arXiv:2602.01809v1 [quant-ph] 2 Feb 2026

量子自旋链中完全本征态热化的有限尺寸标度

Yuke Zhang[1] 和 Pengfei Zhang[1,2,*] [1] State Key Laboratory of Surface Physics & Department of Physics, Fudan University, Shanghai, 200438, China [2] Hefei National Laboratory, Hefei 230088, China(日期：2026年2月3日)

尽管封闭量子系统经历幺正演化，但局域可观测量的长时间期望值仍可由热系综很好地描述，这为量子统计力学奠定了基础。理解量子热化的一条有前景的途径是本征态热化假说（ETH），该假说认为，单个能量本征态在局域上已呈现热态特征。后续研究将这一概念拓展至完整 ETH，通过非平凡关系刻画矩阵元之间的高阶关联。在本研究中，我们通过精确对角化，详细考察正则系综中这些关系的有限尺寸修正。我们区分了修正的两个不同来源：一类源于能量涨落，其随系统尺寸增大按多项式衰减；另一类源于各能量窗口内部的涨落，其随系统尺寸增大呈指数衰减。特别是，我们的分析解开了这样一个谜题：对于某些可观测量，即使在混沌系统中，有限尺寸修正也会随着系统尺寸增大而反常增长。我们的结果为在量子多体系统中检验完整 ETH 提供了一套系统且实用的方法。

I. 引言

理解孤立量子多体系统如何趋近平衡，是量子统计力学中的一个核心问题。与经典系统不同，经典系统的热化源于相空间中的遍历运动，而封闭量子系统的幺正动力学会保留信息，这使统计系综的涌现面临挑战。对此，一种广受认可的解释是本征态热化假说（ETH）：它认为，单个多体本征态已在局域可观测量中编码了热行为 [1–7]。具体而言，对于能量本征基 $\{|E_i\rangle\}$ 中的少体算符 O，ETH 断言

$$O_{ij} = O(E_i)\,\delta_{ij} + e^{-S(E^+)/2} F^{(2)}_{E^+}(\omega_{ij}) R_{ij}, \qquad (1)$$

其中，$E^+ = (E_i + E_j)/2$, $\omega_{ij} = E_i - E_j$, $O(E)$表示热期望值，$S(E)$是热力学熵，$F^{(2)}_E(\omega)$是一个在ω较大时衰减的光滑函数，而 R_{ij} 是均值为零、方差为一的高斯随机变量。对角项确保长时间平均能够再现热力学预测，而指数级微小的非对角涨落则在一般动力学下驱动系统趋于平衡 [4, 7–14]。人们还在光学晶格中开展了量子热化的实验演示 [15, 16]。此后，理解阻碍量子热化的机制成为一项重要课题，研究重点包括可积性 [8, 12, 17–25]，、多体局域化 [26–39]，，以及由重复测量产生的非幺正动力学 [40–48]。

然而，传统的 ETH 假设无法捕捉非平凡的高阶关联函数，因为高斯随机变量的所有累积量都为零。为克服这一局限，人们提出了完整 ETH [49]，，其中 R_{ij} 被视为更一般的随机变量。完整 ETH 并不指定 R_{ij}的底层分布，而是直接以矩阵元乘积的平均值来表述：

$$\overline{O_{i_1 i_2} O_{i_2 i_3} \cdots O_{i_q i_1}} = e^{-(q-1)S(E^+)} F^{(q)}_{E^+}(\boldsymbol{\omega}). \qquad (2)$$

在此，我们假设 $i_1 \neq i_2 \cdots \neq i_q$，引入相对能量 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_{i_1 i_2}, \omega_{i_2 i_3}, \cdots \omega_{i_{q-1} i_q})$，其中 $\omega_{i_m i_n} = E_{i_m} - E_{i_n}$，并将质心能量的定义扩展至 $E^+ = \sum_{m=1}^{q} E_{i_m}/q$。统计平均可理解为对狭窄能量窗口内各个能级的平均。此外，完整 ETH 假设

$$\begin{aligned}&\overline{O_{i_1 i_2} \cdots O_{i_{k-1} i_1} O_{i_1 i_{k+1}} \cdots O_{i_q i_1}} \\ &\quad = \overline{O_{i_1 i_2} \cdots O_{i_{k-1} i_1}}\;\overline{O_{i_1 i_{k+1}} \cdots O_{i_q i_1}}.\end{aligned} \qquad (3)$$

后续研究进一步凸显了完整 ETH 与自由概率之间的联系 [50–57]，，后者指出自由累积量是支配高阶关联函数的基本要素。关于完整 ETH 及其违反的分析和数值研究已见文献 [51, 57–60]。特别是，文献 [57] 讨论了非可积 Floquet 系统中的因子化修正。然而，能量守恒系统中这些关系的修正仍缺乏细致的有限尺寸标度分析。

在这项工作中，我们对具体量子自旋链中的完整 ETH 进行系统的有限尺寸标度分析，考察单点和双点可观测量。遵循文献 [51]，，我们重点研究正则系综中关联函数的有限尺寸修正（如下文所述），而非直接处理式（2）和（3）中的矩阵元关系。我们将关联函数的有限尺寸修正分解为若干不同的贡献，包括源自能量涨落、随系统尺寸呈多项式衰减的贡献

* PengfeiZhang.physics@gmail.com

以及源自各能量窗口内部涨落、随系统尺寸呈指数衰减的贡献。具体而言，各能量窗口内部涨落所产生的贡献可以利用热密度矩阵预测。这种分解还清楚地表明，尽管某些关联函数的修正——即涉及多个标度不同的求和的修正——在中等系统尺寸下可能会随系统尺寸增大而异常增长，完整 ETH 在混沌自旋链中仍然成立。我们的结果加深了对完整 ETH 的理解，并提供了一种利用精确对角化对其进行验证的实用方法。

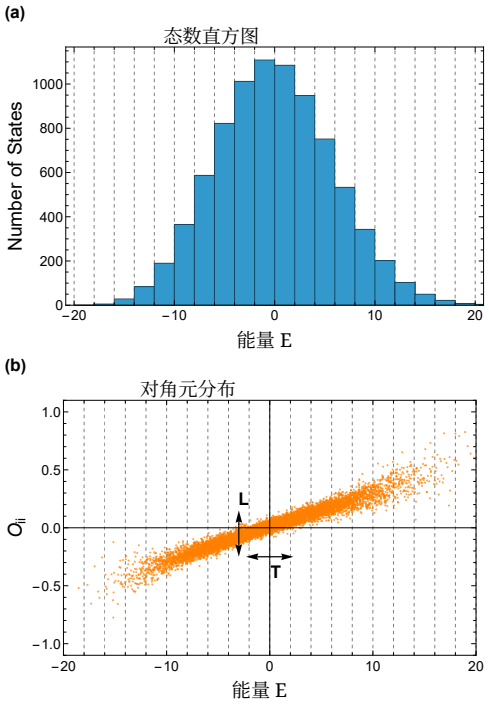

图 1. 本文提出的有限尺寸修正分解示意图。(a) 图中，我们引入一系列宽度固定为 $\Delta = 2$ 的窄能量窗口，该宽度与系统尺寸无关。(b) 图中，我们展示了 O_{ii} 在所有本征态上的分布，其中总方差由每个能量窗口内的方差（纵向，记为 L）和不同能量窗口之间的方差（横向，记为 T）组成。

II. 关联函数的完全本征态热化

现在，我们通过重新审视完整 ETH 对关联函数的预测来介绍我们的设定 [49, 50]。我们主要关注算符 O 在无限温度下的多时关联函数，其定义如下：

$$C^{(q)}(t_1, t_2, \cdots, t_{q-1}) \equiv \langle O(t_1) \cdots O(t_{q-1}) O(0) \rangle. \quad (4)$$

这里，期望值是在密度矩阵为 $\rho = \mathbb{1}/D$ 的无限温度系综中取的，其中 D 是希尔伯特空间维数。算符在哈密顿量为 H 的条件下，按照海森堡演化 $O(t) \equiv e^{iHt} O e^{-iHt}$ 演化。

A. 二点函数

为了了解关联函数与完整 ETH Ansatz（2）和（3）的关系，我们首先考虑 $q = 2$ 的情形，其表达式为 $C^{(2)}(t) = D^{-1} \sum_{ij} e^{i\omega_{ij} t} O_{ij} O_{ji}$ [61]。为了应用完整 ETH Ansatz（2）和（3），我们将求和拆分为 $j = i$ 和 $j \neq i$ 对应的贡献，得到

$$C^{(2)}(t) = k_2(t) - \frac{1}{D} \sum_i O_{ii}^2. \quad (5)$$

这里，我们引入自由累积量 k_q，它们是自由概率论 [50] 中的基本对象：

$$k_q(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{D} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq \cdots i_q} e^{i\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{t}} O_{i_1 i_2} O_{i_2 i_3} \cdots O_{i_q i_1}, \quad (6)$$

与 $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_{q-1})$。在（5）的第二项中，对每个狭窄能量窗口内各个本征态的求和，实际上起到了（2）和（3）中取平均的作用，由此确定 $\frac{1}{D} \sum_i O_{ii}^2 = \frac{1}{D} \sum_i \overline{O_{ii}^2}$。接下来有两个关键步骤：

1. We apply the factorization in (3), which yields the approximation $\overline{O_{ii}^2} \approx \overline{O_{ii}}^2$.

2. 我们注意到，在鞍点近似下，对 i 求和实际上将能量 E_i 固定在无限温度系综对应的能量附近。同样的能量固定也可以通过以下方式实现

$$\frac{1}{D} \sum_i \overline{O_{ii}}^2 \approx \left(\frac{1}{D} \sum_i \overline{O_{ii}} \right)^2 = k_1^2. \quad (7)$$

综合以上各项，我们得到本征态热化假说的预言 $C^{(2)}(t) \approx k_2(t) - k_1^2 \equiv C^{(2)}_{\text{本征态热化假说}}(t)$。

上述分析为有限尺寸修正提供了一种自然的分解。我们将二点函数的误差引入为

$$F_{11} \equiv C^{(2)}_{\text{ETH}}(t) - C^{(2)}(t) = \frac{1}{D} \sum_i O_{ii}^2 - \left(\frac{1}{D} \sum_i O_{ii} \right)^2, \quad (8)$$

它衡量的是完整本征态谱中所有对角元的方差 O_{ii}。在步骤 1 中，我们忽略每个小能量窗口内各个能级之间 O_{ii} 的涨落；预计这些涨落会随系统尺寸 L [7, 62]呈指数级衰减。在步骤 2 中，我们忽略鞍点近似带来的次领先修正，这些修正源于能量

涨落，其中 $\delta E/E \sim O(1/\sqrt{L})$ [63, 64]。因此，我们预计相应的贡献会随系统尺寸呈多项式级变化，具体分析见下文。基于这些考虑，我们将方差分解为纵向方差和横向方差，$F_{11} = F_{11}^{\mathrm{L}} + F^{\mathrm{T}11}$，其中

$$F_{11}^{\mathrm{L}} \equiv \sum_E P_E \left[\frac{1}{d_E} \sum_{i\in E} O_{ii}^2 - \left(\frac{1}{d_E} \sum_{i\in E} O_{ii} \right)^2 \right],$$
$$F_{11}^{\mathrm{T}} \equiv \sum_E P_E \left[\left(\frac{1}{d_E} \sum_{i\in E} O_{ii} \right)^2 \right] - \left[\sum_E P_E \left(\frac{1}{d_E} \sum_{i\in E} O_{ii} \right) \right]^2. \tag{9}$$

在这里，我们针对哈密顿量 H 的本征能量引入一系列窄能量窗口，窗口宽度为 Δ，如图1所示。我们将以 E 为中心的窗口中的本征态数记为 d_E，并定义 $P_E = d_E/D$ 为归一化概率分布。根据定义，F_{11}^{L} 衡量每个能量窗口内 O_{ii} 的方差，并以相应的概率加权。相比之下，F_{11}^{T} 衡量不同能量窗口之间的方差。

尽管分析 F_{11}^{L} 需要进行数值模拟，但在热力学极限下，F_{11}^{T} 的标度行为可以利用热系综计算。这是因为每个能量窗口内的平均值等价于微正则系综平均值，且态数按 $d_E \sim e^{S(E)}$标度。因此，我们有

$$F_{11}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{D} \int dE\ e^{S(E)} [O(E) - O(0)]^2. \tag{10}$$

这里，$O(E)$表示算符O 在能量为 E时的微正则系综期望值。我们假设无限温度系综对应的能量为 $E = 0$，这总可以通过将哈密顿量 H 平移一个常数来实现。由于 $S(E)$在 $E = 0$附近取最大值，进行泰勒展开可得

$$F_{11}^{\mathrm{T}} \approx \int dE\ e^{-\frac{E^2}{2C_0}} [\partial_E O(0)]^2 E^2 \approx C_0 [\partial_E O(0)]^2. \tag{11}$$

此处，$C_0 = C_V/\beta^2 \propto L$ 是广延量，其中 C_V 是无穷温度极限下的比热。我们利用了这样一个事实：$e^{S(0)} = D$。导数 $\partial_E O(0)$按 $1/L$的尺度变化，因为对于局域可观测量，$O(E) \sim O(1)$，且能量是广延量。因此，我们得出结论：当 $\partial_E O(0) \neq 0$时，$F_{11}^{\mathrm{T}} \propto L^{-1}$。对于 $\partial_E O(0) = 0$的系统，必须考虑高阶展开，这会使 F_{11}^{T}更小。尽管如此，我们仍预期结果随系统尺寸 L呈多项式增长。

B. 高阶关联函数

接下来，我们将上述讨论推广到更高阶关联函数。在这项工作中，我们聚焦于情形 $q = 3$ 和 $q = 4$。对于 $q = 3$，完整 ETH 预言了关系 [49, 50]

$$C^{(3)}(t_1, t_2) \approx k_3(t_1, t_2) + [k_2(t_1 - t_2) + k_2(t_1) + k_2(t_1)]k_1 + k_1^3 \equiv C_{\mathrm{ETH}}^{(3)}(t_1, t_2). \tag{12}$$

该近似源于两项处理：将求和 $D^{-1}\sum_i O_{ii}^3$ 替换为 $k_1^3 = (D^{-1}\sum_i O_{ii})^3$,，以及（2）将求和 $D^{-1}\sum_{i\neq j} e^{i\omega_{ij}t}|O_{ij}|^2 O_{ii}$ 替换为

$$k_2(t)k_1 = \frac{1}{D}\sum_{i\neq j} e^{i\omega_{ij}t}|O_{ij}|^2 \times \frac{1}{D}\sum_k O_{kk}.$$

由于关联函数通常会随时间 t 衰减，我们引入在 $t = 0$ 处评估的误差项，以此衡量有限尺寸修正：

$$F_{111} = \frac{1}{D}\sum_i O_{ii}^3 - \left(\frac{1}{D}\sum_i O_{ii}\right)^3,$$
$$F_{21} = \frac{1}{D}\sum_{i\neq j} |O_{ij}|^2 O_{ii} - k_2(0)k_1. \tag{13}$$

对于 F_{111}，它衡量三阶矩偏离期望值的程度。我们可以像式（9）那样，将其分解为纵向分量和横向分量，写作 $F_{111} = F_{111}^{\mathrm{L}} + F^{\mathrm{T}111}$，其中

$$F_{111}^{\mathrm{L}} \equiv \sum_E P_E \left[\frac{1}{d_E} \sum_{i\in E} O_{ii}^3 - \left(\frac{1}{d_E} \sum_{i\in E} O_{ii} \right)^3 \right],$$
$$F_{111}^{\mathrm{T}} \equiv \sum_E P_E \left[\left(\frac{1}{d_E} \sum_{i\in E} O_{ii} \right)^3 \right] - \left[\sum_E P_E \left(\frac{1}{d_E} \sum_{i\in E} O_{ii} \right) \right]^3. \tag{14}$$

与上一小节中的分析类似，F_{111}^{T} 也可以用热力学量表示。通过将 $S(E)$ 展开至 E^3 阶，直接进行标度分析可得 $F_{111}^{\mathrm{T}} \lesssim O(L^{-2})$。对于 F_{21}，对于满足 $O^2 = \mathbb{1}$ 的算符而言，它不是独立量；我们接下来将重点讨论这类算符。事实上，我们有 $F_{21} = -m_3 + m_1 m_2$，其中 $m_k = D^{-1}\sum_i O_{ii}^k$。特别地，对于满足 $m_1 = 0$ 的泡利算符，这可简化为 $F_{21} = -m_3 = -F_{111}$。

最后，可以类似地引入 $C^{(4)}(t_1, t_2, t_3)$ 的有限尺寸修正。同样，我们只关注 $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ 处的误差项，其中包括六个额外的量。首先，我们有一个误差项

$$F_{1111} = \frac{1}{D}\sum_i O_{ii}^4 - \left(\frac{1}{D}\sum_i O_{ii}\right)^4 = m_4 - m_1^4, \tag{15}$$

我们将 F_{1111} 视为一个独立贡献进行分析，其横向分量（定义方式类似于 (9) 和 (14)）预计按以下规律标度 L^{-2}:

$$F_{1111}^{\mathrm{T}} \approx \int dE\ e^{-\frac{E^2}{2C_0}} [\partial_E O(0)]^4 E^4 \approx 3C_0^2 [\partial_E O(0)]^4. \tag{16}$$

其次，我们还有一种新类型的误差，称为交叉图 [49–51], ，定义为 $C = D^{-1}\sum_{i\neq j}|O_{ij}|^4$。据称 C 会随系统尺寸呈指数衰减L [49–51]。此外，我们还有其他四个误差项：

$$F_{22} = \frac{1}{D}\sum_{i\neq j\neq k} O_{ij}O_{ji}O_{ik}O_{ki} - k_2(0)^2$$
$$= m_4 - m_2^2 - C, \quad (17)$$
$$F_{31} = \frac{1}{D}\sum_{i\neq j\neq k} O_{ij}O_{jk}O_{ki}O_{ii} - k_3(0,0)k_1$$
$$= -m_2 + 2m_4 + m_1(m_1 + m_2 - 2m_3) - P, \quad (18)$$
$$F_{211}^{(1)} = \frac{1}{D}\sum_{i\neq j} O_{ii}^2 O_{ij}O_{ji} - k_2(0)k_1^2$$
$$= m_2 - m_4 - m_1^2(1 - m_2), \quad (19)$$
$$F_{211}^{(2)} = \frac{1}{D}\sum_{i\neq j} O_{ii}O_{jj}O_{ij}O_{ji} - k_2(0)k_1^2$$
$$= -m_4 - m_1^2(1 - m_2) + P. \quad (20)$$

这些项量化了式（3）中的因子分解关系，其中包含指标环 $k > 1$。为简洁起见，我们引入 $P = \frac{1}{D}\sum O_{ij}O_{ji}O_{ii}O_{jj}$，它是除 F_{1111} 和 C之外唯一的新要素。从理论上讲，通过鞍点分析 [50]，所有误差项都应在热力学极限下消失。因此，我们预期这些项会随系统尺寸增大而按多项式规律衰减。然而，这些方程的复杂结构使得若不将其分解为 m_k、C 和 P，就极难辨识其有限尺寸标度，下一节将对此作出明确展示。因此，我们将给出所有这些误差项的数值结果。

III. 数值结果

本节将给出上一节定义的误差项及其分解的数值结果。我们考虑混合场伊辛模型：

$$\hat{\mathrm{H}} = J\sum_{i=1}^{L} Z_iZ_{i+1} + w\sum_{i=1}^{L} X_i + h\sum_{i=1}^{L} Z_i. \quad (21)$$

我们选择 $J = 1$，$w = 1.05$和 $h = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$，使模型处于混沌区 [65–73]。我们聚焦于开放边界条件，此时系统具有反射对称性。因此，我们将分析限制在 $+1$宇称扇区，并且只考虑在宇称变换下不变的算符。附录 A中，我们对随机场 XXZ 模型进行了类似讨论，该模型不具有反射对称性。两种模型的结果在定性上相同。

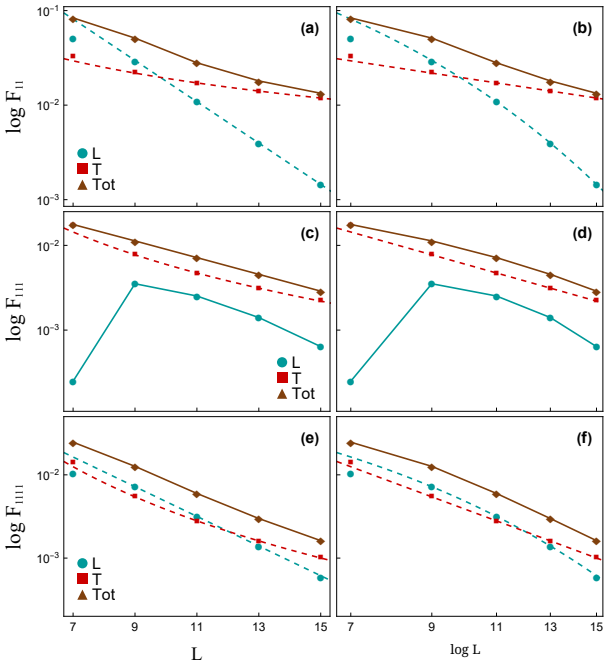

图 2. 混合场伊辛模型的误差项 F_{11}、F_{111} 和 F_{1111} 随系统尺寸 L （奇数）变化的数值结果，所考虑的是单点算符 $O = Z_{(L+1)/2}$。这里，我们将能量窗口的宽度固定为 $\Delta = 2$。结果分别以对数图和双对数图呈现。虚线表示对最后四个数据点的拟合，如正文所述；实线则作为视觉引导线。

A. 单点算符

现在我们给出单点算符的结果。我们聚焦于奇数 L 的系统，并选择中心位置处的泡利 Z 算符，$O = Z_{(L+1)/2}$。即使固定宇称扇区，相应的一阶矩 m_1 仍为零。按照前面的讨论，我们首先考察误差项 $F_{11} = m_2$，$F_{111} = m_3$和 $F_{1111} = m_4$，它们对应于对角矩阵元的矩。结果如图 2 所示，同时采用了对数图和双对数图。从 F_{11} 和 F_{1111}的原始数据中，我们已经观察到，纵向分量随系统尺寸呈指数衰减，在对数图中对应于直线。因此，我们使用最后四个数据点，对这些曲线进行 $a\exp(-bL)$ 形式的拟合，结果以绿色虚线表示。对于 F_{111}，结果呈现快于指数衰减的趋势，这可从对数图中斜率不断增大看出。这种行为源于正负 O_{ii}项之间的相消。

另一方面，横向方向的原始数据均呈现幂律衰减，这一点在双对数图中得到了体现。因此，我们用 a/L^b拟合数据，结果以红色虚线表示。对于 F_{11}，

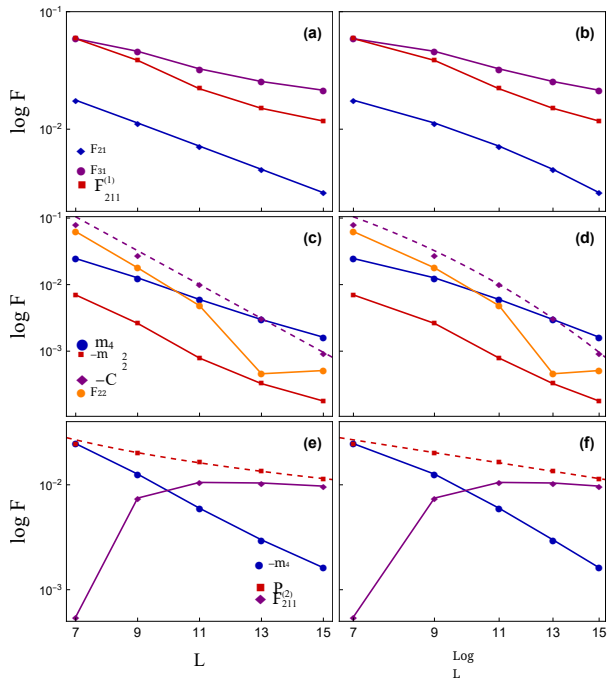

图 3. 混合场伊辛模型的误差项 F_{21}, F_{31}, $F^{(1)}_{211}$,F_{22} 和 $F^{(2)}_{211}$ 随系统尺寸 L （奇数）变化的数值结果，针对单点算符 $O = Z_{(L+1)/2}$ ，其中 $\Delta = 2$。结果以对数图和双对数图两种形式呈现。虚线对应于对最后四个数据点的拟合，如正文所述；实线则用作视觉引导线。

F_{111}、以及 F_{1111}，得到的指数 b 分别为 1。1890、2。4640 和 3。3120（见表I），其中包含了前一节所提出的理论预测值 1、2 和 2 的有限尺寸修正。尽管如此，即使系统尺寸适中，幂律行为仍已清晰可见。我们进一步强调，将纵向分量与横向分量分解，对于明确验证 F_{11}、F_{111} 和 F_{1111}的有限尺寸标度至关重要。若不进行这种分解，在可达到的系统尺寸下，由于不同分量的贡献彼此相当，总误差项不会呈现清晰的标度形式。

接下来，我们讨论其他误差项，包括 F_{21},F_{31}, $F^{(1)}_{211}$, F_{22} 和 F(2) 211。结果见图 3。首先， F_{21}, F_{31} 和 $F^{(1)}_{211}$ 的结果随系统尺寸单调衰减。具体而言， F_{21} 和 $F^{(1)}_{211}$ 都仅取决于矩 m_k，而这些矩已在图 2 中分析过。因此，我们得出结论：在大-L 极限下，它们都随系统尺寸 L 呈多项式衰减，尽管在不进行分解的情况下，这种行为在有限尺寸数据中并不明显。F_{31} 的结果包含一个新的因素 P，如图（e-f）所示。我们发现， P 也随系统尺寸 L 呈幂律衰减，相应的拟合结果（图 3（e-f）中的虚线）展示于

表 I. 混合场伊辛模型单点算符 $O = Z_{(L+1)/2}$ 的拟合参数。

分量	模型	表达式	a	b
F_{L11}		$a\exp(-bL)$	2.7530	0.5032
F_{T11}		a/L^b	0。2975	1。1890
F_{L111}		$a\exp(-bL)$	—	—
F_{T111}		a/L^b	1.7390	2.4640
F_{L1111}		$a\exp(-bL)$	0.2895	0.4104
F_{T1111}		a/L^b	7.8840	3.3120
C		$a\exp(-bL)$	6.3150	0.5861
P		a/L^b	0.2346	1.1150

表I。这表明，P 的主要贡献也源自能量涨落。

最后，图 F_{22} 和 $F^{(2)}_{211}$ 中给出了数值结果3（cf）。令人惊讶的是，随着系统尺寸增至 $L = 15$，这些结果呈现出反常增长；尽管该量子自旋链具有混沌性，这乍看之下意味着完整 ETH 被违反。正如前文所述，解决这一谜题的关键观察是存在多个项。对于 $m_1 = 0$，式（17）中的关系变为

$$F_{22} = m_4 - m_2^2 - C, \qquad F^{(2)}_{211} = -m_4 + P. \tag{22}$$

如果分别绘制每个分量的结果，可以看到它们随系统尺寸增加而明显衰减。如图2所详述， m_4 和 m_2 均随系统尺寸 L呈现指数衰减与幂律衰减的组合。对于 C ，结果也清楚地显示出随 L指数衰减，这一点可从紫色虚线所示的拟合中看出。然而，将这些分量合并得到 F_{22} 时，由于在可达到的系统尺寸范围内主导贡献发生交替，结果出现了一个拐点。对于 $F^{(2)}_{211}$ 也会出现类似现象。我们的结果强调，在量子晶格系统中验证完整 ETH 时，分析各个单独贡献的重要性。

B. 双位点算符

接下来，我们考虑具有偶 L的系统中的一个双位点算符。我们选择的算符为 $O = Z_{L/2}Z_{L/2+1}$。虽然一阶矩 m_1 在完整希尔伯特空间中为零，但将其限制在偶宇称的态中时，它便不再为零。为求得 $m_1(L)$，我们首先关注位于格点 $L/2$ 和 $L/2+1$的一对量子比特。有两个态， $|\uparrow\uparrow\rangle$和 $|\downarrow\downarrow\rangle$，其本征值为 $Z_{L/2}Z_{L/2+1} = 1$；这两个态都具有偶宇称。此外，还有两个态，$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$和 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$，其本征值为 -1，其中只有一个具有偶宇称。因此，我们预期

$$m_1(L) = \frac{D_{\text{even}}(L-2) - D_{\text{odd}}(L-2)}{3D_{\text{even}}(L-2) + D_{\text{odd}}(L-2)}. \tag{23}$$

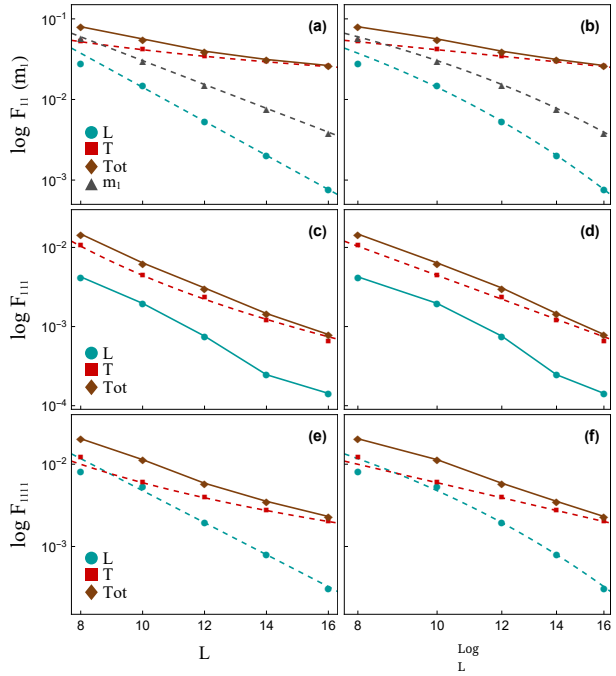

图4. 混合场伊辛模型的双位点算符 $O = Z_{L/2}Z_{L/2+1}$的误差项 F_{11}、 F_{111}和F_{1111} 随系统尺寸 L （偶数）的变化数值结果。能量窗口的宽度固定为 $\Delta = 2$。结果同时以对数图和双对数图呈现。虚线对应于对最后四个数据点的拟合，而实线则作为视觉引导线。

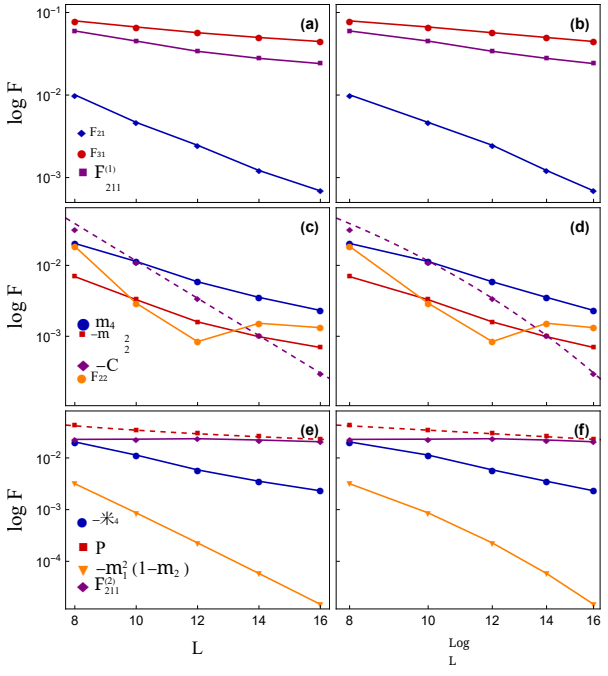

图5. 混合场伊辛模型的误差项 F_{21}、 F_{31}、 $F^{(1)}_{211}$、F_{22}和 $F^{(2)}_{211}$ 随双位点算符的系统尺寸 L （偶数） $O = Z_{L/2}Z_{L/2+1}$ $\Delta = 2$ 变化的数值结果，其中 。结果同时以对数图和双对数图呈现。虚线对应于对最后四个数据点的拟合，实线则作为视觉引导线。

这里， $D_{\text{even}}(L-2)$和 $D_{\text{odd}}(L-2)$分别表示其余 $L-2$ 个量子比特对应的偶宇称和奇宇称希尔伯特空间的维数。接下来，我们采用类似的分析方法，添加一对量子比特，以推导 $D_{\text{even}}(L-2)$和$D_{\text{odd}}(L-2)$的递推关系，结果为

$$\begin{aligned} D_{\text{even}}(L) &= 3D_{\text{even}}(L-2) + D_{\text{odd}}(L-2), \\ D_{\text{odd}}(L) &= 3D_{\text{odd}}(L-2) + D_{\text{even}}(L-2). \end{aligned} \tag{24}$$

解给出 $D_{\text{even/odd}}(L) = 2^{L-1} \pm 2^{\frac{L}{2}-1}$。因此,-我们发现 $m_1(L) = \frac{1}{2^{L/2}+1}$，它随系统尺寸 L呈指数衰减。

掌握这些知识后，我们继续讨论 $F_{11} = m_2 - m_1^2$、$F_{111} = m_3 - m_1^3$和$F_{1111} = m_4 - m_1^4$ 的数值结果。图 4 所示结果与上一节单点算符的结果类似：纵向分量随 L 指数衰减，而横向分量呈多项式衰减。唯一的例外是 F^{L}_{111}。与单点情形不同，对数图中的斜率表现出非单调行为。不过，由于 $|m_3| < m_2$是由 $|O_{ii}| < 1$决定的，F^{L}_{111} 的衰减受 F^{L}_{11} 控制，且关于系统尺寸 L至多呈多项式形式。误差项 F_{21}、 F_{31}、 $F(1)_{211}$、 F_{22}和 $F^{(2)}_{211}$的结果见图5。误差项 F_{21}、 F_{31}和 $F^{(1)}_{211}$ 随系统尺寸增大而单调衰减L。相比之下， F_{22} 和 $F^{(2)}_{211}$ 在可达到的系统尺寸范围内再次呈现异常增长。尽管如此，每个独立分量都随着 L 增大而明显单调下降。特别是，各分量的拟合参数列于表II中。这一行为清楚地证明了双位点算符的完整 ETH 有效。

表 II. 混合场伊辛模型的双位点算符 $Z_{L/2}Z_{L/2+1}$ $O =$ 的拟合参数。

分量	模型	表达式	a	b
m_1		$a\exp(-bL)$	0.9132	0.3405
F_{L11}		$a\exp(-bL)$	1.8370	0.4865
F_{T11}		a/L^b	0.4393	1.0250
F_{L111}		$a\exp(-bL)$	—	—
F_{T111}		a/L^b	28.1200	3.8020
F_{L1111}		$a\exp(-bL)$	0.4197	0.4477
F_{T1111}		a/L^b	1.2180	2.3100
C		$a\exp(-bL)$	4.9650	0.6063
P		a/L^b	0.2535	0.8670

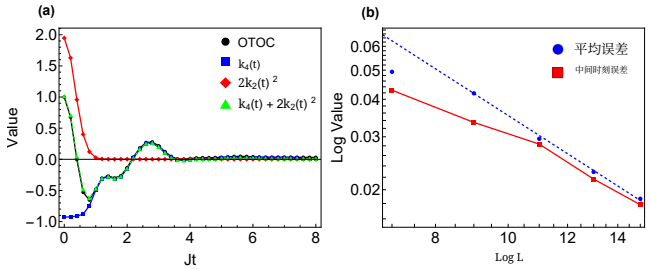

图6. 单点算符 $O = Z_{(L+1)/2}$ 的 OTOC 有限尺寸修正的数值结果。面板 (a) 展示了 $L = 15$ 时 OTOC、自由累积量以及完整 ETH 预测的数值结果。面板 (b) 展示了平均误差和中间时刻误差的有限尺寸修正。

C. 有限时间下的有限尺寸修正

在前面的讨论中，我们只考虑了 $t = 0$处的有限尺寸修正。本小节将考察非零时间下误差的有限尺寸标度。我们聚焦于单点算符 $O = Z_{(L+1)/2}$，取 $q = 4$且 $k_1 = m_1 = 0$。我们考虑非时间序关联函数（OTOC），其定义为 [74–80]

$$\mathrm{OTOC}(t) \equiv C^{(4)}(t, 0, t) = \langle O(t)O(0)O(t)O(0)\rangle. \quad (25)$$

利用完整 ETH，可以将 OTOC 与自由累积量联系起来（对于 $k_1 = 0$）：

$$\mathrm{OTOC}(t) \approx k_4(t, 0, t) + 2k_2(t)^2 \equiv \mathrm{OTOC}_{\mathrm{ETH}}(t). \quad (26)$$

我们采用两种判据对 $\mathrm{OTOC}_{\mathrm{ETH}}(t)$ 与 $\mathrm{OTOC}(t)$ 之间的偏差进行数值基准测试，分别衡量平均误差和单个时刻的误差。平均误差定义为

$$\mathrm{E}_{\mathrm{avg}} = \left| \frac{1}{T} \int_0^T dt \left[\mathrm{OTOC}_{\mathrm{ETH}}(t) - \mathrm{OTOC}\,(T/2)\right] \right|. \quad (27)$$

这里，我们选择截止时间 T。对于单时刻误差，我们关注时刻 $T/2$，并将其称为中间时刻误差，定义为 $\mathrm{E}_{\mathrm{Mid}} = |\mathrm{OTOC}_{\mathrm{ETH}}(T/2) - \mathrm{OTOC}(T/2)|$。图6 展示了 $T = 8$ 的数值结果，表明这两种误差都随系统尺寸增大而按多项式规律衰减。我们使用最后四个数据点对平均误差进行拟合，得到 a/L^b，并得出$a \approx 1.4$ 以及 $b \approx 1.6$，如蓝色虚线所示。这些结果进一步支持了完整 ETH 在有限演化时间 t下的有效性。

IV. 讨论

总之，我们对混沌量子自旋中完整本征态热化假说的有限尺寸修正进行了全面的数值研究链。通过将误差项分解为刻画窄能量窗口内涨落的纵向分量，以及刻画不同能量窗口间涨落的横向分量，我们识别出了它们截然不同的标度行为。我们的结果表明，纵向贡献随系统尺寸呈指数衰减，而横向贡献则遵循与热力学预测一致的幂律标度。重要的是，我们澄清了某些高阶关联函数中的表观反常，证明这些反常是多种贡献相互交织所导致的有限尺寸效应，而非对完整 ETH 的真正违背。本文提出的分解框架与系统性有限尺寸分析，为在单点及多点可观测量中验证完整 ETH 提供了一种实用而可靠的方法，并为有限量子系统中热行为的涌现提供了洞见。

最后，我们对本文作几点总结。首先，对有限温度下的情况进行详细分析，或许能揭示有限尺寸标度行为中的其他结构，从而为量子多体系统中的热化过程带来新的见解。其次，一个自然的问题是能量守恒是否会显著影响有限尺寸标度；研究有无守恒律的混沌量子线路模型的本征态，或可对此问题进行探讨。第三，探索可积 [58] 或局域化系统中完整 ETH 的有限尺寸标度，或许能更清楚地区分这类系统与混沌系统，并有助于辨识量子热化中的普适与非普适特征。最后，理解完整 ETH 在具有大中心荷 [81] 的共形场论中如何体现，或可揭示量子混沌、全息对偶与算符关联结构之间丰富的相互作用。上述研究将留待未来开展。

致谢。 感谢 Yanting Cheng 和 Ning Sun 提供的有益讨论。本项目得到国家自然科学基金委员会项目（批准号：12374477）、上海市启明星计划项目（批准号：24QA2700300）以及量子科学与技术国家科技重大专项（项目编号：2024ZD0300101）的资助。

附录 A：随机场 XXZ 模型

在本附录中，我们给出随机场 XXZ 模型的数值结果。其哈密顿量为

$$\hat{\mathrm{H}} = J \sum_{i=1}^{L} (X_i X_{i+1} + Y_i Y_{i+1}) + J_z \sum_{i=1}^{L} Z_i Z_{i+1} + \sum_{i=1}^{L} h_i Z_i. \quad (A1)$$

我们关注开放边界条件，并选择 $J = 1$和 $J_z = 1.05$。随机场 h_i 独立地从均匀分布 $[-0.75, 0.75]$中采样；在这一状态下，系统处于热化

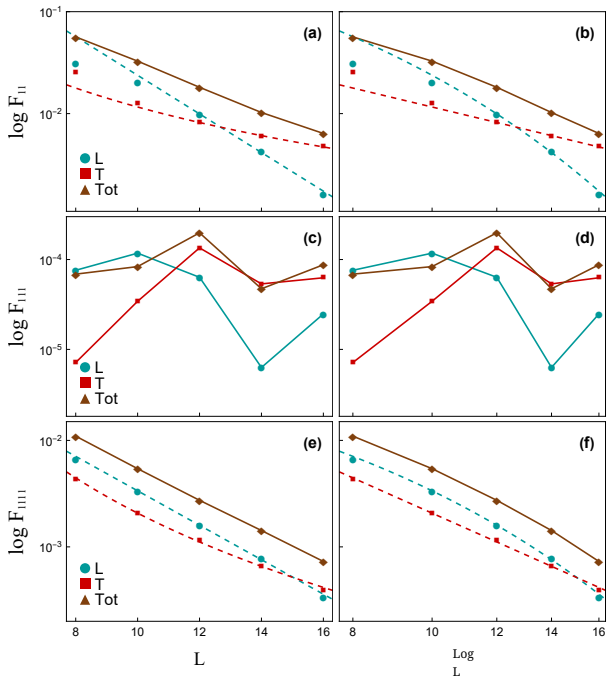

图 7。随机场 XXZ 模型中，单点算符 $O = Z_{L/2}$的误差项 F_{11}、F_{111}和F_{1111} 随系统尺寸 L 变化的数值结果。这里，我们将能量窗口的宽度固定为 $\Delta = 1$。结果同时以对数图和双对数图呈现。虚线对应于对最后四个数据点的拟合，而实线则作为视觉引导线。

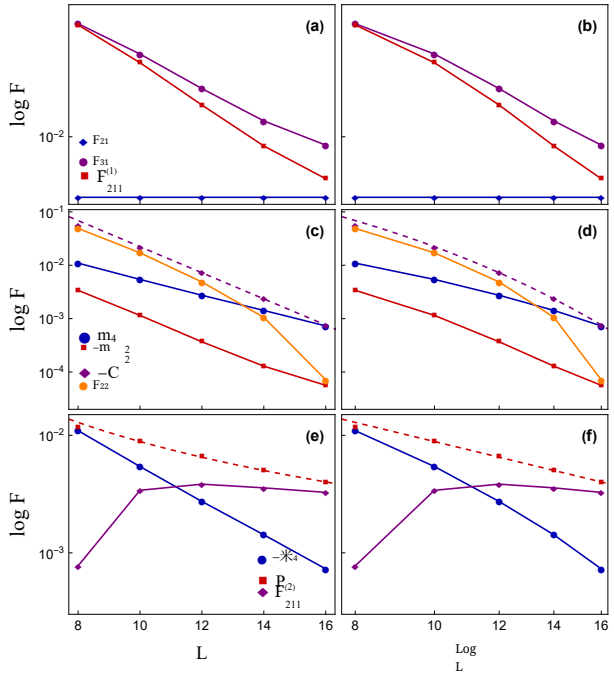

图 8. 随机场 XXZ 模型中单点算符 $O = Z_{L/2}$ （$\Delta = 1$）的误差项 F_{21}、 F_{31}、 $F^{(1)}_{211}$、F_{22}和 $F^{(2)}_{211}$ 随系统尺寸 L 变化的数值结果。结果分别以对数图和双对数图呈现。虚线对应于对最后四个数据点的拟合，实线则作为视觉引导线。

相 [26, 82–86]。由于哈密顿量的自旋旋转对称性（沿 z 方向），我们将讨论限制在 $S_z = 0$ 扇区。我们关注与混合场伊辛模型中所采用的相同的单点和双点算符，这些算符在自旋旋转下保持不变。

1. 单点算符

这里，我们关注具有偶数 L 的系统，并选择算符 $O = Z_{L/2}$。与混合场伊辛模型类似，在固定自旋扇区后， m_1 仍为零。误差项 $F_{11} = m_2$、$F_{111} = m_3$和 $F_{1111} = m_4$ 的数值结果见图7。沿用混合场伊辛模型中的相同记号。 F_{11} 和 F_{1111} 的纵向分量和横向分量分别随 L呈指数衰减和多项式衰减，这与先前的结论一致。因此，对于 F^{L}_{11}和 $F_{\mathrm{L}1111}$，我们采用形式为 $a\exp(-bL)$的拟合；对于 $F_{\mathrm{T}11}$、 F^{T}_{1111}，则采用形式为 a/L^b的拟合；两种情况下均使用最后四个数据点。我们发现，纵向分量和横向分量 F^{L}_{111}、 $F_{\mathrm{T}111}$的行为均呈非单调性。然而，正如正文中所指出的，它们的行为应由 F^{L}_{11}的行为所控制。

和 F^{T}_{11}，其余部分至多随系统尺寸呈多项式增长L。误差项 F_{21}、 F_{31}、 $F^{(1)}_{211}$、 F_{22}以及$F^{(2)}_{211}$ 的结果见图8。由于这些项表现出与混合场伊辛模型中观察到的行为相似的特征，我们采用相同的分解方法来分析 F_{22} 和 $F^{(2)}_{211}$ 。每个分量的拟合参数列于表III中。这些结果验证了单点算符的完整 ETH。

表 III. 随机场 XXZ 模型中单点算符 $O = Z_{L/2}$ 的拟合参数。

分量	模型	表达式	a	b
$F_{\mathrm{L}11}$		$a\exp(-bL)$	1.8600	0.4360
$F_{\mathrm{T}11}$		a/L^b	0.9643	1.9190
$F_{\mathrm{L}111}$		$a\exp(-bL)$	—	—
$F_{\mathrm{T}111}$		a/L^b	—	—
$F_{\mathrm{L}1111}$		$a\exp(-bL)$	0.1394	0.3725
$F_{\mathrm{T}1111}$		a/L^b	5.4190	3.4170
C		$a\exp(-bL)$	6.2120	0.5630
P		a/L^b	0.4270	1.6830

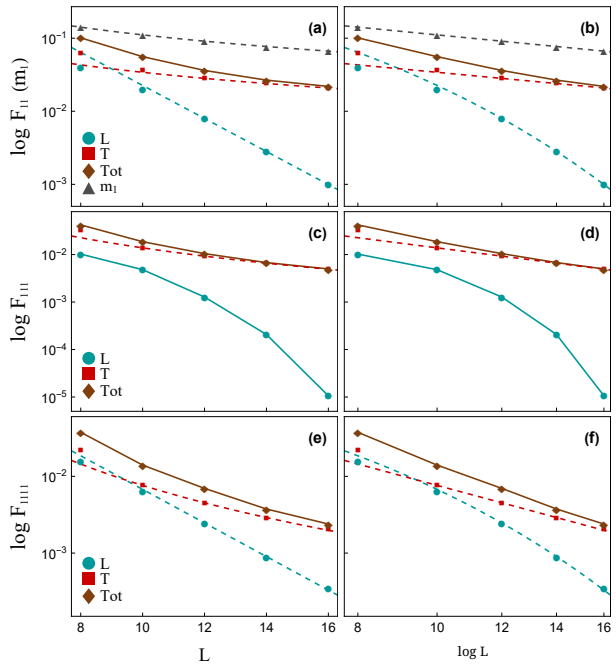

图9. 随机场 XXZ 模型的双位点算符 $O = Z_{L/2}Z_{L/2+1}$的误差项 F_{11}、 F_{111}和F_{1111} 随系统尺寸 L 变化的数值结果。这里，我们将能量窗口的宽度固定为 $\Delta = 1$。结果以对数图和双对数图的形式呈现。虚线对应于对最后四个数据点的拟合，而实线则作为视觉引导线。

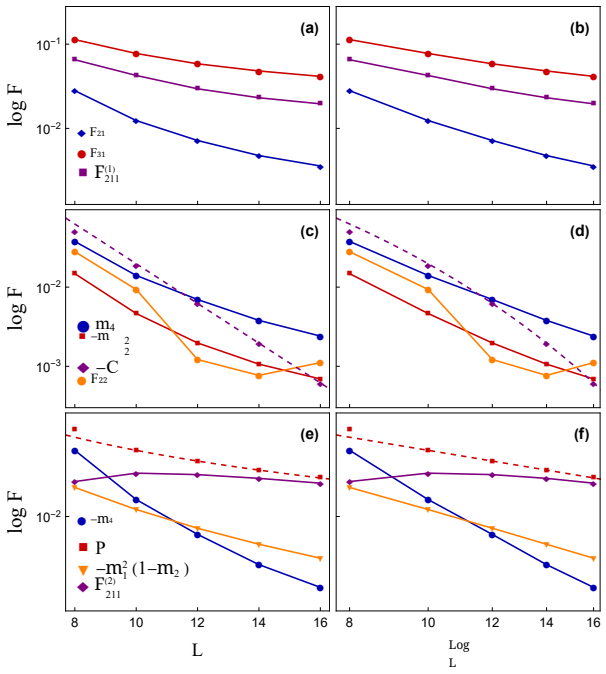

图 10. 随机场 XXZ 模型的误差项 F_{21}, F_{31}, $F^{(1)}_{211}$,F_{22} 和 $F^{(2)}_{211}$ 随系统尺寸 L 变化的数值结果，其中双位点算符为 $O = Z_{L/2}Z_{L/2+1}$，且 $\Delta = 1$。结果同时以对数图和双对数图呈现。虚线表示对最后四个数据点的拟合，实线则作为视觉引导线。

2. 双位点算符

接下来，我们关注系统尺寸为偶数的系统 L，并选择算符 $O = Z_{L/2}Z_{L/2+1}$。不同于前一种情况，对于该算符，m_1在 $S_z = 0$ 对称扇区中变为非零，这与混合场伊辛模型中的观察结果相似。然而，不同的对称扇区意味着 $m_1(L)$ 具有不同的有限尺寸标度行为。为确定$m_1(L)$，我们首先考虑位于格点 $L/2$和 $L/2+1$处的一对量子比特。在该子空间中，有两个态$|\uparrow\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\downarrow\rangle$具有本征值 $Z_{L/2}Z_{L/2+1} = 1$，另有两个态 $|\uparrow\downarrow\rangle$ 和 $|\downarrow\uparrow\rangle$具有本征值 -1。因此，我们预期

$$m_1(L) = 2\frac{\binom{L-2}{\frac{L}{2}-2} - \binom{L-2}{\frac{L}{2}-1}}{\binom{L}{L/2}} = -\frac{2}{L-1}\binom{n}{k}\frac{\binom{L-1}{\frac{L}{2}-1}}{\binom{L}{\frac{L}{2}}} \sim -\frac{1}{L}. \tag{A2}$$

在第二步中，我们使用恒等式 $\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} = \frac{n-2k+1}{n+1}\binom{n+1}{k}$。最后一步中，我们采用斯特林近似 $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$，以得到渐近行为。

接下来，我们将展示 $F_{11} = m_2 - m_1^2$、 $F_{111} = m_3 - m_1^3$、$F_{1111} = m_4 - m_1^4$的数值结果，如图9所示。其他误差项的结果，包括 F_{21}, F_{31}, $F_{(1)211}$, F_{22} 和 $F^{(2)}_{211}$，也展示在

表 IV. 随机场 XXZ 模型的双位点算符 $O = Z_{L/2}Z_{L/2+1}$ 的拟合参数。

分量	模型表达式	a	b
m_1	a/L^b	1.3630	1.0890
F_{L11}	$a\exp(-bL)$	4.1150	0.5206
F_{T11}	a/L^b	0.3830	1.0500
F^{L}_{111}	$a\exp(-bL)$	—	—
F_{T111}	a/L^b	2.2090	2.2030
F_{L1111}	$a\exp(-bL)$	1.0440	0.5039
F_{T1111}	a/L^b	5.6220	2.8680
C	$a\exp(-bL)$	6.6600	0.5809
P	a/L^b	0.5738	1.1810

图 10。它们的标度行为与随机场伊辛模型中单点算符所观察到的类似；特别是， F_{111} 呈现出快于指数衰减的衰减，与混合场伊辛模型中单点情形的衰减类似。各分量的拟合参数列于表 IV。总之，我们给出了随机场 XXZ 模型热化相中单点算符和双位点算符的数值结果。通过正文中讨论的分解框架，我们

由此得出结论：这两种情况都验证了完整 ETH。

附录 B：能级间距比

本节给出正文及上一节讨论的模型的能级间距比 r。能级间距比 r 是识别量子混沌并将其与可积性区分开来的标准诊断工具。

$$\mathrm{r}_n = \frac{\min\{s_n, s_{n+1}\}}{\max\{s_n, s_{n+1}\}}. \tag{B1}$$

这里，$s_n = E_{n+1} - E_n$ 表示相邻能级之间的间距，而$\mathrm{r}=\frac{1}{D}\sum_n \mathrm{r}_n$ 是平均能级间距比。对于遵循维格纳-戴森统计的混沌系统，其期望值为$\mathrm{r}_{\mathrm{WD}} \approx 0.5295$；而对于遵循泊松统计的可积系统，$\mathrm{r}_{\mathrm{Poisson}} \approx 0.386$ [67, 87–90]。我们在各参数区间计算得到的能级间距比如图 11所示。随着 L 增大，所有数据点都趋近于 r_{WD}，证实这些系统处于混沌（热化）区间。

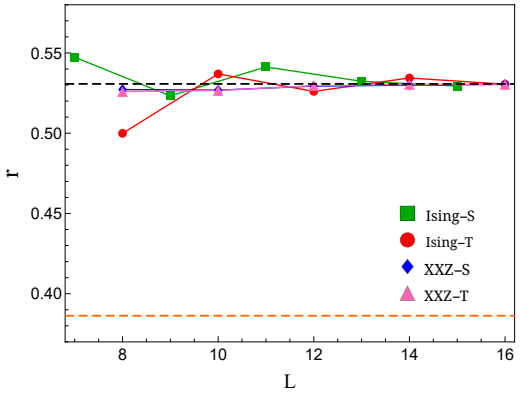

图 11. 混合场伊辛模型和随机场 XXZ 模型中能级间距比 r 的数值结果，其中考察了单点算符和双点算符。黑色和橙色虚线分别表示维格纳-戴森统计和泊松统计的理论值。实线作为视觉引导线。

[1] M. Srednicki, 《混沌与量子热化》, Phys. Rev. E 50, 888 (1994)。[2] M. Srednicki, 《量子化混沌系统趋近平衡热态》, Journal of Physics A: 数学与通用 32, 1163?175 (1999)。[3] J. M. Deutsch, 《封闭系统中的量子统计力学》, Phys. Rev. A 43, 2046 (1991)。[4] J. M. Deutsch, 《本征态热化假说》, Rept. Prog. Phys. **81**, 082001 2018 1805 01616 ( ), [ ] arXiv: . 量子物理。[5] M. Rigol、V. Dunjko 和 M. Olshanii, 《一般孤立量子系统的热化及其机制》, Nature (London) **452**, 854 2008 0708 1324 ( ), [ ] arXiv: . cond-mat.stat-mech。[6] R. V. Jensen 和 R. Shankar, 《少自由度确定性量子系统中的统计行为》, Phys. Rev. Lett. 54, 1879 (1985)。[7] L. D'Alessio、Y. Kafri、A. Polkovnikov 和 M. Rigol, 《从量子混沌和本征态热化到统计力学与热力学》, Adv. Phys. 65, 239 (2016), arXiv:1509.06411 [cond-mat.stat-mech]。[8] R. Steinigeweg、J. Herbrych 和 P. Prelovek, 《孤立自旋链系统中的本征态热化》, Physical Review E 87, 10.1103/physreve.87.012118 (2013)。[9] W. Beugeling、R. Moessner 和 M. Haque, 《多体量子系统中局域算符的非对角矩阵元》, Physical Review E 91, 10.1103/phys-reve.91.012144 (2015)。[10] T. Mori、T. N. Ikeda、E. Kaminishi 和 M. Ueda, 《孤立量子系统中的热化与预热化：理论综述》, J. Phys. B 51, 112001 (2018), arXiv:1712.08790 [cond-mat.stat-mech]。[11] C. Nation 和 D. Porras, 《非对角可观测量元随机矩阵理论的相关结果：分布、涨落与本征态热化, 《New Journal of Physics》20, 103003 (2018)。[12] T. LeBlond 和 M. Rigol, 破坏哈密顿量对称性的可观测量的本征态热化及其在相互作用可积系统中的对应现象, 《Physical Review E》102, 10.1103/physreve.102.062113 (2020)。[13] J. D. Noh, 本征态热化假说与本征态间涨落, 《Physical Review E》103, 10.1103/physreve.103.012129 (2021)。[14] M. Alishahiha 和 M. J. Vasli, 《本征态热化假说：简要综述》（2025）arXiv:2501.07243 [高能理论物理]。[15] A. M. Kaufman、M. E. Tai、A. Lukin、M. Rispoli、R. Schittko、P. M. Preiss 和 M. Greiner, 通过纠缠研究孤立多体系统中的量子热化, 《Science》353, aaf6725 (2016), arXiv:1603.04409 [量子物理]。[16] R. Islam、R. Ma、P. M. Preiss、M. E. Tai、A. Lukin、M. Rispoli 和 M. Greiner, 通过量子多体孪生体的干涉测量纠缠熵 10 1038 15750 2015 1509 01160 。/ [ ] nature ( ), arXiv: . cond-mat.quant-gas . [17] M. Rigol、V. Dunjko、V. Yurovsky 和 M. Olshanii, 完全可积多体量子系统中的弛豫：对一维晶格硬核玻色子高激发态动力学的从头研究, 《物理评论快报》98, 10.1103/physrevlett.98.050405 (2007)。[18] A. Iucci 和 M. A. Cazalilla, Luttinger模型的量子淬火动力学, 《Physical Review A》80, 10 1103 80 063619 2009 . /physreva. . ( )。[19] A. Polkovnikov、K. Sengupta、A. Silva 和 M. Vengalat-tore, 专题综述：封闭相互作用量子系统的非平衡动力学,

相互作用量子系统的非平衡动力学，《现代物理评论》83, 863?83 (2011)。[20] P. Calabrese、F. H. L. Essler 和 M. Fagotti，横场伊辛链中的量子淬火，《物理评论快报》106, 10.1103/physrevlett.106.227203 (2011)。[21] J.-S. Caux 和 F. H. L. Essler，淬火至可积模型后局域可观测量的时间演化，《物理评论快报》110, 10.1103/physrevlett.110.257203 (2013)。[22] V. Alba，量子自旋链中的本征态热化假说与可积性，《Physical Review B》91, 10 1103 91 155123 2015 . /physrevb. . ( )。[23] L. Vidmar 和 M. Rigol，可积格点模型中的广义吉布斯系综，《Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment》2016, 064007 (2016)。[24] M. Brenes、T. LeBlond、J. Goold 和 M. Rigol，局域微扰可积系统中的本征态热化，《物理评论快报》125, 10.1103/phys-revlett.125.070605 (2020)。[25] F. Rottoli 和 V. Alba，可积自旋链非对角矩阵元的本征态热化假说（ETH）（2025），arXiv:2505.23602 [cond-mat.stat-mech]。[26] D. A. Abanin、E. Altman、I. Bloch 和 M. Serbyn，专题综述：多体局域化、热化与纠缠，《现代物理评论》91, 021001 (2019)。[27] F. Alet 和 N. Laflorencie，多体局域化：介绍与专题选述，《Comptes Rendus Physique》19, 498 (2018), arXiv:1711.03145 [cond-mat.str-el]。[28] E. Altman 和 R. Vosk，多体局域系统中的普适动力学与重整化，《凝聚态物理年评》6, 383 (2015)，arXiv:1408.2834 [cond-mat.dis-nn]。[29] R. Nandkishore 和 D. A. Huse，量子统计力学中的多体局域化与热化，《凝聚态物理年评》6, 15 (2015)，arXiv:1404.0686 [cond-mat.stat-mech]。[30] M. Schreiber、S. S. Hodgman、P. Bordia、H. P. Lschen、M. H. Fischer、R. Vosk、E. Altman、U. Schneider 和 I. Bloch，在准随机光学晶格中观测相互作用费米子的多体局域化，《Science》349, 842?45 (2015)。[31] A. Chandran、I. H. Kim、G. Vidal 和 D. A. Abanin，在多体局域相中构造局域运动积分，《Physical Review B》91, 10.1103/phys-revb.91.085425 (2015)。[32] P. Ponte、Z. Papi、F. Huveneers 和 D. A. Abanin，周期驱动系统中的多体局域化，《物理评论快报》114, 10.1103/phys-revlett.114.140401 (2015)。[33] L. Rademaker 和 M. Ortuo，多体局域态的显式局域运动积分，《物理评论快报》116, 10.1103/physrevlett.116.010404 (2016)。[34] J. Smith、A. Lee、P. Richerme、B. Neyenhuis、P. W. Hess、P. Hauke、M. Heyl、D. A. Huse 和 C. Monroe，具有可编程随机无序的量子模拟器中的多体局域化，《自然·物理》12, 907?11 (2016)。[35] J. Z. Imbrie，论量子自旋链中的多体局域化，《统计物理学期刊》163, 998?048 (2016)。

[36] M. Serbyn、Z. Papi´c 和 D. A. Abanin，《局域守恒定律与多体局域化态的结构》，《物理评论快报》111，127201（2013年）。[37] D. A. Huse、R. Nandkishore 和 V. Oganesyan，《完全多体局域化系统的现象学》，《物理评论B》90，174202（2014年）。[38] R. Vosk 和 E. Altman，《一维多体局域化作为动力学重整化群不动点》，《物理评论快报》110，067204（2013年）。[39] W. Morong、F. Liu、P. Becker、K. S. Collins、L. Feng、A. Kyprianidis、G. Pagano、T. You、A. V. Gorshkov 和 C. Monroe，《无无序情况下斯塔克多体局域化的观测》，Nature 599，393?98（2021年）。[40] Y. Patil、S. Chakram 和 M. Vengalattore，《超冷晶格气体中的测量诱导局域化》，《物理评论快报》115，10.1103/phys- revlett.115.140402（2015年）。[41] A. Chan、R. M. Nandkishore、M. Pretko 和 G. Smith，《幺正-投影纠缠动力学》，《物理评论B》99，224307（2019年）。[42] Y. Li、X. Chen 和 M. P. A. Fisher，《量子芝诺效应与多体纠缠相变》，《物理评论B》98，205136（2018年）。[43] B. Skinner、J. Ruhman 和 A. Nahum，《纠缠动力学中的测量诱导相变》，《物理评论X》9，031009（2019年）。[44] S. Choi、Y. Bao、X.-L. Qi 和 E. Altman，《扰乱动力学中的量子纠错与测量诱导相变》，《物理评论快报》125，10 1103 125 030505 2020。/physrevlett. .（）。[45] Q. Tang 和 W. Zhu，《测量诱导相变：通过密度矩阵重整化群计算研究非可积模型中的一个案例》，《物理评论研究》2, 10.1103/physrevresearch.2.013022（2020年）。[46] S. Gherardini、G. Giachetti、S. Ruffo 和 A. Trombettoni，《量子监测在多能级系统中诱导的热化过程》（ 2021 2012 15216 ），[ ] arXiv: . 量子物理 . [47] S. M. Walls、J. M. Schachter、H. Qian 和 I. J. Ford，《随机量子轨迹展示开放自旋1/2、自旋1和自旋3/2系统中的量子芝诺效应》，Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 57，175301（2024年）。[48] J.-J. Feng 和 Q. Zhuang，《监测下的哈密顿动力学中的多体反芝诺热化与芝诺确定性》（2025年），arXiv:2508.13574 [量子物理]。[49] L. Foini 和 J. Kurchan，《本征态热化假说与时间顺序反转关联函数》，Phys. Rev. E 99，042139（2019年）。[50] S. Pappalardi、L. Foini 和 J. Kurchan，《本征态热化假说与自由概率》，《物理评论快报》129，170603（2022年）。[51] S. Pappalardi、F. Fritzsch 和 T. c. v. Prosen，《通过自由累积量实现量子晶格系统的完整本征态热化》，《物理评论快报》134，140404（2025年）。[52] S. Jindal 和 P. Hosur，《量子混沌系统的广义自由累积量》，《高能物理学杂志》2024年，10.1007/jhep09(2024)066（2024年）。[53] M. Fava、J. Kurchan 和 S. Pappalardi，《通过自由概率构造设计》，《物理评论X》15，011031（2025年）。[54] H. A. Camargo、Y. Fu、V. Jahnke、K. Pal 和 K.-Y. Kim，《来自自由概率的混沌的量子特征》（2025年）

’ arXiv:2503.20338 [高能理论物理].

[55] F. Fritzsch 和 P. W. Claeys, 《最简量子电路模型中的自由概率》（ 2025 2506 11197 ）， [ ] arXiv：. 量子物理 . [56] F. Fritzsch、T. Prosen 和 S. Pappalardi, 《晶格系统中的微正则自由累积量》, Physical Review B 111, 10 1103 111 054303 2025 . / physrevb. . ( )。[57] E. Vallini、L. Foini 和 S. Pappalardi, 《通过自由概率研究局域旋转不变性下本征态热化假说的改进》（2025）, arXiv:2511.23217 [cond-mat.stat-mech]。[58] T. Pathak, 《可积自旋系统中的完全本征态热化》, （2025）, arXiv:2510.05887 [cond-mat.stat- mech]。[59] G. O. Alves、F. Fritzsch 和 P. W. Claeys, 《遍历性破缺量子电路中的完全本征态热化探针》, 《Quantum》 **9**, 1949 2025 2504 08517 ( ), [ ] arXiv：. cond-mat.stat-mech . [60] F. Fritzsch、G. O. Alves、M. A. Rampp 和 P. W. Claeys, 《边界扰乱产生的自由累积量与完全本征态热化》, （2025）, arXiv:2509.08060 [quant-ph]。[61] 事实上，二点函数的计算已可由传统的 ETH 假设 (1) 描述。[62] W. Beugeling、R. Moessner 和 M. Haque, 《本征态热化的有限尺寸标度》, Phys. Rev. E 89, 042112 2014( )。[63] L. D. Landau 和 E. M. Lifshitz, *Statistical Physics: Volume 5* 5 2013 , 第 Vol. 卷（Elsevier, ）。[64] H. Touchette, 《统计力学的大偏差方法》, Physics Reports 478, 1?9（2009）。[65] M. C. Bauls、J. I. Cirac 和 M. B. Hastings, 《无限非可积量子系统的强热化与弱热化》, 《物理评论快报》106, 10.1103/physrevlett.106.050405（2011）。[66] H. Kim 和 D. A. Huse, 《扩散型非可积系统中的纠缠弹道传播》, 《物理评论快报》111, 10.1103/physrevlett.111.127205（2013）。[67] Y. Y. Atas、E. Bogomolny、O. Giraud 和 G. Roux, 《随机矩阵系综中相邻能级间距比的分布》, 《物理评论快报》110, 10 1103 110 084101 2013 . /physrevlett. . ( )。[68] Y. Y. Atas 和 E. Bogomolny, 《横场和纵向场中的量子伊辛模型：混沌波函数》（2015）, arXiv:1503.04508 [math-ph]。[69] M. Kormos、M. Collura、G. Takcs 和 P. Calabrese, 《量子淬火至非可积模型后的实时禁闭》, 《自然·物理》13, 246?49（2016）。[70] J. D. Noh, 《破坏可积性的纵向场作用下横场伊辛自旋链中的算符增长》, Physical Review E 104, 10.1103/physreve.104.034112（2021）。[71] C. Peng 和 X. Cui, 《以横场和纵向场连接伊辛链中的量子多体疤痕与量子可积性》, Physical Review B 106, 10 1103 106 214311 2022 . / physrevb. . ( )。

[72] Y. Chiba, 《混合场伊辛链中局域守恒量不存在的证明》, Physical Review B 109, 10 1103 109 035123 2024年。/ physrevb。（）。[73] R. Pirmoradian、E. Sadoogh、M. Teymouri、N. Abolqasemi-Azad、M. R. Lahooti 和 Z. Mohammad- Ali, 《局域与非局域伊辛模型中的量子混沌研究》（2025年）, arXiv:2512.21713 [量子物理]。[74] A. I. Larkin 和 Y. N. Ovchinnikov, 《超导理论中的准经典方法》, 《苏联实验与理论物理杂志》28, 1200（1969年）。[75] J. Maldacena、S. H. Shenker 和 D. Stanford, 《混沌界限》, 高能物理学杂志 08, 106, arXiv:1503.01409 [高能理论物理]。[76] S. H. Shenker 和 D. Stanford, 《混沌传播中的弦效应》, 高能物理学杂志 05, 132, arXiv:1412.6087 [高能理论物理]。[77] D. A. Roberts、D. Stanford 和 L. Susskind, 《局域化激波》, 高能物理学杂志 03, 051, arXiv:1409.8180 [高能理论物理]。[78] S. H. Shenker 和 D. Stanford, 《黑洞与蝴蝶效应》, 《高能物理学杂志》 2014 年, 10 1007 03 2014 067 2014。（）。[79] A. Kitaev, 《量子全息的简单模型》（2015年）。[80] K. Hashimoto、K. Murata 和 R. Yoshii, 《量子力学中的非时序关联函数》, 《高能物理学杂志》2017年, 10.1007/jhep10(2017)138（2017年）。[81] N. Lashkari、A. Dymarsky 和 H. Liu, 《共形场论中的本征态热化假说》, 统计力学杂志 1803, 033101（2018年）, arXiv:1610.00302 [高能理论物理]。[82] M. ˇZnidariˇc、T. Prosen 和 P. Prelovˇsek, 《随机场中的海森堡磁体的多体局域化》, Physical Review B 77, 064426（2008年）。[83] A. Pal 和 D. A. Huse, 《多体局域化转变》（2010年）, arXiv:1003.2613 [cond-mat.dis-nn]。[84] D. J. Luitz、N. Laflorencie 和 F. Alet, 《随机场海森堡链中的多体局域化边界》, Physical Review B 91, 10.1103/physrevb.91.081103（2015年）。[85] M. Serbyn、Z. Papi 和 D. A. Abanin, 《多体局域化—离域化相变的判据》, Physical Review X 5, 10.1103/physrevx.5.041047（2015年）。[86] J. untajs、J. Bona、T. Prosen 和 L. Vidmar, 《量子混沌对多体局域化提出挑战》, Physical Review E 102, 10.1103/physreve.102.062144（2020年）。[87] V. Oganesyan 和 D. A. Huse, 《高温下相互作用费米子的局域化》, Physical Review B 75, 10 1103 75 155111 2007。/physrevb。（）。[88] A. L. Corps 和 A. Rela˜no, 《不同对称性和混沌程度下相邻能级间距比的分布》, Physical Review E 101, 10.1103/phys-reve.101.022222（2020年）。[89] G. Livan、M. Novaes 和 P. Vivo, *Introduction to Random Matrices* 2018 （施普林格国际出版, ）。[90] F. Haake、S. Genz 和 H.-J. Sommers, *Quantum Signatures of Chaos* 4 , 第版（施普林格, 柏林, 海德堡, 2018年）。