arXiv:2602.01819v1 [math.LO] 2 Feb 2026

重探项代数的模型论

Davide Carolillo、Yifan Jia、Bakh Khoussainov 和 Rizos Sklinos

摘要

在 Maltsev [Mal71] 关于有限纯函数语言中的局部自由代数的工作基础上，我们重新考察（绝对自由）项代数及其完备化的模型论。Maltsev 的分析得出了自然的公理化，并将量词消去为特殊公式的正布尔组合；同时表明，完备扩张恰好由不可分解元素的数量参数化；对于 $1 \leq k \leq \omega$，标准模型是由 k 个生成元生成的自由项代数。

我们利用 Ehrenfeucht–Fraïssé 博弈给出一种无需量词消去的完备性新证明，并进一步确立标准模型和理论的若干结构性质。特别地，对于 $1 \leq k \leq \omega$，我们证明标准模型具有一阶刚性和原子性。

对于每个 $0 \leq k \leq \omega$，我们证明相应的理论不具有有限覆盖性质，并且弱消除虚元。我们还为 Belegradek [Bel88] 先前得到的稳定性理论特征提供了新的证明：这些理论是稳定的，但不是超稳定的；它们是正规的（因而是 1-基的），并且具有平凡分叉；因此，在任何模型中都没有无限群是可解释的。

最后，我们分析模型完全性，并证明 T_0 是局部自由代数理论的模型伴侣，而具有 $k \geq 1$ 的理论不是模型完全的。

1 引言

Maltsev 证明了 [Mal71]：在任意固定的有限纯函数语言中，局部自由代数类都具有自然的公理化，并且可以将量词消去到 特殊公式 的正布尔组合（见第 2 节）。特别地，他的分析对这一公理化的完备化给出了清晰的描述：它们恰好由不可分解元素的数量参数化。更确切地说，对于每个基数 $0 \leq k \leq \omega$，都有一个不同的完备理论扩张局部自由代数的公理，其规定代数恰好具有 k 个不可分解元素；而这些就是全部完备扩张。

对于每个 $1 \leq k \leq \omega$，由此得到的完备理论的典范（标准）模型都是以 k 个生成元为基的绝对自由项代数。此外，作为同一量词消去框架的直接推论，这些理论中的每一个——包括 $k = 0$的情形——都是稳定的。

随后，Belegradek 从稳定性理论的角度研究了这些理论 [Bel88, Bel89]。他特别指出，通过适当的定义扩张加入投影，可以实现完全的量词消去；他还利用这一强化结果作为技术手段，对稳定性理论进行更精细的分析。遗憾的是，据我们所知，这些结果尚未译成英文；因此，在本研究的大部分工作完成期间，我们并不知道这一文献。

本文主要以我们的视角对现有研究进行引导式综述，但也包含若干新结果。最值得一提的是，我们运用

Ehrenfeucht–Fraïssé 博弈重新证明了上述理论的完备性，完全不依赖量词消去。我们还证明了以下结果。

定理 1.1： 对于 $1 \leq k \leq \omega$，标准模型 $\mathcal{F}_k$ 是一阶刚性的。

我们进一步证明：

定理 1.2： 对于每个 $1 \leq k \leq \omega$，标准模型 $\mathcal{F}_k$ 是原子的。

相反，没有不可分解元素的局部自由代数不是原子的。
接下来的两个陈述似乎也是新的。

Theo注 1.3： 对于每个 $0 \leq k \leq \omega$，理论 $\mathcal{T}_k$ 不具有有限覆盖性质。

我们还证明：

定理 1.4： 对于每个 $0 \leq k \leq \omega$，理论 $\mathcal{T}_k$ 弱消除虚元。

此外，我们还为以下已在[Bel88]中得到的事实提供了新的证明。

定理 1.5： 对于每个 $0 \leq k \leq \omega$，理论 $\mathcal{T}_k$ 不是超稳定的。

此外，我们提出了一个关于非超稳定性的一般判据，该判据似乎适用于广泛的类似情形。

定理 1.6： 对于每个 $0 \leq k \leq \omega$，理论 $\mathcal{T}_k$ 是正规的，因此是1-基的。

定理 1.7： 对于每个 $0 \leq k \leq \omega$，理论 $\mathcal{T}_k$ 具有平凡分叉。特别地，在该理论的任何模型中都无法解释无限群。

定理 1.8： 对于每个 $1 \leq k \leq \omega$，理论 $\mathcal{T}_k$ 不是模型完全的。

Theo注 1.9： 理论 T_0 是局部自由代数理论的模型伴侣 $s.$

最后，我们希望本文对初次接触模型论的读者具有一定的教学价值：局部自由代数提供了一个具体的场域，使读者能够“在实际情境中”观察到若干基本概念和分界线。基于这一目标，我们有时扩充了论述，加入了一些对大多数模型论学家而言较为熟悉、但可能会对初学者有所帮助的背景材料。

2 预备知识

本节定义项代数，并记录其一些基本性质。固定一个纯函数符号集（带有常量）

$$\Sigma = \{\, f_0, \ldots, f_k,\ c_0, c_1, \ldots \},$$

其中每个 f_i 是元数为 n_i 的函数符号，而c_j 是常元符号。我们假定 Σ 至少包含一个常元符号，并且至少有一个函数符号的元数为 ≥ 2。当 Σ 恰好有 $n \in \mathbb{N}$ 个常元符号时，我们有时用 Σ_n 代替 Σ；如果 Σ有无穷多个常量，我们可以写成 Σ_ω。

2.1 项与基项

在 Σ 上的项 集合归纳定义如下：

- 每个变量 x 和每个常元符号 c都是项。

• 如果 $t_1, \ldots, t_\ell$ 是项，并且 f 是一个元数为 ℓ 的函数符号，那么 $f(t_1, \ldots, t_\ell)$ 是一个项。

本文中我们只考虑基项，即不含变量的项。令 F 表示所有基项的集合。我们将 F 视为一个 Σ-结构 $\mathcal{F}$ 的论域，其中每个元数为 ℓ 的函数符号 $f \in \Sigma$ 解释为

$$f^{\mathcal{F}}(t_1, \ldots, t_\ell) \;:=\; f(t_1, \ldots, t_\ell) \qquad (t_1, \ldots, t_\ell \in F).$$

为简化记号，我们全文用 f 代替 $f^{\mathcal{F}}$。因此，

$$\mathcal{F} \;=\; \big(F;\; f_0^{n_0}, \ldots, f_k^{n_k},\; c_0, c_1, \ldots\big).$$

代数 $\mathcal{F}$ 由常量 c_0、c_1、.....生成。如果 Σ 恰有 $n \in \mathbb{N}$ 个常元符号，我们将 $\mathcal{F}_n$ 记作 $\mathcal{F}$；如果 Σ 有无穷多个常元，也可以记作 $\mathcal{F}_\omega$。

代数 $\mathcal{F}_n$ 称为项代数（或无变量项代数）。它们在以下意义上是绝对自由的：对于每个由常元符号的取值生成的 Σ-代数 $\mathcal{A}$，都存在一个满同态 $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{A}$。

令 $Alg(\Sigma)$表示所有由常元符号的取值生成的 Σ-代数构成的类。如果 $\mathcal{B} \in Alg(\Sigma)$具有如下性质：对于每个 $\mathcal{A} \in Alg(\Sigma)$，都存在一个满同态 $\mathcal{B} \twoheadrightarrow \mathcal{A}$，那么$\mathcal{B} \cong \mathcal{F}$。因此，$\mathcal{F}$ 在同构意义下是 $Alg(\Sigma)$中的唯一泛对象。

2.2 约化

我们可以从语言中移除常元符号，并仅考虑 $\mathcal{F}$ 在函数符号下的约化结构。为简便起见，我们仍将这个约化结构记为 $\mathcal{F}$。因此，对于 $m \in \omega$，代数 $\mathcal{F}_m$ 是有限生成的。注意，所有这些约化结构具有相同的纯函数符号集

$$\Sigma^r = (f_0^{n_0}, \ldots, f_k^{n_k}),$$

为简便起见，我们将继续用 Σ 表示它。

命题 2.1： 设 $1 \leq m$、$n \leq \omega$。当且仅当项代数 $\mathcal{F}_m$ 和 $\mathcal{F}_n$ 初等等价时，它们同构。

证明。先假设 m，$n \in \omega$。代数 $\mathcal{F}_m$ 满足这样一个一阶句子：恰好存在 m 个元素 x_1，.....，x_m，其中没有任何一个是 f-可分解的，对于任意 $f \in \Sigma$。只要 $n \neq m$，这个句子在 $\mathcal{F}_n$ 中便不成立。因此，对于 $m \neq n$，有 $\mathcal{F}_m \not\equiv \mathcal{F}_n$，正向蕴含得证。

反之，如果 $\mathcal{F}_m \equiv \mathcal{F}_n$，那么根据上一段，必然有 $m = n$，因此$\mathcal{F}_m \cong \mathcal{F}_n$。

□

推论 2.2： 设 $1 \leq m < \omega$。那么 $\mathcal{F}_m$ 是一阶刚性的：如果 $\mathcal{A}$ 是有限生成的，并且$\mathcal{A} \models Th(\mathcal{F}_m)$，那么 $\mathcal{A} \cong \mathcal{F}_m$。

一个有用的概念是项的高度：

定义 2.3： 设 t 是一个项。那么

- 如果 t 是一个变量，记作 $t = x$，那么 $height(t) = 0$;
- 如果 $t = f(t_1, \ldots, t_k)$，那么 $height(t) = max\{height(t_1) \ldots, height(t_k)\} + 1$。

2.3 Maltsev的量词消去

Maltsev 证明了一个量词消去结果，我们接下来将介绍它。

容易看出，可以用一阶逻辑表达至少存在 m 个不可分解元素，我们将该语句称为 E^m。显然， $D^m := \neg E^{m+1}$ 表示至多存在 m 个不可分解元素。最后， $N_i(x)$是表达 x 不是 f_i-可分解的一阶公式。

遵循Maltsev，我们给出如下定义。

定义 2.4： 签名 Σ 中的一阶公式 $\phi(\bar{x})$若具有如下形式，则称为标准的。

$$\exists y_1, \ldots, y_m \left(\bigwedge_{i \in I} x_i = t_i \wedge \bigwedge_{j \in J} x_j \neq u_j \wedge \bigwedge_{h \in H} y_h \neq v_h \wedge \bigwedge_{r \in R} \bigwedge_{s \in S_r} N_s(y_r) \right) \tag{1}$$

事实 2.5： *[Mal71，定理 3]*在局部自由 Σ-代数类中，签名 Σ 中的每一个一阶公式都等价于下列族中公式的正布尔组合：标准公式、 D^m、 E^m以及 $N_i(x)$。

上述结果表明，任意两个具有相同有限个不可分解元素的局部自由代数，或任意两个具有无穷多个不可分解元素（与基数无关）的此类代数，都是初等等价的。我们将利用 Ehrenfeucht-Fraïssé博弈给出该推论的一个更初等的证明（见定理 3.4）。

顺带一提，我们注意到， $\mathcal{F}_\omega$ 的一阶理论以及没有不可分解元素的局部自由代数的一阶理论都不承认有限生成模型。在前一种情况下，有限生成模型会是有限秩自由代数；在后一种情况下，生成元（例如 a_1 ）必须可分解为 $f(\bar{a})$，其中 $\bar{a}$不能包含 a_1。不断从 $\bar{a}$ 中选取元素，有限步之内我们就会耗尽可用的元素。因此，推论 2.2 不适用于这些理论。

3 模型论

回顾一下，我们固定了一个（纯函数）签名 $\Sigma := \{f_0, \ldots, f_k\}$。我们固定一个基数$\kappa$ ，并遵循 Maltsev 的做法，列出秩为 κ的项代数的一阶理论的一组自然公理。Maltsev 利用其量词消去结果证明，这组公理确实公理化了此类代数的一阶理论。另一方面，我们使用 Ehrenfeucht-Fraïssé 博弈。特别地，我们将证明，所有无限秩项代数都有相同的一阶理论。相反，对于任意两个有限基数 m， n， $\mathcal{F}_m$ 和 $\mathcal{F}_n$ 的一阶理论并不相同。

设 $\mathcal{F}_\kappa$ 为秩为 κ 的项代数。则它满足以下公理：
对于每个 $0 \leq i \leq k$，我们有：

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \big(f_i(\bar{x}) = f_i(\bar{y}) \to (x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_{n_i} = y_{n_i}) \big) \qquad (\text{Axiom } A_i)$$

对于每个 $0 \leq i < j \leq k$，我们都有：

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \big(f_i(\bar{x}) \neq f_j(\bar{y}) \big) \qquad (\text{Axiom } B_{ij})$$

最后，对于每个以变量 x、 x_1、.....、 x_n 为参数的项 $t(x, x_1, \ldots, x_n)$，若其不同于 $x$and x 并且在其中出现，则我们有：

$$\forall x, x_1, \ldots, x_n \big(t(x, x_1, \ldots, x_n) \neq x\big) \qquad (\text{Axiom } C_t)$$

不难证明，上述公理列表（由于公理 C_t 而无限）对于局部（绝对）自由代数这一类是完备的，也就是说，对于这类代数，其中每个有限生成子代数都是（绝对）自由的（参见 [Mal71，第23章：定理 1]）。此外，Maltsev 还证明了前面提到的这一类无法用有限个公理公理化。

为了公理化 $\mathcal{F}_m$ 的一阶理论，对于 m有限（包括 0）的情形，需要添加一条公理，说明恰好存在 m 个“不可分解”元素。为清楚起见，我们先定义以下一阶公式。代数 $\mathcal{A}$ 中的一个元素 a 是-不可分解的，如果 $\mathcal{A} \models \forall y_1, \ldots, y_{n_i} \big(a \neq f_i(y_1, \ldots, y_{n_i})\big)$。令 $N_i(x) := \forall y_1, \ldots, y_{n_i} \big(x \neq f_i(y_1, \ldots, y_{n_i})\big)$ 并且

$$N(x) := N_0(x) \wedge N_1(x) \wedge \ldots \wedge N_k(x). \qquad (2)$$

某个代数中的元素 a $\mathcal{A}$ 若满足不可分解的 条件，则称其为不可分解的。

$$\begin{aligned} &\exists x_1, \ldots, x_m \big(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq m} (x_i \neq x_j) \wedge N(x_1) \wedge \ldots N(x_m)\big) \bigwedge \\ &\forall x_1, \ldots, x_m, x_{m+1} \big(\neg N(x_1) \vee \ldots \vee \neg N(x_m) \vee \neg N(x_{m+1})\big) \end{aligned} \qquad (\text{Axiom } D_m)$$

如果 κ 是一个无限基数，那么为了公理化 $\mathcal{F}_\kappa$ 的一阶理论，我们需要添加一个无限的公理列表；对于每个 $r < \omega$，我们添加：

$$\exists x_1, \ldots, x_r \big(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq r} (x_i \neq x_j) \wedge N(x_1) \wedge \ldots N(x_r)\big) \qquad (\text{Axiom } E_r)$$

我们将使用（非嵌套的）Ehrenfeucht-Fraïssé 博弈证明下一个定理。我们遵循[Hod93，第 3 节3]。首先，我们介绍一些有助于证明的术语。

定义 3.1： 设 a 是局部自由代数 $\mathcal{A}$中的一个元素。 a的 n-骨架记为_ _$sk_n(a)$，是高度为 n的项 $t(\bar{x})$，满足存在 b 属于 A，使得 $t(b) = a$；否则为 $\perp$。

此外， a的 n-向下闭包记为 $dc_n(a)$；当 $sk_n(a) \neq \perp$ 时，它是元组_b 中的元素集合；否则为 $\emptyset$。

最后，我们记 $dc_{\leq n}(a) = \bigcup_{0 \leq m \leq n} dc_n(a)$。我们称其为 n-全面向下闭包。在上下文明确时，我们有时会省略 n。

注 3.2： 由局部自由代数的公理可知，上述概念定义良好（只需忽略变量的“名称”）。

为方便读者，我们给出一个例子。

例 3.3：设 $a \in \mathcal{A}$。 a 的 0-骨架是 $sk_0(a) = x$，而其 0-向下闭包是 $dc_0(a) = a$。另一方面，如果 $a = f(b_1, h(b_2, b_3)\ g(b_4, b_5))$，那么 $sk_2(a) = f(x_1, h(x_2, x_3)\ g(x_4, x_5))$， $dc_2(a) = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$，以及 $dc_{\leq 2}(a) = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, h(b_2, b_3), g(b_4, b_5)\ a\}$。在所有 b_i 均不可分解的情况下，我们得到 $sk_3(a) = \perp$。

定理 3.4： 设 $0 \leq m < \omega$。则以下公理列表 $(A_i)_{i \leq k}$、$(B_{ij})_{0 \leq i < j \leq k}$、$(C_t)_{t \neq x}$ 以及 D_m 是完备的。

证明。我们将证明，若两个 Σ-结构 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$满足假设中的公理，则它们初等等价。等价地，我们需要证明，对每个 $r < \omega$，玩家 II 在 r轮博弈 $EF_r[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$中都有获胜策略。回顾一下，$\Sigma$中的非嵌套原子公式形式如下：$x = y$，$f_0(x_1, \ldots\ldots, x_{n_0}) = y$，$\ldots\ldots$，$f_k(x_1, \ldots\ldots, x_{n_k}) = y$。策略如下：首先，根据公理 D_m，结构 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 具有相同数量的不可分解元素，即 m。我们在这两组不可分解元素之间任意选取一个对应关系，除非 $m = 0$，此时不需要这第一步。

在博弈的每一轮中，玩家 II 都会复制玩家 I 所选对象的骨架（其深度取决于轮次；无论玩家 I 选择哪个结构，复制方式都相同），并根据不可分解元素之间的同构来选择生成元素，同时参照上一轮的"清单"（稍后定义），从相应的结构中生成一个元素。

我们递归地定义策略：

- 在第 1 轮，假设玩家 I 从 $\mathcal{A}$中选择元素 a_1。玩家 II 复制 $sk_r(a_1)$ 并检查$dc_r(a_1)$（如果 $sk_r(a_1) = \perp$，那么就针对满足 $sk_l(a_1) \neq \perp$的最大 $l \leq r$ 复制 $sk_l(a)$）。对于 $dc_r(a_1)$中任何不可分解的元素，玩家 II 都会用 $\mathcal{B}$中对应的不可分解元素替换它。另一方面，对于 $dc_r(a_1)$中的任何可分解元素，玩家 II 都会随机选择 $\mathcal{B}$中的一个可分解元素。此时，我们将不可分解元素之间的同构扩展到本轮在 $dc_{\leq r}(a_1)$与 $dc_{\leq r}(b_1)$之间所有元素中对应的选择，其中 b_1 是玩家 II 实际给出的回答。第一轮的清单 I_1 包含以下数据：$dc_{\leq r}(a_1)$ $dc_{\leq r}(b_1)$ 不可分解元素之间的同构，以及 $dc_{\leq r}(a_1)$与 $dc_{\leq r}(b_1)$之间的同构。注意，如果玩家 I 从 $\mathcal{B}$ 中选择一个元素，该策略也完全相同。此外，重要的是，我们在清单中保留所有 $dc_{\leq r}(a_1)$ 和 $dc_{\leq r}(b_1)$，而不只是 $dc_r(a_1)$和 $dc_r(b_1)$。

- 在第 $i+1$ 轮次，假设玩家 I 从 $\mathcal{A}$ 打出元素 a_{i+1}。玩家 II 复制骨架$sk_{r-(i+1)}(a_i)$（或小于 $r - (i+1)$ 且不是 $\perp$ 的最大骨架），并检查$dc_{r-(i+1)}(a_i)$，然后使用上一着的清单 I_i，并据此选择生成元素。新清单 I_{i+1} 是 I_i，连同$dc_{\leq r-(i+1)}(a_i)$、$dc_{\leq r-(i+1)}(b_i)$ 中的新元素，其中 b_i 是玩家 II 在本轮次的实际应答，以及它们之间的同构。

We n现在证明该策略有效 , i.e. 它确实是玩家 II 的获胜策略。作为热身，我们从非嵌套公式 $x = y$ 开始。假设 $a_i = a_j$，并且不失一般性，我们可以假定 $i > j$。于是，由于第 $i-1$ 轮次的清单包含a_j，并且较后轮次中某元素的全面向下闭包包含于较早轮次中该元素的全面向下闭包之中（因为随着博弈向前推进，深度递减），我们得到 b_i 容许构造为 b_j（与玩家 I 打出的是 b_i 还是 a_i 无关）。因此 $b_i = b_j$。

我们转到 $y = f(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ 的情形。假设 $a_j = f(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots\ldots, a_{i_n})$，其中 $j \leq r$ 以及 f 是来自 Σ 的某个元数为 n 的函数符号。注意，a_j 不可能出现在 f 中。此外，对于任意 a_i，若 $i < j$，则 a_i 属于第 $j-1$ 轮的清单；由于 $sk_1(a_j) = f(x_1, \ldots\ldots, x_r)$，我们有 $sk_1(b_j) = f(x_1, \ldots\ldots, x_r)$。另外，如前所述，后续轮次中某个元素的全面向下闭包包含于较早轮次中该元素的全面向下闭包之中（因为随着博弈的进行，深度会降低，

博弈）。这意味着，例如，如果 a_1 出现在 f 中，即出现在第 l 个参数位置，那么在将 b_j 构造为 f 的像时，b_1 必须出现在 f 的第 l 个参数位置（无论玩家 I 是出 a_j 还是 b_j）。

因此，我们需要证明：如果 a_i 对于 $i > j$ 出现在 f 中，那么在 b_j 的相应构造中，b_i 也必须出现在 f 的同一个参数位置。假设 a_i 是 f 的第 l 个参数（它可能出现在多个位置，但这不会造成任何影响）。a_i 的 $j-1$全面向下闭包将包含在 I_j 清单中，并且它会有一个来自结构 $\mathcal{B}$ 的对应元素 b'。现在，我们根据玩家 I 是选择 a_i 还是 b_i 来分情况讨论。首先，假设在第 i轮中，玩家 I 从 $\mathcal{A}$ 中选择元素 a_i，那么 a_i 就已确定（因为它出现在前一轮的清单中），也就是说，它的构造不需要任何自由选择。特别是，b_i 的构造只会用到清单中的元素，因此它必定等于 b'，而 b' 正是 f 的第 l 个参数，正如我们所需。接下来，假设玩家 I 从 $\mathcal{B}$ 中选择元素 b_i，并假设 b_i 不等于 b'。另一方面，b_i 和 a_i 的 $(r-i)$-骨架相同，而 a_i 的 $(r-i)$-向下闭包由与 b_i 的 $(r-i)$-向下闭包相对应的元素构成。我们声称，b_i 的 $(r-i)$-骨架必定与 b' 的 $(r-i)$-骨架相同。事实上，两者都必定等于 a_i 的 $(r-i)$-骨架，而后者又等于在分析 a_j 时 f 的第 l 个参数的 $(r-i)$-骨架。因此，b_i 的 $(r-i)$-向下闭包中必定有一个元素不同于 b' 的对应元素。特别是，由于 b' 的 $(r-i)$-向下闭包中的元素与 a_i 中的元素一一对应（这种对应关系见 I_j 清单），因此在第 i 步中构造 a_i 时，必定有一个元素不同于在第 j 轮分析 a_j 时将其构造为 f 的第 l 个参数的构造；特别地，$a_j \neq f(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$，矛盾。

请注意，在策略中，随着博弈推进，玩家 II 逐步复制深度越来越低的骨架，这一点至关重要。事实上，如果玩家 II 不考虑轮次，始终复制玩家 I 所选对象的 r-骨架，那么很容易看出玩家 I 可能获胜。

□

例 3.5： 我们给出两个例子，说明为何必须仔细选择上述策略的具体细节：

- 首先，假设清单中只收集向下闭包，而不收集全面向下闭包。考虑一个三轮博弈。第一轮中，玩家 I 从 $\mathcal{A}$中选择 $a_1 = g(g(f(c_1, c_2)))$，因此玩家 II 回复 $b_1 = g(g(f(d_1, d_2)))$，其中 d_i 是不可分解元素，当且仅当 c_i 是不可分解元素。3-向下闭包为 $\{c_1, c_2\}$ 和 $\{d_1, d_2\}$，而全面向下闭包为 $\{c_1, c_2, f(c_1, c_2)\ g(f(c_1, c_2))\ g(g(f(c_1, c_2)))\}$和$\{d_1, d_2, f(d_1, d_2)\ g(f(d_1, d_2))\ g(g(f(d_1, d_2)))\}$。第二轮中，玩家 I 选择某个不可分解元素，玩家 II 也照此选择。第三轮中，玩家 I 选择 $a_3 = g(f(c_1, c_2))$，而 a_3的 1-向下闭包为 $\{f(c_1, c_2)\}$，这是一个不属于清单的元素，因此玩家 II 随机选择一个不在清单中的元素；特别地，他完全可能选择一个不等于$f(d_1, d_2)$的元素。但此时 $g(a_3) = a_1$，而 $g(b_3)$不一定等于 b_1。

- 下一个例子表明，随着博弈的进行，我们必然需要降低玩家 II 所复制的骨架的深度。因此，假设无论轮次如何，我们始终选择复制 r-骨架。考虑一个两轮博弈。在第一轮中，玩家 I 从 $\mathcal{A}$ 中下出 $a_1 = g(g(c))$，其中 $c = f(c_1, c_2)$ 以及 c_i 均为可分解的；于是玩家 II 将回应 $b_1 = g(g(d))$，其中 d 是某个“随机的”不可分解

元素，来自 $\mathcal{B}$。在第二轮中，玩家 I 下出 $a_2 = g(c)$，玩家 II 则回应 $g(f(d_1, d_2))$，其中 d_1, d_2 是任意选取的。特别地，可能出现这样的情况：$f(d_1, d_2)$ 不是 d。因此，$a_1 = g(a_2)$，但 b_1 不一定是 $g(b_2)$。

我们将下列陈述单独分出，唯一的原因是记号方面的。同样的证明仍然适用。**定理 3.6：** 设 κ 为一个无限基数。则下列公理列表 $(A_i)_{i\leq k}$，$(B_{ij})_{0\leq i<j\leq k}$，$(C_t)_{t\neq x}$ 以及$(E_r)_{r<\omega}$ 是完备的。

上述命题的价值在于，无需诉诸 Maltsev 的量词消去，即可证明上述理论的完备性。

接下来，我们就一些基本的模型论性质来考察项代数，例如齐性、原子性、饱和性等

命题 3.7： 秩为 ω的项代数 $\mathcal{F}_\omega$是原子的。

证明。设 $\mathcal{F}_\omega = \langle e_1、\ e_2、\ \ldots、\ e_m、\ \ldots\rangle$。表明诸 x_i为两两不同的不可分解元素的公式 $B_m(x_1, \ldots, x_m)$是 $\emptyset$-可定义的。注意，$B_m(\bar{x})$在 $\mathcal{F}_\omega$ 中的解集是 $e_1、\ \ldots、\ e_m$ 在 $Aut(\mathcal{F}_\omega)$下的轨道。对 $\mathcal{F}_\omega$中的任意有限元组 $\bar{a}$，我们考虑项元组 $\bar{t}(\bar{x})$，使得当 m 充分大时，$\bar{t}(e_1, e_2, \ldots, e_m) = \bar{a}$。接下来我们定义公式$\phi(\bar{x})$：$= \exists \bar{y}\big(B_m(\bar{y}) \wedge \bar{x} = \bar{t}(\bar{y})\big)$。该公式显然孤立 $tp^{\mathcal{F}_\omega}(\bar{a})$。 □

上述证明对任何有限生成项代数也同样适用。

命题 3.8: 令 $1 \leq \kappa \leq \omega$。秩为 κ 的项代数是原子的。

事实上，对于 $1 \leq m < \omega$，$\mathcal{F}_m$ 中每个实现的类型都是代数的，其解的数量恰好等于 $\{e_1, \ldots, e_m\}$ 的排列数。

下一个结果由抽象模型论得出。

推论 3.9: 任何秩为 $1 \leq \kappa \leq \omega$ 的项代数都是齐次的，也是其理论的素模型。

命题 3.10: 局部自由代数理论的任何含有不可分解元素的完备化，在空集上都存在不可数多个类型。

证明。 为使记号清晰，我们假设 $f := f_0$ 是一个二元函数符号。我们将构造一棵有根无限完全二叉树，并在每个节点上指定一个一阶公式。对应于树的一条分支的公式集合，即对于 $\eta \in 2^\omega$,$\{\phi_{\eta\restriction i}(x) \mid i < \omega\}$，是相容的。但任意两条分支都不一致；也就是说，如果 η, $\tau \in 2^\omega$ 和i 是满足 $\eta(i) \neq \tau(i)$ 的最小自然数，那么 $\phi_{\eta\restriction i}(x) \wedge \phi_{\tau\restriction i}(x)$ 不一致。我们为树的根指定公式 $\phi(x) := \exists y_1,\ y_2\big(x = f(y_1,\ y_2)\big)$。如果在下一层向“左”走，那么我们令 y_1 可分解，而 y_2 不可分解；如果向“右”走，则交换 y_1, y_2 的角色。更正式地说

$$\phi_0(x) := \exists y_1, y_2\Big(\exists y_3, y_4\big(y_1 = f(y_3, y_4) \wedge N(y_2) \wedge x = f(y_1, y_2)\big)\Big)$$

and

$$\phi_1(x) := \exists y_1, y_2\Big(\exists y_3, y_4\big(y_2 = (f(y_3, y_4) \wedge N(y_1) \wedge x = f(y_1, y_2))\big)\Big)$$

.

显然，每个公式 $\phi_0(x)$ $\phi_1(x)$ 都与 $\phi(x)$ 相容；但是，根据公理 B_{ij} 和公理 A_0，结合不可分解性的定义 $\phi_0(x) \wedge \phi_1(x)$ 是

不一致的。我们继续以相同的方式分解可分解存在变量，即 ϕ_0 中的 y_1 以及 ϕ_1 中的 y_2。因此，

$$\phi_{00}(x) := \exists y_1, y_2 \left(\exists y_3, y_4 \left(\exists y_5, y_6 \big(y_3 = f(y_5, y_6) \wedge N(y_4) \wedge y_1 = f(y_3, y_4) \wedge N(y_2) \wedge x = f(y_1, y_2) \big) \right) \right)$$

$$\phi_{01}(x) := \exists y_1, y_2 \left(\exists y_3, y_4 \left(\exists y_5, y_6 \big(y_4 = f(y_5, y_6) \wedge N(y_3) \wedge y_1 = f(y_3, y_4) \wedge N(y_2) \wedge x = f(y_1, y_2) \big) \right) \right)$$

$$\phi_{10}(x) := \exists y_1, y_2 \left(\exists y_3, y_4 \left(\exists y_5, y_6 \big(y_3 = f(y_5, y_6) \wedge N(y_4) \wedge y_2 = f(y_3, y_4) \wedge N(y_1) \wedge x = f(y_1, y_2) \big) \right) \right)$$

and

$$\phi_{11}(x) := \exists y_1, y_2 \left(\exists y_3, y_4 \left(\exists y_5, y_6 \big(y_4 = f(y_5, y_6) \wedge N(y_3) \wedge y_2 = f(y_3, y_4) \wedge N(y_1) \wedge x = f(y_1, y_2) \big) \right) \right)$$

现在，对于 $i \in \{0, 1\}$，$\{\phi(x)\ \phi_0(x)\ \phi_{0i}(x)\}$ 和 $\{\phi(x)\ \phi_1(x)\ \phi_{1i}(x)\}$ 是相容的，但 $\phi_{00}(x) \wedge \phi_{01}(x)$ 和 $\phi_{10}(x) \wedge \phi_{11}(x)$ 都是不一致的。

我们继续沿用相同的模式。公式 $\phi_{\eta \restriction i}(x)$（其中 $\eta \in 2^\omega$）写起来很复杂，因此我们省略其一般形式。不过，要验证这棵树的性质并不难。

□

注记 3.11： 下一节我们将讨论没有不可分解元素的局部自由代数的一阶理论 $\mathcal{T}_0$。我们将证明它不承认素模型，因此它在空集上也有不可数多个类型。

下一个结果是命题 3.10（以及推论 4.17）的直接推论。

推论 3.12： 任意项代数的一阶理论都不存在可数饱和模型。

现在我们转向模型完全性的概念。

定义 3.13： 设 T 是语言 $\mathcal{L}$ 上的一阶理论。那么，

1. 若对于任意 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B} \models T$，只要 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$，就有 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的初等子结构，则称 T 为模型完全；*2.* 若一个 $\mathcal{L}$ 理论 T' 是模型完全的，且 T 的每个模型都嵌入到 T' 的某个模型中，反之亦然，则称其为 T 的模型伴侣；*3.* 若一个 $\mathcal{L}$ 理论 T' 是模型伴侣，且对于每个 $\mathcal{A} \models T$，$\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ 理论 $T' \cup \mathrm{diag}(\mathcal{A})$ 都是完备的，则称其为 T 的模型完全化 。

作为一个启发性例子，我们回顾一下：代数闭域的理论是域的理论的模型完全化。更多细节请参阅 [CK90，第 3.5] 节。

命题 3.14： 设 $1 \leq \kappa \leq \omega$。那么，秩为 κ、$Th(\mathcal{F}_\kappa)$ 的项代数的一阶理论不是模型完全的。

证明。设 $\mathcal{F}_\kappa$ 是秩为 κ 的项代数。设 $\{a_i \mid i < \kappa\}$ 是不可分解元素族。考虑由 $\{a_i \mid 1 < i < \kappa\} \cup \{f_0(a_1, \ldots, a_1)\}$ 生成的子代数 $\mathcal{A}$。显然，$\mathcal{A}$ 同构于 $\mathcal{F}_\kappa$。此外，$\mathcal{A}$ 不是初等子代数，因为 $\exists y(f_0(y, \ldots, y) = f_0(a_1, \ldots, a_1))$ 在 $\mathcal{F}_\kappa$ 中成立，但在 $\mathcal{A}$ 中不成立。 □

命题 3.15： 没有不可分解元素的局部自由代数的一阶理论是模型完全的。

证明。只需证明，模 $\mathcal{T}_0$ 意义下，Σ 中的任意一阶公式都等价于一个存在公式。由于 $\mathcal{T}_0$ 是完备的，任意语句 τ 都将等价于 $\exists x(x = x)$（如果它由该理论蕴含），或者在其否定由该理论蕴含时，等价于 $\exists x(x \neq x)$。

根据 Maltsev 的量词消去（事实 2.5），只需证明，标准公式模 $\mathcal{T}_0$ 意义下等价于一个存在公式。因此，只需证明形如 $N_i(y)$ 的公式模 $\mathcal{T}_0$ 意义下等价于存在公式。事实上，每个这样的公式都等价于 $\bigvee_{j \neq i} \neg N_j(y)$，而后者是存在公式。 □

推论 3.16： 局部自由代数理论具有一个模型伴侣。

证明。局部自由代数理论与 $\mathcal{T}_0$ 是共理论。事实上，任意局部自由代数都可以嵌入一个没有不可分解元素的局部自由代数，方法如下。若 $\mathcal{A}$ 是一个含有不可分解元素的局部自由代数，则我们可以利用紧致性找到一个局部自由代数 $\mathcal{B}_1$，它扩张 $\mathcal{A}$，并且其中 $\mathcal{A}$ 的所有不可分解元素在 $\mathcal{B}_1$ 中都变得可分解。重复这一过程，我们得到一个局部自由代数链 $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{B}_m \subseteq \ldots$，其中每个代数都会“分解”前一个代数的不可分解元素。因此，该链的并是局部自由的，且不含不可分解元素。 □

事实上，对于 $1 \leq \kappa \leq \omega$，理论 $\mathcal{T}_0$ 是每个 $Th(\mathcal{F}_\kappa)$ 的模型伴侣。另一方面，它不是模型完全化。

命题 3.17： 局部自由代数的一阶理论不存在模型完全化。

证明。根据 [CK90，命题 3.5，18] 是理论 T 的模型完全化，当且仅当 $\mathcal{T}$ 具有合并性质。

如果 $\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{T}$ 的模型，而 e 是 $\mathcal{F}_1$ 的不可分生成元，则存在两个嵌入 $\alpha : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{A}$ 和 $\beta : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{B}$，使得

$$\mathcal{A} \models \exists x\,(\alpha(e) = t(x, x)) \quad \text{and} \quad \mathcal{B} \models \exists y, z\,(y \neq z \wedge \beta(e) = t(y, z))\,,$$

其中 $t(x, y)$ 是两个变量上的任意 Σ-项。然而，公理模式（A_i）意味着不存在模型 $\mathcal{C}$ 及嵌入 $\alpha' : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$、$\beta' : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$，使得在 $\mathcal{C}$ 中 $\alpha'(\alpha(e)) = \beta'(\beta(e))$。证明至此结束。 □

注3.18： 不难看出，如果 Σ 只含有一个一元函数符号，那么 $\mathcal{T}_0$ 就是局部自由代数理论的模型完全化。

4 稳定性

本节将讨论一些主要源自 Shelah 的分类纲领的概念。其中最重要的概念是稳定性。在引言余下部分中，我们固定一个完备一阶理论 T。

定义 4.1： 设 $\phi(\bar{x},\bar{y})$ 是一阶公式。若存在一个模型 $\mathcal{M}\models T$ 以及来自 $\mathcal{M}$ 的元组序列$(\bar{a}_i)_{i<\omega}$、$(b_i)_{i<\omega}$，使得.....则称 $\phi(\bar{x},\bar{y})$ 在 T中具有序性质¯。

$$\mathcal{M}\models\phi(\bar{a}_i,\bar{b}_j)\quad if\ and\ only\ if\quad i<j \tag{3}$$

此外，如果没有公式 $\phi(\bar{x},\bar{y})$ 在 T中具有序性质，则称 T是稳定的。

事实 4.2：

- 一阶理论 T 是稳定的，当且仅当不存在形如 $\phi(x,\bar{y})$ 的公式（其中 x是单元素）具有序性质。
- 一阶公式 $\phi(\bar{x},\bar{y})$ 在 T 中不具有序性质，当且仅当存在 $m<\omega$，使得只要来自 T 的任意模型的两个元组序列满足 *(3)*，那么它们的长度就被 m所界定。

自然稳定理论的显著例子包括：任意环 R 上的 R-模的理论、任意固定特征的代数闭域理论，以及非阿贝尔自由群的理论（[Sel13]）。

沿着不同的研究方向，人们研究了稳定性的各种强化概念。我们回顾一下，稳定性意味着存在一种称为¯分叉独立性的独立关系；在公式层面，其定义如下。若在某个初等扩张 $\mathcal{N}$ 中（该扩张包含 A 和 b），存在无穷多个自同构 $(f_i)_{i<\omega}\in Aut(\mathcal{N}/A)$，它们固定 A，且 $\phi(\mathcal{N},b)$ 在这些自同构 $(f_i)_{i<\omega}$ 下的像集对于某个 $k<\omega$ 是 k-不一致的，则称 $\phi(\bar{x},\ b)$¯在 A 上分叉；也就是说，这个集合中任意 k 个不同共轭的交集都为空。

若类型 $p\in S(B)$ 包含一个在 A 上分叉的公式，则称该类型在 $A\subseteq B$ 上分叉。任意类型$p\in S(A)$ 在任何包含 A 的集合 B 上，至少有一个非分叉扩张；也就是说，存在 $q\in S(B)$，使得 $q\upharpoonright A=p$ 和 q 不在 A 上分叉。若类型 $p\in S(B)$ 在任何包含 B 的参数集上都有唯一的非分叉扩张，则称其为平稳型。平稳型 $p\in S(B)$ 的 Morley 序列（长度为 ω）是由一系列实现构成的序列，其中每个实现都是在此前各实现之上的非分叉扩张的实现；也就是说，$a_{i+1}\models p_i$，其中 p_i 是 p 在 B，a_1，.....，a_i 上的分叉扩张。Morley 序列在本质上是唯一的，即任意两个这样的序列在 B 上具有相同的类型。此外，平稳型有一个典范基，它是使该类型可定义的最小可定义闭集（在 eq 的意义下）。典范基总是包含在某个 Morley 序列的代数闭包中。

定义 4.3： 如果一个稳定理论中任意平稳型的典范基都包含于其任一实现的代数闭包（在 *eq* 的意义下），则称该理论是1-基的。

定义 4.4（超稳定性）**：** 如果不存在公式允许一个无限严格下降的分叉链，则稳定理论 T 是超稳定的

$$\phi_0>\phi_1>\ldots>\phi_n>\ldots$$

其中 $\phi>\psi$，若 $T\models\psi\to\phi$，ϕ 在 A 上定义，且 ψ 在 A 上分叉。

定义 4.5（正规性）：一阶公式 $\phi(\bar{x},\bar{y})$ 在 T^{-} $^{-}$中关于 $\bar{x}$ 是正规的，当且仅当对于任意模型 $\mathcal{M}\models T$ 以及来自 $\mathcal{M}$ 的元组 b，$\phi(\mathcal{M},b)$ 在 $\mathcal{M}$ 的自同构 $^{-}$下的任何共轭，要么等于 $\phi(\mathcal{M},b)$，要么与之不相交。

此外，如果每个公式都等价于（模 T）正规公式的布尔组合，则 T 是正规的。

任意环 R 上的任意 R-模的理论都是正规的。这可由量词消去到正原始公式，以及对其解集的理解轻易得到——在该理论的任意模型 $\mathcal{M}$ 中，$\phi(\bar{x},\bar{b})$ 是由 $\phi(\bar{x},\bar{0})$ 定义的子模的一个陪集。另一方面，固定特征的代数闭域的理论都不是正规的。

定义 4.6（有限覆盖性质）：一阶公式 $\phi(\bar{x},\bar{y})$ 在 T 中不具有有限覆盖性质，如果存在一个自然数 $n<\omega$，使得对于任意实例集，只要其中任意 $\leq n$ 个实例的子集是相容的，则整个实例集都是相容的。

此外，如果每个公式 $\phi(\bar{x},\bar{y})$ 都不具有有限覆盖性质，则 T 不具有有限覆盖性质。

事实 4.7：一阶理论 T 不具有有限覆盖性质，当且仅当每个公式 $\phi(x,\bar{y})$（其中 x 是单元素集）不具有有限覆盖性质。

具有任意大有限等价类的等价关系理论，是正规理论（因而稳定）且具有有限覆盖性质的一个例子。

在下一小节中，我们将就上述概念探讨局部自由代数的完备理论。

4.1 局部自由代数的稳定性

我们首先证明局部自由代数理论的任意完备化的非超稳定性。回想一下，我们始终假设至少存在一个元数为 ≥ 2的函数符号。我们的证明可推广到任意理论，只要其中对$n\geq 2$可定义一个“1-1”的 n元函数。

定义 *4.8*：设 $\mathcal{L}$ 为一阶签名（不必是函数型的）。设 $\mathcal{M}$ 为一个$\mathcal{L}$-结构，且 $f:\ \mathcal{M}^n\to\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{M}$ 上的可定义函数。设 $p(x)\in S_1(\mathcal{M})$为 $\mathcal{M}$上的一个（完备）类型。我们称 f 在 $p(x)$上是*“1-1”*的，如果存在 $p(x)$的一个实现序列$(a_i)_{i<\omega}$，使得对每一个 $i\neq j$都有 $\models\forall\bar{x}\bar{y}\big(f(a_i,\bar{x})\neq f(a_j,\bar{y})\big)$。

定理 4.9：设 $\mathcal{L}$ 是一个一阶签名（不一定是函数型的）。设 $\mathcal{M}$ 是一个稳定的 $\mathcal{L}$-结构，并假设存在一个可定义函数 $f:\ \mathcal{M}^n\to\mathcal{M}$，其中 $n\geq 2$。假设 f 在某个定义于 $\mathcal{M}$ 上的非代数型的 *Morley* 序列上是“一一对应”的。那么，$\mathcal{M}$ 的一阶理论不是超稳定的。

证明。令 $(a_i)_{i<\omega}$ 为假设给出的 Morley 序列。我们考虑公式 $\phi_0(x):=\exists\bar{y}\big(x=f(\bar{y})\big)$。我们声称公式 ϕ_0 不是超稳定的。事实上，$\phi_1(x):=\exists y_2,\ \ldots,\ y_n\big(x=f(a_1,y_2,\ldots,y_n)\big)$ 蕴含 $\phi_0(x)$，它在 $\mathcal{M}\cup\{a_1\}$ 上可定义，并且在 $\mathcal{M}$ 上分叉。同样，$\phi_{n+1}(x):=\exists y_2,\ \ldots,\ y_n\big(x=f(a_{n+1},f(a_n,\ldots(f(a_1,y_2,\ldots,y_n))\ldots)\big)$ 蕴含 $\phi_n(x)$，它在 $\mathcal{M}\cup\{a_1^1,\ldots,a_{n+1}^1\}$ 上可定义，并且在 $\mathcal{M}\cup\{a_1,\ldots,a_n\}$ 上分叉。证明至此完成。 □

下面的结果现在是定理 4.9 的直接推论。

推论 4.10： 任何局部自由代数的完备理论都不是超稳定的。

证明。 根据我们的普遍假设，存在一个元数为 ≥ 2 的函数符号 f 。只需将前一个定理应用于 f ，以及局部自由代数上的任意非代数型的 Morley 序列。

□

接下来我们将证明一个关于稳定性的加强结论。

定理 4.11： 任意局部自由代数的完备理论都是正规的。

我们先汇集证明该定理所需的一些辅助结果。我们将遵循 Belegradek [Bel88] ，并在局部自由代数理论的一个定义扩张中进行讨论。具体而言，对于每个元数为 n_i 的函数符号 f_i 以及每个 $1 \leq j \leq n_i$ ，我们引入一个新的一元函数符号，记作 $\pi_j^{f_i}$。应将其理解为：若其参数是 f_i-可分解的，则它返回该参数在第 j 个坐标上的投影；否则返回恒等映射。更形式化地说：

$$\pi_j^{f_i}(x) \;=\; \begin{cases} x_j, & \text{if } x = f_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) \text{ for some } x_1, \ldots, x_{n_i}, \\ x, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们将用这些新符号扩充后的签名称为 Σ^*。我们证明，将每个新函数符号的显式定义（记作 T_{Σ^*}）加入局部自由代数理论后，该理论在转至任意完备化之后都具有（完全的）量词消去性质。我们先证明两个预备引理。

引理 4.12： 设 t、s 为 Σ-项，且 b 为局部自由代数 $\mathcal{M}$ 中的一个元组。设 $\phi(y) := \exists \bar{z}\big(y = t(\bar{z}, \bar{b})\big)$ 且 $\psi(y) := \exists \bar{z}\big(y = s(\bar{z}, \bar{b})\big)$ 则要么 $\phi(y) \wedge \psi(y)$ 不一致，要么存在一个 Σ-项 r 使得

$$\mathcal{M} \models \big(\phi(y) \wedge \psi(y)\big) \leftrightarrow \exists \bar{z}\big(y = r(\bar{z}, \bar{b})\big)$$

证明。 假设合取 $\phi(y) \wedge \psi(y)$ 是相容的。证明通过对 t 与 s 的最大高度进行归纳来进行。若最大高度为 0，则显然可行的公式要么是某个来自 $\bar{b}$ 的 b_i 所对应的 $y = b_i$ ，要么是 $\exists z(y = z)$。现假设该结果对最大高度小于 n 的任意项成立，我们证明它对最大高度小于 $n+1$ 的项成立。我们可以假设 t 是 f_0-可分解的。由于 $\phi(y) \wedge \psi(y)$ 相容，我们必有 s 同样是 f_0-可分解的。现在若 $\phi(y) := \exists \bar{z}\big(y = f_0(t_1, \ldots, t_{n_0})\big)$ 且 $\psi(y) := \exists \bar{z}\big(y = f_0(s_1, \ldots, s_{n_0})\big)$ ，则我们必须有逐坐标相容，即 $\exists \bar{z}\big(x_i = t_i(\bar{z}, \bar{b})\big) \wedge \exists \bar{z}\big(x_i = s_i(\bar{z}, \bar{b})\big)$ 对每一个都相容。因此由归纳假设，存在 $r_1, \ldots, r_{n_0}$，使得对每一个 $i \leq n_0$：

$$\mathcal{M} \models \Big(\exists \bar{z}\big(x_i = t_i(\bar{z}, \bar{b})\big) \wedge \exists \bar{z}\big(x_i = s_i(\bar{z}, \bar{b})\big)\Big) \leftrightarrow \exists \bar{z}\big(x_i = r_i(\bar{z}, \bar{b})\big)$$

特别地，公式 $\exists \bar{z}\big(y = f_0(r_1(\bar{z}, \bar{b}), \ldots, r_{n_0}(\bar{z}, \bar{b}))\big)$ 成立。

□

引理 4.13： 设 $t, t_1, \ldots, t_m$ 是 Σ-项，且 b 是局部自由代数 $\mathcal{M}$ 中的一个元组。设 $\big\{\exists \bar{z}\big(y = t(\bar{z}, \bar{b})\big), \forall \bar{z}\big(y \neq t_1(\bar{z}, \bar{b})\big), \ldots, \forall \bar{z}\big(y \neq t_m(\bar{z}, \bar{b})\big)\big\}$ 是一个相容公式集。

那么，存在项 $s_1, \ldots, s_n$ 和 $\bar{a}$，它们来自 $\mathcal{M}$ 的不可分解元素的并集（如果存在）以及由 $\bar{b}$ 生成的 Σ-子代数，并且 $\exists \bar{w}\big(y = t(s_1(\bar{w}), \ldots, s_n(\bar{w}), \bar{b})\big)$ 蕴含上述公式的合取。

证明。该证明对项 t 的高度进行归纳。如果 $height(t) = 0$，那么 $\exists\bar{z}\big(y = \bar{z}, \bar{b}\big)$ 等价于 $y = y$，或者等价于某个 $\bar{b}$ 中的 b_i 对应的 $y = b_i$。后一种情形下，结论显然成立。对于前一种情形，我们先考虑可被 f_0 分解的 t_i 项。如果不存在这样的项，则令 $\exists\bar{z}\big(y = f_0(\bar{z})\big)$，结论即得。如果存在这样的项，且这些公式的合取不等价于 $\forall\bar{z}\big(y \neq f_0(\bar{z})\big)$，那么我们将这些公式的否定收集到集合 $F_0(y) := \big\{\exists\bar{z}\big(y = t_{i_1}(\bar{z}, \bar{b})\big), \exists\bar{z}\big(y = t_{i_2}(\bar{z}, \bar{b})\big), \ldots, \exists\bar{z}\big(y = t_{i_\ell}(\bar{z}, \bar{b})\big)\big\}$ 中。我们证明存在形如 $\exists\bar{z}\big(y = f_0(s_1(\bar{z}, \bar{b}) \ldots, s_{n_0}(\bar{z}, \bar{b}))\big)$ 的公式满足要求，即它蕴含 $\neg F(y)$ 的合取；证明对函数符号 f_0 内各参数的最大高度进行归纳。

对于高度 0 的情形，我们有，每个这样的公式都等价于 $\exists\bar{z}\big(y = f_0(\bar{z},\ \bar{b})\big)$，其中至少出现一个来自 $\bar{b}$ 的 b_i。于是，公式 $\exists\bar{z}\,\big(y = f_0(\bar{z},\ \bar{c})\big)$ 中，对于任意公式 $F_0(y)$ 中每次出现的参数 b_i，我们都将其替换为一个元素 c_i；该元素取自由 b 生成的 Σ-子代数，并且选取时避开同一位置上出现的所有有限多个元素。这样便得到所需结论。

假设结论对高度至多为 n 的任意项都成立，我们来证明它对高度至多为 $n+1$ 的项也成立。根据假设，必定存在某个元组 d，使得 $\mathcal{M} \models \bigwedge \neg F_0(f_0(d))$。我们固定其中那些不可分解元素对应的项，并且可以假设至少有一个坐标上的元素不可分解。不失一般性，假设元组 d 的前 i 个坐标是不可分解元素，其余坐标则不是。我们从 $\mathbb{F}_0(y)$ 中保留这样的公式：它们在相应坐标上具有与 d 相同的不可分解元素，或者该坐标只是一个变量；这样的公式至少有一个。我们将这个子集 $F_0^1(y)$ 记作 $\subseteq F_0(y)$。接着，我们进一步筛选 $F_0^1(y)$，保留存在某个 $\bar{z}$、能在 f_0 的 $i+1$ 坐标上取值 d_{i+1} 的公式。若不存在这样的公式，且 $d+1$ 是 f_j-可分解的，我们就考虑其第 $i+1$ 项为 f_j-可分解的那些公式。根据归纳假设，存在一项 r，其解集包含在上述各项的解集之并集的补集中。因此，从 $F_0^1(y)$ 中选取一个公式，并将其第 $i+1$ 个坐标改为这一项即可。现在我们可以继续处理直到最后一个坐标，并断言经过反复筛选后的公式集不含任何末尾坐标上的项能够取值 d_{n_0} 的公式。确实，否则就有 d 满足 $F_0(y)$。于是，我们对第 $i+1$ 个坐标所用的论证在此仍然适用，从而得到结论。

因此我们可以假定这些不等式蕴含 y 是不可分解的，并且可能不等于某个不可分解元素列表（该列表不可能是穷尽的）。于是有效的公式是 $y = c$，其中 c 是不在先前不可分解元素列表中的某个不可分解元素。

为完成归纳，假设对于高度至多为 n 的任意项 t，结论都成立；我们要证明结论对高度为 $n+1$ 的项也成立。不失一般性，t 是 f_0-可分解的。我们再次考虑集合 $F_0(y)$；若它为空，则证明完成。我们知道存在 $\bar{d}$，使得 $f_0(\bar{d})$ 满足 $\bigwedge \neg F_0(y)$ 和 $\exists\bar{z}\big(y = t(\bar{z}, \bar{b})\big)$。为方便记号，固定项 $t := f_0(s_1, \ldots, s_{n_0})$。其中一些坐标对应不可分解元素；和之前一样，我们可以假设前 i 个坐标对应不可分解元素，而其余坐标不对应不可分解元素。至少有一个坐标对应的元素是可分解的，否则，对于由不可分解元素组成的元组，公式 $y = f_0(d_1, \ldots, d_{n_0})$ 就适用。现在，将 $F_0(y)$ 精化为子集 $F_0^1(y)$：保留那些在相应坐标上具有相同不可分解元素或仅含一个变量的公式。这样的公式至少有一个，否则公式 $\exists\bar{z}\big(y = f_0(d_1, \ldots, d_i, s_{i+1}, \ldots, s_{n_0})\big)$ 就适用。

我们继续精化 $F_0^1(y)$，保留那些对于 $\bar{z}$ 的某个取值，会在其第 $i+1$ 个坐标上给出值 d_{i+1} 的公式。注意， $\bar{z}$ 的这个值必须与固定前 i 个坐标的取值相容；这里需要谨慎，因为我们允许出现的不只是不可分解元素，还有单个变量——这些变量的取值将固定为不可分解元素的取值。同样，这样的公式至少有一个；否则，根据归纳假设（因为项 s_{i+1} 的高度至多为 n），我们可以找到一个项，将其代入 t 的第 $i+1$ 个坐标中、替换 s_{i+1}，从而得到所需结果。反复应用这一论证，我们会到达最后一个坐标；对于该坐标，确实不存在任何公式和 $\bar{z}$ 的取值能够给出元素 d_{n_0}，因此我们得到了所需的项和公式。

□

定理 4.14： T_Σ^* 的一阶理论的任何完备化都允许（完全的）量词消去。

证明。 我们首先固定 T_Σ^* 的一个完备化，将其记为 T^*。回顾一下，这相当于确定不可分解元素的数量。我们将证明：如果 $\mathcal{M},\mathcal{N} \models T^*$ 且 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{M},\mathcal{N}$ 的任意 Σ^*-子结构，那么对于任意无量词公式 $\phi(\bar{x},y)$，以及任意来自 $\mathcal{A}$ 的 $\bar{a}$，只要 $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a},b)$，就存在 $c \in \mathcal{N}$ 使得 $\mathcal{N} \models \phi(\bar{a},c)$。

我们注意到，对于 t_1,t_2 Σ^*-项，任意原子公式 $t_1(\bar{x},y) = t_2(\bar{x},y)$ 都等价于以下形式的原子公式的合取：$\pi_{i_1}(x_\nu) = \pi_{j_1}(x_\mu) \ldots, \pi_{i_n}(x_\nu) = \pi_{j_n}(y)$，其中 π_k 是 $\Sigma^* \setminus \Sigma$ 中函数符号的复合，例如 $\pi_1(x) := \pi_3^{f_0}(\pi_2^{f_1}(x))$。

我们可以假设，无量词公式 $\phi(\bar{x},y)$ 由形如 $\pi_i(x_\nu) = \pi_j(y)$ 的公式的合取以及这类公式的否定构成。设 $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a},b)$，其中某个 $\bar{a}$ 来自 $\mathcal{A}$，而 b 属于 $\mathcal{M}$。每个形如 $\pi_1(a_i) = \pi_2(y)$ 的公式定义了一个由形如 $\exists\bar{z}\big(y = t_1(\bar{z},\pi_1(a_i))\big)$ 的公式组成的析取，其中某个 Σ-项 t_1 依赖于 π_2（注意， t_1 是原始语言符号 Σ 中的一个项，而 $\pi_1(a_i)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个元素）。我们考虑从每个合取中各选取一个析取子句的所有可能组合。其中一些组合是相容的。根据引理 4.12，每个相容组合都等价于一个形如 $\exists\bar{z}\big(y = t(z_1,\ldots,z_m,\pi_{1_\ell}(a_1)\ldots,\pi_{n_\ell}(a_n))\big)$ 的原子公式，其中 $t(z_1,\ldots,z_m,\pi_{1_\ell}(a_1)\ldots,\pi_{n_\ell}(a_n))$ 是一个 Σ-项。

此类公式在 $\mathcal{M}$ 中的任意解都满足方程的所有合取子句。此外，满足方程合取式的任意 b 都满足这些公式之一。我们将这些公式收集成一个集合，称之为 $E(y)$。显然， $\mathcal{A}$ 中的任意 m-元组都可以代入 t，从而得到一个存在于 $\mathcal{A}$ 中的适当解。如果每个项 t 都是 $\pi_{i_1}(a_1)\ldots,\pi_{i_n}(a_n)$ 中的项，那么问题就解决了。因此，我们可以假设某个 z_j 出现在某个项 t 中。

现在我们来处理不等式。用同样的论证可知，每个不等式都等价于形如 $\forall\bar{z}\big(y \neq t_1(\bar{z},\pi_1(a_i))\big)$ 的公式的合取，其中 t_1 是一个 Σ-项。我们将这些合取称为 $N(y)$；它们不能蕴含 $E(y)$ 中每个公式的否定，否则 $\phi(\bar{a},y)$ 就会不一致。特别地， $E(y)$ 中至少有一个公式，例如 $\exists\bar{z}\big(y = t(z_1,\ldots,z_m,\pi_{1_\ell}(a_1)\ldots,\pi_{n_\ell}(a_n))\big)$，必须与 $N(y)$ 相容。由引理 4.13，存在一个形如 $\exists\bar{z}\big(y = r(\bar{z},\bar{d})\big)$ 的公式，其中 $\bar{d}$ 是一个元组，其元素取自 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{A}$ 的不可分解元素集合的并集。由于 $\mathcal{M},\mathcal{N} \models T^*$，我们总能在 $\mathcal{N}$ 中找到足够数量的不可分解元素，以替换 $\exists\bar{z}\big(y = r(\bar{z},\bar{d})\big)$ 中 $\mathcal{M}$ 的不可分解元素。不难看出，后一个公式（替换了不可分解元素后）在 $\mathcal{N}$ 中的任意解都会给出 $\mathcal{N}$ 中的一个元素 c，使得 $\mathcal{N} \models \phi(\bar{a},c)$。

□

我们现在可以证明定理 4.11。

定理 *4.11* 的证明。 只需证明每个 Σ^*-公式 $\phi(\bar{x},\bar{y})$ 都是正规公式的布尔组合。事实上，由量词消去可知，每个 Σ^*-公式都等价于形如 $\pi_1(x_i) = \pi_2(y_j)$ 的公式的布尔组合，且每个这样的公式都是正规的。

□

由 [HP87]可得：

推论 4.15： 任意局部自由代数的完备理论都是稳定的，且为1-基。

我们还可以证明，不含不可分解元素的局部自由代数理论没有素模型。

命题 4.16： 一阶理论 $\mathcal{T}_0$ 没有素模型。

证明概要。 设 a 是一个不含不可分解元素的局部自由代数 $\mathcal{M}$中的元素。我们将证明 $tp^{\mathcal{M}}(a)$ 并非孤立的。事实上，由量词消去可知，$tp^{\mathcal{M}}(a)$ 中的所有公式都具有 $\pi_1(x) = \pi_2(x)$ 及其否定的形式。我们考察类型中所有公式，其中等式和不等式两边的投影复合 $p_i^{f_j}$ 的长度至多为 n。这些公式描述了高度至多为 n的骨架的参数之间的一些关系。我们注意到，总能找到两个元素，它们与 a 之间直到 n-骨架为止的关系完全相同，但在 $n+1$-骨架上却不同。因此， $tp^{\mathcal{M}}(a)$ 并非孤立的。

□

Corollary 4.17： 一阶理论 $\mathcal{T}_0$ 在空 s 上具有不可数多个类型 *et.*

虚元消去这一概念由 Poizat 在 [Poi83] 中作为模型论里一种有意义的工具引入。关于虚元消去的不同概念及其与典范基存在性的联系，我们请读者参阅 [CF04]。

在证明若干关于局部自由代数中代数闭包算子的预备引理之前，我们引入如下记号。设 A 为某个局部自由代数的子集。 A 的 Σ-闭包，记作 Σ-cl(A)，是递增链的并

$$A_0 := A, \qquad A_{i+1} := \{\, f_j(\bar{a}) \;:\; \bar{a} \in A_i^{n_j} \;\&\; f_j \in \Sigma\} \;\text{ for } i \in \mathbb{N},$$

Thus

$$\Sigma\text{-cl}(A) \;=\; \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i.$$

若 $A \neq \emptyset$，则 Σ-cl(A) 是所在代数的一个子代数，特别地，它本身是局部自由的。

我们还将 $A \subset \mathcal{M}$ 的投影闭包 定义为

$$\text{pr}(A) := \left\{\pi(a) : \quad a \in A \text{ 且 } \pi \text{ 是投影映射的有限复合 } \pi_i^{f_j}\right\}.$$

按照约定 $pr(\emptyset) = \emptyset$ 和 Σ-闭包$(\emptyset) = \emptyset$

引理 4.18： 设 $\mathcal{M}$ 是一个没有不可分解元素的局部自由代数，且 $A \subseteq \mathcal{M}$。则 A 的（实排序）代数闭包与 A的（实排序）可定义闭包重合，并且二者都等于 Σ-闭包 pr（A）。

证明。 我们将单独处理情形 $A = \emptyset$ 。我们将证明，在一个足够饱和的模型中，空集上的任意类型都有无穷多个解。这意味着 $dcl(\emptyset) = acl(\emptyset) = \emptyset$

由量词消去可知，完备类型 $p(x)$由关于（不可）分解性的条件，以及不同深度元素之间的等式或不等式决定。设 a是该类型在 $\mathcal{M}$的一个初等扩张 $\mathcal{N}$中的实现。考虑公式集$q(x) := p(x) \cup \{x \neq a\}$。于是，简单的紧致性论证表明 $q(x)$相容。事实上，对于 $p(x)$的每个有限子集 $\Pi(x)$，都有无穷多个满足它的元素（因为不存在不可分解元素），因此 $\Pi(x) \cup \{x \neq a\}$ 相容。于是，我们可以找到满足 $p(x)$的 $b \neq a$。重复这一论证，我们可以为每个 n找到多于 n个实现，因此有无穷多个。

接下来假设 A 非空。首先注意到， Σ-cl($pr(A)$) 是 $dcl(A)$ 的子集。如果 $\mathcal{M}$ 没有不可分解元素，那么 $\Sigma - cl(pr(A))$ 是 $Th(\mathcal{M})$ 的一个模型，因此它是可定义闭合的，特别是 $dcl(A) = acl(A) = \Sigma\text{-cl}(pr A)$。

□

引理 4.19： 设 $\mathcal{M}$ 是一个仅有有限多个不可分解元素的局部自由代数，并设 $A \subseteq \mathcal{M}$。那么， A 的（实数排序）代数闭包是 $\mathrm{Ind}(\mathcal{M}) \cup \mathrm{pr}(A)$ 的 Σ-闭包，其中 $\mathrm{Ind}(\mathcal{M})$表示 $\mathcal{M}$的不可分解元素集合。

证明。 如果 $\mathcal{M}$有有限多个不可分解元素，那么 Ind($\mathcal{M}$) 是 $acl(\emptyset)$ 的子集。特别地，Ind($\mathcal{M}$) $\cup$ pr(A) 的 Σ- 闭包是 $acl(A)$ 的子集。由于 Ind($\mathcal{M}$) $\cup$ pr(A) 非空，其 Σ- 闭包是 $\mathcal{M}$ 的一个局部自由（子）代数，并且它的不可分解元素数量与 $\mathcal{M}$相同。事实上，它包含 Ind($\mathcal{M}$)；如果闭包中的任何其他元素是不可分解的，那么它必定属于 pr(A) \Ind($\mathcal{M}$)，但这样它在 $\mathcal{M}$ 中就是可分解的，特别是分解它的元素属于 Ind($\mathcal{M}$) $\cup$ pr(A)，矛盾。

□

注意，在这种情况下，如果不可分解元素 $dcl(\emptyset) \neq acl(\emptyset)$ 不止一个（但只有有限个）。事实上，不难验证 $dcl(\emptyset) = \emptyset$，而 $acl(\emptyset)$ 是该理论的素模型。

下面的引理不那么显然。

引理 4.20： 设 $\mathcal{M}$ 是一个具有无限多个不可分解元素的局部自由代数，且设 $A \subseteq \mathcal{M}$。那么， A 的（实数排序）代数闭包与 Σ-闭包 $pr(A)$ 相同。

证明。 $A = \emptyset$ 的情形与引理 4.18 的证明类似。唯一的区别在于，这种情况下我们可能有一些公式蕴含 x 的某些投影的不可分解性；但由于此类不可分解元素有无限多个，每个在空集上的完备类型的实现仍构成一个无限集。

我们可以假设 $pr(A)$ 不包含无穷多个不可分解元素，否则结论可由引理 4.19 的证明同理得出。我们将证明，如果 c 不属于 Σ-cl($pr(A)$)，那么 $p(x) := tp(c/A)$ 有无穷多个实现。事实上，对于每个 n， c 的 n-骨架至少有一个不属于 Σ-cl($pr(A)$) 的元素。考虑公式集 $q(x) := p(x) \cup \{x \neq c\}$。于是，每个有限子集 $\Pi(x) \subset p(x)$ 都有无穷多个解，因此 $\Pi(x) \cup \{x \neq c\}$ 相容，并且根据紧致性， $q(x)$ 相容。重复这一论证，对于每个 n，我们都能找到多于 n 个实现，因此有无穷多个。

□

以下结果是前述引理的一个简单推论。

推论 4.21： 设 $\mathcal{M}$ 是局部自由代数，A、$B \subset \mathcal{M}$ 是代数闭子集。那么 $A \cap B$ 是代数闭的。

证明。若 $A \cap B = \emptyset$，则这只可能发生在代数含有无限多个不可分解元素或完全没有不可分解元素的情况下。在这两种情况下，均有 $acl(\emptyset) = \emptyset$。以下假设 $A \cap B \neq \emptyset$。由于 A 和 B 都对投影封闭，它们的交集也对投影封闭，因此

$$\mathrm{pr}(A \cap B) = A \cap B.$$

同理，由于 A 和 B 对 Σ封闭，集合 $A \cap B$ 对 Σ封闭。因此，

$$acl(A \cap B) \;=\; \Sigma\text{-cl}\big(\mathrm{pr}(A \cap B)\big) \;=\; A \cap B,$$

如所需。

□

定理 4.22： 局部自由代数理论的任意完备化都弱消去虚元。

证明。我们证明，每个可定义集 D 都有一个最小的代数闭参数集，使其在该参数集上可定义。只需证明以下断言：若 A 和 B 是代数闭集，且 D既可在 A上定义，也可在 B上定义，则 D可在 $A \cap B$上定义。事实上，根据推论 4.21，交集 $A \cap B$ 是代数闭的，因此取交集即可得到所需的最小代数闭集。

我们可以假设，定义 D over A 的公式等价于原子公式与原子公式的否定的合取的析取，$\bigvee \bigwedge \phi(\bar{x},\ \bar{a})$，其中每个析取子句都不包含在其余子句的并集中。来自 $A \setminus B$ 的元素必须出现在至少一个合取子句中。此外，我们可以假设，在所有析取子句中，包含来自 $A \setminus B$ 的元素的公式都不由其余部分蕴含。事实上，我们可以去掉那些在 $A \cap B$ 上可定义的析取子句；剩下的集合仍然在 A 和 B 上可定义。现在分情况讨论：

- 假设某个析取子句中有一个原子公式 $\pi(x_i) = a$，其中 $a \in A \setminus B$。由于 B 是代数闭的，而且 $a \notin B$。我们知道，a 在固定 B 的自同构作用下有无穷多个像。特别地，D 在 B 上不可定义，因为固定 B 的自同构会将 $\pi(x_i) = a$ 映到无穷多个两两不交的集合。

- 假设元素 $a \in A \setminus B$ 只出现在原子公式 $\pi(x_i) \neq a$的否定中。我们考虑 D的补集，它仍可在 A 和 B上定义。它是析取的合取 $\bigwedge \bigvee \neg\phi(\bar{x}, \bar{a})$。在每个合取子句中，都有一个原子公式 $\pi(x_i) = a$，其中 $a \in A \setminus B$不包含在同一合取子句中、关于 $A \cap B$ 的公式析取里。如果属于 D^c的任何元组属于可在 $A \cap B$上定义的析取的交集，那么 D^c 可在 $A \cap B$上定义。否则，就存在一个公式 $\pi(x_i) = a$，其中 $a \in A \setminus B$ 至少有一个解属于解集 D^c中的一个元组。这个公式在逐点固定 B 的自同构作用下有无穷多个两两不相交的像。与之前一样，D^c 不能在 B上定义。

□

定理 4.23： 任何局部自由代数的完备理论都具有平凡分叉

证明。设 $\bar{a}$、b、$\bar{c}$ 是局部自由代数 $\mathcal{M}$ 中的有限元组，且 $A \subseteq \mathcal{M}$。假设 $\bar{a}$、b、$\bar{c}$ 在 A上两两独立，我们将证明 $\bar{a}$ 与 b、$\bar{c}$ 在 A上独立。若不成立，根据 1-基性，存在一个元素属于 $acl^{eq}(A,\bar{a}) \cap acl^{eq}(A,b,\bar{c}) \setminus acl^{eq}(A)$；根据虚元的弱消去，存在一个实数域中的元素 $acl(A,\bar{a}) \cap acl(A,b,\bar{c}) \setminus acl(A)$。根据代数闭包算子的刻画，我们必有一个元素属于 $pr(A,\bar{a}) \cap pr(A,b,\bar{c}) \setminus pr(A)$。接下来我们注意到 $pr(D) = \bigcup\{pr(d): \ d \in D\}$。因此，存在某个 a_i 来自 $\bar{a}$，但不属于 A，以及某个 b_j 来自 b，但不属于 A（或者某个 c_j 来自 $\bar{c}$，但不属于 A），使得 $\pi_1(a_i) = \pi_2(b_j)$（或者 $\pi_1(a_i) = \pi_2(c_j)$）。特别地，$\bar{a}$ 要么与 b 分叉，要么与 $\bar{c}$ 在 A上分叉，这就产生了矛盾。 □

推论 4.24： 任何局部自由代数的完备理论的任何模型中，都没有可解释的无限群。

定理 4.25： 局部自由代数的完备理论都不具有有限覆盖性质。

证明。 一个简单的 Ramsey 型论证表明，无有限覆盖性质在析取下封闭。因此，根据量词消去，我们只需证明，形如 $\pi_1(x) = \pi_2(x)$ $q_1(x) = q_2(y_j)$ 的公式及其否定的有限合取具有无有限覆盖性质。我们可以假设不存在仅涉及参数 $\bar{y}$ 的合取子句；此外，在任何出现某个 y 的合取子句中，我们都可以用一个新变量替换投影复合 $\pi(y)$。因此，我们可以假设这些合取具有以下形式：

$$\bigwedge \pi_i(x) = \pi_j(x) \bigwedge \pi_q(x) \neq \pi_p(x) \wedge \pi_1(x) = y_1 \wedge \pi_2(x) = y_2 \wedge \ldots \wedge \pi_m(x) = y_m \wedge$$

$$\wedge \pi_{m+1}(x) \neq y_{m+1} \wedge \ldots \wedge \pi_k(x) \neq y_k$$

注意，若一个 $n+1$ 元组序列见证有限覆盖性质，即这些元组的 $n+1$ 实例的交集不一致，但任意 n 的交集都相容，那么这些元组的前 m 个值必定固定，因为它们对应于变量 $y_1, \ldots, y_m$；若这些变量取值不同，就会使公式不一致。因此，我们可以将上述合取分解为两个公式 $\phi^-(x, y_{m+1}, \ldots, y_k) := \pi_{m+1}(x) \neq y_{m+1} \wedge \ldots \wedge \pi_k(x) \neq y_k$ 和 $\phi^+(x, y_1, \ldots, y_m)$。根据前述观察，对于任意见证有限覆盖性质的元组 $\bar{b}_0, \ldots, \bar{b}_n$，$\phi^+(x, \bar{b}_i)$ 的解集是固定的。由于 $\phi(x, \bar{b}_0) \wedge \ldots \wedge \phi(x, \bar{b}_n)$ 不一致，因此对 $\phi^+(x)$ 中的每个 a，都存在一个 $m < j \leq k$ 和一个 $0 \leq i \leq n$，使得 a 属于 $\pi_j(x) = b_i^j$。固定集合 $\phi^+(x)$ 是形如 $\psi_t(x) := \exists \bar{x}(x = t(\bar{x}, b_0^1, \ldots, b_0^m) \bigwedge \pi_i(x) = \pi_j(x) \bigwedge \pi_q(x) \neq \pi_p(x)$ 的公式之并。这个并中析取子句数量的上界仅取决于 π_i，$i \leq m$，而不取决于参数 b_0。我们将此上界记为 M_{ϕ^+}。原子公式 $\pi_i(x) = \pi_j(x)$ 及其否定，在 $x, \bar{x}$ 中的元素之间施加了一些等式/不等式关系以及（不可）分解条件。

我们观察到，$\pi_j(x) = b_i^j$ 的解集不能包含任意 $q \leq m$的解集$\pi_q(x) = b_0^q$，否则该公式的单个实例就会不一致。特别地，与$\pi_j(x) = b_i^j$相对应的析取项具有形式 $\exists \bar{w}\big(x = t(\ldots, t_\mu(\ldots, b_i^j, \ldots) \ldots)\big)$，其中 $t_\mu(\ldots, b_i^j, \ldots)$ 位于来自 $\bar{x}$ 的某个 x_μ 的位置。因此，要使作为 $\psi_t(x)$ 之解的所有元素a都被覆盖，唯一的可能性是下列条件成立：x_μ 是不可分解的，该理论恰好有 $n+1$ 个不可分解元素，并且$\pi_j(x) = b_0^j \wedge \ldots \wedge \pi_j(x) = b_n^j$ 覆盖它们。

因此，对于任意具有有限多个不可分解元素（设为 n）的理论，若对如上的公式以及任意实例集，每个$(n+1) \times M_{\phi^+} \times |\bar{x}|$ 子集都是相容的，则整个集合是相容的。在一阶理论 $\mathcal{T}_\omega$ 和 $\mathcal{T}_0$ 中，我们可以取该界为$2 \times M_{\phi^+} \times |\bar{x}|$。

□

参考文献

[Bel88] O. V. Belegradek, *Teoriya modelei lokal'no svobodnykh algebr*, Trudy Inst. Mat. Sib. Otd. AN SSSR **8** （1988），3–25，俄文。[Bel89] Oleg V. Belegradek，局部自由代数中的分叉，苏联科学院数学札记**46**（1989），第5期，831–834，译自*Matem-aticheskie Zametki* 46（5）（1989），3–8。[CF04] Enrique Casanovas 和 Rafel Farré，虚元消去的弱形式，《数学逻辑季刊》**50**（2004），第2期，126–140。[CK90] C. C. Chang 和 H. J. Keisler，模型论，第3版，《逻辑与数学基础研究》，第73卷，North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹，1990。MR 1059055[Hod93] Wilfrid Hodges，模型论，《数学及其应用百科全书》，第42卷，剑桥大学出版社，剑桥，1993。MR 1221741[HP87] Ehud Hrushovski 和 Anand Pillay，弱正规群，《逻辑学术讨论会 '85：1985年7月在法国奥赛举行的讨论会论文集》（巴黎逻辑学组编），《逻辑与数学基础研究》，第122卷，North-Holland，阿姆斯特丹，1987，第233–244页。MR 895647[Mal71] Anatoly Ivanovich Maltsev，代数系统的元数学。论文集：*1936–1967*，《逻辑与数学基础研究》，第66卷，North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹—伦敦，1971，由 Benjamin Franklin Wells, III 翻译、编校并补充注释。MR 349383[Poi83] Bruno Poizat, *Une théorie de Galois imaginaire*, 《符号逻辑杂志》**48**（1983），1151–1170。[Sel13] Zlil Sela，群上的丢番图几何 *VIII*：稳定性，《数学年刊》**177** （2013），第3期，787–868。MR 3034289

Davide Carolillo

意大利都灵 10123 卡洛·阿尔贝托街 10号 坎帕
纳宫 都灵大学“朱塞佩·佩亚诺”数学系

Yifan Jia

中国四川省成都市高新区西区西源大道2006号，电子科技大学清水河校区，
邮政编码：611731

Bakh Khoussainov

中国四川省成都市高新区西区西源大道2006号，电子科技大学清水河校区，
邮政编码：611731

Rizos Sklinos

中国科学院数学与系统科学研究院 思源楼1016室
中关村东路55号 海淀区，北京 邮政编码：
100190 中华人民共和国