_{[\gamma]_{\Gamma_n}\subset W}\mathrm{vol}((\Gamma_n)_\gamma\backslash G_\gamma)\mathcal{O}(\gamma, 1_R),$$

其中$[\gamma]_{\Gamma_n}$ 是 γ 在 Γ_n中的共轭类，$O(\gamma, 1_R)$是轨道积分

$$\mathcal{O}(\gamma, f) = \int_{G_\gamma\backslash G} 1_R(x\gamma x^{-1})dx$$

且 W 是 Γ_n的非中心元素的集合。

Γ_n 中元素的共轭类难以参数化，因此我们改用 [20] 中的阿代尔迹公式（见 5.4）。阿代尔迹公式将对 Γ_n 中共轭类求和，替换为对定义在 Γ_n 的迹域上的某个半单代数群中的有理共轭类求和。有理共轭类更容易参数化[1]，而且阿代尔轨道积分在某种意义上具有更好的性质。在阿代尔框架下，为这些积分的求和给出界，是我们这部分工作的主要贡献，相关技术内容分布在多个章节中。主要工具包括环面的阿代尔商体积的已知估计（主要来自 [56]）、局部和整体轨道积分的强界（见第 6 节），以及对韦伊高度较小的元素的有理共轭类数量的估计（见第 7 节）。这些界相当精细，对于中心化子较大的共轭类尤其难以获得。通过采用改编自 [22] 的归约论证（精确表述见定理 3.3 和引理 5.7），我们可以将 W 限定为高度正则共轭类的集合，同时仍然得到关于 Benjamini-Schramm 收敛的结论。这部分论证用到了 [2] 中证明的不变随机子群的扎里斯基稠密性。

[1]例如，对$\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$中的共轭类进行分类比对$\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q})$中的共轭类进行分类更为困难

由于这一步归约，该论证无法给出 $\Gamma_n\backslash X$ 的 R-薄部分体积的有效界，因为我们完全避开了对非正则半单元素的轨道积分和中心化子余体积的估计。

1.1. L^2-贝蒂数。 L^2-贝蒂数的一般理论见专著 [32]。贝蒂数通常定义于紧黎曼流形或有限CW复形上。对于局部对称空间，有一个比例原理：对于对称空间 X 及其有限体积商空间 M， X 的 L^2-贝蒂数 $b_i^{(2)}(M)$（根据Borel–Serre紧化的三角剖分计算）等于 $\mathrm{vol}(M)\beta_i^{(2)}(X)$，其中 $\beta_i^{(2)}(X)$为常数。

L^2-贝蒂数 $\beta_i^{(2)}(X)$仅当 $i=\dim(X)/2$时才可能非零；此外， $\beta^{(2)}{}_{\dim(X)/2}(X)$可显式计算：它等于 $\chi(X^d)/\mathrm{vol}(X^d)$，其中 X^d 是 G 的紧对偶，并赋予与 G的哈尔测度相容的哈尔测度。以下列出所有满足 $\beta^{(2)}{}_{\dim(X)/2}(G)\neq 0$ 的非紧型单李群 G （模同种）：

- 所有酉群 $\mathrm{SU}(n,m)$；
- 所有满足 nm 为偶数的正交群 $\mathrm{SO}(n,m)$，以及群 $\mathrm{SO}^*(2n)$；
- 所有辛群 $\mathrm{Sp}(n)$，以及所有群 $\mathrm{Sp}(p,q)$（四元数埃尔米特形式的等距变换）；
- 某些例外群（每个绝对型中至少有一个）。

这是众所周知的，并可按如下方式还原：根据 [40, 定理 1.1]，一个群出现在该列表中，当且仅当它具有紧极大环面。就 Vogan图 [29, VI.8] 的分类而言，这意味着嘉当对合在底层 Dynkin 图上的作用是平凡的。此类图的列表见本书：经典型见第 414 页图 6.1，例外型见第 416 页图 6.2。

1.2. 极限重数。 利用松岛公式，我们可以从极限重数的结果推出上述两个定理。为详细说明这一点，我们需要引入一些记号。若 π 是 G 的一个酉表示，作用于希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\pi$，且 Γ 是一个格 G，则 $m(\pi,\Gamma)$ 是 π 在$L^2(\Gamma\backslash G)$ 中的重数，即

$$m(\pi,\Gamma)=\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}(\pi,L^2(\Gamma\backslash G)).$$

如果 Γ 是一致的，那么重数 $m(\pi,\ \Gamma)$ 是有限的，且仅对可数多个 π 非零。此外，$L^2(\Gamma\backslash G)\ \cong\ \bigoplus_\pi \mathcal{H}_\pi^{m(\pi,\Gamma)}$，其中求和遍历 G 的所有酉表示同构类。

最基本形式的极限重数 问题是：对于 G 中一个（两两不共轭的）格序列 Γ_n，我们是否有

$$\frac{m(\pi,\Gamma_n)}{\mathrm{vol}(\Gamma_n\backslash G)}\xrightarrow{n\to+\infty} d(\pi) \tag{1.3}$$

对所有 π，其中 $d(\pi)$ 是 π 的“形式度”，除非 π 是一个离散级数 [28]，否则它非零。另一方面，松岛公式 [35] 指出，对于每个i ，存在 G的有限个酉表示组成的集合 C_i ，称为 次的上同调表示，使得对于任意一致格 $\Gamma\subset G$

$$b_i(\Gamma\backslash X)=\sum_{\pi\in C_i} n(\pi,i)\cdot m(\pi,\Gamma) \tag{1.4}$$

其中 $n(\pi, i) = \dim \mathrm{Hom}_K(\bigwedge^i \mathfrak{p}, \pi)$，而 $\mathfrak{p}$ 是在单位陪集处的 X 在 K 切空间上的表示。它是一个仅依赖于 π 和次数 i的整数。已知上同调表示只有在次数 $i = \dim(X)/2$时才可能是离散系列，因此 (1.3) 和 (1.4) 推出定理 B 中的收敛（其中 $c(G)$ 是上同调离散级数的形式次数之和）。

对于具有有界次数迹域的一致格序列（它们总是一致离散的），[2, 6.10]中的论证（另见 [16]）蕴含（1.3）。利用类似的论证，我们借助定理 D 对重数给出更精确的估计，从而得到定理 C；我们在第 8 节中完成这一工作。

另一方面，在 [2, 定理 1.2]中声称了一个更强的结果，即对于 G 的酉对偶的任意开正规有界博雷尔子集 S，我们有极限

$$\nu_{\Gamma_n}(S) := \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma_n \backslash G)} \sum_{\pi \in S} m(\pi, \Gamma_n) \xrightarrow{n \to +\infty} \nu^G(S) \tag{1.5}$$

对任意一致离散序列 Γ_n，使得 $\Gamma_n \backslash X$ 在 Benjamini–Schramm 意义下收敛于 X，其中 ν^G 是 G的 Plancherel 测度。

（1.5）的证明依赖于以下两个断言：

(1) 酉对偶上的测度序列 ν_{Γ_n} 弱收敛到 Plancherel 测度；(2) 酉对偶上的 Plancherel 测度由其在 G 上光滑紧支撑函数的傅里叶变换上的取值所刻画（见[2, 命题 6.4]）。

第一项结论在我们的情形下成立：在有界次数情形中，它是 Benjamini–Schramm 收敛的形式推论；在其他情形中，经过更多工作，它是定理 D 的推论。第二项结论是 [49] 中的“Sauvageot 密度原理”，而正是在这篇最后提到的文献中发现了一个漏洞：[38,第 24 节脚注 7。2]在问题修正之前，我们无法先验地断言 (1.5) 对所有同余子群序列都成立。

1.2.1. 非余紧格的极限重数。 对于非一致格，由于 Arthur 迹公式将 Selberg 迹公式推广到这一情形时包含了与几何没有直接关系的项，因此要证明 Benjamini–Schramm 收敛序列的极限重数要困难得多。对于固定算术格中的同余子群，Finis–Lapis 在 [18, 19] 中解决了这一问题；对于某些 A_1 型群中的格，Matz 在 [36]中也解决了这一问题。

1.3. **后续问题**。 作为本引言的收尾，我们提出一些关于局部对称空间的开放问题。

1.3.1. 薄部分体积的最优界。 对定理 A 作出最佳的定量细化，将是如下结果。

猜想 1.1。 设 G 是一个半单李群。存在 $\alpha, \beta > 0$，使得对于 G 中的任意同余算术格 Γ 和 $M = \Gamma \backslash X$，以下结论成立

$$\mathrm{vol}\left(M_{\leq \beta \log \mathrm{vol}(M)}\right) \leq \mathrm{vol}(M)^{1-\alpha}.$$

对于 $G = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}),\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$中的无挠格， [20] 证明了这一命题的一个较弱版本，其中 $\log \mathrm{vol}(M)$ 被迹域的次数所取代。对于固定算术格中的同余子群， [2, 定理 1.12] 给出了类似结果。我们的定量结果定理 5.6 和定理 D 也沿着这一方向，尽管它们（分别以不同方式）远弱于解决这一猜想所需的结果。

1.3.2. 非同余局部对称空间。 如前所述，与高秩空间[2], 的情形不同，对于实双曲和复双曲流形，已知并非所有序列都本雅明–施拉姆收敛到双曲空间[3]。Shmuel Weinberger 提出的以下问题询问，这是否仍然在“一般情况下”成立。

问题 1.2。 令 G 为$\mathrm{PO}(d,1)$ $d \geq 4$ 或$\mathrm{PU}(d,1)$ $d \geq 2$， X 为其对称空间。对于 $V > 0$，令 $\mathcal{M}_G(V)$ 表示体积不超过 V 的 X-轨形。是否

$$\frac{\left|\left\{M \in \mathcal{M}_G(V) : \frac{\mathrm{vol}(\Gamma_i \backslash X)_{\leq R}}{\mathrm{vol}(\Gamma_i \backslash X)} > \varepsilon\right\}\right|}{|\mathcal{M}_G(V)|} \xrightarrow{V \to +\infty} 0$$

对所有 $\varepsilon > 0$ 和 $R > 0$都成立？

对于双曲曲面或三维流形，由于 Wang 有限性定理不成立，因而不存在相应的排序，所以这个问题没有意义。对于曲面，可以利用随机模型提出类似问题；对于离散模型（例如参见 [47, 附录 B]）和连续模型（参见 [37]），答案都是肯定的。在这些维数下，研究满足 Wang 有限性的算术流形也有意义 [11]。对于算术曲面，答案很可能是肯定的，参见 [33]。

1.4. **本文结构**。 第 2 节介绍我们关注的主要对象——算术格及其局部对称空间，并概述李群和代数群所需的背景知识。我们还回顾了一些对本文有用、但在文献中不易查到的标准结果。

第 3、4 节为本文其余部分作准备，其中许多结果是众所周知的。第 3 节介绍 Benjamini–Schramm 收敛并给出一个收敛判据，我们立即利用该判据简短地证明定理 3.4。第 4 节回顾半单代数群和代数环面伽罗瓦上同调的各种定义和事实。第 5 至第 7 节给出定理 E 的证明；第 5 节结合代数群算术方面的标准结果，说明证明思路，并假设关于轨道积分的某些估计，即高度较小的元素个数的估计。第 6、7 节证明这些估计。

最后一节包含从定理 D 推导定理 C 所需的（标准）论证。

1.5. **致谢**。 S. H. 获得斯隆研究基金会的资助。M. Fraczyk 获得 Dioscuri 计划的部分资助，该计划由马克斯·普朗克学会发起，与波兰国家科学中心共同管理，并由波兰教育与科学部和德国共同资助

[2]在某些情况下，这取决于同余子群性质。[3]对于四元数和八元数双曲流形，目前对有限体积局部对称空间可能具有的 BS 极限一无所知

德国联邦教育与研究部。J. R. 获得法国国家研究署项目 AGIRA - ANR-16-CE40-0022 和 ANR-20-CE40-0010 的资助。

2. 代数群与算术格

2.1. 数域。 本文中，我们用 k 表示一个数域，用 $\bar{k}$ 表示其代数闭包。k 的整数环记作 $\mathfrak{o}_k$。我们用 Δ_k 表示 k的域判别式。如果 L/k 是一个有限扩张，我们用 $\Delta_{L/k}$ 表示相对判别式，即由 L 在 k上的所有基 $a_1, \dots, a_{[L:k]} \in \mathfrak{o}_L$的判别式生成的理想。

我们用 V 表示 k上赋值等价类的集合。对于每个 $v \in$V，我们用同一个字母表示该赋值等价类的通常标准化[4]，并用 $|\cdot|_v$ 表示 k上的相应范数。k 在 v处的完备化记作 k_v。阿基米德赋值的集合记作 V$_\infty$，非阿基米德赋值的集合记作 V$_f$。若 $v \in$V$_f$，则 $\mathfrak{o}_{k_v}$表示 k_v中的整数环。对于非阿基米德赋值，我们用同一个字母 $\mathfrak{p}$ 表示 $\mathfrak{o}_k$ 的一个素理想以及相应的 $\mathfrak{p}$-进赋值。若 $\tau \in \mathrm{Hom}(k, \mathbb{C})$，则我们用$|\cdot|_\tau$ 表示由 $\mathbb{C}$上的绝对值诱导的赋值。

若 $a \in k$，我们用 $N_{k/\mathbb{Q}}(a)$ 表示其绝对范数，定义如下：

$$N_{k/\mathbb{Q}}(a) = \prod_{v \in \mathrm{V}_\infty} |a|_v = \prod_{v \in \mathrm{V}_f} |a|_v^{-1}.$$

对于理想 I，$N_{k/\mathbb{Q}}(I) = |\mathfrak{o}_k/I|$。当 $I = (a)$ 是主理想时，这两个定义一致。$a \in k$ 的韦伊高度定义为

$$h(a) = \frac{1}{[k:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in \mathrm{V}} \iota_v \log \max(1, |a|_v); \tag{2.1}$$

其中，若 $k_v = \mathbb{C}$ 则 $\iota_v = 2$，否则 $v = 1$。注意，若 $a \in \mathfrak{o}_k$，则求和范围可限制为 $v \in$V$_\infty$。该定义与包含 a 的域 k 的选取无关。（对数）马勒测度定义为

$$m(a) = [\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] h(a). \tag{2.2}$$

k 的阿代尔环记为 $\mathbb{A}$，无限阿代尔 $\prod_{v \in \mathrm{V}_\infty} k$ 记为 k_∞，有限阿代尔 $\prod'_{v \in \mathrm{V}_f} k_v$ 记为 $\mathbb{A}_f$。

2.2. 代数群与半单元素。 本文中，我们用 $\mathbf{G}$ 表示定义在 k 上的半单代数群；通常我们会在每次使用此记号时明确说明，并补充进一步的假设。$\mathbf{G}$ 在其 k-李代数上的伴随表示记为 Ad。群 $\mathbf{G}(\mathbb{A})$ 和 $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ 分别表示 $\mathbf{G}$ 的 $\mathbb{A}$ 点群和 $\mathbb{A}_f$ 点群（见[42, 第 248–249] 页）。

令 $\gamma \in \mathbf{G}(k)$。我们将$\mathbf{G}^\gamma$ 记作 γ的中心化子，它是定义在 k上的$\mathbf{G}$ 的代数子群。如果$\mathbf{T}$ 是$\mathbf{G}$中的环面，我们将用 $X^*(\mathbf{T})$表示其在代数闭包 $\bar{k}$上定义的特征群。这是一个秩为 $\dim(\mathbf{T})$的自由阿贝尔群，并带有 k [41]的绝对伽罗瓦群作用。

我们将用 $Z(\mathbf{G})$ $Z(G)$ $Z(\Lambda)$ 表示代数群 $\mathbf{G}$、李群 G 或离散子群 $\Lambda \subset G$ 的中心。

[4]阿基米德赋值处的绝对值，以及 $|\varphi|_\mathfrak{p} = |\mathfrak{o}_k/\mathfrak{p}|$，其中 $\varphi \in k_\mathfrak{p}$ 是一致化元。

我们回顾一下：若半单元素 $\gamma \in \mathbf{G}(k)$ 的 正则 性定义为：$\mathbf{G}^\gamma$ 的连通分支是一个环面。这等价于以下说法。设 $\mathbf{T} \leq \mathbf{G}$ 是一个极大环面，且 $\gamma \in \mathbf{T}(k)$，令 $\Phi = \Phi(\mathbf{G},\mathbf{T}) \subset X^*(\mathbf{T})$ 表示 $(\mathbf{G},\mathbf{T})$ [42, 2.1.10] 的根系。那么，γ 是正则的，当且仅当对于所有 $\lambda \in \Phi$，$\lambda(\gamma) \neq 1$。若元素 $\gamma \in \mathbf{G}(k)$ 是正则的，并且对所有 $\lambda \neq \lambda' \in \Phi$ 都有 $\lambda(\gamma) \neq \lambda'(\gamma)$，则称其为 强正则 元素。强正则元素这一概念并不标准。我们通过以下性质说明引入这一概念的动机。

命题 2.1. 设 γ 是$\mathbf{G}(k)$ 的强正则元素；则$\mathbf{G}^\gamma$ 是$\mathbf{G}$ 的极大环面，它在域 $k[\lambda(\gamma) \mid \lambda \in \Phi]$ 上分裂，其中 $\Phi = \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{G}^\gamma)$ 是$\mathbf{G}$ 关于环面$\mathbf{G}^\gamma$ 的根系。

证明。由于 γ 是正则的，G^γ 的连通分支 T 是 G 中的极大环面（[52, 2.11]）。我们必须证明 $\mathrm{G}^\gamma = \mathrm{T}$，即证明 G^γ 是连通的。我们有 $\mathrm{G}_\gamma \subset \mathrm{J}$，其中 J 是 T 在 G 中的正规化子，因此 $W = \mathrm{J}(k)/\mathrm{T}(k)$ 是 G 的魏尔群。只需证明对所有 $w \in W$、$w \neq 1$，$\gamma^w \neq \gamma$。魏尔群 W 忠实地作用于 Φ，且对于任意 $\lambda \in \Phi$，有 $\lambda(\gamma^w) = \lambda^w(\gamma)$。取一个满足 $\lambda^w \neq \lambda$ 的 λ，由 γ 的强正则性可得 $\lambda(\gamma^w) \neq \lambda(\gamma)$。因此，$\gamma^w \neq \gamma$。这证明 G^γ 是一个环面。

现在我们证明 $L = k[\lambda(\gamma) \mid \lambda \in \Phi]$ 分裂$\mathbf{T}$。这等价于证明 $\mathrm{Gal}(L)$ 在 $X^*(\mathbf{T})$，也就是在 Φ [41] 上的作用是平凡的。令 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L)$，并令 $\lambda \in \Phi$；我们有 $\lambda^\sigma(\gamma) = \lambda(\gamma^\sigma) = \lambda(\gamma)$。对于所有 $\lambda' \in \Phi \setminus \{\lambda\}$，都有 $\lambda'(\gamma) \neq \lambda(\gamma)$。由此可得，$\lambda = \lambda^\sigma$ 必须成立。因此，σ 在 Φ 上的作用是平凡的。□

设 $\gamma \in \mathbf{G}(k)$ 是一个半单元素。取一个包含它的极大环面$\mathbf{T}$，并令 $\Phi = \Phi(\mathbf{G},\mathbf{T})$ 为相应的根系。我们定义（对数）马勒测度 $m(\gamma)$ 如下：

$$m(\gamma) = \sum_{\lambda \in \Phi} [k : \mathbb{Q}] h(\lambda(\gamma)). \tag{2.3}$$

其中 h 是韦伊高度，由式（2.1）定义。γ 的魏尔判别式 为

$$\Delta(\gamma) = \prod_{\lambda \in \Phi} (1 - \lambda(\gamma));$$

如果所有 $\lambda(\gamma) \in \mathfrak{o}_k$，那么显然 $m(\Delta(\gamma)) \ll m(\gamma)$。

我们称元素 $\gamma \in \mathbf{G}(k)$ 具有整数迹，如果对每一个$m \in \mathbb{N}$，伴随表示(γ^m) 的迹 $\in \mathfrak{o}_k$。

命题 2.2. 对任意 $d \in \mathbb{N}$，存在一个递增函数 $f_d :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$，使得下列结论成立。设 k 是一个数域，满足 $[k : \mathbb{Q}] \leq d$，且 $\mathbf{G}$ 是一个半单 k-群。对任意在伴随表示中具有整数迹的强正则元素 $\gamma \in \mathbf{G}(k)$，若 L是中心化子 $\mathbf{G}^\gamma$ 的最小伽罗瓦分裂域，且 $m(\gamma) \leq R$，则

$$N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{L/k}) \leq f_d(R).$$

证明。设 $m = [L : k]$。由命题 2.1，域 L 包含于 $k[\lambda(\gamma) \mid \lambda \in \Phi]$中。次数 $k[\lambda(\gamma) \mid \lambda \in \Phi] : k]$ 至多为 $\mathrm{Ad}(\gamma)$ 的特征多项式的次数，因此 m 可由 $\mathbf{G}$ 控制。由于 γ 具有整数迹，$\lambda(\gamma)$ 是代数整数。令

$$\Sigma := \{\lambda(\gamma)^\ell | \lambda \in \Phi, \ell = 0, 1, \ldots, m-1\} \subset \mathfrak{o}_L.$$

存在 θ_1，……，$\theta_m \in \Sigma$，它们构成 L 在 k上的一组基。根据相对判别式 [30]的定义， $\Delta_{L/k}$ 属于由 $\det((\theta_i^{\sigma_j})_{1\leq i,\ j\leq m})$ 生成的 $\mathfrak{o}_k$ 的主理想 I，其中 $\mathrm{Gal}(L/k) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$。特别地， $N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{L/k}) \leq N_{k/\mathbb{Q}}(I)$。

设 τ_1、……、$\tau_{[k:\mathbb{Q}]}$ 为所有嵌入 $k \to \mathbb{C}$的集合。我们以任意方式将每个 τ_ℓ 延拓到 L。于是有

$$N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{L/k}) = \prod_{\ell=1}^{[k:\mathbb{Q}]} \left|\det(\theta_i^{\sigma_j})_{1\leq i,j\leq m})\right|_{\tau_\ell} = \prod_{\ell=1}^{[k:\mathbb{Q}]} \left|\det((\theta_i^{\sigma_j\tau_\ell})_{1\leq i,j\leq m})\right|.$$

由于 $m(\gamma)$ 有界于 R，每个绝对值 $|\lambda(\gamma)^{\sigma_j\tau_\ell}|$ 都由 $e^m R$有界，因此 $|\theta_i^{\sigma_j\tau_\ell}| \leq e^{m^2 R}$。所以，该乘积的绝对值由一个仅依赖于 R 和 d的函数所界定。□

若一个 k-环面 $\mathbf{T}$ 满足 $X^*(\mathbf{T})^{\mathrm{Gal}(k)} = 0$，则称其为 k-各向异性的。换言之，它没有定义在 k上的非平凡特征。这等价于商空间$\mathbf{T}(k)\backslash\mathbf{T}(\mathbb{A})$ 是紧的。 [42, 定理 4.11]。若一个约化 k-群 $\mathbf{G}$ 满足其所有 k-环面都是各向异性的，则称其为 k-各向异性的。

2.3. **测度正规化**。

2.3.1. 李群。 我们对约化李群采用与 [43] 和 [56]中相同的测度正规化。设 G 为一个实约化群。右G不变的实微分$(\dim G)$–形式空间是一个一维向量空间。任何这样的非零形式都将 ω 产生一个右 G不变测度 μ_ω，该测度定义在 G 上，其构造程序见 [42,第 167]页。

若 G 是一个半单实李群，则存在唯一的紧半单˘˘实李群 G，使得复化 $G_{\mathbb{C}}$ 与 $G_{\mathbb{C}}$ 同构。设˘˘ω 为 G上在符号意义下唯一的实微分形式，使得 $\mu_{\check{\omega}}$ 为Haar概率测度。我们固定一个（复）同构 ι： $G_{\mathbb{C}} \to {}^{\check{}}G_{\mathbb{C}}$，并定义$\omega := \iota^*(\check{\omega})$。形式 ω 结果是 G–不变的，定义在 $\mathbb{R}$上，且与 ι的选取无关。我们将 G 上的哈尔测度取定为 μ_ω。

如果$\mathbf{T}$ 是一个 $\mathbb{R}$-环面，那么$\mathbf{T}(\mathbb{R})$ 的连通分支同构于 $\mathrm{SO}(2)^a \times (\mathbb{R}^\times)^b$ 的一个乘积。我们通过在 $\mathrm{SO}(2)$ 因子上取概率哈尔测度，并在 $\mathbb{R}^\times$ 因子上取 $dt/|t|$，来规范化哈尔测度。

如果$\mathbf{T}$ 是非阿基米德局部域 k_v 上的环面，那么我们将$\mathbf{T}(k_v)$ 上的哈尔测度规范化，使其唯一的极大紧子群测度为 1。如果$\mathbf{G}$ 是 k_v 上的半单群，那么我们将在每种情形下选取一个质量为 1 的紧开子群，以此规范化$\mathbf{G}(k_v)$ 上的哈尔测度。

2.3.2. 齐性空间。我们回顾齐性空间上的商测度的定义：如果 G 是一个局部紧群，H 是一个闭幺模子群，那么对于哈尔测度 dg （定义在 G 上）、 dh （定义在 H 上）以及 G- 不变测度 dx （定义在 G/H 上）这三者中的任意两种选择，第三种都由如下等式唯一确定

$$\int_G f dg = \int_{G/H}\int_H f(xh)dhdx$$

对任意定义在 G 上的紧支撑函数 f 均成立（注意， $\int_H f(xh)dh$ 是商空间上的一个右-H-不变函数，且具有紧支集）。

2.4. **对称空间**。 若 G 是半单李群，则与之关联的黎曼对称空间为 $X = G/K$，其中 K 是极大紧子群，并赋予一个 G-不变的黎曼度量。我们用 d_X 表示 X 上的距离函数。为使该度量规范化，我们采用上述测度规范：若 G （隐式地）赋有哈尔测度，则在 X 上选择黎曼度量，使其体积形式与商测度一致，其中 $\mathrm{vol}(K) = 1$。

2.4.1. 半单等距变换。若 $g \in G$ 是半单的，且不生成有界子群，则称其为非紧。这样的元素存在唯一的全测地子空间 $\min(g) \subset X$，它在该子空间上的作用具有最小平移长度。对于 $x \in \min(g)$，距离 $d_X(x,\ gx)$ 为常数；我们称之为最小平移长度，记作 $\ell(g)$。以下命题众所周知，例如参见 [21,命题 2.2]。

命题 2.3。 设 X 是半单李群 G 的对称空间。存在常数 a_X、$A_X > 0$，使得对于任意数域 k、任意半单k-群 $\mathbf{G}$ （其对称空间 $\mathbf{G}(k_\infty)$ 与 X 等距同构（即 $\mathbf{G}(k_\infty)$ 与 G 乘以一个紧群同源）），以及任意在 $\mathbf{G}(k_\infty)$ 中非紧且具有整数迹的半单 $\gamma \in \mathbf{G}(k)$，均有

$$a_X m(\gamma) \le \ell(\gamma) \le A_X m(\gamma). \tag{2.4}$$

比非紧更强的条件是 $\mathbb{R}$-正则性。若元素 $g \in G$满足：$\mathrm{Ad}(g)$具有绝对值为 $\neq 1$ 的特征值的最大个数，则称其为 $\mathbb{R}$-正则 。这些元素也可以由以下结果刻画，即 [46, 引理 1.5]。

引理 2.4。 设 γ 是 G中的半单正则元。若 γ 是 $\mathbb{R}$-正则的，则其中心化子 G_γ 包含 G 的一个极大 $\mathbb{R}$-分裂环面。

2.4.2. 单射半径与薄部分。 设 $d(g,h) := d_X(gK, hK)$。它是 G上的双K不变、左 G不变半度量。令

$$\mathrm{B}(R) = \{g \in G : d_X(K, gK) \le R\} = \{g \in G : d(g,1) \le R\}.$$

可以将 $\mathrm{B}(R)$ 看作 G中的一个球，尽管它仅对应于 G上的半度量 d。设 $\Lambda \subset G$ 是 G 的一个离散子群，且 $x = \Lambda g K \in \Lambda\backslash X$是局部对称空间 $M = \Lambda\backslash X$中的一点。M在 x 处的单射半径 定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{InjRad}_{\Lambda\backslash X}(x) &= \sup\left\{R \ge 0 \,|\, d_X(gK, \gamma g K) \ge \frac{R}{2} \text{ for every } \gamma \in \Lambda \setminus Z(\Lambda)\right\} \\ &= \sup\{R \ge 0 \,|\, \Lambda^g \cap \mathrm{B}(2R) = Z(\Lambda)\}.\end{aligned}$$

如果 M 是一个流形（也就是说，如果 Λ 无挠），那么这与单射半径的通常定义相同。一般而言，这一定义还考虑了轨形 M的奇异轨迹。我们还回顾一下，全局单射半径定义为 $\mathrm{InjRad}_M := \inf_{x\in M} \mathrm{InjRad}_M(x)$。

对于 $R > 0$，局部对称空间 M 的 R-薄 部分是集合

$$M_{\le R} = \{x \in M \,|\, \mathrm{InjRad}_M(x) \le R\}.$$

R-厚部分 $(\Lambda\backslash X)_{\ge R}$ 则可定义为 R-薄部分的补集的闭包。

2.5. **算术格**。 设 G 为半单李群。格 $\Gamma \subset G$称为算术的，如果存在一个 $\mathbb{Q}$-群$\mathbf{H}$ 以及一个满态射 $\pi : \mathbf{H}(\mathbb{R}) \to G$，其具有紧核，使得 Γ 与 $\pi(\mathbb{H}(\mathbb{Z}))$可交换（即具有一个公共的有限指数子群）。一个算术局部对称空间 是对称空间 $X = G/K$ 关于 G中某个算术格的商空间。

或者，也可以用阿代尔的语言，以一种更具构造性的方式定义算术格。这种观点特别适合写出迹公式，因此我们将采用这种方法。设 k 是一个数域，其阿代尔环为 $\mathbb{A}$，并设 $\mathbf{G}$ 是定义在 k 上的伴随半单线性代数群。若这一对 $(\mathbf{G}\ k)$ 满足 $admissible$（对于 G）的条件，即 $\mathbf{G}(k\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}) \simeq G\times K$ 且 K 紧，则称其为可容许的。设 U 是 $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ 的一个开紧子群。那么

$$\Gamma_U := \mathbf{G}(k) \cap (\mathbf{G}(k_\infty) \times U)$$

是 $(\mathbf{G}(k_\infty) \times U)$ 中的一个格（见 [42, 第 5] 章）。稍微滥用一下记号，我们也将 Γ_U 在 G 上的投影记作 Γ_U；由于 U 紧，它仍然是一个格。

一般而言，算术格可以定义为任何与某个 Γ_U 可公度的格，而 同余算术格 则是包含某个Γ_U的格。我们注意到，博雷尔稠密性定理以及迹域在可公度关系下的不变性（见下文）意味着，Γ_U 的可公度类由这一对 $(\mathbf{G}\ k)$ 唯一确定，反之亦然。我们回顾一下，格Γ_U 是一致的，当且仅当 k-群 $\mathbf{G}$ 是 k-各向异性的 [42,定理 4.12]。

算术格 Γ 的（伴随）迹域定义为域 k，其中（$\mathbf{G}\ k$）是唯一的可容许对，且某个或任意 Γ_U 与Γ可交换。或者，迹域是由Γ中元素在伴随表示下的迹生成的域：

$$k = \mathbb{Q}(\operatorname{tr}\operatorname{Ad}(\gamma), \gamma \in \Gamma)$$

这两个定义相同并非显而易见，而是由 Vinberg 的定理得出的。更确切地说，设 Γ' 是$\mathbf{G}(k)$中的一个算术格，且与Γ可交换。那么显然有 $\operatorname{Ad}(\Gamma') \subset \operatorname{Ad}(\mathbf{G}(k))$，因此 $\mathbb{Q}(\operatorname{tr}\operatorname{Ad}(\Gamma') \subset k$；另一方面，根据 [58, 定理 3]，我们有 $\mathbb{Q}(\operatorname{tr}(\Gamma)) = \mathbb{Q}(\operatorname{tr}(\Gamma'))$。对于反向包含 $k \subset \mathbb{Q}(\operatorname{tr}\operatorname{Ad}(\gamma)\ \gamma \in \Gamma)$，我们使用 Vinberg 定理：设 l 是迹域，根据 [58, 定理 1]，$\operatorname{Ad}(\Gamma)$包含于 $\operatorname{Ad}(\mathbf{G}(l_\infty))$。若 $l \subsetneq k$，则$\mathbf{G}(l_\infty)$在 G 中的像是 G 的真子群，这与Γ在$\mathbf{G}(k_\infty)$上的扎里斯基拓扑中扎里斯基稠密这一事实矛盾。

下面的命题也将在后文中派上用场，其证明同样用到了 Vinberg 的结果；特别是，它意味着若 Γ 是一个算术格，那么我们可以对任意半单 $\gamma \in \Gamma$ 应用 (2.4)。

命题 2.5. 设 $\Gamma \subset G$ 是一个算术格，$\gamma \in \Gamma$ 是一个半单元素。设 T 是包含 γ 的一个极大环面。设 Φ 是与 T（在 $\mathbb{C}$ 上）相关联的根。那么，对所有 $\lambda \in \Phi$，$\lambda(\gamma) \in \mathbb{Z}$。

证明。 根据算术格的定义，存在一个有限指数子群$\Gamma_1 \subset \Gamma$ 以及 $\mathfrak{o}_k$-格 L，它位于 $\mathbf{G}$ 的 k-李代数中，并满足 $\operatorname{Ad}(\Gamma_1)L \subset L$。由此可知，由迹 $\operatorname{tr}(\operatorname{Ad}(\gamma))\ \gamma \in \Gamma_1$ 生成的环包含于 $\mathfrak{o}_k$中。根据 [58, 定理 3]，由 $\operatorname{tr}(\operatorname{Ad}(\gamma))\ \gamma \in \Gamma$生成的环也具有同样性质。特别地，$\operatorname{Ad}(\Gamma)$中元素的所有特征值都是代数整数，这意味着$\lambda(\gamma)$也必须是代数整数。□

我们利用这一结果，结合 E. Dobrowolski 给出的关于马勒测度的下界，得到算术局部对称空间收缩量的一个下界。此前在 [7] 和 [25]中也得到了类似的估计。

命题 2.6. 存在一个仅依赖于 G的常数 c，使得若 Γ是 G 中的算术格，伴随迹域为 k，且 $d = [k : \mathbb{Q}] \geq 2$，那么对任意半单非紧 $\gamma \in \Gamma$，有

$$\ell(\gamma) \geq \frac{c}{(\log d)^3}.$$

证明。 前一个命题的证明表明，Ad(γ) 的极小多项式属于 $\mathfrak{o}_k$，因此其根 λ(γ)是次数至多为$d \cdot \dim(G)$的代数整数。由 [17, 定理 1] 可知，对于所有满足 λ(γ)不是单位根的λ，都有 $m(\lambda(\gamma)) \geq 2^{d + \frac{1}{(\log()\log\dim(G))^3}}$。由于 γ 非紧，至少存在一个这样的 λ，因此

$$m(\gamma) \geq \frac{1}{2(\log(d) + \log\dim(G))^3} \gg_G \frac{1}{\log(d)^3},$$

由 (2.4) 即得结论。 □

2.6. **轨道积分**。 下面的命题是众所周知的（例如参见[57, 第 215 页的定理 27，以及第 211] 页的定理 17）。

命题 2.7. 设 γ 为半单李群 G中的一个半单元素。则由 $g \mapsto g\gamma g^{-1}$ 定义的从 G/G_γ 到 G 的映射是真映射。

由此命题立即可知，对任意连续紧支撑函数 f，由下式定义的轨道积分 $\mathcal{O}(\gamma, f)$

$$\mathcal{O}(\gamma, f) = \int_{G_\gamma \backslash G} f(x^{-1}\gamma x)dx$$

是收敛的。

下面我们给出命题 2.7 在 γ 为正则非紧情形下的完整证明，其中用到若干结果；这些结果在我们随后于阿基米德与非阿基米德两种情形下进一步研究轨道积分本身时将会有用。

2.6.1. 交换子。 在本节中 k_v 是一个局部域，可能为非阿基米德[5]，且 $\mathbf{G}$ 是一个 k_v-群。

引理 2.8. 设 $\mathbf{T}$ 为 $\mathbf{G}$ 中的一个极大分裂环面，$\Phi = \Phi_{k_v}(\mathbf{G}, \mathbf{T})$ 为相应的相对根系。设 $\mathbf{N}$ 为一个被 $\mathbf{T}$ 正规化的 k_v-幂零子群，并且 $\Phi^+{}_{\mathbf{N}} \subset \Phi$为 $\mathbf{N}$中根的子集。我们用 $t \mapsto n_\lambda(t)$ 表示从 k_v 到与 λ相伴的根子群的一个同构。

我们在 $\Phi^+{}_{\mathbf{N}}$ 上固定一个线性序，使得任何根都不能表示为更大根之和。于是存在常数 $c_\nu^\lambda \in k_v$（仅取决于同构 n_λ 的选择）以及 $\varepsilon_{\nu,\nu}^\lambda \in \{0, 1\}$（仅取决于 Φ 上所选的序），使得

[5]该计算适用于任意域，但我们只会在这些情形中使用它。

$\nu \subset \Phi^+$ $\mathbf{N}\nu \in \nu$, $\lambda \in \Phi^+$ $\mathbf{N}$，对于所有 $\gamma \in \mathbf{T}(k_v)$ 以及 $n = \prod_{\lambda\in\Phi^+}$ $\mathbf{N}$ $n_\lambda(t_\lambda) \in \mathbf{N}(k_v)$，都有：

$$\gamma n^{-1}\gamma^{-1}n = \prod_{\lambda\in\Phi^+_{\mathbf{N}}} n_\lambda \left((1-\lambda(\gamma))t_\lambda + \sum_{\underline{\nu}\subset\Phi^+_{\mathbf{N}}:\sum_{\underline{\nu}}\nu=\lambda} c^\lambda_{\underline{\nu}} \prod_{\nu\in\underline{\nu}} \nu(\gamma)^{\varepsilon^\lambda_{\underline{\nu},\nu}} t_\nu \right).$$

证明。令 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 为所选的线性序。我们有

$$\gamma n^{-1}\gamma^{-1}n = \prod_{i=m}^{1} n_{\lambda_i}(-\lambda_i(\gamma)t_i) \prod_{i=1}^{m} n_{\lambda_i}(t_i).$$

在右侧，我们从 $i = m$ 开始，逐一将第一个乘积的所有分量移至它们在第二个乘积中应处的位置。完成后，我们得到最终公式，其中常数仅取决于交换子 $[n_{\lambda_i}(1)\, n_{\lambda_j}(1)]$。□

2.6.2. 阿基米德赋值处的交换子。这里 $k_v = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$。若 H, L 是李群，其李代数分别为 $\mathfrak{h}, \mathfrak{l}$，那么它们的切丛分别具有到 $H\times\mathfrak{h}, L\times\mathfrak{l}$ 的典范同构，因此可微映射 $H \to L$ 的雅可比矩阵就是映射 $H \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{l})$。

引理 2.9。在引理 *2.8* 的情形下，进一步假设 γ 在每个根子空间 $\mathbf{N}_\lambda$, $\lambda \in \Phi^+$ $\mathbf{N}$ 上均非平凡作用。那么映射

$$n \mapsto \gamma n^{-1}\gamma^{-1}n$$

是从 $\mathbf{N}$ 到其自身的微分同胚，且其雅可比行列式为常数。

证明。由于 $\mathbf{N}(k_v)$ 是单连通的，只需证明第二个断言。由引理 2.8 可知，雅可比矩阵在由选定的根序所确定的 $\mathfrak{n}$ 基下是上三角矩阵。此外，对角项恒等于 $1 - \lambda(\gamma)$，$\lambda \in \Phi^+$ $\mathbf{N}$，而关于 γ 的附加假设保证这些项均非零。□

2.6.3. 命题 *2.7* 的证明。设 $M := G_\gamma$，先考虑 M 是非紧环面的情形。此时，M 包含于 G 的一个真抛物子群中，因此可以找到一个由 M 正规化且在此性质下极大的幂零子群 N。于是 MN 是 G 的一个抛物子群，并且可以选取 G 的一个极大紧子群 K，使得岩泽分解 $G = MNK$ 成立（见 [29, 命题 7.31]）。由于 K 是紧的，只需证明映射 $N \to G$, $n \mapsto n^{-1}\gamma^{-1}n$ 是适当的。由引理 2.9，它是到 G 的闭子集 $\gamma^{-1}N$ 上的微分同胚，故证毕。

一般来说，M 可能不包含在任何真抛物子群中。然而，如果 M 是非紧的，那么它就包含一个非紧环面，因此我们总能找到一个真抛物子群 P，使得 $P \cap M$ 在 M 中余紧，并且 P 的一个列维因子包含于 M 中。接下来考虑映射序列 $K\times P \to K\times P/(P\cap M) \to G/M$，我们需要证明映射 $N/(N\cap M) \to G$, $n \mapsto n\gamma n^{-1}$ 是适当的，其中 N 是 P 的幺幂根基。通过采用引理 2.9 的适当变体，可以用与上文相同的论证证明这一点。

最后，如果 M 是紧的，那么 γ 也是紧的，且不与 G 中的任何半单非紧致元素交换，因此可以利用 KAK 分解证明该命题。

3. Benjamini–Schramm 收敛 E

本节中， G 是一个伴随半单李群，我们在其上固定一个哈尔测度（我们的陈述与这一选择无关）。在与 Benjamini-Schramm 收敛相关的问题中，我们只关心 G 在 X的等距变换群中的像，因此转到伴随群不会丢失任何信息。

3.1. **Benjamini–Schramm 收敛**。

3.1.1. 收敛到万有覆叠的 ***Benjamini-Schramm*** 收敛。Benjamini-Schramm 拓扑是定义在局部对称空间某个子集上的一种拓扑，其中包括所有有限体积局部对称空间以及空间 X 本身。本文只关注有限体积空间序列 $(\Gamma_n\backslash X)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到X的情形。我们称 $(\Gamma_n\backslash X)_{n\in\mathbb{N}}$ ***Benjamini-Schramm*** 收敛到 X，如果对于每个 $R>0$，都有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{vol}((\Gamma_n\backslash X)_{\le R})}{\mathrm{vol}(\Gamma_n\backslash X)}=0.$$

更直观地说，这意味着当 n 趋于无穷时， $\Gamma_n\backslash X$ 中典型点周围的单射半径会变得非常大。

3.1.2. 子群空间与不变随机子群。令 Sub(G) 表示 G 的闭子群构成的空间，并赋予其在紧集上的豪斯多夫收敛拓扑。它是一个紧 G空间，通常称为 Chabauty 空间。群 G 通过共轭作用于 Sub(G)。稍微滥用一下记号，我们也可以谈论 G的子群的单射半径:

$$\mathrm{inj}(\Gamma):=\inf\{d(\gamma K,K)\,|\,\gamma\in\Gamma\setminus Z(\Gamma)\}.$$

注意，非离散群的单射半径总是 0，但离散群的单射半径也可能为 0，若它与 K 有非平凡交集。不变随机子群是 G 上的一个 G- 不变概率测度，定义在 Sub(G) 上。对每个格 $\Gamma\subset G$，我们按如下方式关联一个支撑在 Γ 的共轭类上的不变随机子群 μ_Γ：

$$\mu_\Gamma:=\frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G)}\int_{\Gamma\backslash G}\delta_{\Gamma^g}dg.$$

我们可以利用 Sub(G) 上概率测度空间的弱-$*$ 拓扑，给出 Benjamini-Schramm 收敛的一种等价刻画如下（见命题 3.6]）： [2,

引理 ***3.1.*** 假设 G 是一个伴随群。局部对称空间序列 $\Gamma_n\backslash X$ ***Benjamini-Schramm*** 收敛到 X，当且仅当测度序列 μ_{Γ_n} 在弱-$*$ 拓扑下收敛到 $\delta_{\{1\}}$。

利用这个引理，关于局部对称空间序列是否 Benjamini–Schramm 收敛到 X 的问题，通常可以通过研究 μ_{Γ_n}的可能极限来回答。一项常常能使这一研究成为可能的结果，是关于不变随机子群的 Zariski 稠密性；参见 [2, 定理 2.9] 和 [24, 定理 1.9]之后的评注。

定理 3.2. 设 G 是一个无紧因子的伴随半单李群。设 μ 是 G的一个遍历不变随机子群。那么，存在 G 的一个正规子群 G_1，使得 $\mu(\mathrm{Sub}(G_1))=1$，且 μ-几乎所有子群在 G_1中都是 *Zariski* 稠密的。

特别是，如果 G 是单的，且 μ 是遍历不变随机子群，那么要么 μ 是平凡的，要么它几乎必然是 Zariski稠密的。

3.2. **收敛的主要判据**。设 f 是 G 上的光滑紧支撑函数（即 $f\in C_c^\infty(G)$）。设 W 是 G 中仅包含半单元素且在共轭作用下不变的开子集。对于格 Γ，我们定义

$$\mathrm{tr}\, R_\Gamma^W f := \sum_{[\gamma]_\Gamma\subset W} \mathrm{vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)\mathcal{O}(\gamma,f), \tag{3.1}$$

其中求和遍历 $\Gamma\cap W$ 中元素的所有共轭类 $[\gamma]_\Gamma$。下面简要讨论式 (3.1) 中的收敛问题。首先，我们需要对所有 $\gamma\in W$，余体积 $\mathrm{vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)$ 都是有限的，这等价于 $\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma$ 是紧的。如果 Γ 是一致的，这总是成立的。另一方面，如果它是非一致的，那么我们必须确保 W 中所有共轭类的余体积均有限。轨道积分 $\mathcal{O}(\gamma,\ f)$ 总是有限的（见命题 2.7）。最后，由于 f 的支撑只与有限多个 Γ 的共轭类相交，因此求和的收敛没有问题。

若对每个离散的扎里斯基稠密子群 $\Lambda\subset G$，都有 $\Lambda\cap W\neq\{1\}$，则称子集 W 在 G 中足够稠密。

定理 3.3。设 G 是一个半单伴随李群。设 W 是 G的一个足够稠密子集。设 (Γ_n) 是 G中的一列格。假设它们要么全都一致，要么对所有 n 和 $\gamma\in\Gamma_n\cap W$，$(\Gamma_n)_\gamma\backslash G_\gamma$ 都是紧的。

若 G是单的，且满足以下条件：

$$\forall f\in C_c^\infty(G)\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma_n\backslash X)}\,\mathrm{tr}\, R_{\Gamma_n}^W f\right)=f(1_G), \tag{3.2}$$

那么局部对称空间序列 $\Gamma_n\backslash X$ 在 *Benjamini–Schramm* 意义下收敛到 X。

若 G 不一定是单的，则在以下假设下同样成立：对每个非平凡真正规子群 $H\leq G$，都存在 Sub_H 的一个子集 F，使得对所有扎里斯基稠密子群 $\Lambda\subset H$ 和 $\{\Lambda\in\mathrm{Sub}_H$ 的一个邻域 U_H：在 Sub_G 中存在 $\Lambda\notin F\}$，使得对所有 n 和 $g\in G$，都有 $g\Gamma_n g^{-1}\notin U_H$。

3.2.1. 当 G 是单群时的证明。设 μ_n 为 G的一个不变随机子群，其支撑位于 Γ_n的共轭类上。我们要证明，(μ_n)的任意子序列的弱极限μ 都等于平凡不变随机子群 $\delta_{\{1\}}$。由于 G是单群，根据定理 3.2，只需证明 μ 的支撑位于非扎里斯基稠密子群上，即可推出它必定是平凡的。

为此，我们选择 $W=\bigcup_{C\in\mathcal{C}}C$ 的一个覆盖 W，其中 $\mathcal{C}$ 是可数的，且每个 $C\in\mathcal{C}$ 都是紧的。之所以可行，是因为根据命题 2], Sub_G 是可度量化的 [14, 。令 $Q_C=\{\Lambda:\ \Lambda\cap C\neq\emptyset\}$。这是 Sub_G 的一个 Chabauty闭子集。若 ν 是一个非平凡不变随机子群，那么它以正概率是 Zariski稠密的，因此存在 $C\in\mathcal{C}$ 使得 $\nu(Q_C)>0$。我们要证明对 μ 而言结论相反，这等价于证明：对每个 C，都存在一个定义在 Sub_G 上的非负博雷尔函数 F，它在 Q_C 上为正，且满足 $\int_{\text{子群空间}_G}F(\Lambda)d\mu(\Lambda)=0$。

固定 $C \in \mathcal{C}$ 并证明这一点。存在一个开且相对紧的子集 V，使得 $C \subset V$ 且 $V \subset W$。任取 $f \in C^\infty(G)$，使其在 C 上满足 $f > 0$，并在 $G \setminus V$ 上满足 $f = 0$，然后定义：

$$F(\Lambda) = \begin{cases} \sum_{\lambda \in \Lambda} f(\lambda) & \text{if } \Lambda \text{ is discrete,} \\ 1 & \text{if } \Lambda \text{ is not discrete and intersects } C, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

F 在 Sub_G 上是下半连续的、非负的，并且在 Q_C 上为正。另一方面，我们有：

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{Sub}_G} F(\Lambda) d\mu_n(\Lambda) &= \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma_n \backslash G)} \int_{G/\Gamma_n} \sum_{\gamma \in g\Gamma_n g^{-1}} f(\gamma) dg \\ &= \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma_n \backslash G)} \sum_{[\gamma]_{\Gamma_n} \subset W} \mathrm{vol}((\Gamma_n)_\gamma \backslash G_\gamma) \mathcal{O}_\gamma(f). \end{aligned}$$

根据所谓的“Portemanteau 定理” [27, 定理 13.16]，左侧的下极限大于或等于 $\int_{\mathrm{Sub}_G} F(\Lambda) d\mu(\Lambda)$。最后，假设 (3.2) 表明右侧收敛到 0。因此可得

$$\int_{\mathrm{Sub}_G} F(\Lambda) d\mu(\Lambda) = 0$$

由此完成证明。

3.2.2. 一般情形的证明。设 μ_n 是支撑在 Γ_n 的 G-轨道上的不变随机子群，并假设 μ 不支撑在平凡子群上。那么根据定理 3.2，存在一个态射 $\pi\colon G \to H$，其核为 $\ker(\pi) \neq \{1\}$，且

$$\mu(\{\Lambda \in \mathrm{Sub}_{\ker(\pi)} : \Lambda \text{ is Zariski-dense in } \ker(\pi)\}) > 0.$$

若 π 平凡（即 $\ker(\pi) = G$），则适用于单情形证明的同样论证会导出矛盾。另一方面，若 $\ker(\pi)$ 是 G 的真子群，则存在扎里斯基稠密子群 $\Lambda \subset \ker(\pi)$，使得对于 Λ 的每个 Chabauty 邻域 C，$\mu(C) > 0$。由于 $\Lambda \notin F$，我们可以选取 C 使得 $C \subset U_H$；而假设对所有 n 和 $g \in G$ 都有 $g\Gamma_n g^{-1} \notin U_H$，于是得到对所有 H 都有 $\mu_n(C) = 0$。标准论证表明，这与 μ_n 弱收敛到 μ 相矛盾。

3.3. **无界次数情形下一个非有效结果的简短证明**。本小节专门简要证明以下结果，它是定理 A 的“后半部分”。该结果严格弱于定理 D，但由于论证非常简短，我们认为值得将其纳入。

定理 3.4。设 G 是一个非紧半单李群，X 是其对称空间。设 Γ_n 是 G 中 G 的一列算术格，并假设 Γ_n 在 $\mathbb{Q}$ 上的迹域次数随 n 趋于无穷。那么，对于局部对称空间序列 $\Gamma_n \backslash X$，(1.1)成立。

证明的主要内容是以下结果 [21, 定理 C]。

定理 3.5。 设 G为一个实半单李群。存在一个常数$\varepsilon_G > 0$ ，使其满足以下性质。设 $\Gamma \subset G$ 为一个迹域为 k的算术格。设 $x \in X$。那么，由该集合生成的子群

$$\{\gamma \in \Gamma \mid d(x, \gamma x) \leq \varepsilon_G [k : \mathbb{Q}]\}$$

是几乎幂零的。

证明。 我们要证明 (1.1) 对局部对称空间 $\Gamma_n \backslash X$ 成立。根据 3.1，这等价于证明不变随机子群μ_{Γ_n} 在弱拓扑中收敛到支撑在平凡子群上的狄拉克测度 $\delta_{\{1\}}$ 。由于 G 上的不变随机子群空间是紧的，只需证明序列 (μ_{Γ_n}) 的任一聚点都等于 $\delta_{\{1\}}$。证明的思路相当简单。我们证明定理 3.5 迫使任何极限都支撑在 G的几乎阿贝尔子群集合上。然后我们利用不变随机子群的扎里斯基稠密性推出，这样的极限必须集中在平凡子群上。

假设相反，μ_{Γ_n} 聚于一个非平凡不变随机子群 μ。这意味着存在闭子群 $\Lambda \subset G$，$\Lambda \neq \{1\}$ 位于 μ 的支撑中，从而对 Λ 的任一蔡布蒂邻域 V，都有$\mu(V) > 0$ 。由此可知， V与 Γ_n 的共轭类相交于无穷多个 n。特别地， Λ 是蔡布蒂拓扑中序列 $g_n \Gamma_{k_n} g_n^{-1}$的极限。我们将由此以及算术马古利斯引理 3.5 推出， Λ 必须是几乎阿贝尔的。这与不变随机子群的博雷尔稠密性（定理 3.2）矛盾，从而足以证明该定理。

为此，我们需要以下引理 [21, 引理 5.2]。

引理 3.6。 对于任意 m，存在一个 A，具有以下性质。设 Δ是 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ 的有限生成子群，其中包含一个有限指数阿贝尔子群，且该子群只由半单元素组成。那么，Δ 包含一个指数至多为 A 的阿贝尔子群。

我们回到证明 Λ 必须是几乎阿贝尔的。为简化记号，假设序列 Γ_n 实际上收敛到 Λ ，并且所有 Γ_n 都是一致的。无论如何，它们中几乎全部都是一致的，因为任何迹域次数为 $>\dim(G)$ 的格都必须是一致的。令 ε_G 为定理 3.5 给出的常数，并回忆 k_{Γ_n} 是 Γ_n的迹域。固定 $R > 0$。由于 $[k_{\Gamma_n} : \mathbb{Q}] \to +\infty$，我们可以假设对所有 n 都有 $[k_{\Gamma_n} : \mathbb{Q}] \cdot \varepsilon_G > R + 10^{-2}$ 。令

$$\Lambda_{n,R} = \left\langle \Gamma_n \cap \mathrm{B}(R + 10^{-2}) \right\rangle, \Lambda_R = \langle \Lambda \cap \mathrm{B}(R) \rangle.$$

由定理 3.5 和引理 3.6 可知，存在 $A > 0$ 以及一个阿贝尔子群序列$H_{n,R} \subset \Lambda_{n,R}$ ，使得 $[\Lambda_{n,R} : H_{n,R}] \leq A$ 对所有 n成立。序列$H_{n,R}$ 收敛于一个阿贝尔子群 $H_R \subset \Lambda$；此外（由于 $\Lambda \cap \mathrm{B}(R)$的任一元素都是某个序列 $\gamma_n \in \Gamma_n \cap \mathrm{B}(R + 10^{-2})$ 的极限），我们看到$\Lambda_R \cap H_R$ 在 Λ_R中的指数至多为 A 。

在上一段中，我们证明了对于每个 $R > 0$，由包含在 Λ_R 中且指数至多为 A 的阿贝尔子群组成的集合 $\mathcal{A}_R$ 非空。每个集合 $\mathcal{A}_R$ 都是有限的，因为 Λ_R 是有限生成的，并且每当 $R < R'$ 且 $H \in \mathcal{A}_{R'}$ 时，我们有 $H \cap \Lambda_R \in \mathcal{A}_R$，因此可以选取一个 $H_1 \in \mathcal{A}_1$ ，使得对无穷多个 $N \in \mathbb{N}$，存在一个 $H_N \in \mathcal{A}_N$ 满足 $H_1 \subset H_N$。接着，我们可以选取一个整数 $N_2 > 1$和 $H_{N_2} \in \mathcal{A}_{N_2}$ ，使得 $H_1 \subset H_{N_2}$ ，且对无穷多个 $N \in \mathbb{N}$ ，存在一个 $H_N \in \mathcal{A}_N$ 满足 $H_{N_2} \subset H_N$。不断重复这一过程，我们构造出一个递增序列

$N_i \in \mathbb{N}$ 和 $H_{N_i} \in \mathcal{A}_{N_i}$ 满足 $H_{N_i} \subset H_{N_i+1}$。由此可知， $H = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} H_{N_i}$ 是 $\Lambda = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Lambda_{N_i}$ 的一个阿贝尔子群，其指数至多为 A。□

4. 伽罗瓦上同调

在本文余下部分中，我们将大量使用数域和局部域的伽罗瓦上同调。这里汇总若干事实（其中一些是标准结果，另一些则是新的），以便在后续各节中反复使用。

4.1. 记号。 我们令 Gal(k) 表示 k 在 k上的绝对伽罗瓦群。如果 $\bar{L}/k$是有限正规扩张，那么 Gal(L/k) 表示相应的有限伽罗瓦群。

非阿贝尔上同调。 如果$\mathbf{H}$ 是一个 k-群，那么$\mathbf{H}(k)$（分别地，$\mathbf{H}(L)$）是一个 Gal(k)-群（分别地，Gal(L/k)-群），我们将由此得到的非阿贝尔上同调集（对应于 $i = 0,1$）记作 $H^i(k,\mathbf{H})$（分别地， $H^i(L/k,\mathbf{H})$；其定义见 [51, 第45–46]页。当$\mathbf{H}$ 是阿贝尔群时，也定义高阶上同调群。如果$\mathbf{H}$ 是非阿贝尔群，那么 $H^0(k,\mathbf{H}) = \mathbf{H}(k) = H^0(L/k,\mathbf{H})$，而 $H^1(k,\mathbf{H})$是.....的商集

$$Z^1(k,\mathbf{H}) = \{c : \mathrm{Gal}(k) \to \mathbf{H}(\bar{k}),\, c(\sigma\tau) = c(\sigma)\cdot c(\tau)^\sigma\}$$

由等价关系 $b \sim c$ 给出，若对某个 $v \in$ 有 $c(\sigma) = v^{-1}b(\sigma)v^\sigma$ $\mathbf{H}(k)$。 $H^1(L/\bar{k},\mathbf{H})$的定义相同。

除非$\mathbf{H}$ 是阿贝尔的，否则这些集合不是群；不过它们有一个特异点，即从Gal(k)到$\mathbf{H}(k)$的平凡态射的类。

4.1.1. 正合列。 若$\mathbf{H}$ 是 k-群$\mathbf{G}$的 k-子群，则$\mathbf{V} = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ 是一个k-簇。我们可以定义 $H^0(k,\mathbf{V}) := \mathbf{V}(k)$，并且存在一个长正合列

$$1 \to \mathbf{H}(k) \to \mathbf{G}(k) \to \mathbf{V}(k) \to H^1(k,\mathbf{H}) \to H^1(k,\mathbf{G}) \tag{4.1}$$

（此处正合是指特异点的原像是前一个映射的像）；见 [51, 命题 36]。

若$\mathbf{H}$ 在$\mathbf{G}$中正规，则$\mathbf{G}/\mathbf{H}$ 是一个 k-群，并且该序列可再延拓一项 $H^1(k,\mathbf{G}/\mathbf{H})$；若$\mathbf{H}$ 在$\mathbf{G}$中是中心的，则它可延拓至 $H^2(k,\mathbf{H})$（见前引文献，命题38、43）。

沙法列维奇–泰特群。沙法列维奇–泰特群 $Ш^1(\mathbf{H})$ 是映射的核

$$H^1(k,\mathbf{H}) \to \prod_{v\in\mathrm{V}} H^1(k_v,\mathbf{H}).$$

它始终是一个有限群（见 [42,第 284] 页）。

4.2. 局部域上环面的伽罗瓦上同调。

4.2.1. 中山–泰特。 若$\mathbf{T}$ 是一个环面，则其特征群 $X^*(\mathbf{T})$是一个 Gal(k)-模。若 L 是$\mathbf{T}$的分裂域，则 Gal(k) 的作用可经由 Gal(L/k) 分解，因此 $X^*(\mathbf{T})$也是一个 Gal(L/k)-模。根据膨胀–限制正合序列可知，对于这两个伽罗瓦群，相应的上同调群相同。由局部中山–泰特定理可得以下推论，见 [42, 定理 6.2]。

定理 4.1。 设$\mathbf{T}$ 是定义在局部域 k_v 上、且在伽罗瓦扩张 L_v/k_v上分裂的代数环面。则存在一个同构 $H^1(L_v/k_v,\mathbf{T}) \simeq H^1(L_v/k_v, X^*(\mathbf{T}))$。

4.2.2. 沙法列维奇–泰特群的界。

引理 4.2. 设$\mathbf{T}$ 是一个定义在 k 上、维数为 r 的代数环面，并且在伽罗瓦扩张 L/k上分裂。那么

$$|Ш^1(\mathbf{T})| \leq |H^2(L/k, X^*(\mathbf{T}))| \leq [L:k]^{r[L:k]^2}.$$

若$\mathbf{T}$ 是半单代数群 G 的极大环面，则我们可以找到 L，使得$[L:k] \leq$(维数 $\mathbf{G}$ $-$秩 $\mathbf{G}$)!。特别地，此时有 $|Ш^1(\mathbf{T})| = O_{\dim \mathbf{G}}(1)$。

证明。 根据 [42, 命题 6.9 的证明，第 306] 页，存在一个满射 $H^2(L/k, X^*(\mathbf{T})) \twoheadrightarrow Ш^1(\mathbf{T})$，这解释了第一个不等式。第二个不等式是有限群上同调群大小的一个标准界，例如可由以下事实推出： $H^2(L/k, X^*(\mathbf{T}))$ 的指数整除 $[L:k]$ [13, 推论 10.2，第 84], 页；而 $\mathrm{Gal}(L/k)$ 存在一个表示复形，其二维胞腔不超过 $[L:k]^2$ 个（由乘法表给出）。

现在我们证明第二个陈述。若$\mathbf{T}$是半单代数群$\mathbf{G}$ 中的极大环面，则根系上有一个作用 $\pi : \mathrm{Gal}(k) \to \mathrm{Aut}(\Phi(\mathbf{G},\mathbf{T}))$。记 $\rho : \mathrm{Gal}(k) \to \mathrm{GL}(X^*(\mathbf{T}))$为伽罗瓦群在$\mathbf{T}$的特征模上的作用。根 $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{T})$张成$\mathbf{T}$的特征模中一个满秩子群，因此 $\ker \pi = \ker \rho$。特别地，$[\mathrm{Gal}(k) : \ker \rho] \leq |\mathrm{Aut}(\Phi)| \leq (\dim \mathbf{G} - \mathrm{rk}\, \mathbf{G})!$，所以域 $k^{\ker \rho}$（即$\mathbf{T}$的最小分裂域）是 k 的一个扩张，其次数至多为 $(\dim \mathbf{G} - \mathrm{rk}\, \mathbf{G})!$。□

4.2.3. H^1的界。

引理 4.3。 设 k_v 是一个局部域，且$\mathbf{T}$ 是一个 k_v-环面。则 $\left|H^1(k_v,\mathbf{T})\right|$ 有一个仅依赖于$\dim(\mathbf{T})$的常数上界。

证明。 令 L_v 为 $\mathbf{T}$ 的最小分裂域。伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(L_v/k_v)$ 通过自同构作用于特征模 $X^*(\mathbf{T})$。记 J 为 $\mathrm{Gal}(L_v/k_v)$ 在 $\mathrm{GL}(X^*(\mathbf{T}))$ 中的像。由于 $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ 只有有限多个有限子群，存在一个仅依赖于 $\dim(X^*(\mathbf{T}) \otimes \mathbb{Q}) = \dim(\mathbf{T})$ 的 A 上界。由定理 4.1，得到 $H^1(L_v/k_v, \mathbf{T}) \simeq H^1(L_v/k_v, X^*(\mathbf{T}))$。另一方面，我们有

$$|H^1(J, X^*(\mathbf{T}))| \leq |J|^{|J| \dim \mathbf{T}} \leq A^{A \dim \mathbf{T}},$$

由此完成证明。 □

4.3. **环面中的紧上同调类**。 若$\mathbf{T}$定义在局部域 k_v上，且 L_v/k_v 是一个有限扩张，我们将 $\mathbf{T}(L_v)^b$ 记为$\mathbf{T}(L_v)$的唯一极大紧子群。我们引入紧上同调类这一概念，它将在命题 7.5 的证明中起关键作用。

定义 4.4. 设 $\mathbf{T}$ 是定义在 k_v上的代数环面，设 L_v 是使$\mathbf{T}$分裂的 k_v 的最小伽罗瓦扩张。若类 $\alpha \in H^1(k_v,\mathbf{T})$ 有一个代表余循环 $c \in Z^1(L_v/k_v,\mathbf{T}(L_v)^b)$，则称其为紧的。

命题 4.5. 设$\mathbf{T}$ 是定义在 k_v 上的代数环面，且由 k_v 的一个非分歧扩张分裂。那么，$H^1(k_v,\mathbf{T})$ 中的每个紧上同调类都是平凡的。

证明。 我们利用最小分裂扩张 L_v/k_v 计算所有伽罗瓦上同调群；根据假设，该扩张是非分歧的。设$\mathbf{M}$ 是 k_v 上的乘法群，则存在一个非退化配对

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : H^1(L_v/k_v,\mathbf{T})\times H^1(L_v/k_v,X^*(\mathbf{T}))\to H^2(L_v/k_v,\mathbf{M})$$

由非退化配对 $\mathbf{T}\times X^*(\mathbf{T})\to\mathbf{M}$ 诱导（$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的非退化性已在 [42, 第 303]页得到证明）。特征 $\chi\in X^*(\mathbf{T})$ 在 $\mathbf{T}(L_v)^b$ 上取整数值，因此，如果 $\alpha\in H^1(L_v/k_v,\mathbf{T})$ 是紧的，那么线性形式 $\langle\alpha,\cdot\rangle$ 在$H^1(L_v/k_v,X^*(\mathbf{T}))$上的取值属于 $H^2(L_v/k_v,\mathfrak{o}_{L_v}^\times)$ 的像。由于 L_v 是非分歧的，根据下面的引理 4.6，后一个群是平凡的。于是我们得到 $\langle\alpha,\cdot\rangle$ 是平凡的。因此，由配对的非退化性可得 $\alpha=0$。□

引理 4.6。 对于每个非分歧伽罗瓦扩张 L_v/k_v，群 $H^2(L_v/k_v,\mathfrak{o}_{L_v}^\times)$ 均消失。

证明。 设 k_v^u 为 k_v的非分歧闭包。利用膨胀—限制长正合列（亦称霍赫希尔德–塞尔谱序列），我们得到

$$H^1(k_v^u/L_v,\mathfrak{o}_{k_v^u}^\times)^{\mathrm{Gal}(L_v/k_v)}\to H^2(L_v/k_v,\mathfrak{o}_{L_v}^\times)\to H^2(k_v^u/k_v,\mathfrak{o}_{k_v^u}^\times).$$

由 [42, 定理6.8] 可知第一项为零，因此映射 $H^2(L_v/k_v,\mathfrak{o}_{L_v}^\times)\to H^2(k_v^u/k_v,\mathfrak{o}_{k_v^u}^\times)$是单射。为完成该证明，只需证明 $H^2(k_v^u/k_v,\mathfrak{o}_{k_v^u}^\times)=0$。这可由 [42, 第299页命题6.7], 的证明中的论证应用于乘法环面$\mathbf{G}_m$而得到。 □

5. 有界度情形下的Benjamini–Schramm 收敛

在本节中， G 是一个半单、单连通李群。将设定从伴随群改为单连通群，是因为Prasad 体积公式中的许多因子仅在单连通情形下被明确算出。

5.1. 算术格的更精细描述。

5.1.1. *Bruhat–Tits* 建筑与抛物型子群。 我们将介绍 Bruhat–Tits 理论的一些结果，这些结果将在后文中发挥作用。设 $\mathbf{G}$ 是一个单连通半单 k-群，且 $v\in\mathrm{V}f$。与 v-进群 $\mathbf{G}(k_v)$ 相伴的是一个欧几里得建筑（见 [55, 2.1]），我们将其记作 $X=X(\mathbf{G}\ k_v)$。

若 $\mathbf{T}$ 是 $\mathbf{G}$的一个极大 k_v-分裂环面，则存在唯一一个由 $\mathbf{T}(k_v)$ 保持不变的公寓 $A\subset X$。若 C 是 A的一个室（即一个极大单形），则相应的 Iwahori子群 I 是 $\mathbf{G}(k_v)$ 中 C 的稳定子。 C 的面与$\mathbf{G}$,$\mathbf{T}$的一组仿射根基底的子集一一对应；面（即任何包含该 Iwahori子群的紧子群）的稳定子称为抛物型子群（见 [43, 0.5]）。

设 $\Phi_a(\mathbf{G},\mathbf{T})$ 是 k_v 上的仿射根系，$\Delta_{a,v}$ 是相应的 Dynkin 图。图的顶点对应于 C 边界上的最高维面。对于 $\Theta_v\subset\Delta_{a,v}$，我们用 C_{Θ_v} 表示 C 中对应的面，它是 X 中的一个单形。根据上一段，$\mathbf{G}(k_v)$ 的任意抛物型子群U_v 都与某个唯一单形 C_{Θ_v}的稳定子共轭，我们称Θ_v 为 U_v 的类型 。

类型为 Θ_v 的群 U_v 称为特殊，如果 $\Delta_a \setminus \Theta_v$ 与 k_v 上$\mathbf{G}$ 的 Dynkin 图同构。当且仅当这一性质在 k_v 的任意非分歧有限扩张上仍成立时，它才称为超特殊（见 [43, 0.5, 0.6]）。

5.1.2. 主算术格与极大算术格。若 Γ 中的 G 是格，且在所有格中按包含关系极大，则称其为极大格。

设 k 是一个数域，$\mathbf{G}$ 是一个 k 群，并且存在一个赋值集合 $S_\infty \subset \mathrm{V}_\infty$，使得 $\prod_{v\in S_\infty} \mathbf{G}(k_v) \cong G$，且对于所有 $v \in \mathrm{V}_\infty \setminus S_\infty$，$\mathbf{G}(k_v)$ 都是紧的。注意，此时$\mathbf{G}$ 必为半单且单连通。由 2.5 可知，任意同余子群 $\Gamma_U \subset \mathbf{G}(k)$ 都是 G 中的算术格。

若 $U_v, v \in \mathrm{V}f$ 是抛物型子群，且对于几乎所有 v，U_v 都是超特殊的，并且 $U = \prod_{v\in \mathrm{V}_f} U_v$，则称格 Γ_U 为 G 的主算术子群。下述命题包含于 [12, 命题 1.4] 中。

命题 5.1。 G 中的极大算术格是 G中某个主算术格的正规化子。

5.1.3. 分类。 G 中主算术格Γ_U 的共轭类由数域 k、 k-群$\mathbf{G}$的同构类以及局部群 $U_v, v \in \mathrm{V}f$ （等价地，类型 Θ_v）决定。对于群$\mathbf{G}$，我们只关注以下数据[6]:

(1) 最小域扩张 ℓ/k，使得$\mathbf{G}/\ell$ 是其分裂形式的内形式；但$\mathbf{G}$ 为 ${}^6D_4$型时除外。在后一种情形下， ℓ 定义为此域的一个子域，其 ℓ/k 次数为 3（见 [43, 0.2]）。无论哪种情形， ℓ 在伽罗瓦共轭意义下都是唯一确定的。(2) 有限赋值集 $v \in \mathrm{V}f$，使得$\mathbf{G}$ 在 k_v上不是准分裂的。

关于紧开子群 U，我们将使用以下信息:

(3) 使 U_v 不是特殊的有限赋值集合 $v \in \mathrm{V}f$；(4) 以及$\mathbf{G}$ 在 k_v 的非分歧扩张上分裂、但 U_v 不是超特殊的那些赋值。

我们将用 S_U 表示所有落入4、3或2中某一集合的“坏赋值” $v \in \mathrm{V}f$ 所成的集合。

5.2. 体积公式。

5.2.1. 强逼近。由于 G是非紧的，且$\mathbf{G}$ 是单连通的，后者关于无穷位[42, 定理7.12]满足强逼近性质。也就是说，$\mathbf{G}(k)$在$\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$中稠密。设 dg_∞ 为$\mathbf{G}(k_\infty)$上的标准哈尔测度。设 dg_f 为$\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$上的哈尔测度，其规范化使得$\mathrm{vol}^{dg_f}(U) = 1$。于是，我们有一个同构

$$\Psi\colon (\mathbf{G}(k)\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A})/U, dg_\infty \otimes dg_f) \to (\Gamma_U\backslash G, dg_\infty)$$

测度空间的，其中我们通过在离散子群$\mathbf{G}(k)$ Γ_U 上取计数测度，并在紧子群 U上取Haar概率测度来定义商测度。映射 Ψ 仅由第一投影$\mathbf{G}(\mathbb{A}) = \mathbf{G}(k_\infty)\times\mathbf{G}(\mathbb{A}_f) \to \mathbf{G}(k_\infty)$诱导。

[6]注意，尽管它并不能完全刻画$\mathbf{G}$ 的 k-同构类，但在有限歧义的意义下可以做到。

5.2.2. 普拉萨德体积公式。 我们将在此描述Gopal Prasad [43] 所得公式中关于 G 中主算术格相对于 G上标准哈尔测度（按第2.3节规范化）的余体积vol($\Gamma_U\backslash G$)的部分。下述命题是其结果的一个推论，并针对我们的需要作了调整。下文中我们用 C_G 表示仅依赖于 G的常数。

命题 5.2. 设 k 是一个数域，设 $\mathbf{G}/k$ 是一个（单连通） k-群，使得 $\mathbf{G}(k_\infty)$ 同构于 G 与一个紧因子的直积，并且 U 是一个由抛物型子群之积构成的紧开子群，从而 Γ_U 是一个主算术格。那么

$$\mathrm{vol}(\Gamma_U\backslash G) \geq C_G|\Delta_k|^{\frac{\dim(\mathbf{G})}{2}} \cdot N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\ell/k}) \cdot \prod_{v\in S_U} q_v$$

其中 S_U、ℓ 定义如上文 *5.1* 节所述，而 q_v 是 k_v的剩余域的基数。

证明。 这直接由 [43, 定理 3.7] 中的精确公式以及该文献中的以下补充事实得出：在无穷乘积$\mathscr{E}$ 中，所有因子均为 >1，且它们在 S_U 处的赋值上为 $>q_v$ （该文献中的命题 2.10(iv)）；对于所有类型， $N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\ell/k})^{1/2}$ 的指数 $\mathfrak{s}(G)$ 至少为 2（可利用该文献 0.4 节给出的公式逐一验证）。□

5.3. **极大格的指数**。 为了估计极大算术格的余体积，我们将使用以下结果。该结果可由 [34] 和 [12], 中的标准论证推出，参见处理偶正交群情形的 [8, 第 4] 节。我们基本上沿用贝洛利佩茨基–埃默里在 [8, 第4], 节中的论证，但在不需要其精确度的部分从简处理。

命题 5.3。 设 Γ_U 是 G 中的主算术格，且 $\Gamma = N_G(\Gamma_U)$是其正规化子。设 $\varepsilon>0$。那么

$$[\Gamma:\Gamma_U] \ll_\varepsilon C_G^{|S_U|} N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\ell/k})^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \Delta_k^{\frac{3}{2}+\varepsilon}.$$

证明。 设 h_ℓ 是 ℓ的类数。我们先证明

$$[\Gamma:\Gamma_U] \leq \begin{cases} C_G^{|S_U|}h_\ell & \text{if } \mathbf{G} \text{ is not of type } {}^1D_{2m}, \\ C_G^{|S_U|}h_k^2 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

令$\mathbf{G}^{\sim}$为$\mathbf{G}$ 的伴随群，并令 π 为从$\mathbf{G}$ 到$\mathbf{G}$的态射。我们有正合列

$$1 \to \mathbf{Z}_{\mathbf{G}} \to \mathbf{G} \to \overline{\mathbf{G}} \to 1,$$

这导出了伽罗瓦上同调中的以下正合列：

$$\mathbf{G}(k) \xrightarrow{\pi} \overline{\mathbf{G}}(k) \xrightarrow{\delta} H^1(k, \mathbf{Z}_{\mathbf{G}}). \tag{5.1}$$

由于 $\Gamma_U \subset \mathbf{G}(k)$，且 Γ 的像包含于$\mathbf{G}(k)$，映射 δ 诱导出映射$\Gamma/\Gamma_U \to H^1(k,\mathbf{Z}_{\mathbf{G}})$。根据 [34, 命题 2.6(i)], ，以下序列是正合的：

$$1 \to \mathbf{Z}_{\mathbf{G}}(\overline{k})/\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}(k) \to \Gamma/\Gamma_U \xrightarrow{\delta} H^1(k, \mathbf{Z}_{\mathbf{G}}). \tag{5.2}$$

接下来要确定 Γ/Γ_U 在（无限）群 $H^1(k,\ \mathbf{Z}_{\mathbf{G}})$ 中的像。为此，注意到我们可以将态射 $\mathbf{G}(k) \to \prod_{v\in Vf}\mathrm{Aut}(\Delta_{a,\ v})$（由 $\mathbf{G}(k_v)$ 对旁紧子群的共轭作用诱导）提升为映射 ξ：$H^1(k,\ \mathbf{Z}_{\mathbf{G}}) \to$

$\prod_{v\in V_f}\mathrm{Aut}(\Delta_{a,\ v})$，这是利用上同调正合列 (5.1) 得到的，因为 $\mathbf{G}(k)$ 对局部 Dynkin 图 $\Delta_{a,\ v}$ 的作用是平凡的。然后， $\delta(\Gamma/\Gamma_U)$ 在 S_U 以外的每个有限赋值处都平凡作用（见 [8, 4.2]），并且在 S_U 中的赋值处保持非平凡类型 Θ_v 。结合 (5.2)，这意味着

(5.3)

$$|\Gamma/\Gamma_U| \leq |\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}(\overline{k})| \cdot \prod_{v\in S_U} |\operatorname{Aut}(\Delta_{a,v})| \cdot |\{c\in H^1(k,\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}):\ \forall v\in \mathrm{V}_f\setminus S_U,\, \xi(c)_v=\mathrm{Id}\}|$$
$$\leq |\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}(\overline{k})| \cdot {C_G}^{|S_U|} \cdot |H_{\xi,S_U}|$$

由于对任意 Dynkin 图有 $|\mathrm{Aut}(\Delta)|\leq C_G$ ，以及一个依赖于 G 的常数 C_G ，并且

$$H_{\xi,S_U} := \{c\in H^1(k,\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}):\ \forall v\in \mathrm{V}_f\setminus S_U,\, \xi(c)_v=\mathrm{Id}\}$$

我们按照 [8]估计该集合的大小。我们首先需要对 $H^1(k,\mathbf{Z}_{\mathbf{G}})$ 给出恰当的描述。根据 [42, 第 332], 页上的表，中心 $\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}$ 具有形式μ_b 或 $\mathrm{res}^{(1)}_{\ell/k}(\mu_b)$，其中 ℓ 是上文 1 中定义的域， b 是仅依赖于 G 的正整数，而 μ_b 是定义 b-单位根的代数群。唯一的例外是 $\mathbf{G}$ 为 D_{2m} 型内形式的情形。此时 $\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}=\mu_2\times\mu_2$。我们现在将限于前两种情形。总存在一个从 $H^1(k,\mathbf{Z}_{\mathbf{G}})$ 到 $\ell^\times/(\ell^\times)^b$ 的映射。在情形 $\ell=k$ 下它是同构，否则它来自伽罗瓦上同调中的一条长正合列。其核的大小以 b为界，见 [8] 中的 (17)。设

$$\ell^\times_{b,S_U} = \{x\in\ell:\ \forall v\in \mathrm{V}_f\setminus S_U,\, v(x)=0 \pmod b\}$$
$$\ell^\times_{b} = \{x\in\ell:\ \forall v\in \mathrm{V}_f,\, v(x)=0 \pmod b\}$$

于是 $\ell^\times_{b,S_U}\supset \ell^\times_b\supset(\ell^\times)^b$ ，根据 [8, 4.9] （另见 [12, 第 2] 节），我们有$H_{\xi,S_U}\subset \ell^\times_{b,S_U}/(\ell^\times)^b$。因此

$$|H_{\xi,S_U}|\leq |\ell^\times_{b,S_U}/(\ell^\times)^b|.$$

由乘法群的弱逼近性质，$\ell^\times_{b,S_U}/\ell^\times_b\cong(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^{|S_U|}$。我们有

$$|\ell^\times_{b,S_U}/(\ell^\times)^b| = b^{|S_U|}\cdot|\ell^\times_b/(\ell^\times)^b|$$

而 [12,命题 0.12]）给出了估计

$$|\ell^\times_b/(\ell^\times)^b|\leq b^{[\ell:\mathbb{Q}]}h_\ell$$

从而

$$|H_{\xi,S_U}|\leq b\cdot b^{|S_U|}b^{[\ell:\mathbb{Q}]}h_\ell$$

由于（假设 $[\ell:\mathbb{Q}]$ 有界），结合 (5.3)，当$\mathbf{G}$ 不是 ${}^1D_{2m}$ 型时，证明即告完成。

剩下需要处理的是 ${}^1D_{2m}$ 型的$\mathbf{G}$ 。在这种情况下， $\ell=k$ 且$\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}=\mu_2\times\mu_2$。上述论证给出 $|\Gamma/\Gamma_U|\leq C_G^{|S_U|}\cdot|h_k|^2$。

现在我们可以完成该命题的证明。由布劳尔–西格尔定理，$h_\ell\ll_\varepsilon \Delta_\ell^{1/2+\varepsilon}$ ，因此

$$h_\ell\ll_\varepsilon \Delta_\ell^{\frac12+\varepsilon}=N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\ell/k})^{\frac12+\varepsilon}\Delta_k^{\frac{[\ell:k]}{2}+\varepsilon}\leq N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\ell/k})^{\frac12+\varepsilon}\Delta_k^{\frac32+\varepsilon},$$

因为 $[\ell\colon k]\le 3$。对于类型 ${}^1D_{2m}$ 的情形，我们使用布劳尔-西格尔估计得到 $h_k^2\ll_\varepsilon \Delta_k^{1+\varepsilon}$ 。命题得证。□

注意，$\ell_b^\times$ 在 h_ℓ 中的像可能远小于整个类群。对于判别式较大的域，主要的损失就发生在这里。猜想认为，对于任意 $\varepsilon>0$ ，像的大小为 $\ll\Delta_\ell^\varepsilon$ ；但即便只是得到指数$<1/2$ 似乎也很困难，目前一般情形下尚无已知结果（关于此问题的更多背景以及针对 $b=2$的一个结果，见 [10] ）。

5.4. **收敛**。 本小节证明定理 E，并假设一些估计成立；我们将在接下来的两节中证明这些估计。

5.4.1. 阿代尔迹公式。 对于定义在 G 上的函数 f 以及主算术格Γ_U，我们令 $f_{\mathbb{A}}=f\otimes 1_{U_\infty}\otimes 1_U$，其中 U_∞ 是 $v\in S_\infty$ 对应的$\mathbf{G}(k_v)$与$\mathbf{G}(k_v)$的乘积，且后者为紧群。对于有理共轭类 $[\gamma]_{\mathbf{G}(k)}$，若其阿基米德部分满足$[\gamma]_{\mathbf{G}(k_\infty)}\subset W\times U_\infty\subset\mathbf{G}(k_\infty)$.，则记为 $[\gamma]_{\mathbf{G}(k)}\subset W$。

命题 5.4. 设 f、W 如定理 *3.3* 中所述。我们有

$$\operatorname{tr} R^W_{\Gamma_U}f=\sum_{[\gamma]_{\mathbf{G}(k)}\subset W}\operatorname{vol}(\mathbf{G}_\gamma(k)\backslash\mathbf{G}_\gamma(\mathbb{A}))\int_{\mathbf{G}(\mathbb{A})/\mathbf{G}_\gamma(\mathbb{A})}f_{\mathbb{A}}(x\gamma x^{-1})dx \tag{5.4}$$

证明。设 Ψ 是 5.2.1 中描述的从 $\mathsf{G}(k)\backslash\mathsf{G}(\mathbb{A})/U$ 到 $\Gamma_U\backslash G$ 的同构。设 F （分别为 $F_{\mathbb{A}}$）是由 $F(x)=\sum_{[\gamma]_{\Gamma_U}\subset W}f(x\gamma x^{-1})$（分别为 $F(x)=\sum_{[\gamma]_{\mathbf{G}(k)}\subset W}f_{\mathbb{A}}(x\gamma x^{-1})$）定义的 Γ_U 不变（分别为 $\mathsf{G}(k)$ 不变）函数。那么我们有 $F_{\mathbb{A}}=F\circ\Psi$ ，并且由于局部测度经过归一化，使得 U_v 的体积为 1，因此可得 $\int_{\Gamma\backslash G}F(x)^{dx}=\int_{\mathsf{G}(k)\backslash\mathsf{G}(\mathbb{A})}F_{\mathbb{A}}(x)dx$ （另见 [20] 中引理 4.3 的证明）。另一方面，通常的展开技巧（例如见 [6]）表明， $\int_{\Gamma\backslash G}F(x)dx$ （分别为 $\int_{\mathsf{G}(k)\backslash\mathsf{G}(\mathbb{A})}F_{\mathbb{A}}(x)dx$）等于等式 (5.4) 左边（分别为右边）的项，由此证明了该等式。□

5.4.2. 主算术格的情形。在下文 5.4.4 中（对于非紧情形则见 5.5，后者需要一些额外的论证），我们将从以下命题推导出定理 E。

命题 5.5。设 W 是 G 中强正则的、 $\mathbb{R}$-正则半单元素集合的一个子集。设 Γ_U 是一个主算术格，并令 k、S_U 按照 *5.1.3* 中的定义给出。于是，对于任意 $f\in C_c^\infty(G)$ ，我们有

$$\operatorname{tr} R^W_{\Gamma_U}f\ll_{f,d}\Delta_k^{\frac{\dim(\mathbf{G})}{2}-\delta}$$

对于任意 $\delta<\frac{\text{维数}(\mathbf{G})-\text{维数}(\mathbf{T})}{2}$，其中$\mathbf{T}$ 是 $\mathbf{G}$ 中的一个极大 k-环面，且 $d=[k\colon\ \mathbb{Q}]$。

鉴于上述命题 5.4，命题 5.5 是以下定理的直接推论。该定理本身是我们这部分工作的主要技术贡献，其证明依赖于我们将在接下来的两节中证明的估计。

定理 5.6. 设 G 为伴随李群， f 为 G 上的连续紧支撑函数。设 W 为强正则、 $\mathbb{R}$-正则之集合的一个子集

G 中的半单元素。对固定的 $d \in \mathbb{N}$ 以及所有满足 $[k:\mathbb{Q}] = d$ 且 $\mathbf{G}(k_\infty) \simeq G$ 的数域，我们有

$$\sum_{[\gamma]_{\mathbf{G}(k)} \subset W} \mathrm{vol}(\mathbf{G}_\gamma(k)\backslash \mathbf{G}_\gamma(\mathbb{A})) \int_{\mathbf{G}_\gamma(\mathbb{A})\backslash \mathbf{G}(\mathbb{A})} f_{\mathbb{A}}(x^{-1}\gamma x)dx \ll_{f,d} \Delta_k^{\frac{\dim(\mathbf{G})}{2}-\delta}$$

对于任意 $\delta < \frac{\text{维数}(\mathbf{G})-\text{维数}(\mathbf{T})}{2}$，其中 $\mathbf{T}$ 是 $\mathbf{G}$ 中的一个极大 k-环面。

证明。设

$$\mathcal{O}(\gamma, f_{\mathbb{A}}) = \int_{\mathbf{G}_\gamma(\mathbb{A})/\mathbf{G}(\mathbb{A})} f(x\gamma x^{-1})dx$$

我们在此说明如何估计该和式

$$\sum_{[\gamma]_{\mathbf{G}(k)} \subset W} \mathrm{vol}(\mathbf{G}_\gamma(k)\backslash \mathbf{G}_\gamma(\mathbb{A})) \cdot \mathcal{O}(\gamma, f_{\mathbb{A}}),$$

其余大部分技术细节将在接下来的两节中给出。$f_{\mathbb{A}}$ 的支撑在$\mathbf{G}(\mathbb{A})$中是紧的，因此这是一个有限和。事实上，若假设 f 的支撑包含在半径为 R的球$B_G(1,R)$中，则我们可以将求和限制在满足 $m(\gamma) \leq R$ 和 $\gamma \in U$的共轭类$[\gamma] \subset \mathbf{G}(k)$上。

对于这样的 γ，我们在定理 6.1中证明，对于归一化为 $\mathrm{vol}(U) = 1$ 的哈尔测度，我们有

$$\mathcal{O}(\gamma, f_{\mathbb{A}}) \ll_{f,[k:\mathbb{Q}]} 1. \tag{5.5}$$

为了估计中心化子的余体积，我们遵循 [20, 引理 6.4], 的证明，其中该结果由 Ullmo 和 Yafaev 的结果 [56]推出。对于任意 k-环面T</style}，我们有

$$\mathrm{vol}(\mathbf{T}(k)\backslash \mathbf{T}(\mathbb{A})) \ll |\Delta_k|^{\frac{r}{2}} \cdot N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{L/k})^{\frac{1}{2}} \cdot L(1, \chi_{\mathbf{T}})$$

其中 $r = \dim(\mathbf{T})$，而 $L(\cdot, \chi_{\mathbf{T}})$是与 $\mathrm{Gal}(k)$ 在 $X^*(\mathbf{T})$上的表示的特征$\chi_{\mathbf{T}}$ 相关联的 Artin L-函数。由于在我们的假设下环面$\mathbf{T}$ 是各向异性的， L-函数在 1 处全纯。在关于γ的假设下，由命题 2.2可知， $N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{L/k}) = O(1)$。对于项 $L(1\,\chi_{\mathbf{T}})$，根据 [56, 命题 2.1] ，我们有对于任意 $\varepsilon > 0$

$$L(1, \chi_{\mathbf{T}}) \ll_{\varepsilon,[L:\mathbb{Q}]} |\Delta_L|^{\varepsilon}$$

且右侧等于 $N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{L/k})^{\varepsilon}|\Delta_k|^{\varepsilon\cdot[L:k]}$。因此

$$\mathrm{vol}(\mathbf{T}(k)\backslash \mathbf{T}(\mathbb{A})) \ll_{f,[k:\mathbb{Q}],\varepsilon} |\Delta_k|^{\frac{r+\varepsilon}{2}} \tag{5.6}$$

对于任意 $\varepsilon > 0$。

令 $\mathcal{C}(R,U)$ 为满足 $m(\gamma) \leq R$且 $\gamma \in U$ 的共轭类 $[\gamma] \subset \mathbf{G}(k)$ 的集合。由 (5.5)、(5.6) 可得

$$\sum_{[\gamma]_{\mathbf{G}(k)} \subset W} \mathrm{vol}(\mathbf{G}_\gamma(k)\backslash \mathbf{G}_\gamma(\mathbb{A}))\mathcal{O}(\gamma, f_{\mathbb{A}}) \ll_{f,[k:\mathbb{Q}],\varepsilon} |\mathcal{C}(R,U)| \cdot |\Delta_k|^{\frac{r+\varepsilon}{2}}.$$

在定理 7.1 中，我们证明 $|\mathcal{C}(R,U)| \ll_{R,[k:\mathbb{Q}]} 1$。记 $\delta = \dim(\mathbf{G})_2{}^{-r-\varepsilon}$，可得

$$\sum_{[\gamma]_{\mathbf{G}(k)} \subset W} \mathrm{vol}(\mathbf{G}_\gamma(k)\backslash \mathbf{G}_\gamma(\mathbb{A}))\mathcal{O}(\gamma, f_{\mathbb{A}}) \ll_{f,[k:\mathbb{Q}],\varepsilon} |\Delta_k|^{\frac{\dim(\mathbf{G})}{2}-\delta}.$$

由于 $\varepsilon > 0$可以任意小，因此 δ 可以任意接近$\dim(\mathbf{G})_2{}^{-r}$。证明完毕。□

5.4.3. 预备引理。如果我们将范围限制在具有额外正则性性质的共轭类上，则关于中心化子的体积或轨道积分的各种估计会变得更加容易。这正是我们引入集合 W的原因。为了处理极大格，我们将需要强 m–正则性的概念（$m \in \mathbb{N}$）；本文其他地方不会用到这一概念。若$\mathbf{G}$是一个半单群，$\mathbf{T}$ 是G 中的一个极大环面，则元素 $g \in T$ 在满足以下条件时称为强 m–正则：对于所有非平凡特征$\xi \in X^*(\mathbf{T})$，其中 ξ 是至多 $2m$ 个根的乘积，都有 $\xi(g) \neq 1$ 。我们注意到，对于任意 m ，强m-正则元素构成一个扎里斯基稠密子集。

引理 5.7。设 G 是一个半单李群，且 $m \in \mathbb{N}$。强m–正则、 $\mathbb{R}$-正则元素的集合在 G 中足够稠密。

证明。在 [44] 中，Prasad 给出了一个证明，说明半单李群的任意扎里斯基稠密子群都包含一个 $\mathbb{R}$-正则元。他的论证实际上蕴含了上述更强的结论，下面我们对此作出说明。在证明开头，Prasad 为 $\gamma \in G$引入了一个数值不变量 $m(\gamma)$，当且仅当 γ是 $\mathbb{R}$-正则时，该不变量等于 1。在引理 B 中，他证明，对于 G中的任意扎里斯基稠密子群 Λ ，最小值 $\min_{\gamma\in\Lambda} m(\gamma)$ 可在正则元素构成的子集上取到；证明的其余部分则证明 $\min_{\gamma\in\Lambda} m(\gamma) = 1$。另一方面，引理 B 的证明立即蕴含，该最小值可在Λ 与 G的任意扎里斯基开子集的交集上取到。特别地，这对强 m–正则元素也成立。□

为了检验定理 3.3 中针对非单群出现的附加条件，我们需要以下引理。

引理 5.8. 设 L、 H 是两个伴随半单群，且 $G = L \times H$。存在一个 V 的邻域，它不包含任何 G 的不可约算术格。$\mathrm{Sub}_H \setminus \{\{1_H\}\}$

证明。设 $\|\cdot\|_H, \|\cdot\|_L$ 是 H 和 L 上的一些范数。设 π_L, π_H 分别是从 G 到 L, H 的投影。我们定义 Sub_G 的以下开子集：

$$V_{R,\varepsilon} = \{\Lambda \in \mathrm{Sub}_G : \exists g \in \Lambda \setminus \{1\} : \|\pi_L(g) - 1\|_L < \varepsilon, \|\pi_H(g)\| < R\}.$$

对于任意满足 $\lim_{\varepsilon\to 0} R_\varepsilon = +\infty$ 的 $R_\varepsilon > 0$, $\bigcup_{R>0} V_{R_\varepsilon,\varepsilon}$ 是 Sub_G 中 Sub $_H \setminus \{\{1_H\}\}$ 的一个邻域。我们要证明，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $R_\varepsilon > 0$ ，使得对 G 中的每个不可约算术格 Γ ，以下结论成立：若 $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$ 满足 $\|\pi_L(g)$ $- 1\|_L < \varepsilon$，则 $\|\pi_H(g)\| \geq R_\varepsilon$，且 $\lim_{\varepsilon\to 0} R_\varepsilon = +\infty$。根据构造，集合 V: $= \bigcup_{R>0} V_{R_\varepsilon,\varepsilon}$ 不会包含 G 的任何不可约算术格。

由于 Γ 是不可约算术的，且 G 是伴随的，因此存在一个数域 k、一个 k-群 $\mathbf{G}$ 以及一个划分 $\mathrm{V}_\infty = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ ，使得

$$H = \mathbf{G}(k_{S_1}),\ L = \mathbf{G}(k_{S_2}),$$

$\mathbf{G}(k_{S_3})$是紧的，且 Γ是$\mathbf{G}(k)$的算术子群。特别地，$\mathrm{Ad}(\gamma)$ 的特征值 λ_1，……， λ_m（其中 Ad 是$\mathbf{G}$ 在其 k-李代数上的伴随表示）都是代数整数。对于每个 i

$$\prod_{v\in S_2} |\lambda_i - 1|_v \ll \varepsilon$$

（常数仅取决于 L上范数的选择），并且

$$\prod_{v\in S_3}|\lambda_i-1|_v<2^{|S_3|}<2^d.$$

另一方面，由于 λ_i 是代数整数，且它们并非全都等于 1，因此必定存在一个 $1\le i\le m$，使得

$$\prod_{v\in \mathrm{V}_\infty}|\lambda_i-1|\ge 1.$$

由此可得

$$\prod_{v\in S_1}|\lambda_i-1|\gg 2^{-d}\varepsilon^{-1}.$$

这就完成了证明，因为 $\|\pi_H(\gamma)-1\|\gg\prod_{v\in S_1}|\lambda_i-1|$（其中常数仅取决于 H 上范数的选择），所以可以选取 $R_\varepsilon\gg\varepsilon^{-1}$。□

5.4.4. 一致格情形下定理 *E* 的证明。令 m 为一个整数（稍后确定，它仅取决于 G, d），并令 W 为 G 中 $\mathbb{R}$-正则且强 m-正则元素的集合。由引理 5.7、引理 5.8 和定理 3.3（其中 $F=\{1\}$ 和 U 由 5.8 给出）可知，我们只需证明，对于任意由极大算术格组成、其迹域次数为 d 的序列 Γ_n，式 (3.2) 成立。

我们从以下引理开始。

引理 5.9。有限群 Γ/Γ_U 的指数由仅取决于 G 和次数 $[k:\mathbb{Q}]$的常数所界定。

证明。由 [34,命题 2.6(i)]可得一个正合列

$$0\to\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}(\overline{k})/\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}(k)\to\Gamma_n/\Gamma_{U_n}\to H^1(k,Z_{\mathbf{G}}).$$

群 $H^1(k,\ Z_{\mathbf{G}})$ 的指数有限，并且仅取决于$\mathbf{G}$ 的绝对型，因此 Γ/Γ_U也必然具有相同性质。□

在下文中我们固定 m，将其取为该引理给出的 Γ/Γ_U 的上界。我们将证明，对于这一 m的选择，

$$\operatorname{tr}R_\Gamma^W 1_{B(R)}=o(\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G)) \tag{5.7}$$

对于一致最大算术格 Γ，其位于 G中且迹域次数为 $[k_\Gamma:\mathbb{Q}]=d$。这蕴含了 (3.2)，因为我们可以用形如 $1_{B(R)}$ 的函数的平移像之和逼近任意紧支撑函数；鉴于 [29, 定理 8.36]，它直接蕴含几何陈述 (1.1)。

设 Γ 是这样的格。根据命题 5.1 的描述，存在一个主算术格 Γ_U，使得 $\Gamma=N_G(\Gamma_U)$ 属于 G。我们回顾 Prasad 的体积公式以及上文讨论过的指标估计：

$$\mathrm{vol}(\Gamma_U\backslash G)\ge C_G^{-1}\Delta_k^{\frac{\dim(\mathbf{G})}{2}}\cdot N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\ell/k})\cdot\prod_{v\in S_U}q_v, \tag{5.8}$$

$$[\Gamma:\Gamma_U]\le C_G^{|S_U|}N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\ell/k})^{\frac12}\Delta_k^{\frac32} \tag{5.9}$$

其中 C_G 是一个仅取决于 G 的常数（我们取两种表述中较大的那个；下文仍沿用这一记号，尽管可能需要增大该常数）。

引理 5.10. 对于正则 $g\in G$，满足 $h^m=g$ 的 $h\in G$ 的个数有一个仅依赖于 G、次数 $[k:\mathbb{Q}]$ 和 m的常数上界。

证明. 对于正则元，其 m次根属于一个环面，因此其个数有一个常数上界，该常数仅依赖于 $\dim(G)$ 以及 k 的次数至多为 G秩的有限扩张中的单位根个数。□

注意，强 m正则元的 m次幂是强正则的。由上面的引理可知，从 Γ 的半单m正则元素集合 $\gamma \mapsto \gamma^m$ 到 Γ_U 中的强正则元素的映射至多是 C_G对一的。另一方面，由三角不等式可知，对于任意等距变换$g \in G$ ，我们有

$$1_{B(R)}(x^{-1}gx) \le 1_{B(mR)}(x^{-1}g^m x).$$

对于任意 $g \in \Gamma \cap W$，幂 γ^m 是正则的，因此$G_{\gamma^m} = G_\gamma$。我们得出

$$\mathrm{vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) = \mathrm{vol}(\Gamma_{\gamma^m} \backslash G_{\gamma^m}) \le \mathrm{vol}\left((\Gamma_U)_{\gamma^m} \backslash G_{\gamma^m}\right).$$

综合以上可得

$$\mathrm{tr}\, R_\Gamma^W 1_{B(R)} \le C_G \cdot \mathrm{tr}\, R_{\Gamma_U}^{W'} 1_{B(mR)},$$

其中， W' 是 G中强正则的 $\mathbb{R}$正则元素集合。由命题 5.5 可知，对于任意 $\varepsilon > 0$ ，我们有

$$\mathrm{tr}\, R_\Gamma^W 1_{B(R)} \ll_{G,R,\varepsilon,d} \Delta_k^{\frac{\dim \mathbf{G} - (\dim \mathbf{G} - \dim \mathbf{T})}{2} - \varepsilon}.$$

利用 5.8 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\, R_\Gamma^W 1_{B(R)} &\ll_{G,R,\varepsilon,d} \frac{\mathrm{vol}(\Gamma_U \backslash G)}{\Delta_k^{\frac{\dim \mathbf{G} - \dim \mathbf{T}}{2} - \varepsilon} \cdot N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\ell/k}) \cdot \prod_{v \in S_U} q_v} \\ &= \frac{[\Gamma : \Gamma_U]}{\Delta_k^{\frac{\dim \mathbf{G} - \dim \mathbf{T}}{2} - \varepsilon} \cdot N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\ell/k}) \cdot \prod_{v \in S_U} q_v} \cdot \mathrm{vol}(\Gamma \backslash G).\end{aligned}$$

现在利用（5.9）以及 $C^{|S|} \ll \prod_{v \in S} q_v^{1/2}$对任意 $C > 1$均成立这一事实，我们可得

$$\mathrm{tr}\, R_\Gamma^W 1_{B(R)} \ll_{G,R,\varepsilon,d} \frac{1}{\Delta_k^{\frac{\dim \mathbf{G} - \dim \mathbf{T} - 3}{2} - \varepsilon} \cdot N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\ell/k})^{1/2} \cdot \prod_{v \in S_U} q_v^{1/2}} \cdot \mathrm{vol}(\Gamma \backslash G).$$

当 $\mathbf{G}$ 不是 A_1 型时，我们有 $\dim \mathbf{G} - \dim \mathbf{T} \ge 4$，因此可见（5.7）成立，因为对任意 C，分母 $\Delta_k^{\frac{\dim \mathbf{G} - \dim \mathbf{T} - 3}{2} - \varepsilon} \cdot N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{\ell/k})^{1/2} \cdot \prod_{v \in S_U} q_v^{1/2}$仅在有限多个 k, ℓ 和 S_U 的取值下才会$\le C$。剩下的情形，即 $\mathbf{G}$ 为 A_1 型，在 [20] 中处理；我们也可以从这里的论证推出这一点，回到（5.9）的证明，并注意到对于 A_1 型，我们可以得到更好的界$[\Gamma : \Gamma_U] \le C_G^{|S_U|} \Delta_k^{\frac{1}{2}}$，因为 $\mathbf{G}$ 总是内的，所以 $\ell = k$。

5.5. **非一致格的情形**。当所有 Γ_n 都是非一致格时，定理 E 的证明与它们一致时完全相同；不同之处在于，我们还需要选取一个共轭不变且足够稠密的集合W，使得对于 G 中任意选取的格 Γ 以及任意 $\gamma \in \Gamma \cap W$，商空间$\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma$ 都是紧的。下面的引理表明，为此我们可以使用m-正则元的集合。

引理 5.11。设 G 是一个半单李群。存在 $m = m(G)$，使得对于每个非一致、不可约算术格 Γ，以及群 Γ_γ 中的每个强正则元素 $\gamma \in \Gamma$，群 Γ_γ 都是 G_γ 中的一个格。

证明。设 $\mathbf{G}$ 是数域 k 上的一个代数群，使得存在满射 $\mathbf{G}(k_\infty) \to G$ 和 $\Gamma \subset G(k)$。该格是非一致且不可约的，因此 $\mathbf{G}$ 不是 k-各向异性的。由此可得 $G \simeq \mathbf{G}(k_\infty)$，因为后者没有紧因子。设 γ 是 $\mathbf{G}(k)$ 中的一个强正则元素。当且仅当 $\mathbf{G}\gamma$ 是 k-各向异性时，群 Γ_γ 是 G_γ 中的一个格。记 $\mathbf{T}:=\mathbf{G}\gamma$；根据命题 2.1，它是一个代数环面。环面 $\mathbf{T}$ 各向异性，当且仅当它没有有理特征。后者意味着 $\mathrm{Gal}(k/k)$ 在 $X^*(\mathbf{T})$ 上的作用没有非平凡不动点。记 $T = \mathbf{T}(k_\infty)$，并令 $X^*(T)$ 为 T 的复特征模。那么

$$G \simeq \prod_\nu \mathbf{G}(k_\nu), \quad T \simeq \prod_\nu \mathbf{T}(k_\nu) \text{ and } X^*(T) \simeq \bigoplus_\nu X^*(\mathbf{T}),$$

其中 ν 遍历 k的阿基米德位。

断言 1. 存在仅依赖于 G 的 m_0，使得若 $X^*(\mathbf{T})^{\mathrm{Gal}(k/k)} \neq 0$，则存在一个非零的 $\mathrm{Gal}(k)$-不变特征 ξ，它是至多 m_0个根的乘积。

为证明此断言，我们注意到，$\mathrm{Gal}(k)$-不变特征的集合包含元素 $\sum_{g\in\mathrm{Gal}(L/k)} g$ 的伽罗瓦作用的像，其中 L 是 $\mathbf{T}$的分裂域。因此，至少存在一个根使得该值非零；由于伽罗瓦作用保持根系，故可取 $m_0 = [L\colon k]$。另一方面，分裂域次数的上界仅取决于 $\dim(\mathbf{T})$，故证明完成。

断言 2。设 ξ 是 $\mathbf{T}$ 的一个有理特征，且满足 $\|\xi\| \leq m_0$。记 ξ_ν 为其在 $\mathbf{T}(k_\nu)$ 上的扩张。那么该特征

$$\lambda := \prod_{\nu \text{ real}} \xi_\nu \prod_{\nu \text{ complex}} (\overline{\xi_\nu}\xi_\nu)$$

满足 $\|\lambda\| \leq [k\colon \mathbb{Q}]m_0$，且 $\lambda(\gamma) = \pm 1$。

第一个断言成立，因为 $\|\cdot\|$ 是次可加的。对于第二个断言，注意到 $\lambda(\gamma) = N_{k/\mathbb{Q}}(\xi(\gamma))$，并且 $\xi(\gamma) \in \mathcal{O}_k^\times$，因为 $\gamma \in \Gamma$。

现在我们完成引理证明的论证。设 γ 满足：$\mathbf{G}\gamma$ 不是各向异性的。结合这些断言，我们构造一个非平凡特征λ^2，满足 $\|\lambda^2\| \leq 2[k\colon \mathbb{Q}]m_0$，且 $\lambda^2(\gamma) = 1$。非一致格的迹域次数至多为 $\dim G$，因此取 $m = 2m_0 \dim G$ 时，引理成立。□

6. 轨道积分的局部与整体估计

本节旨在证明以下定理。我们注意到，例如 [26, 命题 3.13] 中也证明了类似结果，但这些结果不足以满足我们的目的（我们的局部不等式中不能出现乘法常数）。

定理 6.1. 设 k 为一个数域，G 是一个单连通、半单的 k-群，U 是 $G(\mathbb{A}_f)$ 中由抛物型子群的乘积构成的紧开子群。将 $G(\mathbb{A}_f)$ 上的哈尔测度规范化，使得 $\mathrm{vol}(U) = 1$。设 $f \in C_c^\infty(G(k_\infty))$，并令 $f_\mathbb{A} = f \otimes 1_U$。存在一个 C_o，依赖于 $R, [k\colon \mathbb{Q}]$，使得对任意强正则、 $\mathbb{R}$-正则元 $\gamma \in G(k) \cap U$，若 $m(\gamma) \leq R$，则有

$$\mathcal{O}(\gamma, f_\mathbb{A}) \leq C_o \|f\|_\infty.$$

证明。 我们在假设稍后给出的局部估计成立的前提下证明定理 6.1。根据假设，我们有 $U = \prod_{v\in \mathrm{V}_f} U_v$ ，其中 U_v 是 $\mathbf{G}(k_v)$ 的一个抛物型子群。由此可得

$$\mathcal{O}(\gamma, f_{\mathbb{A}}) = \mathcal{O}(\gamma, f_\infty) \cdot \prod_{v\in \mathrm{V}_f} \mathcal{O}(\gamma, 1_{U_v}).$$

我们可以将命题 6.2、命题 6.5 与引理 6.6 结合起来估计右端，从而得到

$$\mathcal{O}(\gamma, f_{\mathbb{A}}) \le C_R \|f\|_\infty \cdot N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta(\gamma))^a,$$

对于某个 $a > 0$。我们有 $m(\Delta(\gamma)) \ll m(\gamma) \le R$，由于 $\Delta(\gamma)$ 是代数整数，这给出了一个仅依赖于 $[k : \mathbb{Q}]$ 和 R 的 $N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta(\gamma))$ 上界。证明完毕。□

6.1. **非阿基米德轨道积分**。 在本小节中，我们令 $v \in V_f$，因此 k_v 是一个局部非阿基米德域。我们将 k_v 的剩余域的基数记为 q。我们固定一个单连通半单 k_v-群 $\mathbf{G}$。

令 U_v 为 $\mathbf{G}(k_v)$ 的极大紧子群。我们固定 $\mathbf{G}(k_v)$ 上的哈尔测度，使得 $\mathrm{vol}(U_v) = 1$。令 $\gamma \in U_v$ 为一个半单正则元素。令 $\mathbf{G}^\gamma$ 为 γ 在 $\mathbf{G}$ 中的中心化子。它是一个代数子群，其单位连通分支是一个环面。我们的目标是估计下面的轨道积分:

$$\mathcal{O}(\gamma, 1_{U_v}) = \int_{\mathbf{G}_\gamma(k_v)\backslash \mathbf{G}(k_v)} 1_{U_v}(x^{-1}\gamma x)dx.$$

也就是说，我们将证明以下结果。

命题 6.2。 存在一个常数 $a > 0$，它仅取决于$\mathbf{G}$的绝对型，使得对于任意如上所述的 $\gamma \in \mathbf{G}(k_v)$ ，都有:

$$\mathcal{O}(\gamma, 1_{U_v}) \le |\Delta(\gamma)|_v^{-a}.$$

证明。 证明的主要要素是轨道积分与 Bruhat-Tits 建筑之间的以下关系。回顾一下， $X = X(\mathbf{G}\ k_v)$ 是与 k_v 上的单连通群$\mathbf{G}$ 相关联的 Bruhat-Tits 建筑（见 5.1.1）。我们将证明，存在一个 b，它仅取决于$\mathbf{G}$的绝对型，使得

$$\mathcal{O}(\gamma, 1_{U_v}) \le |B_X(x_0, R)|\,,\ R = b \cdot v(\Delta(\gamma)) \tag{6.1}$$

其中， $B_X(x_0,\ R)$ 是建筑中以 x_0 为中心、半径为 R 的球内顶点的集合。根据 [31, 第 3 节的估计，存在仅取决于$\mathbf{G}$ 的绝对型的常数 $c > 0$，使得 $|B_X(x_0, R)| \le q^{cR}$ 对于 $R \ge 1$ 成立。结合 (6.1) 可推出

$$\mathcal{O}(\gamma, 1_{U_v}) \le q^{-cb\cdot v(\Delta(\gamma))}$$

而这等于 $|\Delta(\gamma)|_v^{-a}$，其中 a 仅取决于 $\mathbf{G}$ 的绝对型。 □

本小节余下部分将用于证明 (6.1)；我们先处理$\mathbf{G}^\gamma$ 在 k_v 上分裂的情形，然后通过嵌入论证推出一般情形。

6.1.1. 回忆一下，我们假设$\mathbf{G}(k_v)$,$\mathbf{G}\gamma(k_v)$上的哈尔测度已经归一化，使得极大紧子群 U_v,$\mathbf{G}\gamma(k_v)^b$ 的测度为 1。在下面的证明中，我们将使用简写 $\mathcal{O}(\gamma, 1_{U_v}) = \mathcal{O}_\gamma$。首先给出 $\mathcal{O}_\gamma$的一个更几何的公式。我们假设已经固定了 X 的一个室 C。回忆一下， X 中各面的类型由 C的各面编号。对于局部类型Θ，我们用 X_Θ 表示面 C_Θ 在$\mathbf{G}(k_v)$作用下的所有平移像所组成的集合。

引理 6.3. 设 U_v 属于类型 Θ，并设$(X_\Theta)^\gamma$ 是 X 中由 γ固定的类型为 Θ 的单形。那么

$$\mathcal{O}(\gamma, 1_{U_v}) = \sum_{x \in \mathbf{G}_\gamma(k_v)\backslash (X_\Theta)^\gamma} |\mathbf{G}_\gamma(k_v)^b \cdot x|.$$

证明。设 α 是定义在$\mathbf{G}(k_v)$上的函数，满足$\int_{\mathbf{G}^\gamma(k_v)} \alpha(tx)dt = 1$，对任意 $x \in \mathbf{G}(k_v)$ 均成立。由此可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{G}_\gamma(k_v)xU_v} \alpha(x)dx &= |\mathbf{G}_\gamma(k_v)\backslash \mathbf{G}_\gamma(k_v)xU_v| \\ &= [G_\gamma(k_v)^b : G_\gamma(k_v)^b \cap xU_v x^{-1}].\end{aligned}$$

现在，当且仅当 γ 固定相应的陪集 xU_v 时， $1_{U_v}(x^{-1}\gamma x)$ 才非零。因此

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{G}(k_v)} \alpha(x) 1_{U_v}(x^{-1}\gamma x)dx &= \sum_{xU_v \in G(k_v)/U_v : \gamma x = x} \int_{xU_v} \alpha(y)dy \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{G}_\gamma(k_v)xU_v \in \mathbf{G}_\gamma(k_v)\backslash G(k_v)/U_v \\ \gamma x = x}} [G_\gamma(k_v)^b : G_\gamma(k_v)^b \cap xU_v x^{-1}]\end{aligned}$$

通过将 $G(k_v)/U_v$ 与 X_{Θ_v} 以及 $[G_\gamma(k_v)^b$ 识别为： $G_\gamma(k_v)^b \cap xU_v x^{-1}]$ 与 $|\mathbf{G}\gamma(k_v)^b \cdot x|$，即可完成证明。□

6.1.2. 证明 (6.1) 的分裂情形。我们在此假设极大环面 $\mathbf{G}\gamma$在 k_v上分裂，因此存在唯一一个由 $\mathbf{G}\gamma(k_v)$ 稳定的 X 的公寓 A_γ。

引理 6.4。在上述假设下，存在一个仅取决于$\mathbf{G}$ 的绝对类型的 c'，使得任何由 γ 固定的 X 的单形与 A_γ的距离至多为$c' \cdot v(\Delta(\gamma))$。

证明。设 C_Θ 为由 U_v固定的 X 的单形。我们选取一个包含 C_Θ的 A_γ的室 C，因此存在一个由 γ固定的特殊顶点 $x_0 \in C$。设 $I \leq U_v$ 为逐点固定 C 的 Iwahori子群。设 Φ为这一对 $(\mathbf{G},\mathbf{G}\gamma)$ 的（线性）根系。室 C与顶点 x_0共同确定正根的集合 Φ^+。设$\mathbf{N}$ 为$\mathbf{G}$的相应极大幂零子群。根据 [55, 3.3.2]，我们有岩泽分解

$$\mathbf{G}(k_v) = \mathbf{G}_\gamma(k_v) \cdot \mathbf{N}(k_v) \cdot I.$$

令 $C'_\Theta = gC_\Theta$，并将 g 写成岩泽分解 $g = ank$。若 γ 保持 C'_Θ，则有 $\gamma an \in anU_v$; 又由于 $a \in \mathbf{G}\gamma(k_v)$，可得 $n^{-1}\gamma n \in U_v$，最终得到 $\gamma^{-1}n^{-1}\gamma \cdot n \in U_v$。

对于 $\lambda \in \Phi$，我们用 $\mathbf{N}_\lambda$ 表示与 λ 相关联的 $\mathbf{G}$ 的单参数幺幂子群。我们还将使用 [55] 中设定的记号：若 $\lambda \in \Phi$ 且 $k \in \mathbb{Z}$，则令 $\lambda + k$ 为 A_γ 上向量部分为 λ 的仿射函数，并满足 $(\lambda + k)(x_0) =$

k。对于这样的函数 $f=\lambda+k$，令 X_f 为 $\mathbf{N}_\lambda(k_v)$ 中固定半公寓 $f^{-1}([0,+\infty])$ 的子群。这确定了一个从加法群 k_v 到 $\mathbf{N}_\lambda$ 的同构 n_λ，使得 $n_\lambda(\mathfrak{o}_{k_v})=X_\lambda$。

我们可以如下描述室 C_Θ：

$$C_\Theta=\bigcap_{\lambda\in\Phi^+\setminus\Theta}\left(\lambda^{-1}([0,+\infty])\cap(1-\lambda)^{-1}([0,+\infty])\right)\cap\bigcap_{\lambda\in\Theta}\lambda^{-1}(\{0\})$$

并且由 [55, 3.1.1] 可知，乘积映射定义了一个双射

$$U_v=\left(\prod_{\lambda\in\Phi^+}X_\lambda\right)\times\mathbf{G}_\gamma(k_v)^b\times\left(\prod_{\lambda\in\Phi^+\setminus\Theta}X_{1-\lambda}\times\prod_{\lambda\in\Theta}X_{-\lambda}\right).$$

由于 $\gamma^{-1}n\gamma\cdot n\in\prod_{\lambda\in\Phi^+}N_\lambda(k_v)$，我们得到 $\gamma^{-1}n\gamma\cdot n\in U_v$ 等价于属于 $\prod_{\lambda\in\Phi^+}X_\lambda$。我们选择一个满足引理 2.8 中条件的编号 $\Phi^+=\{\lambda_1,\dots,\lambda_k\}$，并记

$$n=n_{\lambda_k}(t_k)\cdots n_{\lambda_1}(t_1).$$

设 $b^i_{j,\ s}$ 为李代数$\mathbf{G}$ 的切瓦莱基的结构常数，由 $[u_j,u_s]=b^i_{j,\ s}u_i$ 确定，其中 u_i 是与根 λ_i 对应的基向量。它们是整数，仅取决于$\mathbf{G}$ 的绝对型，参见第 6] 页的定理 1 [53, 。由引理 2.8 可知（为简洁起见，我们使用记号 $a_i=\lambda_i(\gamma)$）：

$$n^{-1}\cdot\gamma n\gamma^{-1}=\prod_{i=1}^{k}n_{\lambda_i}\left((a_i-1)t_i+\sum_{\lambda_{j_1}+\cdots+\lambda_{j_m}=\lambda_i}b^i_{j_1,\dots,j_m}\prod_{l=1}^{m}t_{j_l}\right),\tag{6.2}$$

其中 $b^i_{j_1,\dots,j_k}$ 是根的 $b^k_{i,j}$ 的一个非零乘积（取决于所选的根的顺序）。由此我们得到以下改写：

$$n^{-1}\gamma^{-1}n\gamma\in I\iff\forall i=1,\dots,k:\left((a_i-1)t_i+\sum_{\lambda_{j_1}+\cdots+\lambda_{j_m}=\lambda_i}b^i_{j_1,\dots,j_m}\prod_{l=1}^{m}t_{j_l}\right)\in\mathfrak{o}_{k_v}.$$

我们希望由此推出 $v(t_i)$、$1\le i\le k$ 的下界。注意，如果 $\mathbf{N}$ 是阿贝尔群，这将显然成立，因为所有 $b^i_{j,s}$ 都会消失，而 $(a_i-1)t_i\in\mathfrak{o}_{k_v}$ 给出 $v(t_i)\ge -v(a_i-1)$。

类型 A_2 我们先给出一个简单的例子来说明一般原理，并指出对估计可能作出的改进。如果 $\mathbf{G}=$ 是 SL_3，我们可以选择λ_i,n_i，使得对于 $i=1,2$ 和 $b^3_{1,2}=1$，所有 $b^i_{j,s}=0$ 都成立。于是得到

$$v(t_i)\ge -v(a_i-1),\ i=1,2$$

and

$$v(t_3)\ge -v(a_3-1)\text{ or }v((a_3-1)t_3)=v(a_2t_1t_2)\ge v(t_1)$$

（对于最后一个不等式，我们使用 $v(a_2)\ge v(a_2-1)\ge -v(t_2)$）因此在最坏情况下，我们得到

$$v(t_1)\ge -v(a_1-1),\ v(t_2)\ge -v(a_2-1),\ v(t_3)\ge -v(a_3-1)-v(a_1-1)$$

这意味着对所有 i，$v(t_i)\ge -v(\Delta(\gamma))$，并且 $\sum_i v(t_i)\ge -2v(\Delta(\gamma))$。

一般情形 按照引理 2.8 对 λ_is 排序，使得 $\mathbf{N}$ 的下中心列中的第 l 项由 $\mathbf{N}^{\lambda_{k_l}}$、.....、$\mathbf{N}^{\lambda_{k_{l+1}-1}}$ 张成（其中 $1=k_1\le k_2\le$

$\cdots \leq k_m$），我们看到，对于 $1 \leq i < k_1$，所有 $b^i_{j,\ s} = 0$ 都成立，因此 $v(t_i(a_i-1)) \geq 0$，从而对于这些 is，有 $v(t_i) \geq -v(a_i-1)$。

现在我们对 l 使用归纳法，以估计 $v(t_i)$，其中 $k_l \leq i \leq k_{l+1}-1$。假设我们已知，对于 $1 \leq i \leq k_l - 1$，有 $v(t_i) \geq -\sum_{1\leq j\leq k_l-1} b_j v(a_j-1)$，其中某些 $b_j \leq 2^{l-1}$ 为非负整数。现在，(6.2) 表明，要么 $v((a_i-1)t_i) \geq 0$，要么

$$v((a_i-1)t_i) \geq -v\left(\sum_{\lambda_{j_1}+\cdots+\lambda_{j_m}=\lambda_i} b^i_{j_1,\ldots,j_m} \prod_{s=1}^{m} a_{j_s}^{\varepsilon^i_{j_1,\ldots,j_k}} t_{j_s}\right).$$

在第一种情况下，我们得到 $v(t_i) \geq -v(a_i-1)$，于是得证。在第二种情况下，我们得到

$$\begin{aligned} v(t_i) &\geq -v(a_i-1) + \min_{\lambda_{j_1}+\cdots+\lambda_{j_m}=\lambda_i} v\left(\prod_{s=1}^{m} a_{j_s}^{\varepsilon^i_{j_1,\ldots,j_k}} t_{j_s}\right) \\ &\geq -v(a_i-1) + \min_{\lambda_{j_1}+\cdots+\lambda_{j_m}=\lambda_i} \sum_{s=1}^{m} v(t_{j_s}) \end{aligned}$$

根据递归假设可知：

$$v(t_i) \geq -v(a_i-1) - 2\sum_{1\leq j\leq k_l-1} b_j v(a_j-1) \geq \sum_{1\leq j\leq k_{l+1}-1} b'_j v(a_j-1)$$

其中 $b'_j \leq 2^l$。

总之：由条件 $n^{-1}\cdot\gamma n\gamma^{-1} \in I$（等价于 $(a_i-1)t_i + \sum_{\lambda_j+\lambda_l=\lambda_i} a^i_{j,\ l} t_i t_j \in \mathfrak{o}_{k_v}$ 对所有 $1 \leq i \leq k$）我们得到了以下不等式集合：

$$v(t_i) \geq -2^{m-1}\sum_j v(a_j-1)$$

由于

$$-v(\Delta(\gamma)) = -v\left(\prod_{\lambda\in\Phi}(1-\lambda(\gamma))\right) \leq -\sum_{\lambda\in\Phi^+} v(1-\lambda(\gamma)),$$

（由 $-v(1+\lambda(\gamma)) \geq -v(\lambda(\gamma)) \geq 0$ 对 $\lambda \in \Phi^+$成立所推出的不等式），我们得到

$$v(t_i) \geq -c\cdot v(\Delta(\gamma)),\ 1 \leq i \leq k \tag{6.3}$$

其中 $c = 2^m$ 仅取决于 $\mathbf{G}$ 的绝对型。

最后我们可以得出结论。设 x_1 是 A_γ 的顶点，位于半公寓 $\lambda_i^{-1}\{-v(\Delta(\gamma))\}$交集的尖端处。我们刚刚证明，如果 γ 固定 gI，且 $g = ank$，那么 n 固定 x_1。特别地，我们得到

$$d(A_\gamma, gC) = d(A_\gamma, nC) \leq d(x_1, nC) = d(x_1, C) \leq d(x_1, x_0) = c'\cdot v(\Delta(\gamma)).$$

其中 c' 仅取决于 c 和公寓的几何结构，因此仅取决于 $\mathbf{G}$ 的绝对型。由于一个固定顶点属于一个与 A_γ距离相同的固定室，这就完成了该引理的证明。□

现在令

$$R := \sup_{x\in \mathrm{Fix}_{X^\Theta}(\gamma)} d(x, A_\gamma) \leq c\cdot v(\Delta(\gamma)),$$

由引理 6.4 可得的不等式。

群 $\mathbf{G}\gamma(k_v)$ 在 $A_\gamma^\Theta := A_\gamma \cap X^\Theta$ 上传递作用（这由岩泽分解可得）。此外，A_γ 的每个顶点到 A_γ^Θ 的某个顶点的距离至多为 1（因为每个室都包含每种类型的一个顶点）。因此（正如对 $R \geq 1$ 的 $2R \geq R+1$ 情形一样），存在一个集合 $\{y_1, \dots, y_n\}$，它是 $\mathbf{G}\gamma(k_v)$ 在 $\mathrm{Fix}_{X^\Theta}(\gamma)$ 上各轨道的代表元集合，使得对所有 i 都有 $y_i \in B_X(x_0, 2R)$。子群 $\mathbf{G}\gamma(k_v)^b$ 保持这个球不变，并且各轨道 $\mathbf{G}\gamma(k_v)^b \cdot y_i$ 两两不相交，因此可得：

$$\sum_{x \in \mathbf{G}_\gamma(k_v) \backslash \mathrm{Fix}_{X^\Theta}(\gamma)} \left|\mathbf{G}_\gamma(k_v)^b x\right| \leq B_X(x_0, 2R).$$

利用引理 6.3，这就完成了在$\mathbf{G}$ 为 k_v-分裂时 (6.1) 的证明。

6.1.3. *(6.1)* 在其余情形下的证明。设 L_v/k_v 是一个分裂$\mathbf{G}\gamma$的有限伽罗瓦扩张~。于是存在建筑的包含映射 $X \subset X(G, L_v) = X_{L_v}$，其像是一个全测地子空间。伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(L_v/k_v)$ 在 X_{L_v} 上通过等距变换作用。

温和情形。这里我们假设 L_v/k_v 是非分歧或温和分歧的。在这些情形下，由 [55, 2, 我们有 $X = X^{\mathrm{Gal}(L_v/k_v)}{}_{L_v}$。6.1], [48, 命题 5.1.1]（另见 [45]）。伽罗瓦群保持A_{γ, L_v}，并在其上通过仿射等距变换作用，因此$A_{\gamma, L_v} \cap X = (A_{\gamma, L_v})^{\mathrm{Gal}(L_v/k_v)}$ 是一个仿射子空间。伽罗瓦作用在 A_{γ, L_v} 上的线性部分由余根空间 $X_*(\mathbf{G}\gamma)$ 上的作用给出。因此，其不动点的维数等于$\mathbf{G}\gamma$ 的 k_v-秩，也等于$\mathbf{G}\gamma$ 的 k_v-秩。

我们定义 $A_\gamma := A_{\gamma, L_v} \cap X$。根据上面的讨论，这是 r 维公寓 X 中的一个仿射子集。由引理 6.4 可知，$\mathrm{Fix}_X(\gamma)$ 包含于 A_γ 的 $c' \cdot v(\Delta(\gamma))$-邻域中，其中所采用的度量是由 X_{L_v} 上的度量诱导在 X 上的度量。该度量可能不是 X 上的内在度量，但它至多乘以一个仅取决于伽罗瓦作用在 $X_*(\mathbf{G}\gamma)$ 上的因子；由 $\mathbf{G}$ 的绝对型决定时，该因子只有有限歧义。特别地，在这种情况下，引理的陈述仍然成立。

我们令 $R = \sup(d(x, A_\gamma) : x \in \mathrm{Fix}^{X_\Theta}(\gamma))$。根据前面的评论，我们有 $R \leq c' \cdot v(\Delta(\gamma))$。在 $R = 0$ 的情形下（即 $v(\Delta(\gamma)) = 0$），集合 $X_\Theta \cap A_\gamma$ 非空，且 $\mathbf{G}\gamma(k_v)$ 在其上的作用是传递的。因此可得 $\mathcal{O}_\gamma = 1$。

在情形 $R \geq 1$ 下，集合 $X_\Theta \cap A_\gamma$ 可能为空。我们固定 A_γ 上 $\mathbf{G}\gamma(k_v)$-轨道的代表元 $x_1, \dots, x_s$，并可以假设对 $1 \leq i \leq s$ 有 $x_i \in B_X(x_1, 1)$。由于 $\mathrm{Fix}^{X_\Theta}(\gamma)$ 包含在 A_γ 的 R-邻域中，利用引理 6.3，我们得到

$$\mathcal{O}_\gamma \leq |B_X(x_1, R+1)| \leq |B_X(x_1, 2R)|.$$

这就完成了 $\mathbf{G}\gamma$ 被 k_v 的非分歧或温和分歧扩张所分裂这一情形的证明。

野分歧。现在假设 L_v/k_v 是野分歧的。此情形与前一种情况类似，但集合$A_{\gamma, L_v} \cap X$ 本身可能为空。注意，我们必有 $v(\Delta(\gamma)) \geq 1$。我们固定一个顶点 $x_0 \in \mathrm{Fix}^{X_k}(\gamma)$，使其与$A_{\gamma, L_v}$的距离（在 X_{L_v}中）尽可能近。于是 $\mathrm{Fix}^{X_\Theta}(\gamma)$ 包含于$G_\gamma(k_v) \cdot x_0$ 的$(R - w)$-邻域中，其中 $w = d(x_0, A_\gamma)$。然后，我们可以应用与上文完全相同的论证来证明 (6.1)。

6.2. **阿基米德轨道积分**。 本节中， $k_v = \mathbb{R}$ 或 $k_v = \mathbb{C}$如上所述， $\mathbf{G}$ 是一个半单 k_v-群。 f 是一个函数，其支撑位于以恒等元为中心、半径为 $R > 0$ 的球$B_{\mathbf{G}(k_v)}(\mathbf{1}, R)$中；这里使用$\mathbf{G}(k_v)$上的一个固定欧几里得范数。我们希望估计轨道积分

$$\mathcal{O}(\gamma, f) = \int_{\mathbf{G}_\gamma(k_v)\backslash \mathbf{G}(k_v)} f(x^{-1}\gamma x)dx$$

对于充分正则的 γ。对于正则元 $\gamma \in \mathbf{G}(k_v)$ 以及 $\Phi_{\mathbb{R}}$ $\mathbf{G}(k_v)$ 相对于$\mathbf{G}\gamma(k_v)$ 的根系，我们记

$$\Delta^+(\gamma) = \prod_{\lambda \in \Phi_{\mathbb{R}}} (1 - \lambda(\gamma)).$$

命题 6.5. 设 $\gamma \in \mathbf{G}(k_v)$ 为 $\mathbb{R}$-正则元 $\gamma \in \mathbf{G}(k_v)$。存在仅依赖于 $\mathbf{G}(k_v)$、 $d_G(1, \gamma)$ 以及 R 的 $C > 0$，使得：

$$\mathcal{O}(\gamma, f) \leq C \cdot \|f\|_\infty \cdot |\Delta^+(\gamma)|.$$

证明。 设 $G = \mathbf{G}(k_v)$、 $T = \mathbf{G}\gamma(k_v)$，并设 P为包含 T 的连通分支的G 的极小抛物子群。设 A 为 T 的极大 $\mathbb{R}$-分裂子环面。则 P具有朗兰兹分解 $P = MAN$，其中 N为幂单且 M 为半单。由于我们假设 γ 是 $\mathbb{R}$-正则的，由引理 2.4， A 是 $\mathbf{G}$ 的极大 $\mathbb{R}$-分裂环面，且 M 实际上是紧的。

令 K 为 G 的一个极大紧子群，且包含 M，使得 A 在与 K相关的 G的嘉当对合下保持不变。于是我们有岩泽分解 $G = KAN$ （见 [29, 命题 7.31]）。

我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(\gamma, f) &= \int_{A\backslash G/K} \int_K f(u^{-1}x^{-1}\gamma x u)dudx \\ &= \int_{A\backslash G/K} \tilde{f}(x^{-1}\gamma x)dx\end{aligned}$$

其中 $\tilde{f}(g) = \int_K f(u^{-1}gu)du$。由于 $\tilde{f}$满足 $\|\tilde{f}\|_\infty \leq \|f\|_\infty$，且其支撑包含于 $B(\mathbf{1}, R + d)$，其中 d是 K的直径，因此在证明的其余部分，我们将假设 $f = f$。

我们得到

$$\mathcal{O}(\gamma, f) = \int_N f(n^{-1}\gamma n)dn = \int_N f(\gamma \cdot y(n))dn$$

其中 $y(n) = \gamma^{-1}n^{-1}\gamma \cdot n$。令 $\Phi_{\mathbb{R}}^+$ 为 (G, A) 的相对根系中与 N 相关的正根。由引理 2.9 的证明可知， y 是 N的一个微分同胚，其雅可比矩阵等于 $\prod_{\lambda \in \Phi_{\mathbb{R}}^+}(1 - \lambda(\gamma)) = \Delta^+(\gamma)$。 N 上的哈尔测度由 $\prod_{\lambda \in \Phi^+} dn_\lambda$ 给出，因此可得

$$\mathcal{O}(\gamma, f) = \Delta^+(\gamma) \int_N f(\gamma y)dy$$

由此可得

$$\int_N \frac{f(\gamma y)}{\|f_\infty\|}dy \leq \operatorname{vol} B_N(1, R + d_G(1, \gamma))$$

且右侧仅取决于 $\mathbf{G}(k_v)$、 R 和 $d_G(\mathbf{1}, \gamma)$。 □

6.2.1. 所有无穷位。

引理 6.6。 设 $\mathbf{G}/k$ 是一个 k-半单群。存在一个常数 C，其取决于 $\mathbf{G}$的绝对型、 R 以及 $[k:\ \mathbb{Q}]$，使得对于任意强正则的 $\mathbb{R}$-正则元 $\gamma\in\mathbf{G}(k)$，满足 $m(\gamma)\le R$，均有:

$$\prod_{v\in \mathrm{V}_\infty}|\Delta^+(\gamma)|_v\le C\prod_{v\in \mathrm{V}_\infty}|\Delta(\gamma)|_v.$$

证明. 我们固定（$\mathbf{G}$，$\mathbf{G}\gamma$）的一个绝对根系 Φ。对每个阿基米德赋值$v\in$V$_\infty$，我们得到一个相对根系 $\Phi_{\mathbb{R}}$，它由 Φ 中元素到$\mathbf{G}\gamma$（k_v）的分裂部分上的限制构成。由 [5, 命题2.2-4]可知，我们可以把 Φ 划分为三个子集 Φ_1，Φ_2，Φ_3，使得:

- $\Phi_1=\Phi_{\mathbb{R}}\cap\Phi$；
- 若 $\lambda\in\Phi_2$，则 $\lambda\overline{\in}\Phi$ 且（$\lambda\cdot\lambda$）$^{\frac{1}{2}}\overline{\in}\Phi_{\mathbb{R}}$；我们选取一个集合 $\Phi_2'\subset\Phi_2$，使得Φ_2 是 Φ_2' 与其复共轭的不交并。
- 若 $\lambda\in\Phi_3$，则 λ 在$\mathbf{G}\gamma$的$\mathbb{R}$-分裂部分的（实）李代数上取虚值。

我们有

(6.4)

$$\frac{|\Delta^+(\gamma)|}{|\Delta(\gamma)|_v}=\prod_{\lambda\in\Phi_2'}\frac{1-|\lambda(\gamma)|_v}{|(1-\lambda(\gamma))(1-\overline{\lambda}(\gamma))|_v}\cdot\prod_{\lambda\in\Phi_3}|1-\lambda(\gamma)|_v^{-1}\ll\prod_{\lambda\in\Phi_2\cup\Phi_3}|1-\lambda(\gamma)|_v^{-1}$$

其中该估计由以下事实推出: at

$$\forall z\in\mathbb{C}\ \frac{1-|z|}{|(1-z)(1-\overline{z})|}\ll\frac{1}{|1-z|}+\frac{1}{|1+z|}$$

并且若 $\lambda\in\Phi_2$，则 $-\lambda\in\Phi_2$ 亦然。

现在注意到，对于每个 $\lambda\in\Phi$，$1-\lambda(\gamma)$ 都是非零代数整数，因此 $\prod_{v\in \mathrm{V}_\infty}|1-\lambda(\gamma)|_v\ge 1$。另一方面，由于我们假设 $m(\gamma)\ll R$，存在某个仅依赖于 R 和 X 的 M，使得对所有 v，都有 $|1-\lambda(\gamma)|_v\le M$。由此可得 $|1-\lambda(\gamma)|_v\ge M^{-[k:\mathbb{Q}]}$，因此 (6.4) 最右项中的乘积有界，这就证明了该引理。□

7. 小高度元素数量的估计

我们固定一个半单李群 G。本节的主要结果是以下估计。

定理 *7.1*。对于任意 $d\in\mathbb{N}$, $R>0$，存在一个依赖于 R、d 和 G 的常数 C，使得以下结论成立。对于任意满足 $[k:\ \mathbb{Q}]\le d$ 的数域 k、满足 $G(k_\infty)$ 与 G 乘以一个紧群同源的半单 k-群 G，以及 $G(\mathbb{A}_f)$ 的任意极大紧子群 $U=\prod_{v\in V_f}U_v$，满足 $m(\gamma)\le R$ 且其在 $G(\mathbb{A}_f)$ 中的投影包含于 U 的 $G(k)$ 中强正则元素 $\gamma\in$ 的共轭类数目至多为 C。

我们将使用以下术语:

- G() 中的一个共轭类称为有理的；
- $\mathbf{G}(k)$中的一个共轭类称为几何的。

7.1. **几何共轭类**。

引理 7.2。 设 $R > 0$ 和 $d \in \mathbb{N}$。存在 C，使得对于任意次数为 d 的全实数域 k 以及半单 k-群$\mathbf{G}$，若$\mathbf{G}(k_\infty)$与 G乘以一个紧群同源，则$\mathbf{G}(k) \cap U$中至多有 C 个半单元素的几何共轭类，其中包含马勒测度不超过 R的代表元。

证明。 设$\mathbf{T}$ 是$\mathbf{G}$中的一个极大环面。由于所有极大环面在 k 上共轭，且每个半单元素都包含在某个极大环面中，$\mathbf{G}(k)$中的每个半单元素都共轭于$\mathbf{T}(\bar{k})$中的某个元素。

令 $\Phi = \Phi(\mathbf{G},\mathbf{T})$为根系。对于任意 $\gamma \in \mathbf{G}(k) \cap U$，多项式

$$F_\gamma(t) = \prod_{\lambda \in \Phi} (t - \lambda(\gamma))$$

在有限歧义的意义下刻画了$\mathbf{G}(k)$-共轭类 γ。它属于$\mathfrak{o}_k[t]$，且其马勒测度等于 γ 的马勒测度。由于 $d = [k : \mathbb{Q}]$，因此我们有 $\prod_{\sigma: k \to \mathbb{C}} F_\gamma^\sigma$是 $\mathbb{Z}[t]$ 中的首一多项式，其马勒测度至多为 dR，次数等于 $d(\dim(\mathbf{G}) - \mathrm{rk}(\mathbf{G}))$。根据诺斯科特性质 [39, 定理 1.6.8], ，这样的多项式至多有有限个，由此完成引理的证明。□

7.2. **几何共轭类中的有理共轭类**。设 γ 是$\mathbf{G}(k)$中的一个元素，并设$U = \prod_{v \in \mathrm{V}_f} U_v$ 是$\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$的一个极大紧子群。记作。

$$\mathcal{S}(\gamma) = \{[\gamma']_{\mathbf{G}(k)} : \gamma' \in [\gamma]_{\mathbf{G}(\bar{k})} \cap \mathbf{G}(k)\};$$
$$\mathcal{S}_U(\gamma) = \{[\gamma']_{\mathbf{G}(k)} : \gamma' \in [\gamma]_{\mathbf{G}(\bar{k})} \cap \mathbf{G}(k), \gamma' \in U\}.$$

我们将共轭类实现为伽罗瓦上同调中的类，具体如下。

引理 7.3。 存在一个双射 $\mathcal{S}(\gamma) \to \ker[H^1(k, \mathbf{G}\gamma) \to H^1(k,\mathbf{G})]$。具体而言，若 $g \in \mathbf{G}(k)$ 满足 $[g^{-1}\gamma g]_{\mathbf{G}(k)} \in \mathcal{S}(\gamma)$，则将其映射到上同调类$[\sigma \mapsto g^\sigma g^{-1}] \in H^1(k,\mathbf{G}\gamma)$。

证明。共轭类 $[\gamma]_{\mathbf{G}(k)}$ 中的 k-点集自然地与$\mathbf{G}_\gamma \backslash \mathbf{G}(k)$等同。群$\mathbf{G}(k)$在$\mathbf{G}_\gamma \backslash \mathbf{G}(k)$上从右作用，而集合 $\mathcal{S}(\gamma)$则与$\mathbf{G}(k)$的轨道相对应。由$\mathbf{H} = \mathbf{G}\gamma$的序列 (4.1) 的正合性可得一个双射

$$\mathcal{S}(\gamma) \simeq \ker[H^1(k, \mathbf{G}_\gamma) \to H^1(k, \mathbf{G})].$$

具体而言，如果 $g \in \mathbf{G}(k)$ 满足 $[g^{-1}\gamma g]_{\mathbf{G}(k)} \in \mathcal{C}(\gamma, k)$，那么它会被映射到上同调类 $[\sigma \mapsto g^\sigma g^{-1}] \in H^1(k, \mathbf{G}\gamma)$。□

为了通过引理 7.3 给出的双射确定子集 $\mathcal{S}_U(\gamma)$ 的像，我们需要使用伽罗瓦上同调的一个局部-整体原理。

7.2.1. 局部-整体原理。 我们来定义集合 $\mathcal{S}(\gamma)$ 和 $\mathcal{S}_U(\gamma)$ 的局部对应物。若 $v \in \mathrm{V}_\infty \cup \mathrm{V}_f$ let

$$\mathcal{S}_v(\gamma) = \{[\gamma']_{\mathbf{G}(k_v)} : \gamma' \in [\gamma]_{\mathbf{G}(\bar{k}_v)} \cap \mathbf{G}(k_v)\}.$$

此外，我们定义

$$\mathcal{S}_{U_v}(\gamma) = \{[\gamma']_{\mathbf{G}(k_v)} : \gamma' \in [\gamma]_{\mathbf{G}(\overline{k}_v)} \cap \mathbf{G}(k_v),\, \gamma' \in U_v\}.$$

我们有一个交换图

(7.1)
$$\begin{array}{ccccc} & & & & \mathbf{X}^1(\mathbf{G}\gamma) \\ & & & & \big\downarrow \\ \mathcal{S}_U(\gamma) & \hookrightarrow & \mathcal{S}(\gamma) & \hookrightarrow & H^1(k,\ \mathbf{G}\gamma) \\ \big\downarrow \phi & & \big\downarrow \phi & & \big\downarrow \phi \\ \prod_v \mathcal{S}_{U_v}(\gamma) & \hookrightarrow & \prod_v \mathcal{S}_v(\gamma) & \hookrightarrow & \prod_v H^1(k_v,\ \mathbf{G}\gamma) \end{array}$$

引理 7.4。 设 γ是一个 m-正则元。则 $|\mathcal{S}_U(\gamma)| \le |Ш^1(\mathbf{G}\gamma)| \prod_\nu |\mathcal{S}_{U_\nu}(\gamma)|$。

证明。 根据命题 2.1，群 $\mathbf{G}\gamma$是一个代数环面，因此映射 ϕ: $H^1(k,\ \mathbf{G}\gamma) \to \prod_\nu H^1(k_\nu, \mathbf{G}\gamma)$ 是一个群同态，其核为 $\mathbf{X}^1(\mathbf{G}\gamma)$。特别地，它是$|\mathbf{X}^1(\mathbf{G}\gamma)|$-对一的，因此

(7.2)
$$|\mathcal{S}_U(\gamma)| \le \left|\phi^{-1}\left(\prod_\nu \mathcal{S}_{U_\nu}(\gamma)\right)\right| = |Ш^1(\mathbf{G}_\gamma)| \prod_\nu |\mathcal{S}_{U_\nu}(\gamma)|.$$

□

7.2.2. 阿基米德位处的共轭类。 设 $v \in \mathrm{V}_\infty$，并设 $\gamma \in \mathbf{G}(k_v)$ 是一个中心化子为环面的元。根据引理 7.3 和中山–泰特定理 4.1，我们有 $|\mathcal{S}_v(\gamma)| \le |H^1(\mathbb{C}/k_v,\ X^*(\mathbf{G}\gamma))|$。但由于 $\dim(\mathbf{G}\gamma)$ 有界，且其界与 $k,\ v,\ \gamma$无关，我们有 $|H^1(\mathbb{C}/k_v,\ X^*(\mathbf{G}\gamma))| \le 2^{\dim(\mathbf{G}_\gamma)} = O(1)$。总之，由于阿基米德赋值至多有 d 个，我们有。

(7.3)
$$\prod_{v \in \mathrm{V}_\infty} |\mathcal{S}_{k_v}(\gamma)| = O(1).$$

我们指出，事实上，该论断与我们关于 $[k:\mathbb{Q}]$保持有界的假设无关，因为可以证明，对于阿基米德 v，只要$\mathbf{G}(k_v)$ 是紧的，就有$|\mathcal{S}_{k_v}(\gamma)| = 1$。

7.2.3. 非阿基米德位处的共轭类。

命题 7.5. 设 $v \in \mathrm{V}f$，且设 γ 是$\mathbf{G}(k_v)$中的一个正则半单元素，使得 $|\Delta(\gamma)|_\mathfrak{p} = 1$，并且 $\mathbf{G}^\gamma$ 可由 $k_\mathfrak{p}$ 的非分歧扩张分裂。则对于$\mathbf{G}(k_v)$ 的任意开紧子群 U_v，都有 $|\mathcal{S}_{U_v}(\gamma)| = 1$。

证明。 第一步是下面的引理。

引理 7.6。 设 $\gamma \in \mathbf{G}(k_v)$，使得 $|\Delta(\gamma)|_v = 1$，并且$\mathbf{G}^\gamma$ 可由 k_v 的温和分歧扩张分裂。设 U_v 是$\mathbf{G}(k_v)$的极大紧子群。 $\mathcal{S}_{U_v}(\gamma)$ 在$\ker[H^1(k_v, \mathbf{G}^\gamma) \to H^1(k_v, \mathbf{G})]$ 中的像仅由紧类组成。

证明。 记 $\mathbf{T} = \mathbf{G}\gamma$。设 L_v 为 k_v 的一个分裂$\mathbf{T}$的温和分歧扩张。设$[\gamma']_{\mathbf{G}(k_v)}$ 为 $\mathcal{S}_{U_v}(\gamma)$ 中满足 $\gamma' \in U_v$ 的一个类。由于 L_v 分裂 $\mathbf{T}$，由希尔伯特第90定理，我们有$H^1(L_v,\mathbf{T}) = \{1\}$，从而 γ 与 γ' 在 $\mathbf{G}(L_v)$ 中共轭，据引理 7.3。

选取 $g \in \mathbf{G}(L_v)$ 使得 $\gamma' = g^{-1}\gamma g$。我们需要证明$[\gamma']_{\mathbf{G}(k_v)}$ 的像是一个紧上同调类。这相当于证明存在$h \in \mathbf{G}(k_v)$ 使得 $h \in \mathbf{T}(L_v)g$ （从而与 h 相关联的上闭链与 g 的上闭链上同调等价），并且对所有 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L_v/k_v)$ 我们有 $h^\sigma h^{-1} \in \mathbf{T}(L_v)^b$（从而该上闭链是紧的）。

设 X_{L_v}, X_{k_v} 分别为 $\mathbf{G}(L_v)$ 和 $\mathbf{G}(k_v)$ 的 Bruhat–Tits建筑。于是，由于扩张 L_v/k_v 是温和分歧的，根据 [45]可知，单纯复形 $X_{k_v} \hookrightarrow X_{L_v}$ 和 $X_{k_v} = X^{\mathrm{Gal}(L_v/k_v)}{}_{L_v}$ 之间存在包含关系。

设 τ 为由 U_v 稳定的 X_{k_v} 的胞腔，U_v 为 $\mathbf{G}(L_v)$ 中 τ 的稳定子；这是 $\mathbf{G}(L_v)$ 的一个紧子群。由于 $\tau \in X^{\mathrm{Gal}(L_v/k_v)}{}_{L_v}$，群 $\widetilde{U}$ 在 $\mathrm{Gal}(L_v/k_v)$ 下保持稳定。我们有 $\tau = \gamma'\tau$，因此 $\gamma g\tau = g\tau$。由下文的引理 7.7 可知$\widetilde{}$ $\widetilde{}$，$g \in \mathbf{T}(L_v)U_v$。记 $g = th$，其中 $h \in U_v$、$t \in \mathbf{T}(L_v)$。于是，$h \in \mathbf{T}(L_v)g$，并且 $h^\sigma h^{-1} \in \widetilde{U}_v$，从而 $h^\sigma h^{-1} \in \mathbf{T}(L_v)^b$。证明至此完成。□

引理 7.7. 若 $\gamma \in \mathbf{G}(L_v)$ 是正则的，则存在唯一一个由 $\mathbf{G}^\gamma$ 稳定的不变公寓 $\mathcal{A} \subset X_{L_v}$。此外，若 γ 属于某个紧子群，且 $|\Delta(\gamma)|_v = 1$，则有 $\mathcal{A} = (X_{L_v})^\gamma$。

此外，若 $g \in \mathbf{G}(L_v)$ 和 τ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个胞腔，且 $h\tau \in \mathcal{A}$ 也成立，则 $h \in \mathbf{G}^\gamma(L_v)\mathrm{Stab}_{\mathbf{G}(L_v)}\tau$。

证明。 这由引理 6.4 立即得出。 □

现在我们可以完成该命题的证明。根据引理 7.6，$\mathcal{S}_{U_v}(\gamma)$ 的像仅由 $H^1(k_v, \mathbf{G}^\gamma)$ 中的紧上闭链构成。中心化子 $\mathbf{G}^\gamma$ 可由 k_v 的一个非分歧扩张分裂，因此根据命题 4.5，$H^1(k_v, \mathbf{G}^\gamma)$ 中唯一的紧上同调类是平凡类。因此 $|\mathcal{S}_{U_v}(\gamma)| = 1$。命题得证。□

我们还需要一个界，以处理不满足命题 7.5 假设的有限个赋值。这些界可由引理 7.3 和 4.3 立即推出。我们将它们记在下面的引理中。

引理 7.8. 设 $v \in \mathrm{V}_f$，且 $\gamma \in U_v$ 是一个正则半单元。我们有$|\mathcal{S}_{U_v}(\gamma)| \le C$，其中 C 仅取决于 $\mathbf{G}$ 的绝对型。

7.3. 全局共轭类。 至此，我们完成定理 7.1 的证明。回忆一下，$\mathbf{G}$ 是一个 k-群，且 $\mathbf{G}(k_\infty)$ 与一个固定的李群同构；$\gamma \in \mathbf{G}(k)$ 是强正则的，满足 $m(\gamma) \le R$，并且在所有非阿基米德位生成一个紧子群。根据引理 7.2，只需对$|\mathcal{S}_U(\gamma)|$给出一个一致估计。

定义以下有限赋值集合：

$$S_1 = \{v \in \mathrm{V}_f : |\Delta(\gamma)|_v \neq 1\};$$
$$S_2 = \{v \in \mathrm{V}_f : \mathbf{G}_\gamma \text{ is not split by an unramified } L_v/k_v\}$$

并令 L 为使$\mathbf{G}^\gamma$ 分裂的 k 的最小伽罗瓦扩张。根据引理 7.4、引理 4.2、（7.3）、命题 7.5 和引理 7.8，我们有

$$|\mathcal{S}_U(\gamma)| \ll C^{|S_1|+|S_2|}[L:k]^{\dim \mathbf{G}_\gamma [L:k]^2} \tag{7.4}$$

对于某个仅依赖于 G 的 C。因此，我们必须证明 $|S_1|$, $|S_2|$, $[L : k] = O_{R,\, G}(1)$。

对于 S_1，这很容易：我们有 $\Delta(\gamma) \in \mathfrak{o}_k$，因此

$$2^{|S_1|} \leq \prod_{v \in S_1} q_v \leq N_{k/\mathbb{Q}} \Delta(\gamma) \leq e^R.$$

特别地，$|S_1| \leq R/\log(2)$。

另一方面，根据命题 2.2，我们有，$N(\Delta_{L/k})$ 被一个仅依赖于 R，d 以及 $\mathbf{G}$ 的绝对型的常数所界定，因此 $[L : k]$ 也必然有界。由于 $\prod_{v \in S_2} \mathfrak{p}_v$ 整除 $\Delta_{L/k}$，也可知 $|S_2|$ 有界。

我们已经证明，(7.4) 右侧的所有项都不依赖于上述的 k，$\mathbf{G}$ γ，且均有界，因此该定理成立。

8. 贝蒂数

8.1. 极限重数与贝蒂数。 根据松岛公式，存在有限多个不可约表示，它们决定了 $\Gamma\backslash X$ 的贝蒂数大小。更准确地说，对于每个 $i = 1, 2, \ldots\ldots, \dim X$，都存在一个由酉不可约表示 $\{\pi_j^i\}$ 组成的有限集合，使得第 i 个贝蒂数

$$b_i(\Gamma\backslash X) = \dim(H^i(\Gamma\backslash X)) = \sum_j n(\pi_j^i, i) m(\pi_j^i, \Gamma)$$

其中 $m(\pi_j^i, \Gamma)$ 是 π_j^i 在 $L^2(G/\Gamma)$ 中的重数。此外，若 $i \neq \frac{1}{2}\dim(X)$，则这些 π_j^i 均不是离散系列。因此，定理 C 由下述极限重数结果推出。

定理 8.1. 设 G 为半单实李群，π 为 G 的不可约酉表示，且不是离散系列。则对任意迹域为 k 的余紧算术格 $\Gamma \subset G$，我们有

$$m(\pi, \Gamma) \ll_\pi \begin{cases} \mathrm{vol}(\Gamma\backslash G)[k : \mathbb{Q}]^{-1} & \text{if } \pi \text{ is tempered,} \\ \mathrm{vol}(\Gamma\backslash G) e^{-c_\pi [k:\mathbb{Q}]} & \text{if } \pi \text{ in non-tempered,} \end{cases}$$

其中 $c_\pi > 0$ 仅依赖于 π。

本节其余部分证明该定理。该证明是经典的，沿用 [20, 10.2] 与 [2, 6.10-6.21], 的思路，并使用源自 D. Kazhdan 以及 D. L. DeGeorge 和 N. R. Wallach [15]的论证。

8.2. 矩阵系数估计。 为应用通常方法，我们需要对限制在 G 中一个球上的非离散级数表示的矩阵系数之 L^2-范数增长给出若干熟知估计。我们进一步区分温和表示与非温和表示；在前一种情形中，我们将证明如下。

命题 8.2. 设 $\pi \in \widehat{G}$ 是一个非离散系列的温和表示。设 $v \in \mathcal{H}_\pi$ 为一个 K-有限向量，且 $\phi(g) = \langle \pi(g)v, v \rangle$ 为相应的矩阵系数。那么当 $R \to +\infty$ 时，我们有：

$$\int_{B(R)} |\phi(g)|^2 \, dg \gg_\pi R^{2d+r} \tag{8.1}$$

该不等式可由 Harish-Chandra 给出的矩阵系数渐近等价式（见下文 8.3）以及对 KAK 分解的积分推出。使用相同的论证，我们还可以证明关于非温和表示的以下更精确结果。

命题 8.3. 设 $\pi \in G$ 是一个非温和表示。设 $v \in \mathcal{H}_\pi$ 是一个 K-有限向量，且 $\phi(g) = \langle \pi(g)v, v\rangle \mathcal{H}_\pi$ 是相应的矩阵系数。那么存在 $a_\pi > 0$，使得当 $R \to +\infty$ 时，有：

$$\int_{B(R)} |\phi(g)|^2 \, dg \gg_\pi e^{a_\pi R}. \tag{8.2}$$

8.2.1. 命题 *8.2* 的证明。 我们考虑矩阵系数 $\phi(g) = \langle \pi(g)v_0, \ v_1\rangle$ 的 Harish-Chandra 展开，如 [28, VIII.8] 所述。存在一个有限权集合 $\lambda_1, \dots \lambda_k \subset \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 以及非零函数 $p_i : \mathfrak{a} \times H_0 \times H_0 \to \mathbb{C}, \Lambda \in S$，使得对每个 $H \in \mathfrak{a}^+$：

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^k e^{\lambda_i(tH)} P_i(tH, v_1, v_2)}{\langle \pi(\exp(tH))v_1, v_2\rangle} = 1 \tag{8.3}$$

其中 $P_i(H, \ v_1, \ v_2)$ 是关于 H 的多项式，关于 v_1 线性且关于 v_2 反线性。此外，当 H 在 $\mathfrak{a}^+$ 的内部的一个紧集内变化时，上述极限一致收敛。

根据 [28, 定理 8.53]，我们有 $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq \rho$ 对所有 i 都成立，其中 ρ 是 G 的李代数的单根之和的一半。此外，由于 π 是温的而不是离散系列，其矩阵系数均不可能平方可积，因此对于某个 i 以及所有非零的 K-有限向量 $v_1, \ v_2$，等号必然成立。

设 $p_1, \ p_2$、……、p_m 是 $\mathbb{C}[\mathfrak{a}]$ 中次数为 d、对应于 8.3 中多项式 $P_i(H, \ v_0, \ v_1)$ 中次数为 d 的项的非零齐次多项式。令 $\alpha_1, \ \alpha_2$、……、$\alpha_m \in \mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^*$ 为相应的根 $\lambda_1, \ \lambda_2$、……、λ_m 的虚部，如前所述，并令 $P(H) := \sum_{j=1}^m e^{i\langle H, \ \alpha_j\rangle} p_j(H)$。注意，$e^{-\rho(H)}P(H)$ 对应于 8.3 中分子的主项。

令 $Q : \ \mathfrak{a} \to \mathbb{R}^m$ 为对 $H \in \mathfrak{a}$ 定义的线性映射

$$Q(H) = (\langle H, \alpha_1\rangle, \dots \langle H, \alpha_m\rangle)$$

并令 $q : \ \mathfrak{a} \to \mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m/(2\pi)\mathbb{Z}^m$ 为由 Q 诱导的映射。令 T 为 $q(\mathfrak{a})$ 在 $\mathbb{T}^k$ 中的闭包，T 是一个紧环面，且 $q(\mathfrak{a})$ 在 T 中稠密。我们将用到这样一个事实：$q(\mathfrak{a})$ 在 T 中均匀分布。更确切地说，我们将利用以下基本事实，该事实可通过计算傅里叶系数轻易证明：

命题 8.4. 设 f 是 T 中的光滑函数，则对于任意 $H_0 \in \mathfrak{a}$，有

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\mathrm{vol}(B_{H_0}(R))} \int_{B_{H_0}(R)} f(q(H)) \, dH \to \int_T f$$

此外，该收敛在 $H_0 \in \mathfrak{a}$ 上是一致的。

设 H_0 是 $\mathfrak{a}^+$ 内部的非零向量，且满足 $P(H_0) \neq 0$。令$\delta_1, \ \delta_2 > 0$ 足够小，使得 $B_{H_0}(\delta_1)$ 的闭包包含于 $\mathfrak{a}^+$ 的内部，并且对于所有 $H \in B_{H_0}(\delta_1)$，有 $|P(H)| \geq \delta_2$。

我们有

$$P(tH) = t^d \sum_{j=1}^m e^{i\langle tH, \alpha_j\rangle} p_j(H). \tag{8.4}$$

设 $x_0 = q(H_0) = (\langle H_0, \alpha_1\rangle, \ldots \langle H_0, \alpha_m\rangle)$ 为 H_0 在 $T \subset \mathbb{T}^m$ 中的投影，并在 $x_0 \in T$ 周围选取一个足够小的球，以便我们可以根据 8.4 保证，对于所有 $H \in B_{H_0}(\delta_1)$ 以及所有满足 $q(tH) \in B_{x_0}$ 的 $t > 0$，都有 $|P(tH)| \geq \frac{1}{2} t^d \delta$。

因此，对于所有的 $H \in B_{H_0}(\delta_1)$ 和所有的 $t > 0$

$$|\phi(k_1 \exp(tH) k_2)| \gg e^{-\rho(tH)} t^d \tag{8.5}$$

并在 KAK 分解中计算积分（见 [28, 命题 5.28]），我们得到：

$$\int_{B(R)} |\phi(g)|^2 \, dg \gg \int_K \int_K \int_{\mathfrak{a}^+}^{\rho(H)<R} e^{2\rho(H)} |\phi(k_1 \exp(H) k_2)|^2 \, dH dk_1 dk_2.$$

我们选择足够小的 δ_2，使得

$$B_{R,H_0} := (\delta_2 R) \mathrm{B}_{H_0}(\delta_2) \subseteq \{H \in \mathfrak{a}^+ | \rho(H) < R\}$$

因此

$$\int_{\mathfrak{a}^+}^{\rho(H)<R} e^{\rho(H)} |\phi(k_1 \exp(H) k_2)|^2 \, dH \gg \int_{B_{R,H_0}} e^{2\rho(H)} |\phi(k_1 \exp(H) k_2)|^2 \, dH$$

注意，$B_{R,\ H_0}$ 是半径为 $O(R)$ 的球，它包含于圆锥 $\{tH | t > 0,\ H \in \mathrm{B}^{H_0}(\delta_2)\}$ 中。因此，估计式 8.5 与命题 8.4（取 f 为 B_{x_o} 的示性函数的光滑逼近）共同给出：

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(B_{R,H_0})} \int_{B_{R,H_0} \cap q^{-1}(B_{x_0})} e^{2\rho(H)} |\phi(k_1 \exp(H) k_2)|^2 \, dH \gg R^{2d} \mathrm{vol}(B_{x_0})$$

这很容易推出（8.1）。

8.2.2. 命题 *8.3* 的证明。 论证相同，但由于 π 不是温表示，(8.3) 中出现的某个 λ_i 必须满足 $\mathrm{Re}(\lambda_i) > \rho$，根据 [28, 定理 8.53]。运用与（8.5）相同的论证，我们得到

$$|\phi(k_1 \exp(tH) k_2)| \gg e^{-(\rho+\varepsilon)(tH)} t^d \tag{8.6}$$

其中 $\varepsilon \in \mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^*$ 在 $\mathfrak{a}^+$ 上为正。使用相同的积分方案，我们得到

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(B_{R,H_0})} \int_{B_{R,H_0} \cap q^{-1}(B_{x_0})} e^{2\rho(H)} |\phi(k_1 \exp(H) k_2)|^2 \, dH \gg e^{-aR} \mathrm{vol}(B_{x_0})$$

对于某个 $a > 0$（通过 ε 取决于 π），从而（8.2）得证。

8.3. **极限重数的证明**。 定理 8.1 的证明同样遵循众所周知的思路。根据 G. Savin 的论证 [50]（另见 [2, 引理 6.15]），存在一个子空间 $W \subset L^2(\Gamma \backslash G)$，使得如果

$$\beta(x) = \sup_{f \in W,\, \|f\|=1} |f(x)|^2$$

then

$$m(\pi, \Gamma) = \int_{\Gamma \backslash G} \beta(x) dx. \tag{8.7}$$

另一方面，对于 $\beta(x)$ 有如下估计（见 [2, (6.21.1)]：存在一个向量 $v \in \mathcal{H}_\pi$（W 由此定义），使得对任意 $r > 0$，对任意 $x \in \Gamma \backslash G$，我们有

$$\beta(x) \leq \frac{1}{\|\phi_r\|^2} N_\Gamma(x, 2r) \tag{8.8}$$

其中

$$\phi_r(g) = 1_{B(r)}(g)\langle \pi(g)v, v\rangle_{\mathcal{H}_\pi}$$

and

$$N_\Gamma(x,\ell) = |\{\gamma \in \Gamma : d(x,\gamma x) < \ell\}|.$$

根据 [21], 中的命题 5.1，存在 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$，使得

$$N_\Gamma(x, 2r) \leq [k:\mathbb{Q}]^m$$

对任意 $r \leq \frac{\varepsilon}{2}[k:\ \mathbb{Q}]$。根据 [2, 引理 6.20], 的证明中的论证可知，对于这样的 r，我们有

$$\int_{\Gamma\backslash G} N_\Gamma(x,2r)dx \leq [k:\mathbb{Q}]^m \operatorname{vol}\left((\Gamma\backslash G)_{\leq 2r}\right) + \operatorname{vol}(\Gamma\backslash G)$$

根据定理 D，这等于 $(1+o(1))\operatorname{vol}(\Gamma\backslash G)$，其中 $[k:\ \mathbb{Q}] \to +\infty$。利用 (8.7) 和 (8.8)，取 $r = \frac{\varepsilon}{2}[k:\ \mathbb{Q}]$，得到

$$m(\pi,\Gamma) \ll \frac{1}{\|\phi_r\|^2}\operatorname{vol}(\Gamma\backslash G)$$

现在，定理 8.1 由命题 8.2（当 π 是温的）和命题 8.3（当它不是温的）得证。

参考文献

[1] Miklos Abert、Nicolas Bergeron、Ian Biringer与Tsachik Gelander。非正曲率下正规化贝蒂数的收敛。杜克数学杂志，172(4):633–700，2023年。[2] Miklos Abert、Nicolas Bergeron、Ian Biringer、Tsachik Gelander、Nikolay Nikolov、Jean Raimbault与Iddo Samet。李群中格序列的 l^2-不变量的增长。数学年刊，185(3):711–790。[3] Miklós Abért与Ian Biringer。所有黎曼流形空间上的幺模测度。几何与拓扑，26(5):2295–2404，2022年。[4] Miklos Abert、Yair Glasner与Balint Virag。不变随机子群的Kesten定理。杜克数学杂志，163(3):465–488。[5] Shôrô Araki。论根系与不可约对称空间的无穷小分类。大阪市立大学数学杂志，*A*辑，13(1):1–34，1962年。[6] James Arthur。迹公式导论。载于调和分析、迹公式与*Shimura*簇。克雷数学研究所*2003*年暑期学校论文集，加拿大多伦多，*2003*年*6*月*2–27*日，第1–263页。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2005年。[7] Mikhail Belolipetsky。算术双曲轨形直径的一个界。几何奉献，214:295–302，2021年。[8] Mikhail Belolipetsky与Vincent Emery。奇数情形下PO(n,1)°的算术商空间的体积，n 奇数。伦敦数学会会刊（*3*），105(3):541–570，2012年。[9] Itai Benjamini与Oded Schramm。有限平面图分布极限的常返性。电子概率论杂志，6:第23号，13页（电子版）。[10] M. Bhargava、A. Shankar、T. Taniguchi、F. Thorne、J. Tsimerman与Y. Zhao。数域类群中2-挠的界与椭圆曲线上的整点。美国数学会杂志，33(4):1087–1099，2020年。[11] A. Borel。双曲三维流形的可交换类与体积。比萨高等师范学校科学纪事（*4*），8(1):1–33。[12] Armand Borel与Gopal Prasad。半单群中有界余体积离散子群的有限性定理。*IHÉS*数学出版物，69:119–171，1989年。[13] Kenneth S. Brown。群的上同调，数学研究生教材 第87卷，施普林格，Cham，1982年。[14] Pierre de la Harpe。局部紧群的闭子群空间。*ArXiv*电子预印本，2008年。[15] David L. DeGeorge与Nolan R. Wallach。 $L^2(\Gamma\backslash G)$中重数的极限公式。数学年刊（*2*），107(1):133–150。

[16] David L. DeGeorge与Nolan R. Wallach。 $L^2(\Gamma\backslash G)$中重数的极限公式。II. 温和谱。数学年刊（2），109(3):477–495。[17] E. Dobrowolski。关于Lehmer的一个问题以及多项式不可约因子的个数。算术学报，34(4):391–401。[18] Tobias Finis与Erez Lapid。同余子群的一个逼近原理。欧洲数学会杂志（JEMS），20(5):1075–1138，2018年。[19] Tobias Finis与Erez Lapid。同余子群的一个逼近原理。II：在极限重数问题上的应用。数学杂志，289(3-4):1357–1380，2018年。[20] Mikołaj Frączyk。算术双曲曲面与3-流形的强极限重数。数学发明，224(3):917–985，2021年。[21] Mikolaj Fraczyk、Sebastian Hurtado与Jean Raimbault。算术局部对称空间的拓扑复杂性。数学发明，2025年。[22] Mikolaj Fraczyk与Jean Raimbault。Shimura曲线与算术三维轨形的贝蒂数。代数与数论，13(10):2359–2382，2019年。[23] Tsachik Gelander。关于不变随机子群与格的一个观点。载于《2018年国际数学家大会论文集，ICM 2018，巴西里约热内卢，2018年8月1–9日。第二卷。邀请报告》，第1321–1344页。新泽西州哈肯萨克：世界科技出版社；里约热内卢：巴西数学会（SBM），2018年。[24] Tsachik Gelander与Arie Levit。非阿基米德局部域上的不变随机子群。数学年刊，372(3-4):1503–1544，2018年。[25] Tsachik Gelander与Paul Vollrath。短闭测地线与同伦复杂性的界，2021年。[26] Ju-Lee Kim、Sug Woo Shin与Nicolas Templier。超尖点表示的渐近行为与族的Sato-Tate等分布。数学进展，362:57，2020年。标识号106955。[27] Achim Klenke。概率论。Universitext。施普林格，伦敦，第二版，2014年。综合性教程。[28] Anthony W. Knapp。半单群的表示论。普林斯顿数学里程碑丛书。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2001年。基于实例的概述，1986年原版的重印。[29] Anthony W. Knapp。《李群：超越导论》，《数学进展》第140卷。Birkhäuser Boston, Inc.，马萨诸塞州波士顿，第二版，2002年。[30] Serge Lang。代数数论，《数学研究生教材》第110卷。施普林格出版社，纽约，第2版。[31] Enrico Leuzinger。度量空间与Bruhat-Tits建筑的测地流的熵。高等几何，6(3):475–491，2006年。[32] Wolfgang Lück。 L^2-不变量：理论及其在几何与 K-理论中的应用，《数学及其边缘领域成果》第44卷。第3辑。施普林格出版社，柏林，2002年。[33] Michael Magee与Doron Puder。随机覆盖曲面的渐近统计。数学论坛Pi，11:51，2023年。标识号e15。[34] G. A. Margulis与J. Rohlfs。论离散子群余体积的比例性。数学年刊，275:197–205，1986年。[35] Yozô Matsushima。紧局部对称黎曼流形贝蒂数的一个公式。微分几何杂志，1(1-2):99–109，1967年。[36] Jasmin Matz。$\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)$在$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}^{r_1}\oplus\mathbb{C}^{R_2})$中的极限重数。群、几何与动力系统，13(3):841–881，2019年。[37] Laura Monk。高亏格随机双曲曲面的Benjamini-Schramm收敛与谱。分析与偏微分方程，15(3):727–752，2022年。[38] Paul D. Nelson与Akshay Venkatesh。轨道方法与自守形式分析，2018年。[39] D. G. Northcott。代数簇上的周期点。数学年刊（2），51:167–177，1950年。[40] Martin Olbrich。局部对称空间的L2-不变量。数学文献，7:219–237，2002年。[41] Takashi Ono。代数环面的算术。数学年刊（2），74:101–139，1961年。[42] Vladimir Platonov与Andrei Rapinchuk。代数群与数论，《纯粹与应用数学》第139卷。学术出版社，马萨诸塞州波士顿。由Rachel Rowen译自1991年俄文原版。[43] Gopal Prasad。半单群的 S-算术商空间的体积。高等科学研究所数学出版物，(69):91–117。附有Moshe Jarden与作者撰写的附录。

[44] Gopal Prasad. 扎里斯基稠密子群中的 R-正则元素。数学季刊，45(4)：542–545，1994。[45] Gopal Prasad. 约化群的 Bruhat-Tits 建筑中的伽罗瓦不动点。法国数学会通报，129(2)：169–174，2001。[46] Gopal Prasad 和 M. S. Raghunathan. 半单群中的 Cartan 子群与格。数学年刊（第 *2* 辑），96：296–317，1972。[47] Jean Raimbault. 大体积双曲流形的几何与拓扑。载于谱理论与几何研讨会论文集。*2012–2014* 年，第 163–195 页。St. Martin d'Hères：格勒诺布尔第一大学、傅里叶研究所，2014。[48] Guy Rousseau.局部域上约化群的建筑。巴黎第十一大学数学系，奥赛，1977。博士论文，奥赛数学出版物，第 221-77.68 号。[49] François Sauvageot. 约化群的稠密性原理。*Compositio Math.*，108(2)：151–184。[50] Gordan Savin. 尖点形式的极限重数。*Invent. Math.*，95(1)：149–159。[51] Jean-Pierre Serre. 伽罗瓦上同调。[52] R. Steinberg. 半单代数群的正则元素。高等科学研究所数学出版物，25：281–312，1965。[53] Robert Steinberg. *Chevalley* 群讲义。耶鲁大学，纽黑文，康涅狄格州，1968。John Faulkner 和 Robert Wilson 整理的讲义。[54] Garrett Stuck 和 Robert J. Zimmer. 高秩半单群遍历作用的稳定子。数学年刊（第 *2* 辑），139(3)：723–747，1994。[55] J. Tits. 局部域上的约化群。载于自守形式、表示与 L-函数（俄勒冈州立大学科瓦利斯，*1977* 年纯数学研讨会论文集），第 *1* 部分，《纯数学研讨会论文集》第 XXXIII 卷，第 29–69 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1979。[56] Emmanuel Ullmo 和 Andrei Yafaev. 复乘环面类数及特殊点伽罗瓦轨道下界。法国数学会通报，143(1)：197–228，2015。[57] V. S. Varadarajan. 实约化群上的调和分析，数学讲义第 576 卷。施普林格，Cham，1977。[58] E. B. Vinberg. 半单线性群稠密子群的定义环。苏联数学学报，5：45–55，1972。雅盖隆大学，数学与计算机科学学院，ul. Łojasiewicza 6，30-348 克拉科夫，波兰电子邮箱：mikolaj.fraczyk@uj.edu.pl 耶鲁大学数学系，10 Hillhouse Ave，纽黑文，CT 06511电子邮箱：sebastian.hurtado-salazar@yale.edu 马赛数学研究所，UMR 7373，法国国家科学研究中心，艾克斯-马赛大学电子邮箱：jean.RAIMBAULT@univ-amu.fr