arXiv:2602.01820v1 [math.NT] 2 Feb 2026

莫德尔猜想中有理点数量的定量研究

Jiawei Yu、袁新意、Shengxuan Zhou

2026年2月3日

摘要

本文证明了数域上亏格至少为 2 的光滑射影曲线上有理点数量的一个显式上界。这为 Mazur 提出并由 Vojta、Dimitrov–Gao–Habegger 和 K¨uhne 证明的一致莫德尔猜想给出了显式常数。本文主体分为两部分：第一部分讨论算术估计，第二部分讨论解析估计。

目录

1 引言 **2**

1.1 主要定理：定量莫德尔猜想 .3 1.2 若干推论 .4 1.3 定量 Vojta 不等式 .7 1.4 定量 Bogomolov 猜想 .8 1.5 球堆积 .10 1.6 双曲曲面的短周期 .13 1.7 对 φ-不变量的估计 .14 1.8 Faltings–Elkies 不变量的估计 .19 1.9 记号与术语 .20

I 算术高 度估计 22

2 预备知识 算术交叉理论 22

2.1 N´eron–Tate 高度 .22 2.2 厄米线丛的交叉理论 .24 2.3 Berkovich 解析空间上的赋度量线丛 .25 2.4 射影簇上的阿代尔线丛 .27 2.5 可容许的阿代尔线丛 .29 2.6 函数域 .33

3 定量的 Vo jta 不等式 3 **4**

3.1 全局稀疏性 .35 3.2 定量 Mumford 不等式 .36 3.3 小截面的存在性 .37 3.4 高度的下界 .39 3.5 证明的完成 .44 3.6 函数域 .48

4 定量 Bogomolov 猜想 **49**
4.1 第一部分 .504.2 第二部分 .534.3 函数域 .55

5 点计数 **55**
5.1 高度的不同范围 .555.2 中等点 .575.3 大点：第一上界 .585.4 大点：精细上界 .625.5 函数域 .68

6 进一步的界　　超椭圆曲线的界 **69**
6.1 关于判别式的界 .696.2 平均上界 .77

II 解析估计 **79**

7 预备知识　　关于双曲几何和 Tian 的峰截面 **79**
7.1 双曲度量的局部结构 .797.2 L^2 内积与霍奇分解 .877.3 K 上的全纯 1-形式¨ahler 领圈 .907.4 田峰值截面 .94

8 双曲特征　　特征值与特征函数 **98**
8.1 双曲热核的一个显式上界 .1008.2 第一特征值与双曲曲面的分解 .1048.3 小特征值的特征函数 .110

9 Zhang 的 φ 不变量的下界 **117**
9.1 不变量的等价表述 .1179.2 厚部 .1199.3 分离情形 .1249.4 非分离情形 .133

10 Faltings–Elkies 不变量的下界 **147**

11 阿拉克洛夫度量 与双曲度量的比较157

1 引言

Mordell 猜想认为，亏格至少为二的代数曲线上的有理点是有限的；这一猜想由 Faltings 证明，[Mor22] 是现代数论的核心成就之一。继这一里程碑式的成果之后，Vojta [Fal83], 运用丢番图逼近技术给出了新的证明，而 Lawrence–Venkatesh [Voj91] 基于 [LV20] -adic Hodge 理论给出了第三个证明。 p-adic Hodge theory.

Mazur 提出了 Faltings 定理的一个自然推广 [Maz86，第 234], 页，他询问有理点的数量是否可以根据曲线的亏格和其雅可比簇的莫德尔–韦伊秩作一致界定。在 Vojta 方法的基础上，Dimitrov–Gao–Habegger [DGH21] 和 K¨uhne[Kuh21] 解决了一致莫德尔猜想。他们的定理具有以下形式。

定理 *1.1*（*Vojta* [*Voj*91], *Dimitrov–Gao–Habegger* [*DGH*21], *K¨uhne* [*Kuh*21]）。设 K 为一个特征 *0* 的域，设 C 为 K上的一个亏格为 $g \geq 2$ 的曲线。记 C的雅可比簇为 J。令$\Lambda \subset J(K)$ 为一个有限秩子群。固定一个点 $P_0 \in C(K)$，并通过阿贝尔–雅可比嵌入，将 $C(K) - P_0$ 视为 $J(C)(K)$ 的子集。则

$$\#((C(K) - P_0) \cap \Lambda) \leq c_1(g)c_2(g)^{\mathrm{rk}(\Lambda)},$$

其中 $c_1(g)$ 和 $c_2(g)$ 是仅取决于亏格 g 的正常数。

本文中，曲线 指基域上的光滑、射影且几何连通的曲线。在该定理中， Λ 不假设为有限生成的，且秩 $\mathrm{rk}(\Lambda) = \dim_{\mathbb{Q}}(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$。通过特化论证，很容易将该定理归约到 K 为数域的情形。

该定理由以下界的组合证明。

(1)（大点）Vojta 对莫德尔猜想的证明见 [Voj91]实际上给出了一个关于高高度有理点分布的深刻不等式，特别是推出了高高度有理点数量的一个上界。注意，根据高度的 Northcott 性质，这已足以证明莫德尔猜想。

(2)（小点） [DGH21、Kuh21] 的研究证明了一致博戈莫洛夫猜想，该猜想给出了小高度代数点数量的一个上界。通过一个简单的球堆积论证，一致博戈莫洛夫猜想还限制了与（1）互补的所有有理点的数量。

此前，Ullmo [Ull98] 利用 Szpiro–Ullmo–Zhang 的等分布定理 [SUZ97]证明了单条曲线的原始 Bogomolov 猜想。另一个鲜为人知的 Bogomolov 猜想证明来自 Zhang [Zha93、Zha10], Cinkir [Cin11], 和 de Jong [dJ18]的工作，该证明建立了数域上曲线的可容许体积的正性。在 [DGH21、Kuh21], DeMarco–Krieger–Ye [DKY20] 的工作之前，他们证明了亏格为 2 的双椭圆曲曲线的一致 Bogomolov 猜想。

基于 Yuan–Zhang 的阿代尔线丛理论 [YZ24], , Yuan [Yua24]最近给出了一致 Bogomolov 猜想的另一种证明，从而也证明了一致莫德尔猜想。Yuan 方法的关键要素是 Zhang [Zha93、Zha10],Cinkir [Cin 11], 和 de Jong [dJ18], 关于可容许体积正性的族版本，而 K¨uhne 方法的关键要素是 Ullmo [Ull98]的等分布论证的族版本。

1.1 主定理：莫德尔猜想的定量版本

自然会有人问，能否得到一致莫德尔猜想的定量版本，即确定定理 $c_1(g)$ 和 $c_2(g)$ 中的显式常数 1.1。从上述方法中提取显式常数面临着重大困难。事实上， [DGH21、Kuh21] 的方法基于等分布论证，Yuan 的方法 [Yua24] 则基于阿基米德赋值处的紧致性论证，而且这两种方法都以曲线模空间中子簇链的算术性质为基础。

然而，在函数域情形下，Looper–Silverman–Wilms [LSW25] 以出人意料的显式常数证明了一致 Bogomolov 猜想。他们的证明通过对单条曲线进行估计，而非借助模空间，并且仍以 Zhang [Zha93、Zha10], Cinkir [Cin11], 和 de Jong [dJ18]关于可容许体积正性的结果为基础。基于 [LSW25] 的结果，并改造 Vojta 关于函数域上莫德尔猜想的证明，Yu [Yu25] 为特征 0 的函数域上的非等变曲线，在定理 1.1 中得到了 $c_1(g) = 16g^2 + 32g + 129$ 和 $c_2(g) = 40g$。

本文 [LSW25]由于阿基米德赋值处存在诸多障碍，未能涵盖数域。本文克服了所有这些阿基米德障碍，并证明了数域上的定量 Bogomolov 猜想。我们还在数域上建立了定量 Vojta 不等式（带有显式常数）。因此，我们证明了以下主要定理，这是定理 1.1 的显式版本。

定理 1.2 (定理 5.1)。 设 K 是一个特征为 0 的域， C 是一个亏格为 $g \geq 2$ 的曲线，定义在 K 上，并且 J 是 C 的雅可比簇。对于 α 上次数为 1 的任意线丛 C ，以及任意有限秩子群 $\Lambda \subset J(K)$， ，

$$\#((C(K) - \alpha) \cap \Lambda) \leq 10^{13} g^8 \cdot \min\left\{1 + \frac{5}{4\sqrt{g}}, 1 + \frac{3\log g}{g}\right\}^{\mathrm{rk}(\Lambda)}.$$

如果 K 是一个数域，那么根据莫德尔–韦伊定理， $J(K)$是有限生成的，因此我们可以取$\Lambda = J(K)$。这给出了原始莫德尔猜想的以下定量版本。

定理 1.3. 设 C 是定义在数域 K上的亏格为 $g \geq 2$ 的曲线，且 J 是 C的雅可比簇。那么

$$\#C(K) \leq 10^{13} g^8 \cdot \min\left\{1 + \frac{5}{4\sqrt{g}}, 1 + \frac{3\log g}{g}\right\}^{\mathrm{rk}\, J(K)}.$$

在这些定理中，Vojta 常数

$$c_2(g) = \min\left\{1 + \frac{5}{4\sqrt{g}}, 1 + \frac{3\log g}{g}\right\},$$

它本质上源自 Vojta对莫德尔猜想的证明，并且当 $g \to \infty$ 时趋于 1。这肯定地回答了 Gao 和 Habegger 提出的问题（参见 [Hab23，问题 1。19]）。

另一方面，回顾一下，Raynaud 证明的 Manin–Mumford 猜想 [Ray83a, Ray83b]断言$(C(K) - \alpha) \cap J(K)_{\mathrm{tor}}$ 是有限集。这里， $J(K)_{\mathrm{tor}}$ 表示$J(K)$的挠元子群。在定理 1.2 中，常数 $c_1(g) = 10^{13} g^8$ 为$(C(K) - \alpha) \cap J(K)_{\mathrm{tor}}$ 的阶提供界，其中取$\Lambda = J(K)_{\mathrm{tor}}$，因此我们称 $c_1(g)$为曼宁–芒福德常数。我们的定理证明实际上给出了以下具有更优常数的 Manin–Mumford 猜想定量版本。

定理 1.4 (定理 4.2)。 设 K 是特征 0 的域， C 是亏格为 $g \geq 2$ 的曲线，其定义在 K上，且J 是 C的雅可比簇。那么，对于任意次数为 α *1* 的线丛，定义在 C上，

$$\#\big((C(K) - \alpha) \cap J(K)_{\mathrm{tor}}\big) \leq 3.2 \cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}}.$$

在定理 1.2中，若 C 并非定义在数域上，则属于函数域情形，并且有以下常数更优的定理。

定理 1.5 (定理 5.13)。 设 K 是特征 0 的域， C 是亏格为 $g \geq 2$ 的曲线，其定义在 K上，且J 是 C的雅可比簇。假设 C 在 $\mathbb{Q}$ 上不是等变的，即 C_K 不能下降到 $\mathbb{Q}$。那么，对于定义在 α 上的任意次数为 1 的线丛，以及 C 中的任意有限秩子群 $\Lambda \subset J(K)$,

$$\#((C - \alpha) \cap \Lambda) \leq 1.8 \cdot 10^6 g^3 \cdot \left(1 + \frac{5}{4\sqrt{g}}\right)^{\mathrm{rk}(\Lambda)},$$

$$\#((C - \alpha) \cap \Lambda) \leq 2.5 \cdot 10^4 g^8 \cdot \left(1 + \frac{3\log g}{g}\right)^{\mathrm{rk}(\Lambda)}.$$

我们对这一函数域版本的证明采用了 Looper–Silverman–Wilms 主结果的一种变体[LSW25], ，但证明的其他部分与定理 1.2的证明类似。注意，此处我们的 Vojta 常数优于 Yu 得到的结果 [Yu25], ；后者源自 Vojta 不等式的一个精细版本以及一种更细致的点计数方法。

1.2 一些推论

我们来看看定理 1.3 的一些推论，它们给出了有理点数量的不同界。

第一项推论：超出 Chabauty 范围

首先，回顾一下，在 Chabauty 范围 $\operatorname{rk} J(K) < g$ 中，Coleman [Col85] 应用 Chabauty 方法，得到了 $\#C(K)$ 的一个上界，该上界关于 g 几乎呈线性。我们的定理给出了超出 Chabauty 范围的简洁界。事实上，由不等式

$$\left(1+\frac{3\log g}{g}\right)^{g} \leq g^{3},$$

定理1.3 给出

$$\#C(K) \leq 10^{13} g^{3^{\frac{\operatorname{rk} J(K)}{g}+8}}.$$

如果 $\frac{1}{g}\operatorname{rk} J(K)$ 有界，则这是关于 g 的多项式。

第二项推论：由坏约化给出的界

我们的第二项推论是关于有理点个数的如下一个“更显式”的界。

定理 1.6. 设 C 是一个定义在数域 K 上、亏格为 $g \geq 2$ 的曲线。记 $d = [K:\mathbb{Q}]$ 为 K 在 $\mathbb{Q}$ 上的次数，$\Delta_{K/\mathbb{Q}}$ 为 K 在 $\mathbb{Q}$ 上的判别式，$N^0_{C/K}$ 为 O_K 中使 C 有坏约化的素理想的范数之积。则

$$\#C(K) \leq c_1(g,d)\cdot (N^0_{C/K})^{c_2(g,d)} \cdot |\Delta_{K/\mathbb{Q}}|^{c_3(g,d)},$$

其中

$$\begin{aligned}
c_1(g,d) &= 10^{13} g^8 \cdot \min\left\{1+\frac{5}{4\sqrt{g}}, 1+\frac{3\log g}{g}\right\}^{2g^3d^3 2^{8g^2}} < 10^{13} g^{6g^2d^3 2^{8g^2}+8},\\
c_2(g,d) &= 4g^3d^2 2^{8g^2}\cdot \log_4 \min\left\{1+\frac{5}{4\sqrt{g}}, 1+\frac{3\log g}{g}\right\} < 8.7\cdot g^2d^2\cdot 2^{8g^2}\log g,\\
c_3(g,d) &= gd2^{8g^2}\cdot \log_4 \min\left\{1+\frac{5}{4\sqrt{g}}, 1+\frac{3\log g}{g}\right\} < 2.2\cdot d\cdot 2^{8g^2}\log g.
\end{aligned}$$

该定理是定理 1.3 以及 R´emond [Rem10所给如下界的推论，即命题 5.1] 关于 Mordell–Weil 秩：

$$\operatorname{rk} J(K) \leq \frac{gd2^{8g^2}}{\log 4}(4dg^2\log N^0_{J/K} + \log|\Delta_{K/\mathbb{Q}}| + g^2d^2\log 16) - 1.$$

这里 $N^0_{J/K}$ 是 O_K 中使 J 具有坏约化的那些素理想的范数之积，它是 $N^0_{C/K}$的一个因子。

回顾可容许体积 $\bar{\omega}^2_{C/K,\,a}$ 是 Zhang 的容许典范丛的自交数；参见 §2.5 以作回顾。在定理 1.6 中，我们可以用 $e^{88\bar{\omega}^2_{C/K,\,a}}$ 替换 $N^0_{C/K}$，因为我们有

$$\bar{\omega}^2_{C/K,a} \geq \frac{\max\{g-1,2\}}{2g+1}\varphi(C) \geq \frac{1}{88}\log N^0_{C/K}.$$

这里第一个不等式来自定理2.4，它是 Zhang [Zha10], 、de Jong [dJ18], 以及 Wilms [Wil22], 的工作的推论，第二个不等式则由 Cinkir [Cin11，定理 2.11] 以及 Cinkir [Cin15]给出。

我们还可以将关于可容许体积 $\bar{\omega}^2_{C/K,\,a}$ 的表达式改写为关于 Faltings 高度 $h_{\mathrm{Fal}}(J)$的表达式，因为我们有

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\bar{\omega}^2_{C/K,a} \leq 12h_{\mathrm{Fal}}(J) + 6g\log(2\pi^2).$$

参见 [Yua24，定理 4。14]该不等式是 Faltings 的算术诺特公式的推论[Fal84], Zhang 的一个不等式 [Zha93], 以及 Wilms 给出的 δ不变量下界 [Wil17]。

感兴趣的读者还可以将我们的结果与 R´emond [Rem10，定理 1.1、定- 理 1.2] 关于平面曲线上有理点的结果进行比较。从某种意义上说，我们目前的结果加强了同上引文中的结果。

最后，对于整点，Corvaja–Zannier [CZ03] 给出了双曲曲线上整点数量的显式上界，其中该曲线至少有三个无穷远点。这个结果基于施密特子空间定理的一个精确显式版本，且不涉及 Mordell–Weil 秩。

第三个推论：超椭圆曲线

若 C 是超椭圆曲线，则 $\operatorname{rk} J(K)$ 有一个更好的界，因此 $\#C(K)$ 也有如下更好的界。

定理 1.7 (定理 6.1)。 设 K 是一个次数为 d 的数域 $\mathbb{Q}$。设 $f(x) \in O_K[x]$ 是一个首一无平方因子多项式。设 $\Delta_f \in O_K$ 是 f的判别式。

(1) 如果对于某个整数 $g \geq 2$，$\deg f = 2g+1$，那么

$$\#\{(x,y) \in K^2 : y^2 = f(x)\} \leq 10^{13} \cdot 2^d g^{9d\log_2(2gd+d)+18d+8} (2gd+d)^{\frac{3}{2}d} \cdot |N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_f|^{4\log_2 g+\frac{1}{2}} \cdot |\Delta_{K/\mathbb{Q}}|^{3\log_2 g+\frac{1}{2}}.$$

(2) 如果对于某个整数 $g \geq 2$，$\deg f = 2g+2$，那么

$$\#\{(x,\ y) \in K^2 :\ \ y^2 = f(x)\} \leq 10^{13} \cdot 2^{6d+1} g^{9d\text{对数}_2(2gd+2d)+18d+8} (2gd+2d)^{\frac{9}{2}d} \cdot |N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_f|^{4\text{对数}_2 g+\frac{5}{2}} \cdot |\Delta_{K/\mathbb{Q}}|^{3\text{对数}_2 g+\frac{3}{2}}.$$

这里的判别式 $\Delta_f \in O_K$ 是通常定义的判别式：

$$\Delta_f = \prod_{1\leq i<j\leq \deg f} (x_i - x_j)^2,$$

其中 $x_1, \ldots, x_{\deg f}$是 K 中 f 的根。

第四个推论：超椭圆曲线的平均值

作为最后一个推论，回顾一下，Bhargava–Gross [BG13] 证明，在 $\mathbb{Q}$ 上，带有标记有理魏尔斯特拉斯点的超椭圆曲线的 2-塞尔默群平均大小为 3。如果该有理点不是魏尔斯特拉斯点，Shankar–Wang [SW18] 证明其平均大小至多为 6。由显然的不等式

$$\left(1+\frac{5}{4\sqrt{g}}\right)^{\operatorname{rk} J(K)} < 2^{\operatorname{rk} J(K)} \leq \#\mathrm{Sel}_2(J),$$

我们得到定理 1.3 的以下推论。

定理 1.8 (定理 6.5)。 *(1)* 对于亏格为 $g \geq 2$、定义在 $\mathbb{Q}$ 上且带有标记有理魏尔斯特拉斯点的超椭圆曲线，其有理点平均个数至多为 $3 \cdot 10^{13} g^8$.

(2) 对于在 $\mathbb{Q}$ 上、亏格为 $g \geq 2$且带有一个有理非韦尔斯特拉斯点的超椭圆曲线，其有理点数量的平均值至多为 $6 \cdot 10^{13} g^8$.

1.3 定量 Vojta 不等式

我们对定理1.2 的证明基于定量 Vojta 不等式和一个定量 Bogomolov 猜想，并涉及球堆积中的一些精细论证。我们将先介绍这两个定量定理，然后给出球堆积的一些要素。

我们先介绍一些关于高度和算术数的记号，详细内容见§2 。设 C 是定义在数域 K上的一条亏格为 $g \geq 2$ 的曲线， J 是 C 在 K上的雅可比簇。必要时，将基变换到 K 的一个有限扩张上，我们可以假设存在一个线丛α_0 在 C 上，使得（$2g-2$）α_0 同构于典范层$\omega = \omega_{C/K}$。这里，我们通常用加法记号表示线丛的张量积。通过 α_0，我们有一个阿贝尔–雅可比映射

$$i_{\alpha_0} : C \longrightarrow J, \quad x \longmapsto (x) - \alpha_0.$$

这给出了一个 theta 除子 θ ，它定义在 J 上，是 $C^{g-1} \to J$ 的像。该 theta 除子给出一个 N´eron–Tate ˆ 高度函数 $h\colon J(K) \to \mathbb{R}$，它延拓为 $J(K)_{\mathbb{R}} = J(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 上的正定二次型。这在 $J(K)_{\mathbb{R}}$ 上定义了一个度量，具体为

$$|x| = \sqrt{[K : \mathbb{Q}]\hat{h}(x)}, \quad x \in J(\overline{K})_{\mathbb{R}}.$$

记 $\angle(x, y)$ 为向量 $x, y \in J(K)_{\mathbb{R}}$ 在此度量下的夹角。关于 $x, y \in C(\overline{K})$ 的记号 $|x|$ 和$\angle(x, y)$，可通过映射 $i_{\alpha_0}\colon C \to J$ 来理解。

令 $\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_{C/K,a}$ 为 C上的 Zhang 的可容许典范线丛。Ullmo 证明的 Bogomolov 猜想等价于算术自交数 $\bar{\omega}_a^2$严格为正。数值 $\bar{\omega}_a^2$是 C/K的典范算术不变量，称为 可容许体积 。关于 C/K的更多细节，请参阅 §2.5。

本文证明了以下 Vojta 不等式的定量版本。

定理 1.9 (定理 3.1)。 设 C 是亏格为 $g \geq 2$ 的数域 K上的一条曲线。设 $P_1, P_2 \in C(K)$是互不相同的有理点。假设

$$|P_1| \geq 1.2 \cdot 10^9 g^{\frac{7}{3}} \sqrt{\bar{\omega}_a^2}$$

and

$$|P_2| \geq 10^5 g^{\frac{5}{2}} |P_1|.$$

Then

$$\cos \angle(P_1, P_2) \leq \sqrt{\frac{1.01}{g}}.$$

带有隐常数的定理由 Vojta 证明 [Voj91] ， 旨在证明莫德尔猜想。Vojta 证明中技术性最强的部分 [Voj91] 是应用 Gillet–Soul 的算术黎曼–罗赫定理´e [GS92] 构造一个小截面。Bombieri [Bom90], 将这一技术部分替换为应用较为初等的 Siegel 引理，而 Yuan 则将其替换为应用 Yuan 算术 Siu 不等式 [Yua25]。关于这些方法的简要历史，请参阅 [Yua25，§1] 。

注意，R´emond [Rem00b，定理 1。1] 证明了阿贝尔簇子簇的一个 Vojta 不等式，其中大多数常数也都已明确写出。

我们对定理 1.9 的证明基于 Yuan 关于 Vojta 方法的框架 [Yua25] ， 我们进一步的想法是使用 Zhang 的可容许阿代尔线丛，从而得到显式常数。此外，我们还需要一些显式不等式，以比较紧黎曼曲面上的阿拉克洛夫度量与双曲度量。

请注意，定理中的界 $\sqrt{\frac{1.01}{g}}$ 以当前方法而言非常精确。事实上，我们用 Vojta 方法所能推导出的所有界都应严格大于 $\sqrt{\frac{1}{g}}$。这也可以从 [Yua25定理 2 的表述中看出。1]。

作为定量 Vojta 不等式的补充，我们有以下 Mumford 不等式的定量版本，见 [Mum65] （参见 [Ser97，§5.7]）。

定理 1.10 （定理 3.6）。设 C 是一个亏格为 $g \geq 2$ 的数域上的曲线 K。设 P_1, $P_2 \in C(K)$ 是互不相同的代数点。假设

$$|P_1| \geq 10^9 g^{\frac{7}{3}} \sqrt{\bar{\omega}_a^2}$$

and

$$|P_1| \leq |P_2| \leq 1.15|P_1|.$$

Then

$$\cos \angle(P_1, P_2) \leq \frac{1.01}{g}.$$

与 Mumford 的原始不等式一样，我们的定理的证明使用了定理 1.9 中的一些技巧，但比定理 1.9 的证明容易得多。

1.4 Bogomolov 猜想的定量版本

下面的定理是 Bogomolov 猜想的定量版本。

定理 1.11 （定理4.1）。设 K 是一个数域， C 是一个亏格为 $g \geq 2$ 的曲线，定义在 K 上，且 J 是 C 的雅可比簇。

(1) 对任意 $0 \leq r < \sqrt{\frac{1}{8g-4}}$ 和 $x \in J(K)_{\mathbb{R}}$,

$$\#\{P \in C(\overline{K}) : |P - x| \leq r\sqrt{\bar{\omega}_a^2}\} < \frac{3.2 \cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}}}{1 - 8gr^2} \left(1 + 10^{-6} \log\left(\frac{1}{1 - 8gr^2}\right)\right).$$

(2) 设 $\kappa > 1$ 和 $\theta \in (0, \pi/2)$ 为满足以下条件的实数

$$g \cos^2 \theta > \frac{(\kappa+1)^2}{4\kappa} + \frac{1}{3.2 \cdot 10^{11} g^{\frac{11}{3}}}.$$

那么，对于任意非零的 $x \in J(\overline{K})_{\mathbb{R}}$,

$$\#\{P \in C(\overline{K}) : |x| \leq |P| \leq \kappa|x|, \angle(P, x) \leq \theta\} \leq 3.2 \cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}}.$$

第一个不等式是 [LSW25定理 1 的数域版本。3], 其系数大得多$3.2 \cdot 10^{11}$，这是由于阿基米德赋值带来的系数更大。第二个不等式是 [Yua24定理 1 中额外项所导出不等式的有效变体。1]事实上，经过初等计算可得

$$\{P \in C(\overline{K}) : |x| \leq |P| \leq \kappa|x|, \angle(P, x) \leq \theta\} \subseteq \{P \in C(\overline{K}) : |P - x| \leq (\kappa^2 + 1 - 2\kappa\cos\theta)^{\frac{1}{2}}|x|\}$$

那么，右侧的一个上界 的数量级便给出了 [Yua24定理 1.1]。另见注 4.5。

下面我们介绍证明定理 1.11 的思路。如上所述，我们证明中的整体部分基本沿用了 [LSW25 的证明, 定理 5。2], 其关键要素是一个二次恒等式，而证明中的局部部分则包含对紧黎曼曲面不变量的一些技术性估计。我们将先介绍整体部分，稍后再回到局部部分。

假设 P_1, ..., P_n 是 n 个互异点，位于 $C(K)$上，且具有较小的距离 $|P_i - x|$。我们希望得到 n的一个上界。通过基变换，我们可以假设 P_1, ..., P_n 定义在 K上。将 P_i 延拓为容许阿代尔除子 $\mathcal{O}(P_i)_a$ ，其在 C 上（参见 §2.5）。由算术霍奇指标定理（参见定理2.5）与算术伴随公式（参见定理2.6），我们得到一个二次恒等式

$$\frac{4(n+g-1)(g-1)}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |P_i - P_j|^2 = \frac{4ng(g-1)}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} h_{\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a}(P_i, P_j) + \frac{n^2}{2}\bar{\omega}_a^2 + \left|(2g-2)\sum_{i=1}^{n} P_i - n\omega\right|^2.$$

这里的高度

$$h_{\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a}(P_i,P_j)=\sum_{v\in M_K}\epsilon_v G_{a,v}(P_i,P_j),$$

其中 $G_{a,\,v}:(C^2\setminus\Delta)(K_v)\overline{\to}\mathbb{R}$ 是 v 处的 Zhang 可容许 Green 函数，如 §2.5所述。二次恒等式的证明见引理 4.3 。该二次恒等式摘自 [LSW25]的证明。

为证明定理 1.11的第一个不等式，假设 $|P_i-x|^2<t$ 对于一个较小的正数 t成立，我们希望用 t来给出 n 的上界。首先有

$$|P_i-P_j|^2\le(|P_i-x|+|P_j-x|)^2\le(\sqrt{t}+\sqrt{t})^2=4t.$$

我们将证明一个如下形式的关键上界

$$\sum_{1\le i<j\le n}h_{\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a}(P_i,P_j)\ge -O((n\log n)\bar{\omega}_a^2).$$

由此可得该不等式变为

$$8(g-1)n^2t\ge\left|(2g-2)\sum_{i=1}^n P_i-n\omega\right|^2+\frac{n^2}{2}\bar{\omega}_a^2-O((n\log n)\bar{\omega}_a^2)\ge\frac{n^2}{2}\bar{\omega}_a^2-O((n\log n)\bar{\omega}_a^2).$$

只要 $2t<\frac{1}{8}(g-1)\bar{\omega}_a^2$，就能得到 n 的上界。通过某种精细方法，我们最终得到定理 1.11的第一个不等式。

对于 s 定理 1.11的第二个不等式中，条件 $|x|\le|P|\le\kappa|x|$ 和 $\angle(P,\ x)\le\theta$ 给出 e

$$|P_i-P_j|^2=|P_i|^2+|P_j|^2-2|P_i||P_j|\cos\angle(P_i,P_j)\le 2\kappa|x|^2-2|x|^2\cos(2\theta).$$

P_i 在 x 方向上的投影长度为 $|P_i|\cos\angle(P_i,\ x)$。由此可得

$$\left|(2g-2)\sum_{i=1}^n P_i-n\omega\right|^2\ge(2g-2)^2\left(\sum_i|P_i|\cos\angle(P_i,x)\right)^2\ge(2g-2)^2n^2|x|^2\cos^2\theta.$$

于是，由二次恒等式可得

$$2|x|^2(\kappa-\cos(2\theta))n^2\ge(2g-2)^2n^2|x|^2\cos^2\theta+\frac{n^2}{2}\bar{\omega}_a^2-O((n\log n)\bar{\omega}_a^2).$$

这给出了 n 的上界，只要 $2(\kappa-\cos(2\theta))<(2g-2)^2\cos^2\theta$。对这一论证稍加改进，即可得到定理 1.11的第二个不等式。

剩下要证明一个如下形式的显式上界

$$\sum_{1\le i<j\le n}h_{\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a}(P_i,P_j)\ge -O((n\log n)\bar{\omega}_a^2).$$

我们需要 Zhang 的全局 φ不变量

$$\varphi(C)=\sum_{v\in M_K}\epsilon_v\varphi_v(C),$$

其中局部 φ-不变量

$$\varphi_v(C)=-\int_{(C^2)^{\mathrm{an}}_{K_v}}G_{a,v}\,c_1(\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_{a,v})^{\wedge 2}\ge 0.$$

这一点回顾于§2.5。根据 Zhang [Zha93、Zha10], 、Cinkir [Cin11], 、de Jong [dJ18], 以及 Wilms[Wil22]关于原始 Bogomolov 猜想的工作，我们有一个不等式

$$\bar{\omega}_a^2\ge\frac{g-1}{2g+1}\varphi(C).$$

请参阅定理 2.4 以了解更多细节。

因此，只需证明一个如下形式的显式界

$$\sum_{1\le i<j\le n} h_{\overline{\mathcal{O}(\Delta)}_a}(P_i,P_j) \ge -O((n\log n)\varphi(C)).$$

注意，$h_{\overline{\mathcal{O}(\Delta)}_a}(P_i,\ P_j)$ 和 $\varphi(C)$ 都是对 K 的赋值 v 上局部项的求和。问题归结为找到一个合适的正实常数 $c(g)$，使其与 C 和 v 无关，并满足

$$\mathrm{FE}_v(n,C) + c(g)\,(n\log n)\,\varphi_v(C) \ge 0.$$

这里的 法尔廷斯–埃尔基斯不变量

$$\mathrm{FE}_v(n,C) = \inf_{P_1,\dots,P_n\in C(K_v)} \sum_{1\le i<j\le n} G_{a,v}(P_i,P_j).$$

注意，对于 v，该问题完全是局部的。

若 v 是非阿基米德赋值，则 $\mathrm{FE}_v(n,\ C)$ 和 $\varphi_v(C$都可以用 C的约化对偶图来计算。在这种情况下，$\varphi_v(C)$ 的下界由 Cinkir [Cin11], 给出，而 $\mathrm{FE}_v(n,\ C)$ 的一个合适下界由 [LSW25]给出。将二者结合，可得 $c(g$在 v处的。

若 v 是阿基米德赋值，则项 $\mathrm{FE}_v(n,\ C)$ 是紧黎曼曲面 $C_v(\mathbb{C}$的一个不变量。Faltings $_v(n,\ C)$ 的下界此前由 Faltings [Fal83] 和 Elkies（参见 [Lan88，§VI.5]）得到，但随着黎曼曲面的变化，这些界并不一致。本例中的显式界如下。

定理 1.12（定理 3.5，定理 10.11）。设 C 是亏格为 $g\ge 2$ 、定义在数域 K上的曲线。设 v 是 K的一个阿基米德赋值。则我们有

$$\mathrm{FE}_v(C,n) \ge -\left(4\cdot 10^3 g^{\frac{1}{3}} n\log n + 1.32\cdot 10^{10} g^{\frac{11}{3}} n\right)\cdot \varphi_v(C).$$

这一显式界的证明，是本文解析部分中技术性最强的部分。我们稍后将回到这一点。

1.5 球堆积

现在我们描述用球堆积论证来证明定理 1.2 的方法，所依据的是定理 1.9、定理1.10以及定理 1.11。容易将问题归结为情形 $\alpha=\alpha_0$。我们将集合 $C\cap\Lambda$ =$(C(K)-\alpha_0)\cap\Lambda$ 划分为以下三个部分：

$$\begin{aligned}
(C\cap\Lambda)_{\mathrm{small}} &= \left\{P\in C\cap\Lambda : |P| \le \sqrt{\frac{\bar\omega_a^2}{16g}}\right\},\\
(C\cap\Lambda)_{\mathrm{medium}} &= \left\{P\in C\cap\Lambda : \sqrt{\frac{\bar\omega_a^2}{16g}} < |P| \le 1.2\cdot 10^9 g^{\frac{7}{3}}\sqrt{\bar\omega_a^2}\right\},\\
(C\cap\Lambda)_{\mathrm{large}} &= \left\{P\in C\cap\Lambda : |P| > 1.2\cdot 10^9 g^{\frac{7}{3}}\sqrt{\bar\omega_a^2}\right\}.
\end{aligned}$$

这类似于Dimitrov–Gao–Habegger [DGH21], 的划分，但我们将运用多种精细方法，以在这些界中得到较好的常数。

我们对 $|x|$三个集合所采用的截断界限取自定理1.9 和定理1.11中的常数。例如，集合（$C\cap\Lambda)_{\mathrm{small}}$ 中的小点来自定理1.11（1），其中 $r=\sqrt{\frac{1}{16g}}$。这给出了界

$$\#(C\cap\Lambda)_{\mathrm{small}} \le 6.5\cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}}.$$

接下来需要对中等点和大点进行界定。

记 $n=\mathrm{rk}(\Lambda)$，并假设 $n\geq 1$。范数 $|\cdot|$ 下的空间 $V=\Lambda_{\mathbb{R}}$ 与欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 等距。对于任意非零向量 $u\in V$ 和任意角 $\theta\in(0,\pi)$，记圆锥

$$\mathrm{cone}(u,\theta)=\{x\in V:\angle(u,x)\leq\theta\}$$

以 u 为中心、在 V 中角半径为 θ，并将该球冠记为

$$\mathrm{cap}(u,\theta)=\{x\in V:|x|=1,\ \angle(u,x)\leq\theta\}$$

以 u 为中心、在 V 中角半径为 θ。注意，$\mathrm{cap}(u,\theta)$ 位于该球面内

$$S_V=\{x\in V:|x|=1\}.$$

中等点

现在我们描述如何界定集合 $(C\cap\Lambda)_{\mathrm{medium}}$。对于任意 $0<r<r'$，记

$$(C\cap\Lambda)_{r,r'}=\{P\in C\cap\Lambda:r<|P|\leq r'\}.$$

于是我们有

$$(C\cap\Lambda)_{\mathrm{medium}}=(C\cap\Lambda)_{r_1,r_2}$$

with

$$r_1=\sqrt{\frac{\bar{\omega}_a^2}{16g}},\qquad r_2=1.2\cdot 10^9 g^{\frac{7}{3}}\sqrt{\bar{\omega}_a^2}.$$

用以下集合覆盖 $(C\cap\Lambda)_{\mathrm{medium}}$

$$(C\cap\Lambda)_{2^{i-1}r_1,2^i r_1},\quad i=1,\dots,\lceil\log_2(r_2/r_1)\rceil.$$

只需对每个 $r>0$ 给出 $\#(C\cap\Lambda)_{r,2r}$ 的上界。

应用定理 1.11（2）于

$$\theta=\arccos\sqrt{\frac{1.13}{g}},\quad \kappa=2.$$

因此，在自然映射下

$$\coprod_{P\in(C\cap\Lambda)_{r,2r}}\mathrm{cone}(P,\theta)\longrightarrow V,$$

每个非零点至多有 $3.2\cdot 10^{11}g^{\frac{17}{3}}$ 个原像。与球面 S 取交，并比较体积。我们有

$$\#(C\cap\Lambda)_{r,2r}\cdot\mathrm{vol}(\mathrm{cap}(P,\theta))\leq 3.2\cdot 10^{11}g^{\frac{17}{3}}\mathrm{vol}(S_V).$$

Th剩余部分只是欧几里得空间中的一些体积估计。我们的最终结果是

$$\#(C\cap\Lambda)_{\mathrm{medium}}\leq 1.64\cdot 10^{13}g^7\left(1+\frac{5}{2\sqrt{2}g}\right)^{n-1}.$$

大点

现在我们来描述 我们的思路：如何界定 $C(K)^{\mathrm{large}}$；这需要球堆积中更精细的结果 .

我们先介绍球堆积中的一个重要计数函数。对于任意正整数 n 以及任意角 $\theta\in(0,\pi)$，记 $A(n,\theta)$ 为非零点 $u_1,\dots,u_N\in\mathbb{R}^n$ 的最大数目，使得其中任意两点所成的角至少为 θ。这一条件也等价于球冠 $\mathrm{cap}(u_1,\theta/2)\dots,\mathrm{cap}(u_N,\theta/2)$ 的内部两两不相交。因此，$A(n,\theta)$ 也表示在 $\mathbb{R}^n$ 中角半径为 $\theta/2$ 的球冠的最大数目，且任意两个这样的球冠都没有共同的内部点。

现在我们回到大点的界。对于任意的 $\theta\in(0,\ \pi)$，存在一个子集 S，它属于 $(C\cap\Lambda)^{\mathrm{large}}$，并满足以下性质。

(1) 对于任意的 $P \in (C \cap \Lambda)_{\text{large}}$，存在一个 $Q \in S$，使得 $\angle(P, Q) \le \theta$ 且 $|Q| \le |P|$。

(2) 对于不同的 $Q_1, Q_2 \in S$，有 $\angle(Q_1, Q_2) > \theta$。因此，$\#S \le A(n, \theta$).

这个集合可以通过归纳法构造。

对于任意 $\kappa > 1$，有

$$\begin{aligned}(C \cap \Lambda)_{\text{large}} &= \bigcup_{Q \in S} \{P \in C \cap \Lambda : |P| \ge |Q|,\ \angle(P, Q) < \theta\} \\ &= \bigcup_{Q \in S} \bigcup_{i=1}^{\infty} \{P \in C \cap \Lambda : \kappa^{i-1}|Q| \le |P| \le \kappa^i |Q|,\ \angle(P, Q) < \theta\} \\ &= \bigcup_{Q \in S} \bigcup_{i=1}^{\lceil \log_\kappa (10^5 g^{\frac{5}{2}}) \rceil} \{P \in C \cap \Lambda : \kappa^{i-1}|Q| \le |P| \le \kappa^i |Q|,\ \angle(P, Q) < \theta\}.\end{aligned}$$

这里，第三个等式是由定理 1.9 中的定量 Vojta 不等式取$\theta =$反余弦 $\left(\sqrt{\frac{1.01}{g}}\right)$得到的。

取 $\kappa = 1.15$。对于每个 $Q \in S$ 和 i，假设我们有两个不同的点

$$P_1, P_2 \in \{P \in C(K) \cap \Lambda : \kappa^{i-1}|Q| \le |P| \le \kappa^i |Q|,\ \angle(P, Q) < \theta\}.$$

记 P_1', P_2' 为 P_1, P_2 在 $Q^\perp = \{x \in V$ 线性空间上的正交投影：$\langle x, Q\rangle = 0\}$。一个简单的估计给出 $\langle P_1', P_2'\rangle < 0$，因此 $\angle(P_1', P_2') > \frac{\pi}{2}$。这一强性质意味着

$$\#\{P \in C \cap \Lambda : \kappa^{i-1}|Q| \le |P| \le \kappa^i |Q|,\ \angle(P, Q) < \theta\} \le A(n-1, \frac{\pi}{2}) \le n.$$

因此，我们得到以下结果。

$$\#(C \cap \Lambda)_{\text{large}} \le \lceil \log_{1.15}(10^5 g^{\frac{5}{2}}) \rceil n A(n, \theta).$$

更多细节请参阅命题 5.4 。

于是，问题归结为给出 $A(n, \theta)$ 的一个良好上界。由体积比较，我们得到一个界

$$A(n, \theta) \le \frac{\text{vol}(S^{n-1})}{\text{vol}(\text{cap}(P, \theta/2))}.$$

当 θ 接近 $\pi/2$ 时，这个界大致按$(\sqrt{2})^n$ 增长，对于我们将 Vojta 常数设为接近 1 的目的而言，这个界太大了。

我们还有另外两种方法来寻求 $A(n, \theta)$ 的更强上界。第一种方法由 Rankin 提出[Ran55，定理 2],最终可得

$$\#(C \cap \Lambda)_{\text{large}} \le 3.4 \cdot 10^6 g^2 \left(1 + \frac{5}{4\sqrt{g}}\right)^{n-1}.$$

第二种方法由 Kabatjanskiĭ–Levenšteĭn [KL78], 提出，该方法更加精细，最终可得

$$\#(C \cap \Lambda)_{\text{large}} \le 2.4 \cdot 10^4 g^8 \left(1 + \frac{3 \log g}{g}\right)^{n-1}$$

对于 $g \ge 142$。这解释了定理1.2的证明，也说明了 Vojta 常数的由来

$$c_2(g) = \min\left\{1 + \frac{5}{4\sqrt{g}}, 1 + \frac{3 \log g}{g}\right\}.$$

本文主体分为两部分：第一部分讨论算术估计，第二部分讨论解析估计。到目前为止，我们已经概述了第一部分的主要思想。另一方面，第二部分证明了第一部分所需的三个估计，这些估计可见于第一部分或第二部分的第一段。在本节余下部分，我们将概述定理1.12的证明思路；这是三个估计中最困难的一个。另两个估计的证明采用类似的策略。

1.6 双曲曲面的最短闭测地线长度

现在我们开始概述定理 1.12 的证明。为此，我们将注意力限制在亏格为 C 的光滑射影曲线 $g \geq 2$ 上，其中 $\mathbb{C}$，即亏格为 $g \geq 2$ 的紧黎曼曲面。于是

$$G_a = G_{\mathrm{Ar}} : C^2 \setminus \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$$

就是 C 上的 Arakelov Green 函数。我们有 Zhang 的 φ-不变量

$$\varphi(C) = -\int_{C^2} G_{\mathrm{Ar}}\, c_1(\Delta, G_{\mathrm{Ar}})^{\wedge 2}$$

以及 Faltings–Elkies 不变量

$$\mathrm{FE}(n, C) = \inf_{P_1,\ldots,P_n \in C} \sum_{1 \leq i < j \leq n} G_{\mathrm{Ar}}(P_i, P_j).$$

由于目前尚不清楚 $\varphi(C)$ 与 $\mathrm{FE}(C)$ 之间是否存在直接联系，我们的估计策略分两步进行：先给出 $\varphi(C)$ 的下界，再给出 $\mathrm{FE}(n,\ C)$ 的下界。关键思路是将这两个不变量都与某个几何量联系起来，作为中间桥梁。现在我们来引入这个几何量。

设 C 是一个亏格为 $g \geq 2$ 、定义在 $\mathbb{C}$ 上的光滑射影曲线。则 C 上存在唯一的 K¨ahler 度量 μ_{KE}，其曲率为常数 -1。由于 $\dim C = 1$，我们将 K¨ahler 度量 μ 与其对应的体积形式和测度等同。令 $\mathrm{sys}(C)$ 表示 $(C,\ \mu_{\mathrm{KE}})$ 的最短闭测地线长度，即最短的非平凡闭测地线的长度。我们将使用以下量

$$\max\left\{\mathrm{sys}(C)^{-1}, 1\right\}$$

作为中间量。

虽然我们的估计并非特别需要这一点，但了解最短闭测地线长度随 C 变化时的行为，有助于我们理解最终结果。考虑亏格为 g 、定义在 $\mathbb{C}$上的曲线的粗模空间概形$\mathcal{M}_{g,\mathbb{C}}$ 。我们有一个函数

$$\mathrm{sys} : \mathcal{M}_{g,\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \longrightarrow (0, \infty), \quad C \longmapsto \mathrm{sys}(C).$$

该函数在 $\mathcal{M}_{g,\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ 上关于欧几里得拓扑是连续的。另请参见 ¨中 Teichmüller 理论的构造$\mathcal{M}_{g,\mathbb{C}}$，见 [HM98 第 2.C 节]。当 C 趋近模空间的边界时，最短闭测地线长度 $\mathrm{sys}(C)$ 收敛于 0。

下面的估计表明，除去仅依赖于 g的常数因子，我们可以用不变量 $\max\left\{\mathrm{sys}(C)^{-1}, 1\right\}$ 来界定 φ-不变量$\varphi(C)$。

定理 1.13 (结合定理 9.19 和推论11.6)。 设 C 是亏格为 $g \geq 2$的紧黎曼曲面。那么

$$10^{-7} g^{-\frac{5}{3}} \cdot \max\left\{\mathrm{sys}(C)^{-1}, 1\right\} \leq \varphi(C) \leq 10^{6} g^{5} \cdot \max\left\{\mathrm{sys}(C)^{-1}, 1\right\}.$$

为了从抽象层面理解该定理，考虑函数

$$\varphi : \mathcal{M}_{g,\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \longrightarrow (0, \infty), \quad C \longmapsto \varphi(C).$$

它是光滑的，并且当 C 趋近模空间的边界时趋于无穷大（呈对数增长）。这些事实可由 φ 作为阿代尔除子的解释得出，见 [Yua24，§3.2。3], 以及证明

见 [Yua24，定理 3。10]，其中考察了边界行为。随后同上引文得出 $\varphi(C) \geq c_0(g)$，其中某个隐常数为 $c_0(g) > 0$，这是由紧致性得到的。现在，我们可以将该定理视为模空间上两个连续函数的比较。值得注意的是，该定理中的界 $\varphi(C) \geq 10^{-7} g^{-\frac{5}{3}}$ 给出了 $c_0(g)$ 的有效表达式。

定理 1.13 中的上界比较容易得到。它由最短闭测地线长度与拉普拉斯算子的特征值之间的比较，以及比较 L^∞范数和 L^2 全纯截面范数的标准估计推出。这部分论证的思路与泊松方程的经典L^2 估计类似。我们还指出，定理 1.13中的上界在本文后续部分不会用到。

然而，定理 1.13中的下界在我们的分析中起着核心作用。论证受到 Tian 在 [Tia90a、Tia90b、Tia13、Tia15、Zho24], 中提出的峰截面方法、Ma–Marinescu 关于伯格曼核局部化的研究 [MM07], , 以及 Buser–Sarnak 建立的环路与调和 1-形式之间的关系 [BS94]启发。

我们还需要以下结果，它给出了 Faltings–Elkies 不变量关于最短闭测地线长度的界。

命题 1.14 (命题 10.10)。 设 C 是亏格为 $g \geq 2$的紧黎曼曲面。那么

$$\mathrm{FE}(n, C) \geq -\frac{1}{4} n \log n - 400\pi^3 (g-1)^3 \cdot \max\left\{\mathrm{sys}(C)^{-1}, 1\right\} \cdot n.$$

结合定理 1.13 与命题 1.14，我们可以得到一个定理 1.12形式的结果。通过引入一些额外的精细处理，我们可以改进定理 1.12中的常数。下面我们概述定理 1.13 和命题 1.14的证明。

1.7 φ-不变量的估计

现在我们概述定理 1.13中下界的证明。为清晰起见，我们仅勾勒出导出如下形式估计的主要思路 $\varphi(C) \geq c(g) \cdot \max\left\{\mathrm{sys}(C)^{-1}, 1\right\}$ 其中常数 $c(g) > 0$。稍后将给出一个完整证明，并改进 $c(g)$的取值。

我们首先引入 Zhang 的 φ-不变量的一个更易于分析的下界。该下界利用 Zhang 的 φ-不变量的势论表达式导出（参见命题 9.2），我们将其视为 Zhang 原始公式的一种解析重述（参见命题 9.1）。

Le取 $\{\alpha_j\}_{j=1}^g$ 为关于 L^2 内积的 L^2-正交规范基，属于 $\Gamma(C, \omega_C)$ t

$$\langle \alpha, \alpha' \rangle = \frac{i}{2} \int_C \alpha \wedge \bar{\alpha}',$$

ω_C 表示 C的典范丛。阿拉克洛夫 K¨ahler 度量定义为

$$\mu_{\mathrm{Ar}} = \frac{i}{2g} \sum_{k=1}^{g} \alpha_k \wedge \bar{\alpha}_k,$$

且与基的选取无关。根据泊松方程的标准理论，对于每个 j，存在唯一的光滑 $\mathbb{R}$-值函数 $\mathfrak{u}_j$，定义在 C 上并满足

$$dd^c \mathfrak{u}_j = i\alpha_j \wedge \bar{\alpha}_j - 2\mu_{\mathrm{Ar}}, \quad \int_C \mathfrak{u}_j \mu_{\mathrm{Ar}} = 0,$$

其中 $d^c = \frac{1}{2\pi i}(\partial - \bar{\partial})$ 。于是命题 9.1 给出下界

$$\varphi(C) \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{g} \int_C d\mathfrak{u}_j \wedge d^c \bar{\mathfrak{u}}_j.$$

因此，适当选取 $\Gamma(C, \omega_C)$的 L^2 标准正交基，便可直接得到该φ-不变量的显式下界。

设 $\epsilon = \epsilon(g) \in (0,1)$ 为一小常数，并设 $\gamma_0 \subset C$ 为最短的非平凡闭测地线，其位于 (C, μ_{KE})。我们称 γ_0 为分离的，若其同调类 $[\gamma_0] \in H_1(C;\mathbb{Z})$ 为零。否则，γ_0 为非分离的。由紧曲面分类定理，一条简单闭测地线是分离的，当且仅当它将 C 分成两个连通分支。另见 [AS60，第一章，41A]。

然后我们将模空间分解为

$$\mathcal{M}_{g,\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_{g,\mathrm{thick}}(\epsilon) \cup \mathcal{M}_{g,\mathrm{sep}}(\epsilon) \cup \mathcal{M}_{g,\mathrm{nsep}}(\epsilon),$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{g,\mathrm{thick}}(\epsilon) &= \{C \in \mathcal{M}_{g,\mathbb{C}}(\mathbb{C}) : \mathrm{sys}(C) \geq \epsilon\},\\
\mathcal{M}_{g,\mathrm{sep}}(\epsilon) &= \{C \in \mathcal{M}_{g,\mathbb{C}}(\mathbb{C}) : \mathrm{sys}(C) \leq \epsilon, \text{ and } \gamma_0 \subset C \text{ is separating}\},\\
\mathcal{M}_{g,\mathrm{nsep}}(\epsilon) &= \{C \in \mathcal{M}_{g,\mathbb{C}}(\mathbb{C}) : \mathrm{sys}(C) \leq \epsilon, \text{ and } \gamma_0 \subset C \text{ is non-separating}\}.
\end{aligned}$$

我们分别称这些为厚部、分离情形和非分离部分。和之前一样，我们不区分曲线 C 与相应的复点 $\mathcal{M}_{g,\mathbb{C}}$。这一分解将证明归结为证明存在正实常数 $\epsilon_1(g)$ $\epsilon_2(g)$ $\epsilon_3(g)$，使得

$$\varphi \geq \epsilon_1 \text{ on } \mathcal{M}_{g,\mathrm{thick}}(\epsilon), \quad \varphi \geq \frac{\epsilon_2}{\mathrm{sys}(C)} \text{ on } \mathcal{M}_{g,\mathrm{sep}}(\epsilon), \quad \varphi \geq \frac{\epsilon_3}{\mathrm{sys}(C)} \text{ on } \mathcal{M}_{g,\mathrm{nsep}}(\epsilon).$$

现在我们分别分析每种情形。下文将概述论证并强调主要思路，同时略去一些技术性细化，这些细化将在本文后文的完整证明中给出。

厚部

假设 $C \in \mathcal{M}_{g,\mathrm{thick}}(\epsilon)$。由于 C 是紧的，函数 $\frac{\mu_{\mathrm{Ar}}}{\mu_{\mathrm{KE}}}$ 在某个点 $x \in C$ 处达到最大值。此外，一个经典论证（另见引理 7.21）表明存在一个截面 $\alpha \in \Gamma(C, \omega_C)$，使得

$$\frac{i}{2}\int_C \alpha \wedge \bar{\alpha} = 1, \quad \text{and} \quad \frac{i}{2}\alpha \wedge \bar{\alpha}(x) = \sup_C \left|\frac{g\mu_{\mathrm{Ar}}}{\mu_{\mathrm{KE}}}\right| \mu_{\mathrm{KE}}(x).$$

通过一个酉变换 我们可以假设 L^2-正交归一基 $\{\alpha_j\}_{j=1}^g$ 满足 $\alpha_1 = \alpha$.

设 $(\mathbb{D}, \mu_{\mathbb{D}})$ 为庞加莱圆盘。那么存在一个万有覆盖映射 $\rho : \mathbb{D} \to C$，使得 $\rho(0) = x$ 且 $\rho^*\mu_{\mathrm{KE}} = \frac{4\mu_{\mathrm{Euc}}}{(1-|z|^2)^2} = \mu_{\mathbb{D}}$，其中 z 是 $\mathbb{D}$ 上的标准坐标，而 $\mu_{\mathrm{Euc}} = \frac{idz\wedge d\bar{z}}{2}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的标准欧氏凯勒度量。另见定理 7.2。

设 f 是 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数，满足 $\rho^*\alpha = f(z)dz$。令 $\tilde{\mathfrak{u}}_1 = \rho^*\mathfrak{u}_1$，并定义径向平均 $\tilde{\mathfrak{u}}_{1,\mathrm{radial}}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{\mathfrak{u}}_1(ze^{i\theta})d\theta$。根据定义，

$$|f(0)|^2 = \frac{i\rho^*(\alpha\wedge\bar{\alpha})(0)}{2\mu_{\mathrm{Euc}}(0)} = \frac{2i\alpha\wedge\bar{\alpha}(x)}{\mu_{\mathrm{KE}}(x)} = 4g\sup_C\left|\frac{\mu_{\mathrm{Ar}}}{\mu_{\mathrm{KE}}}\right| \geq 4g\frac{\mu_{\mathrm{Ar}}(C)}{\mu_{\mathrm{KE}}(C)} = \frac{4g}{4\pi(g-1)} > \frac{1}{\pi}.$$

此外，

$$dd^c\tilde{\mathfrak{u}}_1 = i|f|^2 dz\wedge d\bar{z} - 2\rho^*\mu_{\mathrm{Ar}} \geq 2|f|^2\mu_{\mathrm{Euc}} - \frac{|f(0)|^2}{4g}\rho^*\mu_{\mathrm{KE}} \geq \left(2|f|^2 - \frac{|f(0)|^2}{g(1-|z|^2)^2}\right)\mu_{\mathrm{Euc}}.$$

由于 f 是全纯的，函数 $|f|^2$ 是次调和的，并满足平均值不等式。取径向平均可得

$$dd^c\tilde{\mathfrak{u}}_{1,\mathrm{radial}}(z) \geq \left(2 - \frac{1}{g(1-|z|^2)^2}\right)|f(0)|^2\mu_{\mathrm{Euc}} > |f(0)|^2\mu_{\mathrm{Euc}} > \frac{1}{\pi}\mu_{\mathrm{Euc}}, \quad \forall |z| \leq \frac{1}{10}.$$

由径向函数 $\tilde{\mathfrak{u}}_{1,\mathrm{radial}}$ 的拉普拉斯不等式，我们得到

$$\int_{\mathbb{D}_{\frac{1}{10}}} d\tilde{\mathfrak{u}}_{1,\mathrm{radial}}\wedge d^c\tilde{\mathfrak{u}}_{1,\mathrm{radial}} \geq \int_{\mathbb{D}_{\frac{1}{10}}} \frac{1}{4}d|z|^2\wedge d^c|z|^2 = \frac{1}{40000}.$$

由厚薄分解和柯西–施瓦茨不等式，我们得到

$$\varphi(C) > \frac{1}{2}\int_C d\mathfrak{u}_1 \wedge d^c\bar{\mathfrak{u}}_1 > \frac{5\cdot \mathrm{sys}(C)}{2+10\cdot \mathrm{sys}(C)}\int_{\mathbb{D}_{\frac{1}{10}}} d\tilde{\mathfrak{u}}_1 \wedge d^c\bar{\tilde{\mathfrak{u}}}_1 \geq \frac{5\cdot \mathrm{sys}(C)}{2+10\cdot \mathrm{sys}(C)}\int_{\mathbb{D}_{\frac{1}{10}}} d\tilde{\mathfrak{u}}_{1,\mathrm{radial}} \wedge d^c\bar{\tilde{\mathfrak{u}}}_{1,\mathrm{radial}}.$$

其中第二个不等式由引理 7.8 得出。因此 $\varphi(C) > 10^{-6}\epsilon$。

分离情形

假设 $C \in \mathcal{M}_{g,\mathrm{sep}}(\epsilon)$。由于 γ_0 是分离的， $C \setminus \gamma_0$ 有两个连通分支，记为 C_1 和 C_2。存在一个光滑的 $\mathbb{R}$值函数 η，定义在 C 上，使得 $0 \leq \eta \leq 1$,

$$\int_C d\eta \wedge d^c\eta \leq \mathrm{sys}(C),$$

and

$$\sum_{j=1}^{g}\left(i\int_{C_1}|\eta|\alpha_j \wedge \bar{\alpha}_j + i\int_{C_2}|\eta-1|\alpha_j \wedge \bar{\alpha}_j\right) \leq 10^{-10}g^{-10}.$$

构造这样的截断函数 η 是标准的（参见 [Bus92，定理 8.1。3]），其依据是这样一个事实：当 γ_0 是分离的时，阿拉克洛夫测度 μ_{Ar} 在 γ_0的某个邻域内一致地很小。另见命题 7.16。

利用此函数 η 和柯西–施瓦茨不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\varphi(C) &\geq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{g}\int_C d\mathfrak{u}_j \wedge d^c\bar{\mathfrak{u}}_j \geq \frac{\sum_{j=1}^{g}\left|\int_C d\eta \wedge d^c\mathfrak{u}_j\right|^2}{2\int_C d\eta \wedge d^c\eta}\\ &\geq \frac{1}{2\cdot \mathrm{sys}(C)}\sum_{j=1}^{g}\left|\int_C \eta dd^c\mathfrak{u}_j\right|^2 = \frac{1}{2\cdot \mathrm{sys}(C)}\sum_{j=1}^{g}\left|\int_C \eta(i\alpha_j \wedge \bar{\alpha}_j - 2\mu_{\mathrm{Ar}})\right|^2.\end{aligned}$$

因此，为了得到 $\varphi(C)$ 的一致下界，只需构造一个全纯 1-形式 $\alpha \in \Gamma(C,\omega_C)$，满足 $\frac{i}{2}\int_C \alpha\wedge\bar{\alpha} = 1$，使得量 $\left|\int_C \eta(i\alpha \wedge \bar{\alpha} - 2\mu_{\mathrm{Ar}})\right|$ 有一个仅依赖于 g的正实常数下界。

由于 γ_0 是一条简单闭测地线，高斯–博内公式蕴含 C_1 和 C_2 都具有正亏格。取一条光滑闭路$\mathbf{c}_0 \subset C_1$，其同调类 $[\mathbf{c}_0] \in H_1(C;\mathbb{Z})$非零。由庞加莱对偶性，令 β 为代表与 $[\mathbf{c}_0]$对偶的上同调类的调和 1-形式。

由于 γ_0 是一条分离的短闭测地线，存在一个光滑闭 1-形式 β'，它与 β上同调，支集包含于 C_1，使得

$$\int_C \beta' \wedge \star\beta' \leq \int_{C_1}\beta\wedge\star\beta + \epsilon_2'(g,\epsilon)\int_C \beta\wedge\star\beta,$$

其中 ϵ_2' 是一个仅依赖于 g 和 ϵ的显式函数，且 $\epsilon_2'(g,\epsilon) \to 0$ 当 $\epsilon \to 0$ 对每个固定的 $g \geq 2$成立。注意，上同调类由其沿圈的积分决定；特别是，可以通过适当的环路 $\mathbf{c}_1$验证这一点。参见图 1。这里我们再次利用阿拉克洛夫测度 μ_{Ar} 在 γ_0的某个邻域内一致地很小这一事实。由调和形式的 L^2-极小性（另见引理 7.22），我们得到

$$\int_{C_2}\beta\wedge\star\beta \leq \epsilon_2'(g,\epsilon)\int_C \beta\wedge\star\beta,$$

其中， $\star$ 表示霍奇 $\star$算子。

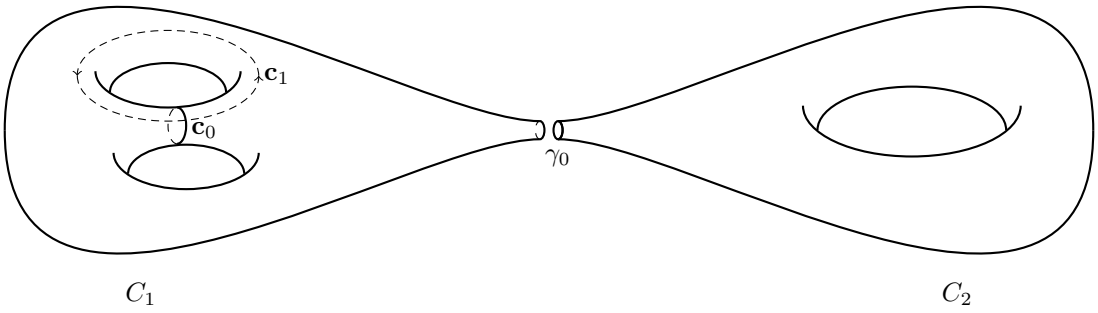

图 1：分离短测地线 γ_0 与环路 $\mathbf{c}_0$,$\mathbf{c}_1$

令 $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\int_C \beta\wedge\star\beta}}(\beta + i\star\beta)$。则 $\frac{i}{2}\int_{C_1}\alpha\wedge\bar{\alpha} = 1$，且 $\frac{i}{2}\int_{C_2}\alpha\wedge\bar{\alpha} \le \epsilon_2'$，这意味着

$$\mu_{\mathrm{Ar}}(C_j) \ge (1-\epsilon_2')g^{-1}, \quad j = 1, 2.$$

利用涉及 η 的第二个不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\left|\int_C \eta(i\alpha_1\wedge\bar{\alpha}_1 - 2\mu_{\mathrm{Ar}})\right| &\ge \left|\int_{C_2}(2\mu_{\mathrm{Ar}} - i\alpha_1\wedge\bar{\alpha}_1)\right| - 10^{-8}g^{-8} \\ &\ge 2\mu_{\mathrm{Ar}}(C_2) - 10^{-8}g^{-8} - 2\epsilon_2' \ge 2g^{-1} - 10^{-8}g^{-8} - 2\epsilon_2',\end{aligned}$$

从而得到一个 仅依赖于 g的严格正下界，因此 ϵ_2 的存在性得以证明 .

非分离部分

假设 $C \in \mathcal{M}_{g,\ \mathrm{nsep}}(\epsilon)$。通过与厚部相同的论证，存在一个显式常数$c'(g) > 0$，它仅依赖于 g，使得

$$\varphi(C) \ge c'(g)\cdot \mathrm{sys}(C)\cdot \sup_C \left|\frac{\mu_{\mathrm{Ar}}}{\mu_{\mathrm{KE}}}\right|^2.$$

尚需证明量 $\mathrm{sys}(C)\cdot\sup\left|\frac{\mu_{\mathrm{Ar}}}{\mu_{\mathrm{KE}}}\right|$ 具有仅依赖于 g 的严格正下界。设 γ_0 为 C 上最短的非分离闭测地线。根据 μ_{Ar} 的定义，对于满足 $\frac{i}{2}\int_C \alpha\wedge\bar{\alpha} = 1$ 的 $\alpha \in \Gamma(C, \omega_C)$，我们有

$$\sup_C \left|\frac{\mu_{\mathrm{Ar}}}{\mu_{\mathrm{KE}}}\right| \ge \sup_C \left|\frac{i\alpha\wedge\bar{\alpha}}{2g\cdot\mu_{\mathrm{KE}}}\right| \ge \frac{2\pi^2}{2g\cdot\mathrm{sys}(C)^2}\cdot\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_0}\alpha\right|^2.$$

因此，只需构造一个满足 $\frac{i}{2}\int_C \alpha\wedge\bar{\alpha} = 1$ 的全纯 1-形式 α，使得量 $\frac{1}{\mathrm{sys}(C)}\cdot\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_0}\alpha\right|^2$ 具有仅依赖于 g 的严格正下界。

令 β 为表示庞加莱对偶的 γ_0调和形式。由引理 7.22，所需的下界可归结为对以下量求下界

$$\frac{1}{\mathrm{sys}(C)}\cdot\int_C \beta\wedge\star\beta.$$

思路是，如果这个量太小，就可以构造一个回路 $\mathbf{c}$ ，使其与 γ_0 的交数非零，但 $\int_{\mathbf{c}}\beta$ 的绝对值小于 1，这与 β 作为 γ_0的庞加莱 对偶的定义性质矛盾。令 $\mathbf{c}_0$ 为满足 $[\gamma_0]\cap[\mathbf{c}_0]\neq 0$的最短测地环。见图 2。

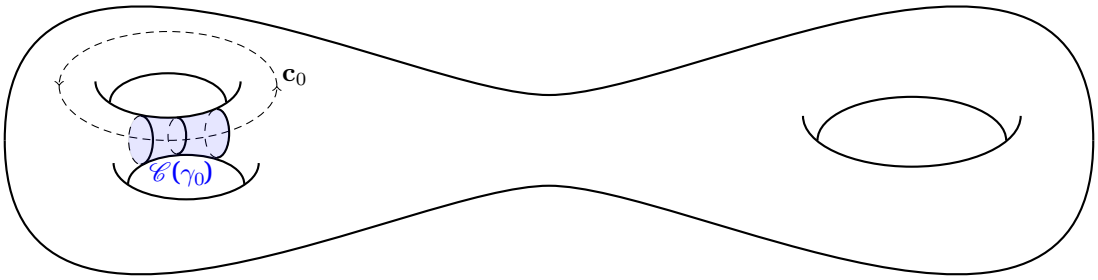

图 2：领圈 $\mathscr{C}(\gamma_0)$ 与环 $\mathbf{c}_0$

将领圈定理与 Cheeger–Colding 线段不等式相结合（参见定理 9.13），我们得到一条分段光滑环 $\mathbf{c}_{\gamma_0}$，它同伦于 $\mathbf{c}_0$，使得

$$\left|\int_{\mathbf{c}_{\gamma_0}}\beta\right| \leq \frac{c''(g)}{\sqrt{\operatorname{sys}(C)}}\cdot\sqrt{\int_C \beta\wedge\star\beta},$$

其中 $c''(g)$ 是仅依赖于 g的常数。注意，我们先前关于 β 的小性条件涉及实曲面上的积分，而此处我们关心的是沿一条实曲线所取的积分。根据可视为 Fubini 定理之类似结果的 Cheeger–Colding 线段不等式，我们沿一条适当的扰动曲线 $\mathbf{c}_{\gamma_0}$ （即 $\mathbf{c}_0$ 的扰动）积分，从而得到所需的估计。见图 3。

由于 $\mathbf{c}_{\gamma_0}$ 接近 $\mathbf{c}_0$，，它与 γ_0 具有和 $\mathbf{c}_0$ 相同的非零交数。因此，

$$\int_C \beta\wedge\star\beta \geq \frac{\operatorname{sys}(C)}{c''(g)^2}\left|\int_{\mathbf{c}_{\gamma_0}}\beta\right|^2 \geq \frac{\operatorname{sys}(C)}{c''(g)^2}.$$

因此存在一个常数 ϵ_3。

结合　对 ϵ_1、 ϵ_2和 ϵ_3的估计，我们得到 $\varphi(C)$在定理1.1中的下界　3.

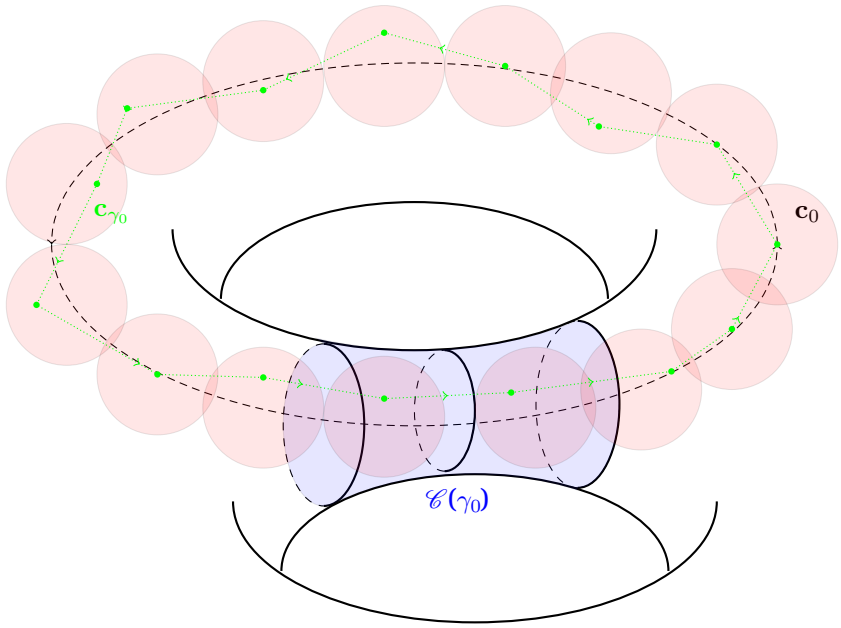

图 3：分段光滑环的构造 $\mathbf{c}_{\gamma_0}$

1.8 Faltings–Elkies 不变量的估计

现在我们概述命题1.14的证明。受 Autissier [Aut01，命题 3.2.5] 以及法尔廷斯–埃尔基斯（参见 [Lan88，定理 5.1]）等工作的启发，我们证明命题1.14 的关键想法是将 Arakelov Green 函数改写为涉及双曲几何数据的函数，具体做法是将双曲热核与凯¨勒势作卷积，而该势是阿拉克洛夫凯¨勒微分形式的势。

根据定义　　对于 C 上两两不同的点 $P_1,\dots,P_n$，要证明 w.....，只需证明 FE(n, C)　　e have

$$\sum_{1\le j<k\le n} G_{\mathrm{Ar}}(P_j,P_k) \ge -\frac{401}{4}n\log n - \frac{401}{4}n\log n - \frac{400\pi^3(g-1)^3\max\{1,\mathrm{sys}(C)\}}{\mathrm{sys}(C)}n.$$

回忆一下，G_{Ar} 是与阿拉克洛夫测度 μ_{Ar} 相关联的格林函数。

我们的策略是将其化归为一个涉及双曲测度的估计 μ_{KE} 和 μ_{hyp} $=4\pi^{\ 1}{}_{(g-1)}\mu_{\mathrm{KE}}$。注意 $\mu_{\mathrm{hyp}}(C)$ $=\mu_{\mathrm{Ar}}(C)$ $=1$。作为一个简单的事实（参见定理10.1），存在唯一的$\mathbb{R}$值光滑函数 ψ_{Ar} 在 C上，使得

$$G_{\mathrm{Ar}}(x,y) - G_{\mathrm{hyp}}(x,y) = \psi_{\mathrm{Ar}}(x) + \psi_{\mathrm{Ar}}(y),$$

其中，G_{hyp} 是与双曲测度 μ_{hyp}相关联的格林函数。

遵循标准论证的开 普论证 [Aut01，命题 3.2。5] 以及 Faltings-Elkies 的 [Lan88，定理 5。1], 应用热方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_{\mathrm{hyp}}u = 0$$

从而可推导出，对于任意 $t>0$,

$$\sum_{1\le j<k\le n} G_{\mathrm{Ar}}(P_j,P_k) \ge -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} G_{\mathrm{hyp}}(P_j,P_j;t) - \frac{n(n-1)t}{2}\left(1+\sup_C\left|\frac{\mu_{\mathrm{Ar}}}{\mu_{\mathrm{hyp}}}-1\right|\right),$$

其中 $G_{\mathrm{hyp}}(x,y;\,t)$ 表示满足 L^2 意义下初始数据 $\lim_{t\to 0^+} G_{\mathrm{hyp}}(x,y;t) = \delta_{\mathrm{hyp}}(x,y)$ 的双曲热方程的解。

设 $t = \frac{1}{40n^{(g-1)}}$。根据局部论证，项 $n^{(n-1)}\exp\left(t\left(1+\sup_C\left|\frac{\mu_{\mathrm{Ar}}}{\mu_{\mathrm{hyp}}}-1\right|\right)\right)$ 有如下形式的下界：$-c'(g)n\cdot \mathrm{sys}(C)^{-1}$，其中 $c'(g)>0$ 是一个仅依赖于 g 的常数。因此，只需估计量 $-n\sup_{x\in C} G_{\mathrm{hyp}}(x,x;t)$。

我们将 $G_{\mathrm{hyp}}(x,x;\,t)$ 按特征函数 $\phi_{\mathrm{hyp},0},\phi_{\mathrm{hyp},1},\phi_{\mathrm{hyp},2},\cdots$ 展开，其中 $\phi_{\mathrm{hyp},l}$ 是双曲拉普拉斯算子的特征函数，对应于特征值 $\lambda_{\mathrm{hyp},l}$，且 $\lambda_{\mathrm{hyp},0}=0$ 和 $\phi_{\mathrm{hyp},0}=1$。于是

$$G_{\mathrm{hyp}}(x,x;t) = \sum_{0<\lambda_{\mathrm{hyp},l}\le\frac{g-1}{5}} \frac{e^{-t\lambda_{\mathrm{hyp},l}}|\phi_{\mathrm{hyp},l}(x)|^2}{\lambda_{\mathrm{hyp},l}} + \sum_{\lambda_{\mathrm{hyp},l}>\frac{g-1}{5}} \frac{e^{-t\lambda_{\mathrm{hyp},l}}|\phi_{\mathrm{hyp},l}(x)|^2}{\lambda_{\mathrm{hyp},l}},$$

因此，所需的估计相应地分为两部分。

对于第一项，根据 Otal–Rosas 的定理 [OR09, Th´eor`eme 2], if $\lambda_{\mathrm{hyp},l}\le\frac{g-1}{5}$, then $l\le 2g-3$.因此，可以通过如下形式的估计来控制这一项:

$$\frac{1}{\lambda_{\mathrm{hyp},1}} \le \frac{c''(g)}{\mathrm{sys}(C)},$$

其中 $c''(g)>0$ 是一个仅依赖于 g 的常数。Schoen–Wolpert–Yau 已证明了这样的估计[SWY80]；之后 Wu–Xue 对其作了改进 [WX22a]。事实上，Schoen–Wolpert–Yau 和 Wu–Xue 的估计更强：右侧可以取为将 C 分成两个分支的分离多重曲线的最小总长度的倒数。此外，Wu–Xue 的估计在绝对常数因子意义下是最优的。我们还将利用共形扰动和 Cheeger 不等式给出一个新的证明（见命题 8.10）。

对于第二项，我们使用双曲热核 $K_{\mathrm{hyp}}(x,\ y;t)$。根据定义，

$$G_{\mathrm{hyp}}(x,x;2t) - G_{\mathrm{hyp}}(x,x;t) = \int_t^{2t} K_{\mathrm{hyp}}(x,y;\varsigma)d\varsigma,$$

因此，积分 $\int_t^{2t} K_{\mathrm{hyp}}(x,\ y;\varsigma)d\varsigma$ 为第二项提供了一个上界。因此，第二项所需的估计可由双曲热核的一个上界推出。

1.9 记号与术语

对于实数 x，记 $\lfloor x\rfloor$ 为不大于 x 的最大整数，并记 $\lceil x\rceil$ 为不小于 x 的最小整数。

对于阿贝尔群 M，我们记 $M_{\mathbb{Q}}=M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$、$M_{\mathbb{R}}=M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ 和 $M_{\mathbb{C}}=M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$。$M$ 的秩为 $\mathrm{rk}(M)=\dim_{\mathbb{Q}}(M_{\mathbb{Q}})$。

域上的簇 是指在该域上有限型的分离整概形。域上的曲线是指在该域上维数为 1 的光滑、射影且几何连通的簇。

我们通常以加法形式表示线丛的张量积。例如，$aL-bM$ 表示线丛 L，M 以及整数 a，b。

致谢

本文受到 Vojta、Dimitrov–Gao–Habegger、K¨uhne、Looper–Silverman–Wilms 和 Yuan 关于一致莫德尔猜想的先前研究的启发。作者感谢 Pascal Autissier 分享他的想法，帮助改进了本文早期稿件中的若干估计。作者还感谢 Ziyang Gao、Yuxin Ge、Henri Guenancia、Philipp Habegger、George Marinescu、田刚、Rafael von Kanel、Yuanqi Wang、Yunhui Wu 和 Junyi Xie 在本文准备过程中提供的有益交流与评论。

第二作者还要感谢新基石科学基金会的 XplorerPrize 资助、国家自然科学基金委员会的 12250004号和12321001号资助，以及中俄数学中心的支持。

第三作者得到 LabEx CIMI 的资助。他还感谢北京大学北京国际数学研究中心的款待，本文的部分工作是在那里完成的。

第一部分

算术估计

本部分由本文的算术论证组成。本节的主要目标是证明定理 1.2 （或等价地，定理 5.1）中的定量莫德尔猜想。本部分的论述依赖于三个解析结果：定理 3.5、定理 3.9以及定理 3.10。本文第二部分将证明这三个解析结果。

2 算术交叉理论预备知识

本节回顾　　一些关于高度和算术交叉理论的预备术语与结果　　.

2.1 N´eron–Tate 高度

所谓域上的簇，是指在该域上有限型且分离的整概形。下面简要回顾射影簇上的魏尔高度以及阿贝尔簇上的 N´eron–Tate 高度的定义。关于详细介绍，请参阅 [Ser97、HS00、BG06]。

魏尔高度

设 K 为一个数域。记 M_K 为 K的赋值集合。记 $M_{K,\infty}$ （分别为 $M_{K,f}$） K的阿基米德赋值（分别为非阿基米德赋值）集合。对于 K的任意赋值 v，在完备化 K_v 上按如下方式规范化绝对值 $|\cdot|_v$。

(1) 若 v 是阿基米德赋值，则取 $|\cdot|_v$ 为 $K_v \cong \mathbb{R}$， $\mathbb{C}$上的通常绝对值;

(2) If v is a non-archimedean place, set $|a|_v = \left(\#(O_{K_v}/aO_{K_v})\right)^{-1}$ for any $a \in O_{K_v}$.

这些赋值满足乘积公式

$$\prod_{v \in M_K} |a|_v^{\epsilon_v} = 1, \quad \forall\, a \in K^\times.$$

这里，对于所有实数域或非阿基米德赋值 v， $\epsilon_v = 1$；对于所有复位 v， $\epsilon_v = 2$.

令 $\mathbb{P}^n$ 为 K上的 n 维射影空间。标准高度函数 $h\colon \mathbb{P}^n(K) \to \mathbb{R}$ 定义为

$$h(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{[K' : \mathbb{Q}]} \sum_{w \in M_{K'}} \epsilon_w \log \max\{|x_0|_w, |x_1|_w, \cdots, |x_m|_w\},$$

其中 K' 是一个有限 扩张，包含所有坐标 x_i。根据乘积公式，它不依赖于所选的　　e 齐次坐标　　由乘积公式给出。

令 X 为 K上的射影簇， L 为 X上的一个丰富线丛。令 $i\colon X \to \mathbb{P}^n$ 为任意态射，使得对于某个正整数 $e \geq 1$, 有 $i^*\mathcal{O}(1) \cong L^{\otimes e}$。我们得到一个高度函数

$$h_{L,i} = \frac{1}{e} h \circ i : X(\overline{K}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

作为 i 的复合： $X(K) \to \mathbb{P}^n(K)$ 和 $\frac{1}{e}h\colon \mathbb{P}^n(K) \to \mathbb{R}$。它取决于 d 和 i 的选择。

更一般地，设 L 是 X 上的任意线丛。我们总可以将 $L = A_1 \otimes A_2^{\otimes(-1)}$ 写成 X 上的两个丰富线丛 A_1 和 A_2。对于 $k = 1, 2$，设 $i_k\colon X \to \mathbb{P}^{n_k}$ 是满足某个正整数 e_k 使得 $i_k^*\mathcal{O}(1) = A_k^{\otimes e_k}$ 的任意两个态射。我们得到一个高度函数

$$h_{L,i_1,i_2} = h_{A_1,i_1} - h_{A_2,i_2} : X(\overline{K}) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

它取决于 $(A_1,\ A_2,\ i_1,\ i_2)$ 的选择。不过，以下结果表明，它在相差有界函数的意义下是唯一的。

定理 2.1（Weil 高度机器）。 上述构造 $L \mapsto h_{L,\ i_1,\ i_2}$ 给出了一个群同态

$$\mathcal{H} : \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \frac{\{\text{functions } \phi : X(\overline{K}) \to \mathbb{R}\}}{\{\text{bounded functions } \phi : X(\overline{K}) \to \mathbb{R}\}}.$$

定理中属于类 $\mathcal{H}(\overline{L})$ 的函数 $h_L :\ X(K) \to \mathbb{R}$ 称为与 L 相关联的*Weil* 高度函数 。

阿贝尔簇上的 N´eron–Tate 高度

设 A 是数域 K 上的阿贝尔簇。记 $[m] : A \to A$ 为整数m的乘法映射。设 L 是 A 上的对称丰沛线丛。若 $[-1]^*L \cong L$，则称 L 对称，这蕴含对于所有整数 $m,\ [m]^*L \cong L^{\otimes(m^2)}$。令 $h_L :\ A(K) \to \mathbb{R}$ 为与 L 相关联的任意 Weil 高度函数。与 L 相关联的*N´eron–Tate* 高度函数 （或典范高度函数）

$$\hat{h}_L : A(\overline{K}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

由 Tate 极限定义

$$\hat{h}_L(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} h_L(2^n x), \quad x \in A(\overline{K}).$$

一个简单的论证证明了 Weil 高度函数 h_L 的收敛性，且其结果与选择无关。此外， $h_L :\ A(K) \to \mathbb{R}$ 也是与 L 相关的 Weil 高度函数。我们还有以下二次性和正性性质。

定理 2.2. *(1)* 对任意 $x \in A(K)$，高度 $h_L(x) \geq 0$ ，且等号成立当且仅当 x 是挠点。

(2) 函数 $h_L :\ A(K) \to \mathbb{R}$ 是二次的，即满足平行四边形法则

$$\hat{h}_L(x+y) + \hat{h}_L(x-y) = 2\left(\hat{h}_L(x) + \hat{h}_L(y)\right), \quad \forall x, y \in A(\overline{K}).$$

此外，我们有

$$\hat{h}_L(mx) = m^2 \hat{h}_L(x), \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in A(\overline{K}).$$

(3) 由高度函数 $h_L :\ A(K) \to \mathbb{R}$ 通过二次性所诱导的二次型 $h_L :\ A(K) \otimes \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，在实向量空间 $\overline{A}(K) \otimes \mathbb{R}$ 上正定。

记 $A(K)_{\mathbb{R}} = A(K) \otimes \mathbb{R}$。取 A 上的对称丰沛线丛 L 及其关联的 N´eron–Tate 高度 $h(\cdot) = h_L(\cdot)$。为方便起见，我们采用如下正规化

$$\hat{h}(x)_K = [K : \mathbb{Q}] \cdot \hat{h}(x), \quad x \in A(\overline{K})_{\mathbb{R}}.$$

因子 $[K :\ \mathbb{Q}]$将在比较高度与算术交数时带来便利。定义 N´eron–Tate 高度配对

$$\langle x, y \rangle : A(\overline{K})_{\mathbb{R}} \times A(\overline{K})_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

by

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\left(\hat{h}(x+y)_K - \hat{h}(x)_K - \hat{h}(y)_K\right), \quad x, y \in A(\overline{K})_{\mathbb{R}}.$$

该配对的关联范数为

$$|x| := \sqrt{\hat{h}(x)_K}, \quad x \in A(\overline{K})_{\mathbb{R}}.$$

向量 $\angle(x,y)$ 与 $x, y \in A(K)_{\mathbb{R}}$ 之间的角定义为

$$\angle(x,y) := \arccos\left(\frac{\langle x,y\rangle}{|x||y|}\right).$$

如果 $x=0$ 或 $y=0$，则将左边设为 0。

曲线上的 N´eron–Tate 高度

域上的一条曲线 是指该域上的一个维数为 1 的光滑、几何连通射影簇。

设 C 是一个亏格为 $g \geq 2$ 、定义在数域 K 上的曲线。记 J 为 C 在 K 上的雅可比簇。由于乘法映射

$$[2g-2]\colon J(\overline{K}) \longrightarrow J(\overline{K})$$

是满射，存在一个定义在 C_K 上的线丛 α_0，使得 $(2g-2)\alpha_0$ 与典范层 ω 同构。如有必要，将 K 替换为一个有限扩张后，我们可以假设 α_0 实际上是 C 上的一个线丛。此过程不会改变我们对高度的定义。 α_0 的选择也不会改变定义。

考虑阿贝尔–雅可比嵌入

$$i_{\alpha_0} : C \longrightarrow J, \quad x \longmapsto x - \alpha_0.$$

回顾一下， J 上的 theta 除子由下式给出

$$\theta_{\alpha_0} = \underbrace{i_{\alpha_0}(C) + \cdots + i_{\alpha_0}(C)}_{g-1 \text{ copies}}.$$

众所周知， θ_{α_0} 是丰沛的，并给出 J的一个主极化。根据 [Ser97，第 74 页，公式 (1)]， θ_{α_0} 是对称的，即 $[-1]^*\theta_{\alpha_0}$ 与 θ_{α_0}线性等价。它定义了一个 N´eron–Tate 高度函数 $\hat{h} = h_{\theta_{\alpha_0}}$，定义在 $J(K)_{\mathbb{R}}$上。

我们通过嵌入 i_{α_0}： $C \to J$，将 $h(\cdot)$、 $h(\cdot)_K$、$|\cdot|$、 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 以及 $\angle(\cdot,\ \cdot)$ 应用于 $C(K)$。例如，对于 $x \in C(\overline{K})$，我们有

$$\hat{h}(x) = \hat{h}(i_{\alpha_0}(x)) = \hat{h}(x-\alpha_0) = \hat{h}_{\theta_{\alpha_0}}(x-\alpha_0), \quad |x|^2 = \hat{h}(x)_K = [K:\mathbb{Q}]\hat{h}(x).$$

2.2 厄米线丛的交理论

下面介绍由阿拉克洛夫 [Ara74]，、德利涅 [Del87],和吉耶–苏莱´e [GS90]发展出的阿拉克洛夫几何中的一些术语。

设 $\mathcal{X}$ 是一个维数为 $n+1$ 的算术簇，即绝对维数为 $n+1$ 的、定义在 Spec($\mathbb{Z}$) 上的射影平坦整概形。 $\mathcal{X}$ 上的 厄米线丛 是一对 $\mathcal{L} = (\mathcal{L}, \|\cdot\|)$，其中 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{X}$ 上的线丛，而 $\|\cdot\|$ 是复簇 $\mathcal{X}(\mathbb{C})$ 上 $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ 的光滑厄米度量，并且在复共轭下保持不变。如果 $\mathcal{X}(\mathbb{C})$ 是奇异的，则度量的光滑性意味着，该度量在局部等于通过闭嵌入到光滑复流形中所诱导的光滑度量的 拉回。记 Pic($\mathcal{X}$) 为 $\mathcal{X}$ 上厄米线丛的等距类群。

若 $\dim \mathcal{X} = 1$ 和 $\mathcal{X}$ 是正规域，则 $\mathcal{X} = \text{Spec}(O_K)$，其中 O_K是某个数域，而 $\mathcal{L}$ 是一个秩 1 的 O_K-模，厄米度量 $\|\cdot\|$ 则是复直线 $\mathcal{L}_\sigma(\mathbb{C})$上一组度量 $(\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma: K\to\mathbb{C}}$。令$s$ 为 $\mathcal{L}$中的任意非零元素。 $\mathcal{L}$ 的算术度定义为

$$\widehat{\deg}(\mathcal{L}) = \log \#(\mathcal{L}/s\mathcal{L}) - \sum_{\sigma: K\to\mathbb{C}} \log \|s\|_\sigma.$$

I根据乘积公式，t 与 s 的选取无关。算术度 ma p

$$\widehat{\deg}:\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{X})\longrightarrow\mathbb{R}$$

是可加的。

一般而言，设 $\overline{\mathcal{L}}_1,\overline{\mathcal{L}}_2,\cdots,\overline{\mathcal{L}}_{n+1}$ 是 $n+1$ 上的厄米线丛，并设 s_{n+1} 是 $\mathcal{L}_{n+1}$ 上任意一个非零有理截面。算术交数 归纳定义如下：

$$\overline{\mathcal{L}}_1\cdot\overline{\mathcal{L}}_2\cdots\overline{\mathcal{L}}_{n+1}=\overline{\mathcal{L}}_1\cdot\overline{\mathcal{L}}_2\cdots\overline{\mathcal{L}}_n\cdot\mathrm{wdiv}(s_{n+1})-\int_{\mathcal{X}(\mathbb{C})}\log\|s_{n+1}\|c_1(\overline{\mathcal{L}}_1)\wedge\cdots\wedge c_1(\overline{\mathcal{L}}_n).$$

右侧关于韦伊除子 wdiv(s_{n+1}) 呈线性，因此只需说明 $\mathcal{D}$ =wdiv(s_{n+1}) 不可约（且既约）的情形。

若 $\mathcal{D}$ 是水平的，即它在 $\mathbb{Z}$ 上平坦，则

$$\overline{\mathcal{L}}_1\cdot\overline{\mathcal{L}}_2\cdots\overline{\mathcal{L}}_n\cdot\mathcal{D}=\overline{\mathcal{L}}_1|_{\mathcal{D}}\cdot\overline{\mathcal{L}}_2|_{\mathcal{D}}\cdots\overline{\mathcal{L}}_n|_{\mathcal{D}}$$

这是根据归纳假设在 $\mathcal{D}$ 上定义的算术交。若 $\mathcal{D}$ 是垂直除子，即它是某个素数 p 上的簇，则

$$\overline{\mathcal{L}}_1\cdot\overline{\mathcal{L}}_2\cdots\overline{\mathcal{L}}_n\cdot\mathcal{D}=(\mathcal{L}_1|_{\mathcal{D}}\cdot\mathcal{L}_2|_{\mathcal{D}}\cdots\mathcal{L}_n|_{\mathcal{D}})\log p.$$

这里的交是射影簇 $\mathcal{D}$ 在 $\mathbb{F}_p$ 上的通常交。其定义与有理截面 s_{n+1} 的选择无关。它给出了一个对称的多线性交配

$$\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{X})^{n+1}\longrightarrow\mathbb{R}.$$

当 $n=0$时，它就是算术次数映射。

设 $\mathcal{X}$为算术簇，$\overline{\mathcal{L}}=(\mathcal{L},\|\cdot\|)$为 $\mathcal{X}$上的厄米线丛。我们称 $\overline{\mathcal{L}}$是数值有效的，如果其厄米度量是半正的，并且交数 $\overline{\mathcal{L}}\cdot\mathcal{C}\geq 0$ 对 $\mathcal{X}$的任意一维闭整子概形 $\mathcal{C}$ 成立。

2.3 Berkovich解析空间上的度量化线丛

我们回顾Berkovich发展的解析空间理论 [Ber90]。它使我们能够更灵活地在非阿基米德赋值处定义度量。

Berkovich解析空间

设$(K,|\cdot|_K)$为完备赋值域。对 K上的任意簇 X，其解析化 X^{an} 是由以下数据组成的对 $x=(x,|\cdot|_x)$的集合：

(1) 一个概形点 $x\in X$，称为 x 的中心；

(2) 在 x 的剩余域 $K(x)$ 上的乘法范数 $|\cdot|_x$，其在 K 上限制为 $|\cdot|_K$。将 $(K(x),|\cdot|_x)$ 的完备化记为 $H(x)$。

对于任意一对 (U,f)，其中 X 的开子簇 U 上有一个正则函数 f，我们有一个函数 $|f|:U_{\text{解析化}}\to\mathbb{R}$，将 $x\in U_{\text{解析化}}$ 映射到 $|f(x)|=|f|_x$。解析化 X^{an}赋予最弱拓扑，使得$U_{\text{解析化}}$在 X^{an} 中是开集，并且对于每一对 (U,f)，$|f|:U_{\text{解析化}}\to\mathbb{R}$ 都是连续的。

由于 X 是分离且连通的，空间 X^{an} 是豪斯多夫且路径连通的。若进一步 X 是射影的，则 X^{an} 是紧的。

设 K' 是 K的有限正规扩张。基变换 $X_{K'}$ 的解析化 $X_{K'}^{\mathrm{an}}$ 带有 Aut(K'/K) 的作用，从而得到同构 $X^{\mathrm{an}}\cong X_{K'}^{\mathrm{an}}/\mathrm{Aut}(K'/K)$。

若 $K=\mathbb{C}$，空间 X^{an} 是通常的复解析空间 $X(\mathbb{C})$，带有欧几里得拓扑。若 $K=\mathbb{R}$，则 X^{an} 是 $X(\mathbb{C})$对复共轭取商所得的商空间。若 K 是非阿基米德的，则 X^{an} 是与 X相关联的 ***Berkovich*** 解析空间 。

设 X，Y 是定义在 K 上的两个簇，且 $f\colon Y\to X$ 是一个态射。于是存在一个自然的连续映射$f^{\mathrm{an}}\colon Y\text{一个}\to X^{\mathrm{an}}$。特别地，任意闭点 $x\in X$ 都会诱导一个点 $x^{\mathrm{an}}\in X^{\mathrm{an}}$，称为经典点（或刚性点）。映射

$$\{\text{closed points of } X\}\longrightarrow X^{\mathrm{an}}$$

是单射，且像稠密。

赋度量线丛

设 $(K,\ |\cdot|_K)$ 是一个完备赋值域，它要么是阿基米德的，要么是离散非阿基米德的。

设 X 是定义在 K 上的射影簇，L 是 X 上的一个线丛。L 在 X 上（或在 X^{an} 上）的一个度量是由一族 $\|\cdot\|=(\|\cdot\|_x)_{x\in X^{\mathrm{an}}}$ 范数组成的，其中这些范数 $\|\cdot\|_x$ 定义在纤维 $L(x)=L_{H(x)}$ 上，并要求它们满足以下连续性条件。对于任意一对 (U,s)，若 s 是 L 在 X 的开子簇 U 上的正则截面，则存在一个函数 $\|s\|\colon U^{\mathrm{an}}\to\mathbb{R}$，它将 $x\in U$一个映射到 $\|s(x)\|=\|s\|_x$。若对每一对 (U,s)，$\|s\|\colon U$ 一个$\to\mathbb{R}$ 都是连续的，则称这族范数连续。称 $(L,\|\cdot\|)$ 是 X^{an} 上的赋度量线丛。

设 $(K,\ |\cdot|_K)$ 是一个离散非阿基米德域。设 X 是定义在 K 上的射影簇。X 在 O_K 上的整模型$\mathcal{X}$ 是一个定义在 O_K 上的射影平坦整概形 $\mathcal{X}$，并带有一个同构 $\mathcal{X}\otimes_{O_K}K\cong X$。令 k 为 K 的剩余域，$\mathcal{X}_k$ 为 $\mathcal{X}$ 的特殊纤维。存在一个约化映射

$$\mathrm{red}:X^{\mathrm{an}}\longrightarrow\mathcal{X}_k$$

定义如下。对于 $x\in X^{\mathrm{an}}$，令 $R(x)=\{a\in H(x)\colon |a|_x\le 1\}$ 为 $H(x)$ 的赋值环。根据赋值判别准则，态射 $\mathrm{Spec}(H(x))\to\mathcal{X}$ 可延拓为唯一的态射 $\mathrm{Spec}(R(x))\to\mathcal{X}$。于是，$\mathrm{red}(x)$ 定义为 $\mathrm{Spec}(R(x))$ 的闭点在 $\mathcal{X}$ 中的像，该像位于特殊纤维 $\mathcal{X}_k$ 中。

设 L 是定义在 X 上的线丛。设 $(\mathcal{X},\ \mathcal{L}')$ 是 $(X,\ L^{\otimes e})$ 的一个整模型，其中正整数 e 满足：$\mathcal{X}$ 是 X 在 O_K 上的整模型，且 $\mathcal{L}'$ 是定义在 $\mathcal{X}$ 上的线丛，其在 X 上的限制为 $L^{\otimes e}$。这个整模型按如下方式在 L 上诱导出一个模型度量。对于 $x\in X^{\mathrm{an}}$，存在一个如上所述的态射 $\mathrm{Spec}(R(x))\to\mathcal{X}$。于是，$\mathcal{L}'_{R(x)}$ 是 $x(R)$ 中的一个秩 1 $L_H^{\otimes e}(x)$子模。存在唯一的范数，使得 $\mathcal{L}'_{R(x)}$ 是 $L_{H(x)}$ 的单位球。更确切地说，对于 $s\in L_{H(x)}$,

$$\|s\|_x:=\inf\{|a|_x^{\frac{1}{e}}:a\in H(x)^\times,a^{-1}s^{\otimes e}\in\mathcal{L}'_{R(x)}\}.$$

如果线丛 $\mathcal{L}'$ 在 $\mathcal{X}$ 的特殊纤维（的每个不可约分支）上数值有效，则称模型度量为半正。

对于阿基米德或离散非阿基米德 K，设 X 是定义在 K 上、维数为 n 的射影簇。设 $(L_1,\|\cdot\|_1)\dots,(L_n,\|\cdot\|_n)$ 是 X 上的半正赋度量线丛，下面将对此作出说明。则存在一个*Monge–Amp`ère* 测度

$$c_1(L_1,\|\cdot\|_1)\wedge\cdots\wedge c_1(L_n,\|\cdot\|_n)$$

定义在 X^{an} 上，下面也将对此作出说明。

(1) 当 $K=\mathbb{C}$ 时，赋度量线丛 $(L,\|\cdot\|)$ 的第一陈流 $c_1(L,\|\cdot\|)$ 是如下定义的 $(1,1)$-流：

$$c_1(L,\|\cdot\|)=\frac{1}{\pi i}\partial\overline{\partial}\log\|s\|+\delta_{\mathrm{wdiv}(s)}.$$

这里 s 是 L的任意非零有理截面。若对于任意解析曲线 Y在 X中，$c_1(L|_Y,\|\cdot\|)$ 都是非负测度，则该度量（或赋度量线丛）是 半正 的。Monge–Amp`ère 测度由 Bedford-Taylor 理论中的楔积定义 [BT82a]。

(2) 当 $K=\mathbb{R}$ 时，所有定义都由 $\mathbb{C}$ 下降而来。具体而言，若赋度量线丛的基变换到 $\mathbb{C}$ 后是半正的，则该度量（或赋度量线丛）是半正 的；Monge–Amp`ère 测度则是从 $\mathbb{C}$ 推前得到的。

(3) 当 K 是离散非阿基米德时，线丛 L 上的度量 $\|\cdot\|$（或相应的赋度量线丛）称为半正的，若它是 L 上的半正模型度量 $\|\cdot\|_m$ 的一致极限；也就是说，函数序列 $\|\cdot\|_m/\|\cdot\|$ 在 X^{an} 上一致收敛到 1。在这种情况下，Monge–Amp`ère 测度定义为半正模型度量对应测度的弱极限，因此只需对模型度量定义它。因此，对于 $i=1$、2、……、n，假设 $(L_i,\|\cdot\|_i)$ 是由 $(X,L_i^{\otimes e_i})$ 的整模型 $(\mathcal{X}_i,\mathcal{L}_i')$ 诱导的。我们可以取一个支配这些模型的模型 $\mathcal{X}$，从而假设所有 $\mathcal{X}_i$ 都相同。将 $\mathcal{L}_i$ 拉回到 $\mathcal{X}$ 所诱导的 L_i 上的模型度量相同。假设 X 是正规的。于是我们可以取 $\mathcal{X}$ 为正规模型。对于 $\mathcal{X}$ 的特殊纤维的任一不可约分支 V，存在唯一的点 $\eta_V\in X^{\mathrm{an}}$，称为对应于 V 的除子点，使得约化 $\mathrm{red}(\eta_V)$ 是 V 的泛点。记 δ_{η_V} 为支集在 η_V 上的狄拉克测度。在这种情况下，Chambert-Loir [CL06] 将 Monge–Amp`ère 测度定义为

$$c_1(L_1,\|\cdot\|_1)\wedge\cdots\wedge c_1(L_n,\|\cdot\|_n)=\sum_V(\mathcal{L}_1|_V\cdots\mathcal{L}_n|_V)\delta_{\eta_V}.$$

对于一般的 X，Monge–Amp`ere 测度是从其正规化推前得到的 .

若一个度量（或相应的赋度量线丛）是两个（不同线丛上的）半正度量之商，则称其为可积。设 $(L_1,\ \|\cdot\|_1)$ ……，$(L_d,\ \|\cdot\|_d)$ 是 X 上的可积赋度量线丛。Monge–Amp`ere 测度

$$c_1(L_1,\|\cdot\|_1)\wedge\cdots\wedge c_1(L_d,\|\cdot\|_d)$$

由多线性定义。

2.4 射影簇上的阿代尔线丛

本小节回顾 Zhang 提出的射影簇上的阿代尔线丛理论[Zha95]。我们只考虑在所有赋值处都能连续延拓到 Berkovich 解析空间的阿代尔度量，或者等价地，[YZ24，第A.51]节中定义的“m-连续”度量。

设 K 是一个数域，X 是 K 上的一个射影簇，L 是 X 上的一个线丛。对于任意赋值 $v\in M_K$，L 在 X 上的一个 K_v-度量是 L_{K_v} 在 $X_{K_v}^{\mathrm{an}}$ 上的一个度量。L 上的阿代尔度量是由所有 K 的赋值 v 上的 X 上的 L 的 K_v-度量 $\|\cdot\|_v$ 构成的相容族 $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$。族 $(\|\cdot\|_v)_v$ 相容是指，存在 K 的非阿基米德赋值的有限集 S，以及 (X,L) 在 $\mathrm{Spec}(O_K)\setminus S$ 上的一个（射影且平坦）模型 $(\mathcal{X},\mathcal{L})$，使得对于所有$v\in\mathrm{Spec}(O_K)\setminus S$，$K_v$-度量 $\|\cdot\|_v$ 都是由 $(\mathcal{X}_{O_{K_v}},\mathcal{L}_{O_{K_v}})$ 诱导的模型度量。在上述情形下，我们将其记为 $L=(L,(\|\cdot\|_v)_v)$，并称之为 X 上的阿代尔线丛。

设 $(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}'})$ 是 $(X,L^{\otimes e})$ 的一个算术模型，其中 e 为某个正整数，即 $\mathcal{X}$ 是定义在 O_K 上的算术簇，且 $\mathcal{L}'=(\mathcal{L}',\|\cdot\|)$ 是 $\mathcal{X}$ 上的一个厄米线丛，使得其泛纤维 $(\mathcal{X}_K,\mathcal{L}'_K)=(X,L^{\otimes e})$。于是 $(\mathcal{X},\mathcal{L}')$ 在 L 上诱导出阿代尔度量 $(\overline{\|\cdot\|_v})_v$。非阿基米德赋值处的度量是模型度量，而阿基米德赋值处的度量则由厄米度量的根给出。这样的阿代尔度量（分别地，阿代尔线丛）称为模型阿代尔度量（分别地，模型阿代尔线丛）。若厄米线丛 $\mathcal{L}'$ 在 $\mathcal{X}$ 上数值有效，则称该模型阿代尔度量（分别地，模型阿代尔线丛）为数值有效。

称阿代尔线丛 $L=(L,(\overline{\|\cdot\|_v})_v)$ 在 X 上是数值有效的，如果阿代尔度量 $(\|\cdot\|_v)_v$ 是 L上数值有效模型阿代尔度量的一致极限。也就是说，存在 L上的数值有效模型阿代尔度量序列 $\{(\|\cdot\|_{m,v})_v\}_m$，以及 K的非阿基米德赋值的有限集 S，使得对于任意 $v\in\mathrm{Spec}(O_K)\setminus S$和任意 m，都有$\|\cdot\|_{m,v}=\|\cdot\|_v$；并且$\|\cdot\|_{m,v}/\|\cdot\|_v$ 在所有赋值 v处一致收敛到 1。若阿代尔线丛等距于两个数值有效阿代尔线丛的张量商，则称其为可积的。数值有效（分别为可积）阿代尔度量在每个$\widehat{\ }$赋值处的度量都是数值有效（分别为可积）的。记 $\mathrm{Pic}(X)_{\mathrm{int}}$ 为 X上可积阿代尔线丛的等距类群。

设 X 是 K上的 n 维射影簇。通过极限过程， X 的模型上的厄米线丛的交配对可扩张为一个对称多线性交配

$$\widehat{\mathrm{Pic}}(X)_{\mathrm{int}}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\overline{L}_1, \overline{L}_2, \ldots, \overline{L}_{n+1}) \longmapsto \overline{L}_1 \cdot \overline{L}_2 \cdots \overline{L}_{n+1}.$$

对于 X 中任意一个维数为 d 的闭子簇 Y，以及其上的任意可积阿代尔线丛 $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{d+1}$ X，记

$$\overline{L}_1 \cdot \overline{L}_2 \cdots \overline{L}_{d+1} \cdot Y = \overline{L}_1|_Y \cdot \overline{L}_2|_Y \cdots \overline{L}_{d+1}|_Y.$$

通过线性组合，该定义可扩展到 X 上维数为 d 的肖循环。

若 X =Spec(K)，则 X 上的线丛 L_1 只是一个定义在 K 上的一维向量空间。我们有

$$\widehat{\deg}(\overline{L}_1) = -\sum_{v \in M_K} \epsilon_v \log \|s\|_v.$$

这里 s 是 L_1 中任意一个非零元素，并且根据乘积公式，次数与 s 的选择无关。

回到高维情形。我们有 Chambert-Loir–Thuillier 的归纳公式（参见[CLT09，定理 4。1]）。设 s_{n+1} 是 L_{n+1} 在 X上的一个非零有理截面。那么他们的归纳公式给出

$$\overline{L}_1 \cdots \overline{L}_n \cdot \overline{L}_{n+1} = \overline{L}_1 \cdots \overline{L}_n \cdot \mathrm{wdiv}(s_{n+1}) - \sum_{v \in M_K} \epsilon_v \int_{X_{K_v}^{\mathrm{an}}} \big(\log \|s_{n+1}\|_{n+1,v}\big) c_1(\overline{L}_1)_v \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_n)_v.$$

这里， $c_1(\overline{L}_{1,v}) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_{n,v})$ 表示由 v 处的 $L_1, \ldots, L_n$ 的度量在 $X_{K_v}^{\mathrm{an}}$ 上诱导的 Monge–Amp`ere 测度。

设 $\overline{L}$ 为 X上的一个阿代尔线丛。 L 的有效截面集合为

$$\widehat{H}^0(X, \overline{L}) = \{s \in H^0(X, L) : \|s(x)\|_{\overline{L},v,\sup} \leq 1, \ \forall v \in M_K\}.$$

此处的上确界范数

$$\|s(x)\|_{\overline{L},v,\sup} = \sup_{x \in X_{K_v}^{\mathrm{an}}} \|s(x)\|_v.$$

则 $\widehat{H}^0(X, L)$ 是一个有限集。我们记

$$\widehat{h}^0(X, \overline{L}) = \log \# \widehat{H}^0(X, \overline{L}).$$

L 的体积为

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L}) = \limsup_{n \to \infty} \frac{(d+1)!}{n^{d+1}} \widehat{h}^0(X, \overline{L}).$$

此处极限总是存在，这源于 Chen 的工作 [Che08] 以及 Yuan [Yua09], 但此处我们并不需要这一事实。我们有如下由 Yuan 证明的算术 Siu 不等式 [Yua08]。

定理 2.3 （算术 Siu 不等式）。 设 L_1、 L_2 为 X 上的两个半正阿代尔线丛。则

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L}_1 - \overline{L}_2) \geq \overline{L}_1^{d+1} - (d+1)\overline{L}_1^d \cdot \overline{L}_2.$$

对于 X上的任意阿代尔线丛 L ，我们都有一个相应的高度函数

$$h_{\overline{L}} : X(\overline{K}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

定义为

$$h_{\overline{L}}(x) = \frac{1}{\deg(\tilde{x})} \overline{L} \cdot \tilde{x}, \quad x \in X(\overline{K}).$$

这里， $\tilde{x}$ 表示 X 中对应于 x的闭点，而 $\deg(\tilde{x}) = [K(\tilde{x}) : K]$ 表示 $\tilde{x}$ 相对于 K的剩余域次数。已知， $[K : \mathbb{Q}]^{-1} h_{\overline{L}}$ 是 $X(K)$上与 L相关联的 Weil 高度函数。若 $\overline{s}$ 是L的一个有效截面，则

$$h_{\overline{L}}(x) \geq 0, \quad \forall x \in (X \setminus |\mathrm{div}(s)|)(\overline{K}).$$

2.5 可容许的阿代尔线丛

我们回顾 Zhang 关于数域上曲线的可容许阿代尔线丛理论。更多详情请参阅 [Zha93]和 [Yua24，附录 A]。

局部情形：度量

设 K 是一个完备赋值域，它或者是阿基米德的，或者是离散非阿基米德的。设 C 是一条亏格为 $g \geq 2$ 的 K 上的曲线。设 ω 是 C 上的典范线丛。设 $\Delta : C \to C^2$ 是对角线。我们也用 Δ 表示它在 C^2 中的像。

C^2 上 $\mathcal{O}(\Delta)$ 的度量 $\|\cdot\|$ 诱导以下数据：

(1) 格林函数 $G = -\log \|1\| : (C^2 \setminus \Delta)^{\mathrm{an}} \to \mathbb{R}$；

(2) 通过自然同构 $\Delta^*\mathcal{O}(-\Delta) \cong \omega$，在 C 上的 ω 的度量；

(3) $C_{K'}$ 上的 $\mathcal{O}(x)$ 的度量，对于任意有限扩张 K'/K 以及任意 $x \in C(K') = C_{K'}(K')$，经由自然同构 $(x,\mathrm{id})^*\mathcal{O}(\Delta) = \mathcal{O}(x)$。这里

$$(x, \mathrm{id}) : \mathrm{Spec}(K') \times_{\mathrm{Spec}(K)} C \longrightarrow C \times_{\mathrm{Spec}(K)} C.$$

存在唯一的 $\mathcal{O}(\Delta)$ 在 C^2 上的度量 $\|\cdot\|_{\Delta,a}$，称为可容许度量，满足以下性质：

(1) 它是对称的；也就是说，它在交换映射下保持不变

$$C^2 \longrightarrow C^2, \quad (x, y) \longmapsto (y, x).$$

作为推论，可容许格林函数 $G_a = -\log \|1\|_{\Delta,a}$ 也是对称的。

(2) 等式

$$(2g-2)c_1(\mathcal{O}(x), \|\cdot\|_a) = c_1(\omega, \|\cdot\|_a)_{K'}$$

在 $C_{K'}^{\mathrm{an}}$ 上的 Monge–Amp`ere 测度成立。

(3) 积分

$$\int_{C_{K'}^{\mathrm{an}}} G_a(x, \cdot) c_1(O(x), \|\cdot\|_a) = 0.$$

我们也将 ω 和 $\mathcal{O}(x)$ 上的诱导度量称为可容许度量。

按照 Zhang 的做法 [Zha10], 我们有 局部 φ-不变量

$$\varphi(C) := -\int_{(C^2)^{\mathrm{an}}} G_a \, c_1(\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a)^{\wedge 2}.$$

我们将看到，这个不变量总是非负的。

若 $K = \mathbb{C}$， ω 上的可容许度量 $\|\cdot\|_a$ 以及 $\mathcal{O}(\Delta)$ 上的可容许度量 $\|\cdot\|_{\Delta,\, a}$ 可恢复 Arakelov 引入的原始阿拉克洛夫度量 [Ara74]。它们也记作 $\|\cdot\|_{\mathrm{Ar}}$ 和 $\|\cdot\|_{\Delta,\, \mathrm{Ar}}$。阿拉克洛夫测度

$$\mu_{\mathrm{Ar}} = \frac{1}{2g-2} c_1(\omega, \|\cdot\|_{\mathrm{Ar}})$$

在 $C^{\mathrm{an}} = C(\mathbb{C})$ 上有如下描述。设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ 是 $H^0(C(\mathbb{C})\ \omega)$ 的一组基，关于厄米配对正交

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{i}{2} \int_{C(\mathbb{C})} \alpha \wedge \overline{\beta}.$$

Then

$$\mu_{\mathrm{Ar}} = \frac{i}{2g}\sum_{j=1}^{g} \alpha_j \wedge \overline{\alpha}_j.$$

在阿基米德情形中，Zhang [Zha10] 得到了局部 φ-不变量的谱展开，这意味着正性 $\varphi(C) > 0$。另请参见 §9.1 了解更多详情。

局部情形：图论

在上述局部情形中，假设 K 是带有离散赋值的非阿基米德域。假设C 在 O_K上有半稳定约化，这可通过将 K作有限扩张得到。设 $\mathcal{C}$是 C 在 O_K 上的极小正则模型，$\omega_{\mathcal{C}/O_K}$ 是其相对对偶化层。 C 的约化图$\Gamma = \Gamma(C)$由以下条件确定。

(1) Γ 的顶点对应于 $\mathcal{C}$的特殊纤维 $\mathcal{C}_k$ 的不可约分支。

(2) Γ 的边对应于 $\mathcal{C}_k$的节点。

(3) Γ 中两个（可能相同的）顶点相连，当且仅当这些顶点所代表的 $\mathcal{C}_k$ 的不可约分支在一个节点处相交。

存在一个自然的单射 $\Gamma \to C^{\mathrm{an}}$，我们将 Γ 与其在 C^{an}中的像等同。对应于分支 V 的顶点是其除子点 η_V。存在一个收缩映射 $r\colon C^{\mathrm{an}} \to \Gamma$。对于对应于分支 V的节点 $\eta_V \in \Gamma$， $r^{-1}(\eta_V)$由那些约化$\mathrm{red}(x)$落在 V的光滑轨迹中的点 $x \in C^{\mathrm{an}}$ 组成。对于任意分段光滑函数 $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$，定义测度

$$\Delta f = -f''dx - \sum_{P}\left(\sum_{\vec{v}} d_{\vec{v}}f(P)\right)\delta_P,$$

其中

(1) 每条边都与闭区间 $[0,1]$, 对应，在该区间上， f'' 是f 的二阶导数函数，而 dx 是勒贝格测度；

(2) 第一个求和遍历所有点 $P \in \Gamma$ ，且 δ_P 是 P处的狄拉克测度，并且只有有限项非零；

(3) 第二个求和遍历 P处的所有切方向 $\vec{v}$，而 $d_{\vec{v}}f(P)$是方向导数。

典范除子 K_Γ 是形式线性组合

$$K_\Gamma = \sum_{V} \deg(\omega_{\mathcal{C}/O_K}|_V)\eta_V,$$

其中求和遍历特殊纤维的所有分支 V，而 η_V是相应的节点。存在唯一的一对分段光滑函数 $G_\Gamma\colon \Gamma^2 \to \mathbb{R}$ 和定义在 Γ 上的测度 μ_Γ ，满足

$$\Delta g_\Gamma(x,\cdot) = \delta_x - \mu_\Gamma, \quad \int_\Gamma g_\Gamma(x,\cdot)\mu_\Gamma = 0,$$

并且满足

$$g_\Gamma(K_\Gamma, x) + g_\Gamma(x,x)$$

是 $x \in \Gamma$ 的一个常数。记号滥用一下，我们也用 G_Γ 表示：$(C^2)^{\mathrm{an}} \to \mathbb{R}$ 其经由复合映射 $(C^2)^{\mathrm{an}} \to (C^{\mathrm{an}})^2 \xrightarrow{(r,\ r)} \Gamma^2$ 的拉回。

设 $\|\cdot\|_{\omega_{\mathcal{C}/O_K}}$ 是 ω 在 C 上由 $\omega_{\mathcal{C}/O_K}$ 诱导的模型度量。那么

$$-\log\|\cdot\|_a(x) = -\log\|\cdot\|_{\omega_{\mathcal{C}/O_K}}(x) + G_\Gamma(x,x)\log|\varpi|$$

对于 $x \in C^{\mathrm{an}}$。这里 ϖ 是 O_K的极大理想的生成元。

对于 K的有限扩张 K'，设 $\mathcal{C}'$是 $C_{K'}$在 $O_{K'}$上的极小正则模型。于是 $\mathcal{C}' \times_{\mathrm{Spec}(O_{K'})} \mathcal{C}'$恰好在节点的乘积处奇异，而沿这些奇点对其进行爆破所得的 $\mathcal{X}'$ 是正则的。设 $\Delta_{K'}$ 为 $C^2_{K'}$ 在 $\mathcal{X}'$中的对角线的闭包。其在 $\mathcal{O}(\Delta_{K'})$上的诱导模型度量下降为 $\|\cdot\|^{(K')}$ 在 $\mathcal{O}(\Delta)$上的度量，并且

$$-\log\|\cdot\|_{\Delta,a}(x_1,x_2) = -\log\left(\lim_{K'}\|\cdot\|^{(K')}\right)(x_1,x_2) + G_\Gamma(x_1,x_2)\log|\varpi|^{-1}$$

对于不同的点 $(x_1,x_2) \in (C^{\mathrm{an}})^2$ (参见 [Zha10，§3。5])。因此，我们有

$$G_a(x_1,x_2) = -\log\|1\|_{\Delta,a}(x_1,x_2) \geq G_\Gamma(x_1,x_2)\log|\varpi|^{-1},$$

其中 G_a 表示可容许格林函数。

对于情形 $K' = K$，记 $\|\cdot\|_\Delta = \|\cdot\|^{(K)}$。如果 $r(x_1)$ 和 $r(x_2)$ 是图 Γ中的顶点，那么 $\mathrm{red}(x_1,x_2)$ 位于特殊纤维的光滑轨迹中。除子序列 $\Delta_{K'}$ 在此轨迹上是稳定的。因此

$$-\log\|\cdot\|_{\Delta,a}(x_1,x_2) = -\log\|\cdot\|_{\overline{\Delta}}(x_1,x_2) - G_\Gamma(x_1,x_2)\log|\varpi|.$$

此外，若 C 具有良约化，则 ω 和 $\mathcal{O}(\Delta)$上的可容许度量分别是由整模型$\omega_{\mathcal{C}/O_K}$ 和 $\mathcal{O}(\Delta)$诱导的模型度量。

最后，定义图 Γ 的 φ-不变量 为

$$\varphi(\Gamma) = -\frac{1}{4}\delta(\Gamma) + \frac{1}{4}\int_\Gamma g_\Gamma(x,x)((10g+2)\mu_\Gamma - \delta_{K_\Gamma}),$$

其中， $\delta(\Gamma)$是 Γ中的边数。它与 Zhang 的局部 φ-不变量之间的关系

$$\varphi(C) = -\int_{(C^2)^{\mathrm{an}}} G_a\, c_1(\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a)^{\wedge 2}$$

就是

$$\varphi(C) = \varphi(\Gamma)\log|\varpi|^{-1}.$$

根据 Cinkir [Cin11], 总有 $\varphi(C) \geq 0$，且等号成立当且仅当 C 在 O_K上具有良约化。

全局设定

设 K 是一个数域。设 C 是定义在 K 上、亏格为 $g \geq 2$ 的曲线。设 ω 是 C 上的典范线丛。设 $\Delta\colon C \to C^2$ 是对角线。我们也用 Δ 表示它在 C^2 中的像。

在 K 的所有赋值处取可容许度量后，我们有 可容许阿代尔线丛 $\mathcal{O}(\Delta)_a$，$\bar{\omega}_a$ 和$\mathcal{O}(x)_a$，其底线丛分别为 $\mathcal{O}(\Delta)$ $\bar{\omega}$ 和 $\mathcal{O}(x)$，其中 $x \in C(K')$ 是定义在 K 的有限扩张 K' 上的一个点。它们全都是可积的。此外， $\bar{\omega}_a$ 是数值有效的。

自交数 $\bar{\omega}_a^2$，称为 可容许体积，其对应于 C/K，严格为正。这等价于 Ullmo 证明的 Bogomolov 猜想 [Ull98]，，下文将给出这一正性的定量版本。

按照 Zhang [Zha10], 的全局 φ不变量的 C 在 K 定义为

$$\varphi(C) = \sum_{v\in M_K} \epsilon_v \varphi(C_{K_v}),$$

其中局部 φ 不变量

$$\varphi(C_{K_v}) = -\int_{(C^2)^{\mathrm{an}}_{K_v}} G_{a,v} c_1(\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a)^{\wedge 2}_v.$$

根据 Zhang 和 Cinkir 得出的上述局部 φ-不变量的正性，我们总有 $\varphi(C) > 0$。φ-不变量给出了可容许体积的下界。

定理 2.4 (Zhang [Zha10], Cinkir [Cin11], de Jong [dJ18], Wilms [Wil22])。设 C 是亏格为$g \geq 2$ 、定义在数域 K 上的曲线。那么

$$\bar{\omega}_a^2 \geq \frac{g-1}{2g+1}\varphi(C) > 0.$$

此外，对于 $g = 2$, $\bar{\omega}_a^2 \geq \frac{2}{5}\varphi(C)$；对于 $g = 3$, $\bar{\omega}_a^2 \geq \frac{1}{3}\varphi(C)$；对于 $g = 4$, $\bar{\omega}_a^2 \geq \frac{38}{109}\varphi(C)$.

根据 Zhang [Zha10],该差

$$d(C) = \frac{2g+1}{2(g-1)}\bar{\omega}_a^2 - \varphi(C)$$

等于定义在 C^3上的 Gross–Schoen 圈的 Beilinson–Bloch 高度，因此猜想其非负。根据 Gao–Zhang [GZ24], $d(C$在曲线模空间上满足某种 Northcott 性质，因此 $d(C) > 0$ 对“几乎所有” C成立。对于这类曲线，我们有定理 2.4的一个更强版本。

下面的算术霍奇指标定理是 Faltings 原始定理模型情形的一个变体 [Fal84]和 Hriljac [Hri85]。

定理 2.5 （算术霍奇指标定理）。设 D 和 E 是 C 上的零度除子。*Th* *en*

$$\overline{\mathcal{O}}(D)_a \cdot \overline{\mathcal{O}}(E)_a = -2\langle D, E\rangle.$$

这里， $\mathcal{O}(D)_a$ 是 $\mathcal{O}(D)$ 的任意可容许延拓。例如，如果 $\mathcal{O}(D)$ 是 ω 和 $\mathcal{O}(x)$ 关于 $x \in C(K)$ 的线性组合，那么 $\bar{\omega}_a$ 和 $\mathcal{O}(x)_a$ 的相应组合就是一个可容许延拓。右侧是 C 的雅可比簇上的 N´eron–Tate 高度配对。

下面的阿拉克洛夫算术伴随公式的可容许版本 [Ara74]是定义可容许度量的主要动机。

Theo备注 2.6 （算术伴随公式）。设 P 是 K 上的 C 有理点。*Th* *en*

$$\overline{\mathcal{O}}(P)_a \cdot \overline{\mathcal{O}}(P)_a = -\bar{\omega}_a \cdot \overline{\mathcal{O}}(P)_a = -\bar{\omega}_a \cdot P,$$

基本定理给出了以下简洁的表达式，充分体现了上述可容许阿代尔线丛理论的重要性。

定理 2.7。 (*1*) 设 $Q \in C$（K）为一个有理点。则

$$h_{\bar{\omega}_a}(Q) = \frac{2g-2}{g}|Q|^2 + \frac{\bar{\omega}_a^2}{4g(g-1)}.$$

(*2*) 设 $P_1, P_2 \in C$（K）为两个不同的有理点。则

$$h_{\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a}(P_1, P_2) = \overline{\mathcal{O}}(P_1)_a \cdot \overline{\mathcal{O}}(P_2)_a = \frac{1}{g}(|P_1|^2 + |P_2|^2) - 2\langle P_1, P_2\rangle - \frac{\bar{\omega}_a^2}{4g(g-1)}.$$

证明。由定理 2.5 和定理 2.6，我们有

$$\begin{aligned} -2|Q|^2 &= \left(\overline{\mathcal{O}}(Q)_a - \frac{\bar{\omega}_a}{2g-2}\right)^2 \\ &= \overline{\mathcal{O}}(Q)_a^2 - \frac{(\overline{\mathcal{O}}(Q)_a \cdot \bar{\omega}_a)}{g-1} + \frac{\bar{\omega}_a^2}{(2g-2)^2} = -\frac{g}{g-1}h_{\bar{\omega}_a}(Q) + \frac{\bar{\omega}_a^2}{(2g-2)^2}. \end{aligned}$$

由此得到 (1)。

对于 (2)，由归纳公式，

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{O}}(P_1)_a \cdot \overline{\mathcal{O}}(P_2)_a &= \overline{\mathcal{O}}(P_1)_a \cdot P_2 + \sum_{v\in M_K} \epsilon_v \int_{C_{K_v}^{\mathrm{an}}} G_{a,v}(P_2,\cdot) c_1(\overline{\mathcal{O}}(P_1)_a) \\ &= \overline{\mathcal{O}}(P_1)_a \cdot P_2 \\ &= \sum_{v\in M_K} \epsilon_v G_{a,v}(P_1,P_2) \\ &= \overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a \cdot (P_1,P_2).\end{aligned}$$

现在定理2.5与定理2.6推出

$$\begin{aligned}-2\langle P_1,P_2\rangle =& \left(\overline{\mathcal{O}}(P_1)_a - \frac{\bar{\omega}_a}{2g-2}\right)\cdot\left(\overline{\mathcal{O}}(P_2)_a - \frac{\bar{\omega}_a}{2g-2}\right) \\ =& \overline{\mathcal{O}}(P_1)_a \cdot \overline{\mathcal{O}}(P_2)_a - \frac{1}{2g-2}\bar{\omega}_a \cdot \left(\overline{\mathcal{O}}(P_1)_a + \overline{\mathcal{O}}(P_1)_a\right) + \frac{\bar{\omega}_a^2}{(2g-2)^2} \\ =& h_{\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a}(P) - \frac{1}{2g-2}(h_{\bar{\omega}_a}(P_1) + h_{\bar{\omega}_a}(P_2)) + \frac{\bar{\omega}_a^2}{(2g-2)^2}.\end{aligned}$$

应用 (1)。 □

2.6 函数域

设 k 为代数闭域， B 为 k 上的射影曲线，且 $K = k(B)$为其函数域。我们称K 为 k上的函数域（一元）。上述理论在 K上有类似物。我们概述它以结束本节。

K 的赋值集合 M_K 与 B的闭点集合自然双射。对任意赋值 $v \in M_K$，将绝对值规范化为

$$|a|_v = e^{-\mathrm{ord}_v(a)}, \quad \forall a \in K^\times.$$

记 K_v 为其完备化。这些绝对值满足乘积公式

$$\prod_{v\in M_K} |a|_v = 1, \quad \forall\ a \in K^\times.$$

设 $\mathbb{P}^n$ 是定义在 K上的射影空间。标准高度函数 定义为

$$h(x_0,x_1,\cdots,x_n)_K = \frac{1}{[K':K]} \sum_{w\in M_{K'}} -\log\max\{|x_0|_w,|x_1|_w,\cdots,|x_m|_w\}.$$

不存在子域 $\mathbb{Q}$ ，而标准高度函数依赖于基域，如下标所示。定理 2.1 仍然成立。

设 A 是定义在 K 上的阿贝尔簇， L 是 A上的对称丰沛线丛。N´eron–Tate ˆ高度 h_L 仍由 Tate 极限定义

$$\hat{h}_L(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} h_L(2^n x), \quad x \in A(\overline{K}).$$

如定理 2.2(2) 中所述，它是二次的。然而，它仅在商空间 $A(K)/f(\mathrm{tr}^{K/k}(A)(k))$ 上为正。在这里，Chow 的 K/k-迹 $\mathrm{tr}^{K/k}(A)$ 是一个定义在 k 上的阿贝尔簇，并带有同态 $f\colon \mathrm{tr}^{K/k}(A)\otimes_k K \to A$，满足如下泛性质：对于任意定义在 k 上的阿贝尔簇 A' 及同态 $g\colon A'\otimes_k K \to A$， g 都唯一地通过 f 分解。关于其存在性，参见 [Con06]。

设 X 是定义在 K上的射影簇。 X 上的阿代尔线丛，只需从数域上的定义中省略阿基米德数据即可定义。更精确地说，设 L 是 X上的线丛。 L 上的阿代尔度量是一个集合 $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$，其中 K_v-度量 $\|\cdot\|_v$ 定义在 L 上，并满足相容条件：存在一个开子概形 $U\subset B$ 以及一个（射影且平坦的）模型 $(\mathcal{X},\mathcal{L})$，使 (X,L) 在 U上具有该模型，并且对于所有 $v\in U$， K_v-度量 $\|\cdot\|_v$ 均由 $(\mathcal{X}_{O_{K_v}},\mathcal{L}_{O_{K_v}})$诱导。数值有效阿代尔线丛的交数，是射影簇上经典交数的极限（参见 [Ful98]）。有效截面的空间

$$\widehat{H}^0(X,\overline{L})=\{s\in H^0(X,L):\|s(x)\|_{\overline{L},v,\sup}\le 1,\ \forall v\in M_K\}$$

是 k 上的有限维向量空间。定义

$$\widehat{h}^0(X,\overline{L})=\dim_k \widehat{H}^0(X,\overline{L}),$$

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L})=\lim_{n\to\infty}\frac{(d+1)!}{n^{d+1}}\widehat{h}^0(X,\overline{L}).$$

定理的几何版本 2.3是原始 Siu 不等式的极限版本，仍然成立。

设 C 是 K 上亏格为 $g\ge 2$ 的曲线。可容许的阿代尔线丛的定义与数域上的定义相同，只是对于来自约化图的量要加上因子 $\log|\varpi|=-1$。例如，

$$-\log\|\cdot\|_a(x)=-\log\|\cdot\|_{\omega_{\mathcal{C}/O_{K_v}}}(x)-G_\Gamma(x,x)$$

对于 $x\in C^{\mathrm{an}}_{K_v}$,

$$-\log\|\cdot\|_a(x_1,x_2)=-\log\|\cdot\|_{\overline{\Delta}}(x_1,x_2)+G_\Gamma(x_1,x_2)$$

对于 $(x_1,\ x_2)\in(C^2)^{\mathrm{an}}_{K_v}$，满足 $r(x_1)$ 和 $r(x_2)$ 是 Γ 中的顶点。

Zhang 的全局 φ-不变量为

$$\varphi(C)=\sum_{v\in M_K}\varphi(C_{K_v}).$$

定理 2.4 在当前情形下仍然成立。一个主要区别是，可容许体积 $\bar{\omega}_a^2$ 严格为正，当且仅当 C 是非等构的。这里，若存在某条曲线 C，使得 等变，且 $C\otimes_K K\cong C_0\otimes_k K$ 定义在 C_0 上k，则称其为等变。如果 k 的特征为 0，则定理 2.4 可加强为

$$\bar{\omega}_a^2\ge\frac{2g-2}{2g+1}\varphi(C).$$

3 定量 Vojta 不等式

回顾一下，曲线 $|Q|=\sqrt{\hat{h}(Q)_K}$上的代数点 $\angle(P_1,\ P_2)$ 与 Q， P_1， P_2 的范数 C 以及角 K，是按照 §´ 2.1 中的 Néron–Tate 高度定义的。本节的主要目标是证明以下定量版本的 Vojta 不等式。

定理 3.1 (定理 1.9)。 设 C 是亏格为 $g\ge 2$ 的曲线，定义在数域 K上。设 P_1、 $P_2\in C(K)$是互不相同的有理点。假设

$$|P_1|\ge 1.2\cdot 10^9 g^{\frac{7}{3}}\sqrt{\bar{\omega}_a^2}$$

and

$$|P_2|\ge 10^5 g^{\frac{5}{2}}|P_1|.$$

Then

$$\cos\angle(P_1,P_2)\le\sqrt{\frac{1.01}{g}}.$$

带隐常数的定理归功于 Vojta [Voj91]。我们对定量版本的证明基于 Yuan [Yua25], 的框架，我们的另一个想法是使用可容许的阿代尔线丛来追踪常数。

在详细展开之前，先概述一下证明思路。设 p_1、p_2：$C^2 \to C$ 是两个投影。考虑（阿代尔）*Vojta* 线丛

$$\overline{L} = d_1 p_1^* \bar{\omega}_a + d_2 p_2^* \bar{\omega}_a + d((2g-2)\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a - p_1^* \bar{\omega}_a - p_2^* \bar{\omega}_a)$$

在 C^2上。这里 d_1、d_2 和 d 均为正整数。由定理 2.7，可得以下结果。

引理 3.2。设 P_1、$P_2 \in C(K)$ 是不同的有理点。则

$$h_{\overline{L}}(P_1, P_2) = \frac{2g-2}{g}(d_1|P_1|^2 + d_2|P_2|^2) - (4g-4)d\langle P_1, P_2\rangle + \frac{d_1+d_2-2gd}{4g(g-1)}\bar{\omega}_a^2.$$

现在我们取具有增长性质的 $(d_1$、d_2、$d)$

$$d_1 \approx \sqrt{g + \frac{1}{10^5 g}}\frac{|P_2|}{|P_1|}d, \quad d_2 \approx \sqrt{g + \frac{1}{10^5 g}}\frac{|P_1|}{|P_2|}d.$$

这就得到

$$h_{\overline{L}}(P_1, P_2) \approx (4g-4)d|P_1||P_2|\left(\sqrt{\frac{1}{g} + \frac{1}{10^5 g^3}} - \cos\angle(P_1, P_2)\right).$$

于是，关键在于得到 $h_L(P_1$、$P_2)$ 的适当显式下界，这将立即给出 $\cos\angle(P_1$、$P_2)$ 的上界。如下所述可以得到这样的下界。首先，对于某个 $n > 0$，通过应用 Yuan 算术 Siu 不等式，我们构造 nL 的一个小截面 s。这里“小”意味着

$$-\sum_{v \in M_K} \epsilon_v \log \|s\|_{v,\sup}$$

具有适当的下界。若 s 在 $P = (P_1, P_2)$ 处不消失，则这是 $h_{nL}(P)$ 的一个下界。一般地，我们运用 Vojta 的想法，取 s 的“导数”，以消去 P 处的零点并估计其范数。高度由 s 的上确界范数及其在 P处的重数从下方界定。最后，Dyson 引理控制这些重数。证明至此完成。

3.1 全局稀疏性

本节的目标是给出如下技术性估计，它将在本文中使用两次。

定理 3.3（全局稀疏性）。设 C 是数域 K上亏格为 $g \geq 2$ 的曲线。设 $P_1, \ldots, P_n \in C(K)$为两两不同的代数点。则

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} h_{\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a}(P_i, P_j) \geq -\left(1.2 \cdot 10^4 g^{\frac{1}{3}} n \log n + 3.96 \cdot 10^{10} g^{\frac{11}{3}} n\right)\bar{\omega}_a^2.$$

回顾可容许的阿代尔线丛 $\mathcal{O}(\Delta)_a$，其对应于对角线 Δ（即 C^2 的对角线），已在 §2.5 中引入。我们可以将 $h_{\mathcal{O}(\Delta)_a}(P_i, P_j)$ 视为 P_i 与 P_j 之间的（对数）全局距离，因为它是局部 Green 函数之和。于是该定理断言，这些全局距离在平均意义下具有下界，这也可视为 C 的某个全局 Faltings–Elkies 不变量的下界。下面我们将证明该定理，并借此机会介绍我们对（局部）Faltings–Elkies 不变量所给出的、借助于（局部）φ-不变量的界。

由 §2.5 可知，在 K 的每个赋值 v 处，都有一个可容许格林函数 $G_{a,v}\colon (C^2 \setminus \Delta)^{\mathrm{an}}_{K_v} \to \mathbb{R}$ 以及一个局部 φ-不变量 $\varphi(C_{K_v})$。对于 $n \geq 2$，我们有法尔廷斯–埃尔基斯不变量

$$\mathrm{FE}_v(C, n) = \inf_{P_1, \cdots, P_n \in C(K_v)} \sum_{1 \leq j < k \leq n} G_{a,v}(P_j, P_k).$$

我们先回顾 Looper–Silverman–Wilms 的以下结果 [LSW25], , 该结果基于 Baker–Rumely [BR07]和 Cinkir [Cin11] 关于约化图的估计。

定理 3.4. 设 C 是一个亏格为 $g \geq 2$ 、定义在数域 K上的曲线。设 v 是 K的一个非阿基米德赋值。则有

$$\mathrm{FE}_v(C,n) \geq -\frac{15}{8} n\, \varphi(C_{K_v}).$$

证明. 通过基变换，我们可以假设 C 具有半稳定约化。我们有

$$G_{a,v}(P_j,P_k) \geq G_{\Gamma(C_{K_v})}(P_j,P_k)\log N_v$$

由§2.5可得。于是结论由 [LSW25，命题 21]得出。 □

本定理的以下阿基米德版本将在本文第二部分中证明；事实上，这是第二部分中最困难的估计。

定理 3.5（定理10.11）。 设 C 是一个亏格为 $g \geq 2$ 、定义在数域 K上的曲线。设 v 是 K的一个阿基米德赋值。则有

$$\mathrm{FE}_v(C,n) \geq -\left(4\cdot 10^3 g^{\frac{1}{3}} n\log n + 1.32\cdot 10^{10} g^{\frac{11}{3}} n\right)\cdot \varphi(C_{K_v}).$$

现在我们可以证明定理 3.3了。

定理 *3.3* 的证明。 存在一个有限扩张 K'/K 使得 P_1, P_2, …, $P_n \in C(K')$。将 C基变换到 K'后，等式中的每一项都会乘以 $[K'\colon K]$。因此我们可以假设 P_1, P_2, …, $P_n \in C(K)$。由定理 3.4 和定理 3.5,

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i<j\leq n} h_{\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a}(P_i,P_j) &= \sum_{v\in M_K}\sum_{1\leq i<j\leq n} \epsilon_v G_{a,v}(P_i,P_j)\\
&\geq -\sum_{v\mid\infty}\left(4\cdot 10^3 g^{\frac{1}{3}} n\log n + 1.32\cdot 10^{10} g^{\frac{11}{3}} n\right)\epsilon_v\varphi(C_{K_v}) - \sum_{v\nmid\infty}\frac{15}{8} n\varphi(C_{K_v})\\
&\geq -\left(4\cdot 10^3 g^{\frac{1}{3}} n\log n + 1.32\cdot 10^{10} g^{\frac{11}{3}} n\right)\varphi(C).
\end{aligned}$$

现在，结论由定理 $\varphi(C) \leq 3\bar{\omega}_a^2$ 中的 Wilms的估计 2.4得出。 □

3.2 定量 Mumford 不等式

在 Faltings 证明莫德尔猜想之前，Mumford 在假设点的高度很大且彼此接近的情况下，证明了两个点之间角度的不等式。Mumford 不等式不足以证明莫德尔猜想，但实际上在历史上启发了 Vojta 不等式。关于 Mumford 的原始工作，请参阅 [Mum65，§3，第 Cor. 1] 和 [Ser97，§5。7] 。在本小节中，我们推导出以下 Mumford 不等式的定量版本。

定理 3.6（定理 1.10）。 设 C 是亏格为 $g \geq 2$ 、定义在数域 K上的曲线。设 P_1, $P_2 \in C$（K）为互异的代数点。假设

$$|P_1| \geq 10^9 g^{\frac{7}{3}}\sqrt{\bar{\omega}_a^2}$$

and

$$|P_1| \leq |P_2| \leq 1.15|P_1|.$$

Then

$$\cos\angle(P_1,P_2) \leq \frac{1.01}{g}.$$

证明。 由定理 3.3 ，对 $n=2$,

$$h_{\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a}(P_1,P_2)\geq -\left(4.71\cdot 10^6 g^{\frac{1}{3}}\cdot(2\log 2)+3.96\cdot 10^{10}g^{\frac{11}{3}}\cdot 2\right)\bar{\omega}_a^2\geq -10^{11}g^{\frac{11}{3}}\bar{\omega}_a^2.$$

根据定理 2.7，我们进一步有

$$\frac{1}{g}(|P_1|^2+|P_2|^2)-2\langle P_1,P_2\rangle\geq -10^{11}g^{\frac{11}{3}}\bar{\omega}_a^2.$$

根据假设 $|P_1|\geq 10^9 g^{\frac{7}{3}}\sqrt{\bar{\omega}_a^2}$，我们有

$$\frac{1+10^{-7}}{g}|P_1|^2+\frac{1}{g}|P_2|^2-2\langle P_1,P_2\rangle\geq\frac{1}{10^7 g}|P_1|^2-10^{11}g^{\frac{11}{3}}\bar{\omega}_a^2\geq 0.$$

根据假设 $|P_1|\leq|P_2|\leq 1.15|P_1|$，我们有

$$\cos\angle(P_1,P_2)=\frac{\langle P_1,P_2\rangle}{|P_1||P_2|}\leq\frac{1+10^{-7}}{2g}\frac{|P_1|}{|P_2|}+\frac{1}{2g}\frac{|P_2|}{|P_1|}\leq\frac{1.01}{g}.$$

这里最后一个不等式是由函数 $(1+10^{-7})x^{-1}+x$ 在 $x\in[1,1.15]$ 处取得最大值这一事实得到的。由此完成证明。 □

3.3 小截面的存在性

本小节的目标是为我们版本的 Vojta 线丛找到一个合适的小截面。这将是我们证明定理 3.1 中的定量 Vojta 不等式的第一步。

设 C 为亏格为 $g\geq 2$ 、定义于数域 K上的曲线。设 P_1、$P_2\in C(K)$ 为定理 3.1中的互异有理点。记 $P=(P_1,P_2)\in C^2(K)$。如上所述，考虑阿代尔 *Vojta* 线丛

$$\overline{L}=d_1p_1^*\bar{\omega}_a+d_2p_2^*\bar{\omega}_a+d((2g-2)\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a-p_1^*\bar{\omega}_a-p_2^*\bar{\omega}_a)$$

在 C^2 上。这里 d_1、d_2、d 是稍后待定的正整数。 C^2 上的底线丛为

$$L=d_1p_1^*\omega+d_2p_2^*\omega+d((2g-2)\mathcal{O}(\Delta)-p_1^*\omega-p_2^*\omega)$$

其中 $\omega=\omega_{C/K}$。本小节的主要结果如下。

命题 3.7 （小截面）。 若 $d_1\geq gd$、 $d\geq d_2$ 与 $d_1d_2>gd^2$，则存在正整数 n，使得 nL 具有非零截面 s，定义于 C^2 上，且满足

$$-\sum_{v\in M_K}\epsilon_v\log\|s\|_{n\overline{L},v,\sup}\geq-\frac{ng(g+1)d_1d^2}{4(g-1)(d_1d_2-gd^2)}\bar{\omega}_a^2.$$

证明。 证明几乎与 [Yu25的引理 3.2], 相同，只是我们需要应用 Yuan 的 Siu 不等式算术版本。为完整起见，我们将其写在此处。记

$$c=\frac{g(g+1)d_1d^2}{4(g-1)(d_1d_2-gd^2)}\bar{\omega}_a^2.$$

取 Spec(K) 上次数为 c 的阿代尔线丛 $\mathcal{O}(c)$。记 $L(c)=L+\pi^*\mathcal{O}(c)$。这里 $\pi\colon C\to\mathrm{Spec}(K)$ 是结构态射。因此，对于 nL 的任意非零截面 s，

$$\sum_{v\in M_K}\epsilon_v\log\|s\|_{n(\overline{L}(c)),v,\sup}=\sum_{v\in M_K}\epsilon_v\log\|s\|_{n\overline{L},v,\sup}-nc.$$

因此，该引理等价于： $n(L(c))$ 存在一个非零截面 s ，使得对于每个赋值 v，都有 $\log\|s\|_{n(L(c)),v,\sup} \leq 1$ 。只需证明 $\widehat{\mathrm{vol}}(L(c)) > 0$。

记

$$\overline{L} = \overline{L}_1 - \overline{L}_2$$

with

$$\overline{L}_1 = (d_1 - d)p_1^*\bar{\omega}_a + d(g-1)p_2^*\bar{\omega}_a + d(2g-2)\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a,$$

and

$$\overline{L}_2 = (gd - d_2)p_2^*\bar{\omega}_a.$$

根据 [Yua24，定理 2.10(2)], 阿代尔线丛

$$p_1^*\bar{\omega}_a + p_2^*\bar{\omega}_a + 2\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a$$

是从雅可比簇 J拉回的数值有效阿代尔线丛，因此它是数值有效的。由假设 L_1 可知 $d_1 \geq gd$是数值有效的。因此 $L_1(c)$ 和 L_2 均为数值有效。将定理 2.3 应用于 $L(c) = L_1(c) - L_2$，得到

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L}(c)) &\geq \overline{L}_1(c)^3 - 3\overline{L}_1(c)^2\overline{L}_2 \\
&= (\overline{L}_1(c) - \overline{L}_2)^3 - 3\overline{L}_1(c)\overline{L}_2^2 + \overline{L}_2^3 \\
&= \overline{L}(c)^3 - 6(g-1)d_1(gd-d_2)^2\bar{\omega}_a^2 \\
&= \overline{L}^3 + 3cL^2 - 6(g-1)d_1(gd-d_2)^2\bar{\omega}_a^2 \\
&= \overline{L}^3 + 24(g-1)^2(d_1d_2 - gd^2)c - 6(g-1)d_1(gd-d_2)^2\bar{\omega}_a^2 \\
&= \overline{L}^3 + 6(g-1)d_1(gd^2 + 2gd_2d - d_2^2)\bar{\omega}_a^2.
\end{aligned}$$

这里 $\overline{L}^3$ 是关于 d_1、d_2、d 的三次多项式。系数如下所列。它们可以按照 [Yua24，定理 3的证明6] 或 [Wil22，定理 1的证明4]计算。

(1) 对于 $i = 1, 2$， d_i^3的系数为 $(p_i^*\bar{\omega}_a)^3 = 0$。

(2) 对于 $i = 1, 2$，设 $j = 3 - i$。 $d_i^2 d_j$的系数为 $3(p_i^*\bar{\omega}_a)^2(p_j^*\bar{\omega}_a) = 6(g-1)\bar{\omega}_a^2$.

(3) 对于 $i = 1, 2$， $d_i^2 d$的系数为 $3((2g-2)\mathcal{O}(\Delta)_a - p_1^*\bar{\omega}_a - p_2^*\bar{\omega}_a)(p_i^*\bar{\omega}_a)^2 = 0$

(4) T

(5) 对于 d_1d_2d 的系数为 $6((2g-2)\mathcal{O}(\Delta)_a - p_1^*\bar{\omega}_a - p_2^*\bar{\omega}_a)(p_1^*\bar{\omega}_a)(p_2^*\bar{\omega}_a) = -12(g-1)\bar{\omega}_a^2$.

（6） d^3 的系数是

$$\begin{aligned}
&((2g-2)\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a - p_1^*\bar{\omega}_a - p_2^*\bar{\omega}_a)^3 \\
&= (2g-2)(4g^2+4g-2)\bar{\omega}_a^2 - (2g-2)^3\varphi(C) \\
&\geq (2g-2)(-4g^2+8g+2)\bar{\omega}_a^2 \\
&\geq -12(g-1)g(g-2)\bar{\omega}_a^2.
\end{aligned}$$

这里，(6) 中的第一个不等式来自定理2.4。将这些结果结合起来，我们得到

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L}(c)) \geq 6(g-1)\Big(d_1^2d_2 + (2g-2)d_1dd_2 - (g-1)d_1d^2 - (2g-1)d_2d^2 - (2g-4)gd^3\Big)\bar{\omega}_a^2.$$

根据假设，我们有 $d_1^2d_2 > gd_1d^2$ 和 $d_1dd_2 \geq gd^3 \geq gd^2d_2$。由此可得

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L}(c)) &> 6(g-1)\Big((2g-2)d_1dd_2 - (2g-1)d_2d^2 - (2g-4)gd^3\Big)\bar{\omega}_a^2\\ &\geq 6(g-1)\Big((2g-2)gd^3 - (2g-1)d_2d^2 - (2g-4)gd^3\Big)\bar{\omega}_a^2\\ &> 0.\end{aligned}$$

证明到此完成。 □

3.4 高度下界

设 C 是亏格为 $g \geq 2$ 的数域 K 上的一条曲线。设 $P_1, P_2 \in C(K)$ 是互不相同的有理点。回忆一下，在 C^2 上有阿代尔线丛

$$\overline{L} = d_1p_1^*\bar{\omega}_a + d_2p_2^*\bar{\omega}_a + d((2g-2)\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a - p_1^*\bar{\omega}_a - p_2^*\bar{\omega}_a)$$

其底层线丛为

$$L = d_1p_1^*\omega + d_2p_2^*\omega + d((2g-2)\mathcal{O}(\Delta) - p_1^*\omega - p_2^*\omega).$$

这里 d, d_1, d_2 是正整数。设 s 是 C^2 上 nL 的一个非零截面，其中 n 为某个正整数。本节的目标是，对于 C^2 中的有理点 $P = (P_1, P_2)$，给出高度 $h_{nL}(P)$ 的一个下界，该下界用 s 的上确界范数表示。

取 C^2 中 P 的某个邻域上的 L 的一个局部截面 s_0，使得 $s_0(P) \neq 0$。于是，s/s_0 是 P 的某个邻域上的正则函数。取 C 在 P_i 处的一个局部坐标 z_i，即局部环 $\mathcal{O}_{C,P_i}$ 的极大理想的一个生成元。C^2 在 P 处的局部环的完备化为 $K[[z_1, z_2]]$。因此我们有一个形式展开

$$\frac{s}{s_0} = \sum_{i_1,i_2\geq 0} a_{i_1,i_2}z_1^{i_1}z_2^{i_2}, \quad a_{i_1,i_2} \in K.$$

我们在有序对集合 $(i_1,\ i_2)$ 上赋予乘积偏序，即当且仅当两者均满足 $i_1 \leq i_1'$ 和 $i_2 \leq i_2'$ 时，$(i_1,\ i_2) \leq (i_1',\ i_2')$。如果对于所有 $(i_1,\ i_2) < (e_1,\ e_2)$ 都有 $a_{e_1,\ e_2} \neq 0$ 和 $a_{i_1,\ i_2} = 0$，则称有序对 $(e_1,\ e_2)$ 是可容许的。我们声称，可容许性与 s_0 以及 $(z_1,\ z_2)$ 的选择无关。事实上，对于 L 的另一个在 P 处不消失的局部截面 s_0'，设

$$\frac{s}{s_0'} = \sum_{i_1,i_2} a'_{i_1,i_2}z_1^{i_1}z_2^{i_2}.$$

有如下展开式

$$\frac{s_0}{s_0'} = \sum_{j_1,j_2} b_{j_1,j_2}z_1^{j_1}z_2^{j_2}.$$

So

$$a'_{i_1,i_2} = \sum_{(j_1,j_2)\leq(i_1,i_2)} a_{i_1-j_1,i_2-j_2}b_{j_1,j_2}.$$

因此，对于 $(i_1,\ i_2) < (e_1,\ e_2)$，有 $a'_{i_1,\ i_2} = 0$，并且

$$a'_{e_1,e_2} = a_{e_1,e_2}b_{0,0} = a_{e_1,e_2}\left(\frac{s_0}{s_0'}\right)(P).$$

另一方面，对于 P_1 处的另一个局部坐标 z_1' 以及

$$\frac{s}{s_0} = \sum_{i_1,i_2} a''_{i_1,i_2}(z_1')^{i_1}z_2^{i_2},$$

我们有

$$z_1 = \sum_{j\geq 1} b_j (z_1')^j.$$

这里 $b_1 \neq 0$。因此 $a''_{i_1,\ i_2} - a_{i_1,\ i_2} b_1^{i_1}$ 是 $a_{j_1,\ j_2}$ 的线性组合，其中 $(j_1,\ j_2) < (i_1,\ i_2)$。因此，$a'_{i_1,\ i_2} = 0$，其中 $(i_1,\ i_2) < (e_1,\ e_2)$，并且

$$a''_{e_1,e_2} = a_{e_1,e_2} b_1^{e_1} = a_{e_1,e_2} \left(\frac{dz_1}{dz_1'}\right)^{e_1} (P).$$

z_2的情形类似。

固定 s 的一个可容许对 $(e_1,\ e_2)$，我们有一个非零截面

$$s^\circ = a_{e_1,e_2} s_0 \otimes (dz_1)^{\otimes e_1} (dz_2)^{\otimes e_2}$$

属于线丛

$$L^\circ = (nL + e_1 p_1^* \omega + e_2 p_2^* \omega)|_P$$

在 $P \cong \mathrm{Spec}(K)$ 上。根据前面的计算，这个截面依赖于 s，但与 s_0 以及 $(z_1,\ z_2)$ 的选取无关。自然地，我们取阿代尔线丛

$$\overline{L}^\circ = (n\overline{L} + e_1 p_1^* \bar{\omega}_a + e_2 p_2^* \bar{\omega}_a)|_P$$

在 P 上。我们有以下估计：在每个赋值处，阿代尔线丛的度量下 s° 的范数。

Prop命题 3.8。设 s 是 nL 的一个非零截面，且（e_1、e_2）是关于 s 的一个可容许对。

（*1*）在非阿基米德赋值 v 处，

$$-\log \|s^\circ\|_v \geq -\log \|s\|_{n\overline{L},v,\sup} - \frac{15}{4}(e_1+e_2)\varphi(C_{K_v}).$$

（*2*）在阿基米德赋值 v 处，

$$-\log \|s^\circ\|_v \geq -\log \|s\|_{n\overline{L},v\,\sup} - 2.1\cdot 10^{14} g^{\frac{14}{3}} (2nd_1 + 2nd_2 + 4gnd + e_1 + e_2)\varphi(C_{K_v}).$$

我们将在下文分别证明该命题的两个部分。

非阿基米德情形

我们先证明命题 3.8（1）。我们可以通过将（$n=1$、d_1、d_2、d）替换为（nd_1、nd_2、nd），假设 C 在 v 处有半稳定约化，方法是将 K扩张为有限扩张。

令 $\mathcal{C} \to \mathrm{Spec}(O_{K_v})$ 为 C_{K_v}在 O_{K_v}上的极小正则模型。根据赋值判别准则，$P_i \in C(K)$（分别地，$P \in C^2(K)$）可延拓为 $\mathcal{P}_i \in \mathcal{C}(O_{K_v})$（分别地，$\mathcal{P} \in \mathcal{C}^2(O_{K_v})$）。此外，$\mathcal{P}_i$和 $\mathcal{P}$的闭点都位于特殊纤维的光滑轨迹上（参见 [Liu02, §9.1, Cor. 1.32]）。令 V_i（分别地，V）为 $\mathcal{C}$（分别地，$\mathcal{C}^2$）的特殊纤维中与 $\mathcal{P}_i$（分别地，$\mathcal{P}$）相交的不可约分支。令 $\eta_i \in C_{K_v}^{\mathrm{an}}$（分别地，$\eta \in (C^2)_{K_v}^{\mathrm{an}}$）为相应的除子点，即对于 $\mathcal{C}$（分别地，$\mathcal{C}^2$）上的任意有理函数 f，它是 $|f|_{\eta_i} = N_v^{-}\mathrm{ord}_{V_i}(f)$（分别地，$|f|_\eta = N_v^{-}\mathrm{ord}_V(f)$）。只需证明

$$-\log \|s^\circ(P)\|_{\overline{L}^\circ} \geq -\log \|s(\eta)\|_{\overline{L}} - \frac{15}{4}(e_1+e_2)\varphi(C_v).$$

这里我们在下标中注明度量的来源，并省略对 v 的依赖。

如 §2.5中回顾的那样，沿所有奇点对 $\mathcal{X}$ 进行的爆破 $\mathcal{C}^2$ 是正则的。记 $p_i : \mathcal{X} \to \mathcal{C}$ 为爆破 $\mathcal{X} \to \mathcal{C}^2$ 与第 i 次投影 $\mathcal{C}^2 \to \mathcal{C}$的复合。令 Δ 为对角线$\Delta_{K_v} \subset (C^2)_{K_v}$在 $\mathcal{X}$中的闭包。V'的严格变换 V是 $\mathcal{X}$上的竖直素除子。

定义线丛

$$\mathcal{L} = d_1 p_1^* \omega_{\mathcal{C}/O_v} + d_2 p_2^* \omega_{\mathcal{C}/O_{K_v}} + d((2g-2)\mathcal{O}(\overline{\Delta}) - p_1^* \omega_{\mathcal{C}/O_v} - p_2^* \omega_{\mathcal{C}/O_v})$$

在 $\mathcal{X}$ 上。因此，$(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ 是 $((C^2)_{K_v}, L_{K_v})$ 的整模型，因而诱导出 L_{K_v} 的度量 $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$。类似地，定义线丛

$$\mathcal{L}^\circ = (\mathcal{L} + e_1 p_1^* \omega_{\mathcal{C}/O_{K_v}} + e_2 p_2^* \omega_{\mathcal{C}/O_v})|_{\mathcal{P}}$$

在 $\mathcal{P} \cong \mathrm{Spec}(O_{K_v})$ 上。因此，$(\mathcal{P}, \mathcal{L}^\circ)$ 是 $(P_{K_v}, (L^\circ)_{K_v})$ 的整模型，因而诱导出 $(L^\circ)_{K_v}$ 的度量 $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\circ}$。

令 $r: C_{K_v}^{\mathrm{an}} \to \Gamma$ 为到约化图 $\Gamma \subset C_{K_v}^{\mathrm{an}}$的收缩映射，并令 $G_\Gamma : (C^2)_{K_v}^{\mathrm{an}} \to \mathbb{R}$ 为 Γ的格林函数的拉回。如§2.5中所回顾的，我们有

$$-\log \|\cdot\|_{\bar{\omega}_a}(x) = -\log \|\cdot\|_{\omega_{\mathcal{C}/O_v}}(x) - G_\Gamma(x,x)\log N_v$$

对于 $x \in C_v^{\mathrm{an}}$，并且

$$-\log \|\cdot\|_{\overline{\mathcal{O}(\Delta)}_a}(x_1,x_2) = -\log \|\cdot\|_{\mathcal{O}(\overline{\Delta})}(x_1,x_2) + G_\Gamma(x_1,x_2)\log N_v$$

对于 $(x_1,x_2) \in (C^2)_{K_v}^{\mathrm{an}}$，使得 $r(x_1)$ $r(x_2)$ 是图的顶点。由于 $r(P_i) = \eta_i$，我们有

$$-\log \|\cdot\|_{\overline{L}}(\eta) = -\log \|\cdot\|_{\mathcal{L}}(\eta) - ((d_1-d)G_\Gamma(\eta_1,\eta_1) + (d_2-d)G_\Gamma(\eta_2,\eta_2) - (2g-2)dG_\Gamma(\eta_1,\eta_2))\log N_v,$$

– 对数 $\|\cdot\|_{L^\circ}(P)$ = – 对数 $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\circ}(P)$–$((d_1-d+e_1)G_\Gamma(\eta_1,\ \eta_1)+(d_2-d+e_2)G_\Gamma(\eta_2,\ \eta_2)-(2g-2)dG_\Gamma(\eta_1,\ \eta_2))$ 对数 N_v，因此

$$-\log \|s^\circ(P)\|_{\overline{L}^\circ} = -\log \|s^\circ(P)\|_{\mathcal{L}^\circ} - \log \|s(\eta)\|_{\overline{L}} + \log \|s(\eta)\|_{\mathcal{L}} - (e_1 G_\Gamma(\eta_1,\eta_1) + e_2 G_\Gamma(\eta_2,\eta_2))\log N_v.$$

根据 [LSW25，引理 2。3]，

$$G_\Gamma(x,y) \le \frac{15}{4}\varphi(\Gamma), \quad \forall x,y \in C_{K_v}^{\mathrm{an}}.$$

因此，只需证明

$$\|s^\circ(P)\|_{\mathcal{L}^\circ} \le \|s(\eta)\|_{\mathcal{L}}.$$

将 s 视为 L 在 $\mathcal{X}$上的 $\mathcal{L}$ 的有理截面。于是，相应的除子 $\mathrm{div}_{\mathcal{L}}(s)$ 是 $\mathcal{X}$上的一个垂直除子。记 m 为 V' 在 $\mathrm{div}_{\mathcal{L}}(s)$ 中的重数。由此得到 $\|s(\eta)\|_{\mathcal{L}} = N_v^{-m}$. 令 ϖ 为 O_{K_v}的极大理想的一个生成元。由于 V' 在 $\mathrm{div}_{\mathcal{L}}(\varpi^{-m}s)$ 中的重数为 0，我们可知，作为 $\mathcal{X}$上 $\mathcal{L}$ 的有理截面，$\varpi^{-m}s$在每个不属于 $\mathcal{X}$特殊纤维中其他任何不可约分支的点 $x \in V'$ 处都是正则的。特别地，$\varpi^{-m}s$ 是 $\mathcal{L}$ 在 $\mathcal{P}$的某个邻域上的正则截面。

回忆一下，截面 s $^\circ$ of L° 定义为

$$s^\circ = a_{e_1,e_2} s_0 \otimes (dz_1)^{\otimes e_1}(dz_2)^{\otimes e_2}$$

其中，s_0 是 P处 L 的局部生成元，z_1（分别为 z_2）是 P_1 处 C 的局部坐标（分别为 P_2），并且

$$\frac{s}{s_0} = \sum_{i_1,i_2 \ge 0} a_{i_1,i_2} z_1^{i_1} z_2^{i_2}, \quad a_{i_1,i_2} \in K.$$

s° 的定义与$(s_0,\ z_1,\ z_2)$的选择无关。现在，我们按如下方式仔细选择$(s_0,\ z_1,\ z_2)$。首先，选择 s_0 作为 $\mathcal{P}$ 的某个开邻域上 $\mathcal{L}$ 的局部生成元。其次，对于 $i=1,\ 2$，由于 $\mathcal{C}$ 上 $\mathcal{P}_i$ 的理想层 $\mathcal{I}_i$ 是一个线丛，我们可以选择 z_i 作为 $\mathcal{P}_i$的某个开邻域上 $\mathcal{I}_i$ 的局部生成元。由于 $\mathcal{P}_i$ 位于 O_{K_v}上 $\mathcal{C}$ 的光滑轨迹中，沿着 $\mathcal{P}$的理想层取 $\mathcal{P}$的闭点处 $\mathcal{X}$ 的局部环的完备化，同构于 $O_{K_v}[[\tilde{z}_1,\tilde{z}_2]]$。

由于 $\varpi^{-m}s$ 是 $\mathcal{X}$中 $\mathcal{P}$ 某个邻域上 $\mathcal{L}$ 的正则截面，展开式

$$\frac{\varpi^{-m}s}{s_0}=\sum_{i_1,i_2\geq 0}\varpi^{-m}a_{i_1,i_2}z_1^{i_1}z_2^{i_2}$$

具有整数系数 $\varpi^{-m}a_{i_1,\ i_2}\in O_{K_v}$. 因此

$$\varpi^{-m}s^{\circ}=\varpi^{-m}a_{e_1,e_2}s_0\otimes(dz_1)^{\otimes e_1}(dz_2)^{\otimes e_2}$$

是 $\mathcal{L}^{\circ}$ 上的线丛 $\mathcal{P}$的正则截面。因此，

$$\|s^{\circ}(P)\|_{\mathcal{L}}\leq N_v^{-m}=\|s(\eta)\|_{\mathcal{L}}.$$

这证明了命题3.8(1)。

阿基米德情形

为证明命题3.8(2)，我们先介绍一些解析术语。更多细节请参见§7.1 。记圆盘

$$\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\},\quad \mathbb{D}_r=\{z\in\mathbb{D}:|z|<r\}.$$

层 $\Omega^1_{\mathbb{D}}$ of hol　　在 $\mathbb{D}$ 上的全纯 1-形式赋有双曲度量 $\|\cdot\|_{\mathrm{hyp},\ \mathbb{D}}$ 其归一化方式为

$$\|dz\|_{\mathrm{hyp},\mathbb{D}}=1-|z|^2.$$

该度量在 $\mathbb{D}$ 上的双全纯自同构下保持不变。设 C 是亏格为 $g\geq 2$ 的（连通）紧黎曼曲面。设 $\rho_0:\mathbb{D}\to C$ 是万有覆盖映射。通过典范同一 $\rho_0^*\omega_C\cong\Omega^1_{\mathbb{D}}$，度量 $\|\cdot\|_{\mathrm{hyp},\ \mathbb{D}}$ 下降为 ω_C 上的双曲度量 $\|\cdot\|_{\mathrm{hyp}}$。

我们需要本文第二部分中的以下定理，该定理特别比较了 ω_C 上的双曲度量 $\|\cdot\|_{\mathrm{hyp}}$ 与阿拉克洛夫度量 $\|\cdot\|_{\mathrm{Ar}}=\|\cdot\|_a$。

定理 3.9 (定理 11.7)。 设 C 是亏格为 $g\geq 2$ 的紧黎曼曲面。则阿拉克洛夫度量 $\|\cdot\|_{\mathrm{Ar}}$ 和双曲度量 $\|\cdot\|_{\mathrm{hyp}}$ 在 ω_C 上满足

$$\left|\log\frac{\|\cdot\|_{\mathrm{Ar}}}{\|\cdot\|_{\mathrm{hyp}}}\right|<2\cdot 10^{14}g^{\frac{14}{3}}\cdot\varphi(C).$$

令 Δ 为 $C\times C$的对角线。对任意 $(x_1,x_2)\in C\times C$，设 $\rho=(\rho_1,\rho_2):\mathbb{D}\times\mathbb{D}\to C\times C$ 为一个万有覆盖映射，满足 $\rho_1(0)=x_1$ 和 $\rho_2(0)=x_2$。那么在 $\mathbb{D}_{\frac{1}{20}}\times\mathbb{D}_{\frac{1}{20}}$ 上存在一个局部全纯截面 s，使得

$$\left|\log\|s\|_{\Delta,\mathrm{Ar}}\right|<2\cdot 10^{14}g^{\frac{14}{3}}\cdot\varphi(C).$$

我们还需要第一部分中的以下一个简洁定理，它也是定理1.13的一部分。它给出了 [Yua24，定理 310]中的显式常数。

Theo理 3.10 （定理 9.19）。 设 C 是一个亏格为 $g\geq 2$的紧黎曼曲面。　　n

$$\varphi(C)\geq 10^{-7}g^{-\frac{5}{3}}.$$

现在我们可以证明命题3.8（2）了。设 C、K、L和 $P=(P_1,\ P_2)$ 如命题中所述。与非阿基米德情形一样，我们不妨通过将（d_1、d_2、d）替换为（nd_1、nd_2、nd）而假设 $n=1$；并通过将 K 替换为有限扩张而假设$K_v=\mathbb{C}$

令 $\rho=(\rho_1,\rho_2):\mathbb{D}^2\to(C(\mathbb{C}))^2$ 为全纯万有覆盖映射，使得 $\rho(0,0)=P$。拉回 ρ^*L 是 $\mathbb{D}^2$ 上的赋度量线丛，而 ρ^*s 是 ρ^*L的截面。我们也可以定义截面 $(\rho^*s)^{\circ}$，它属于

$$(\rho^*\overline{L})^{\circ}=(\rho^*\overline{L}+e_1p_1^*\rho_1^*\bar{\omega}_{\mathrm{a}}+e_2p_2^*\rho_2^*\bar{\omega}_{\mathrm{a}})|_{(0,0)}$$

以及解析数据。更确切地说，我们可以取一个全纯非消失局部截面 s_0，它定义在 (0,0) 附近的 ρ^*L 上。于是 $f=\rho^*s/s_0$ 是在 $(0,0)$ 附近的全纯函数，并且有幂级数展开

$$f(z_1,z_2)=\sum_{i_1,i_{\geq}0} a_{i_1,i_2} z_1^{i_1} z_2^{i_2}.$$

Set

$$(\rho^*s)^\circ = a_{e_1,e_2} s_0 (dz_1)^{\otimes e_1}(dz_2)^{\otimes e_2}.$$

从这个意义上说，它与前一个定义相容：存在一个典范等距同构 $(\rho^*L)^\circ=\rho^*(L^\circ)$，使得 $(\rho^*s)^\circ \overline{=} \rho^*(s^\circ)$。因此

$$\begin{aligned}-\log\|s^\circ(P)\|_{\overline{L}^\circ} =& -\log\|\rho^*s^\circ(0,0)\|_{\rho^*\overline{L}^\circ}\\ =& -\log|a_{e_1,e_2}|-\log\|s_0(0,0)\|_{\rho^*\overline{L}}-e_1\log\|(dz_1)(0)\|_{\rho_1^*\bar{\omega}_a}-e_2\log\|(dz_2)(0)\|_{\rho_2^*\bar{\omega}_a}.\end{aligned}$$

根据定理 3.9的第一部分，

$$-\log\|(dz_i)(0)\|_{\rho_i^*\bar{\omega}_a}\geq -\left|\log\|(dz_i)(0)\|_{\mathrm{hyp},\mathbb{D}}\right|-2\cdot 10^{14}g^{\frac{14}{3}}\varphi(C(\mathbb{C}))=-2\cdot 10^{14}g^{\frac{14}{3}}\varphi(C(\mathbb{C})).$$

那么我们只需证明存在一个满足以下条件的 s_0

$$-\log|a_{e_1,e_2}|-\log\|s_0(0,0)\|_{\rho^*\overline{L}}\geq -\log\|s\|_{\overline{L},\sup}-(2.1\cdot 10^{14}g^{\frac{14}{3}}(2d_1+2d_2+4gd)+10^{13}g^{\frac{14}{3}}(e_1+e_2))\varphi(C(\mathbb{C})).$$

假设 s_0 是 ρ^*L 在多圆盘 $\mathbb{D}_r^2$ 上的全纯截面，其中某个 $r\in(0,1)$ 满足

$$M(s_0,r)=\sup_{\mathbb{D}_r^2}\left|\log\|s_0\|_{\rho^*\overline{L}}\right|$$

是有限的。那么 s_0 在 $\mathbb{D}_r$的任何点上都不为零。因此， $f=\rho^*s/s_0$ 是 $\mathbb{D}_r^2$上的全纯函数。根据柯西积分公式，对于 $0<t<r$,

$$a_{e_1,e_2}=\frac{1}{e_1!e_2!}\frac{\partial^{e_1+e_2}f(0,0)}{\partial z_1^{e_1}\partial z_2^{e_2}}=\int_{(\partial\mathbb{D}_t)^2}\frac{f(z_1,z_2)}{z_1^{e_1}z_2^{e_2}}d\mu.$$

这里 $d\mu$ 是 $(\partial\mathbb{D}_t)^2$上的概率 Haar 测度。因此

$$\begin{aligned}|a_{e_1,e_2}|\leq& \sup_{(\partial\mathbb{D}_t)^2}\left|\frac{f(z_1,z_2)}{z_1^{e_1}z_2^{e_2}}\right|\\ =& t^{-e_1-e_2}\sup_{(\partial\mathbb{D}_t)^2}\frac{\|\rho^*s\|_{\rho^*\overline{L}}}{\|s_0\|_{\rho^*\overline{L}}}\\ \leq& t^{-e_1-e_2}e^{M(s_0,r)}\sup_{(\partial\mathbb{D}_t)^2}\|\rho^*s\|_{\rho^*\overline{L}}\\ \leq& t^{-e_1-e_2}e^{M(s_0,r)}\sup_{C(\mathbb{C})^2}\|s\|_{\overline{L}}.\end{aligned}$$

我们得到

$$-\log|a_{e_1,e_2}|-\log\|s_0(0,0)\|_{\rho^*\overline{L}}\geq -\log\|s\|_{\overline{L},\sup}+(e_1+e_2)\log(t)-2M(s_0,r).$$

设 $t\to r$。则

$$-\log|a_{e_1,e_2}|-\log\|s_0(0,0)\|_{\rho^*\overline{L}}\geq -\log\|s\|_{\overline{L},\sup}+(e_1+e_2)\log(r)-2M(s_0,r).$$

如果 $(s_0,\ r)$ 满足

$$\log(r)\geq -10^{13}g^{\frac{14}{3}}(e_1+e_2)\varphi(C(\mathbb{C}))$$

and

$$M(s_0,r)\le 2.1\cdot 10^{14}g^{\frac{14}{3}}(d_1+d_2+2gd)\varphi(C(\mathbb{C})),$$

那么我们就可以完成证明。接下来，我们证明这样的一个对 $(s_0,\ r)$ 存在。

根据定理第二部分3.9，存在一个截面 s_1 的 $\rho^*\mathcal{O}(\Delta)$ 在 $(\mathbb{D}_{\frac{1}{20}})^2$ 使得 _ at

$$\sup_{(\mathbb{D}_{\frac{1}{20}})^2}\left|\log\|s_1\|_{\rho^*\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a}\right|\le 2\cdot 10^{14}g^{\frac{14}{3}}\varphi(C(\mathbb{C})).$$

Then

$$s_0=s_1^{\otimes(2g-2)d}(dz_1)^{\otimes d_1-d}(dz_2)^{\otimes d_2-d}$$

是一个截面，属于

$$\rho^*L=(2g-2)d\rho^*\mathcal{O}(\Delta)+(d_1-d)p_1^*\rho_1^*\omega+(d_2-d)p_2^*\rho_2^*\omega$$

在 $(\mathbb{D}_{\frac{1}{20}})^2$ 上。我们将验证 $(s_0,\ 1/20)$ 满足该要求。

从平凡界出发

$$\left|\log\|s_0\|_{\rho^*\overline{L}}\right|\le(2g-2)d\left|\log\|s_1\|_{\rho^*\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a}\right|+(d_1+d)\left|\log\|dz_1\|_{\rho_1^*\bar{\omega}_a}\right|+(d_2+d)\left|\log\|dz_2\|_{\rho_2^*\bar{\omega}_a}\right|.$$

根据定理 3.9 再次，

$$\sup_{\mathbb{D}_{\frac{1}{20}}}\left|\log\|dz_i\|_{\rho_i^*\bar{\omega}_a}\right|\le 2\cdot 10^{14}g^{\frac{14}{3}}\varphi(C(\mathbb{C}))+\sup_{\mathbb{D}_{\frac{1}{20}}}\left|\log\|dz_i\|_{\mathrm{hyp},\mathbb{D}}\right|=2\cdot 10^{14}g^{\frac{14}{3}}\varphi(C(\mathbb{C}))+\log(400/399).$$

由此可得

$$\begin{aligned}M(s_0,1/20)=&\sup_{(\mathbb{D}_{\frac{1}{20}})^2}\left|\log\|s_0\|_{\rho^*\overline{L}}\right|\\&\le(2g-2)d\cdot\left(2\cdot 10^{14}g^{\frac{14}{3}}\varphi(C(\mathbb{C}))\right)+(d_1+d_2+2d)\cdot\left(2\cdot 10^{14}g^{\frac{14}{3}}\varphi(C(\mathbb{C}))+\log(400/399)\right)\\&<(2g-2)d\cdot\left(2.1\cdot 10^{14}g^{\frac{14}{3}}\varphi(C(\mathbb{C})\right)+(d_1+d_2+2d)\cdot\left(2.1\cdot 10^{14}g^{\frac{14}{3}}\varphi(C(\mathbb{C}))\right)\\&=(d_1+d_2+2gd)\cdot\left(2.1\cdot 10^{14}g^{\frac{14}{3}}\varphi(C(\mathbb{C}))\right).\end{aligned}$$

这里最后一个不等式由定理3.10得出。另一方面，定理3.10 还意味着

$$\log\left(\frac{1}{20}\right)\ge-10^{13}\cdot g^{\frac{14}{3}}\varphi(C(\mathbb{C})).$$

命题3.8（2）的证明至此完成。

3.5 证明的完备化

现在我们可以完成定理3.1的证明。设 P_1、$P_2\in C$（K）是定理中所述的互异有理点。记 $P=$（P_1，P_2）$\in C^2$（K）。回顾阿代尔线丛

$$\overline{L}=d_1p_1^*\bar{\omega}_a+d_2p_2^*\bar{\omega}_a+d((2g-2)\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a-p_1^*\bar{\omega}_a-p_2^*\bar{\omega}_a)$$

在 C^2 上。这里 d 是一个很大的正整数，并且我们进一步取

$$d_1=\left\lfloor\sqrt{g+\frac{1}{10^5g}}\frac{|P_2|}{|P_1|}d\right\rfloor,\quad d_2=\left\lfloor\sqrt{g+\frac{1}{10^5g}}\frac{|P_1|}{|P_2|}d\right\rfloor.$$

这里 $\lfloor x \rfloor$ 是小于或等于 x 的最大整数。对于足够大的 d，命题 3.7 中的 (d, d_1, d_2) 之间的不等式成立。于是该命题表明，存在一个正整数 n使得 nL有一个截面 s 满足

$$-\sum_{v\in M_K}\epsilon_v \log\|s\|_{v,\sup} \geq -\frac{ng(g+1)d_1d^2}{4(g-1)(d_1d_2-gd^2)}\bar{\omega}_a^2.$$

根据命题 3.8,

$$\begin{aligned}
h_{\overline{L}^\circ}(P) = & -\sum_{v\in M_K}\epsilon_v \log\|s^\circ(P)\|_{\overline{L}^\circ,v} \\
\geq & -\sum_{v|\infty}\left(\epsilon_v \log\|s\|_{v,\sup} + 2.1\cdot 10^{14} g^{\frac{14}{3}}(2nd_1+2nd_2+4gnd+e_1+e_2)\epsilon_v\varphi(C_{K_v})\right) \\
& -\sum_{v\nmid\infty}\left(\epsilon_v \log\|s\|_{v,\sup} + \frac{15}{4}(e_1+e_2)\varphi(C_{K_v})\log N_v\right) \\
\geq & -\sum_{v\in M_K}\epsilon_v \log\|s\|_{v,\sup} - 2.1\cdot 10^{14} g^{\frac{14}{3}}(2nd_1+2nd_2+4gnd+e_1+e_2)\varphi(C) \\
\geq & -\left(\frac{ng(g+1)d_1d^2}{4(g-1)(d_1d_2-gd^2)} + 6.3\cdot 10^{14} g^{\frac{14}{3}}(2nd_1+2nd_2+4gnd+e_1+e_2)\right)\bar{\omega}_a^2.
\end{aligned}$$

这里最后一个不等式由定理 2.4 得出。

另一方面，根据定义

$$\overline{L}^\circ = \left(n\overline{L} + e_1p_1^*\bar{\omega}_a + e_2p_2^*\bar{\omega}_a\right)|_P.$$

根据定理 2.7 和引理 3.2，有

$$\begin{aligned}
h_{\overline{L}^\circ}(P) &= h_{n\overline{L}}(P) + e_1h_{\bar{\omega}_a}(P_1) + e_2h_{\bar{\omega}_a}(P_2) \\
&= \frac{2g-2}{g}((nd_1+e_1)|P_1|^2 + (nd_2+e_2)|P_2|^2) - (4g-4)nd\langle P_1,P_2\rangle + \frac{nd_1+nd_2-2gnd+e_1+e_2}{4g(g-1)}\bar{\omega}_a^2.
\end{aligned}$$

将其与上述下界结合，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{2g-2}{g}\left((nd_1+e_1)|P_1|^2 + (nd_2+e_2)|P_2|^2\right) - (4g-4)nd\langle P_1,P_2\rangle \\
\geq & -\left(\frac{ng(g+1)d_1d^2}{4(g-1)(d_1d_2-gd^2)} + 6.3\cdot 10^{14} g^{\frac{14}{3}}(2nd_1+2nd_2+4gnd+e_1+e_2) + \frac{nd_1+nd_2-2gnd+e_1+e_2}{4g(g-1)}\right)\bar{\omega}_a^2 \\
\geq & -\left(\frac{ng(g+1)d_1d^2}{4(g-1)(d_1d_2-gd^2)} + 6.31\cdot 10^{14} g^{\frac{14}{3}}(2nd_1+2nd_2+4gnd+e_1+e_2)\right)\bar{\omega}_a^2.
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\frac{2g-2}{g}\left((d_1+\frac{e_1}{n})|P_1|^2 + (d_2+\frac{e_2}{n})|P_2|^2\right) - (4g-4)d\langle P_1,P_2\rangle \\
\geq & -\left(\frac{g(g+1)d_1d^2}{4(g-1)(d_1d_2-gd^2)} + 6.31\cdot 10^{14} g^{\frac{14}{3}}(2d_1+2d_2+4gd+\frac{e_1}{n}+\frac{e_2}{n})\right)\bar{\omega}_a^2.
\end{aligned}$$

Dyson 引理

与 Vojta 最初的证明一样，我们使用以下 Dyson 引理来界定 e_1 和 e $_2$.

定理 3.11 (Vojta [Voj89]). 设 K 是特征 0 的域， C 是亏格为 $g \geq 2$ 的曲线，定义在 K上。设 s 是线丛 L 上的一个非零截面，该线丛定义在 C^2上。假设 L 在投影映射 $m_1 > 0$ (分别在 $m_2 > 0$ 的纤维上，其次数为 $p_2 : C^2 \to C$ (分别为 $p_1 : C^2 \to C$) 。记函数

$$V(t) = \int_{0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1,\ x+y\leq t} dxdy, \quad t \geq 0.$$

则对任意 $P \in C^2(K)$ ，存在可容许对 (e_1, e_2) 使得

$$V\left(\frac{e_1}{m_1} + \frac{e_2}{m_2}\right) \leq \frac{L^2}{2m_1m_2} + \frac{m_2}{2m_1}(2g-1).$$

将 Dyson 引理应用于我们的 nL 的截面 s。在此情形下， $m_i = (2g-2)nd_i$。于是 Dyson 引理给出一个可容许对 (e_1, e_2)，使得

$$V\left(\frac{e_1}{(2g-2)nd_1} + \frac{e_2}{(2g-2)nd_2}\right) \leq \frac{d_1d_2 - gd^2}{d_1d_2} + \frac{d_2}{2d_1}(2g-1).$$

回顾

$$d_1 = \left\lfloor \sqrt{g + \frac{1}{10^5 g}} \frac{|P_2|}{|P_1|} d \right\rfloor, \quad d_2 = \left\lfloor \sqrt{g + \frac{1}{10^5 g}} \frac{|P_1|}{|P_2|} d \right\rfloor.$$

我们有

$$\lim_{d\to\infty} \left(\frac{d_1d_2 - gd^2}{d_1d_2} + \frac{d_2}{2d_1}(2g-1) \right) = \frac{1}{10^5g^2+1} + \frac{(2g-1)|P_1|^2}{2|P_2|^2} < \frac{1}{10^5g^2+1} + \frac{2g-1}{2\cdot 10^{10}g^5} < \frac{1}{10^5g^2}.$$

因此，对充分大的 d，我们有

$$V\left(\frac{e_1}{(2g-2)nd_1} + \frac{e_2}{(2g-2)nd_2}\right) < \frac{1}{10^5g^2}.$$

由定义，函数 $V(t)$ 是递增的，且对 $0 \leq t \leq 1$ 有 $V(t) = \frac{t^2}{2}$。由此可得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{e_1}{(2g-2)nd_1} + \frac{e_2}{(2g-2)nd_2}\right)^2 \leq \frac{1}{10^5g^2},$$

因此

$$\frac{e_1}{nd_1} + \frac{e_2}{nd_2} \leq \frac{g-1}{(50\sqrt{5})g}.$$

As

$$d_1 \leq \sqrt{g + \frac{1}{10^5 g}} \frac{|P_2|}{|P_1|} d, \quad d_2 \leq \sqrt{g + \frac{1}{10^5 g}} \frac{|P_1|}{|P_2|} d,$$

我们进一步得到

$$\frac{e_1}{n}\frac{|P_1|}{|P_2|} + \frac{e_2}{n}\frac{|P_2|}{|P_1|} \leq \frac{g-1}{(50\sqrt{5})g} \cdot d\sqrt{g + \frac{1}{10^5 g}} \leq \frac{1}{50\sqrt{5}} \cdot (d_1+1)\frac{|P_1|}{|P_2|}.$$

这里，当 d 充分大时，第二个不等式成立。因此，最终得到

$$\frac{e_1|P_1|^2 + e_2|P_2|^2}{n} \leq \frac{(d_1+1)|P_1|^2}{50\sqrt{5}},$$

and

$$\frac{e_1+e_2}{n} \leq \frac{d_1+1}{50\sqrt{5}} \leq 0.01(d_1+1).$$

回到定理 3.11之前的高度不等式。根据 $(e_1,\ e_2)$ 的界，我们进一步得到

$$\begin{aligned}&\frac{2g-2}{g}\left(d_1\left(1+\frac{1}{50\sqrt{5}}\right)|P_1|^2+\frac{|P_1|^2}{50\sqrt{5}}+d_2|P_2|^2\right)-(4g-4)d\langle P_1,P_2\rangle\\ \geq\ &-\left(\frac{g(g+1)d_1d^2}{4(g-1)(d_1d_2-gd^2)}+6.31\cdot 10^{14}g^{\frac{14}{3}}(2.01d_1+2d_2+4gd+0.01)\right)\bar{\omega}_a^2.\end{aligned}$$

将不等式除以 d 并令 $d\to\infty$。我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{2g-2}{g}\left(2+\frac{1}{50\sqrt{5}}\right)\sqrt{g+\frac{1}{10^5g}}|P_1||P_2|-(4g-4)\langle P_1,P_2\rangle\\ \geq\ &-\left(\frac{10^5g^2(g+1)}{4(g-1)}\sqrt{g+\frac{1}{10^5g}}\frac{|P_2|}{|P_1|}+6.31\cdot 10^{14}g^{\frac{14}{3}}\left(2.01\sqrt{g+\frac{1}{10^5g}}\frac{|P_2|}{|P_1|}+2\sqrt{g+\frac{1}{10^5g}}\frac{|P_1|}{|P_2|}+4g\right)\right)\bar{\omega}_a^2\\ \geq\ &-6.31\cdot 10^{14}g^{\frac{14}{3}}\left(2.011\sqrt{g+\frac{1}{10^5g}}\frac{|P_2|}{|P_1|}+2\sqrt{g+\frac{1}{10^5g}}\frac{|P_1|}{|P_2|}+4g\right)\bar{\omega}_a^2\\ =\ &-6.31\cdot 10^{14}g^{\frac{14}{3}}\left(2.011\sqrt{g+\frac{1}{10^5g}}+2\sqrt{g+\frac{1}{10^5g}}\frac{|P_1|^2}{|P_2|^2}+4g\frac{|P_1|}{|P_2|}\right)\cdot\frac{|P_2|}{|P_1|}\bar{\omega}_a^2.\end{aligned}$$

根据定理3.1,

$$\frac{|P_1|}{|P_2|}\leq 10^{-5}g^{-\frac{5}{2}},\quad \bar{\omega}_a^2\leq(1.44)^{-1}\cdot 10^{-18}g^{-\frac{14}{3}}|P_1|^2.$$

那么，上述不等式意味着

$$\begin{aligned}&\frac{2g-2}{g}\left(2+\frac{1}{50\sqrt{5}}\right)\sqrt{g+\frac{1}{10^5g}}|P_1||P_2|-(4g-4)\langle P_1,P_2\rangle\\ \geq\ &-6.31\cdot 10^{14}g^{\frac{14}{3}}\cdot\left(2.012\sqrt{g+\frac{1}{10^5g}}\right)\cdot(1.44)^{-1}\cdot 10^{-18}g^{-\frac{14}{3}}\cdot|P_1|\cdot|P_2|\\ \geq\ &-\left(8.82\cdot 10^{-4}\sqrt{g+\frac{1}{10^5g}}\right)|P_1|\cdot|P_2|.\end{aligned}$$

这进一步意味着

$$\begin{aligned}\frac{\langle P_1,P_2\rangle}{|P_1||P_2|}&\leq\frac{1}{4g-4}\left(\frac{2g-2}{g}(2+\frac{1}{50\sqrt{5}})\sqrt{g+\frac{1}{10^5g}}+8.82\cdot 10^{-4}\sqrt{g+\frac{1}{10^5g}}\right)\\ &\leq\frac{1}{4g-4}\cdot\frac{2g-2}{g}\left(2+\frac{1}{50\sqrt{5}}+8.82\cdot 10^{-4}\right)\sqrt{g+\frac{1}{10^5g}}\\ &\leq\frac{1.00492}{g}\sqrt{g+\frac{1}{10^5g}}.\end{aligned}$$

注意

$$\sqrt{g+\frac{1}{10^5g}}=\sqrt{g}\sqrt{1+\frac{1}{10^5g^2}}\leq\sqrt{g}\left(1+\frac{1}{2\cdot 10^5g^2}\right)\leq(1+10^{-5})\sqrt{g}.$$

我们得到

$$\cos\angle(P_1,P_2)=\frac{\langle P_1,P_2\rangle}{|P_1||P_2|}\leq\frac{1.00492}{g}\cdot(1+10^{-5})\sqrt{g}\leq\sqrt{\frac{1.01}{g}}.$$

这就完成了定理 3.1 的证明。

3.6 函数域

作为定理 3.1 的几何类比，我们有以下关于特征 0 函数域的定理。由于不存在阿基米德赋值，其常数优于算术情形。另一方面，与 Yu [Yu25，定理 3.1], 相比，当前定理通过假设更强的条件，给出了更精确的结果。

定理 3.12. 设 K 是域 k 上的一元函数域，其特征为0。设 C 是 K上的亏格为 $g \geq 2$ 的曲线。设 $P_1, P_2 \in C(K)$ 是不同的有理点。假设

$$|P_1| \geq 10^4 g\sqrt{\bar{\omega}_a^2}$$

and

$$|P_2| \geq 10^5 g^{\frac{5}{2}} |P_1| > 0.$$

Then

$$\cos \angle(P_1, P_2) \leq \sqrt{\frac{1.01}{g}}.$$

证明。 这里我们略述证明。仍考虑阿代尔线丛

$$\overline{L} = d_1 p_1^* \bar{\omega}_a + d_2 p_2^* \bar{\omega}_a + d((2g-2)\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a - p_1^* \bar{\omega}_a - p_2^* \bar{\omega}_a)$$

在 C^2上。这里 d 是一个较大的正整数，我们仍取

$$d_1 = \left\lceil \sqrt{g + \frac{1}{10^5 g}} \frac{|P_2|}{|P_1|} d \right\rceil, \quad d_2 = \left\lceil \sqrt{g + \frac{1}{10^5 g}} \frac{|P_1|}{|P_2|} d \right\rceil.$$

我们仍有一个小截面 s 属于 nL，如命题 3.7中所述。这仍然给出一个截面 s° 属于

$$\overline{L}^\circ = (n\overline{L} + e_1 p_1^* \bar{\omega}_a + e_2 p_2^* \bar{\omega}_a)|_P.$$

由于所有赋值都是非阿基米德的，我们有

$$\begin{aligned} h_{\overline{L}^\circ}(P) = & -\sum_{v \in M_K} \log \|s^\circ(P)\|_v \\ \geq & -\sum_{v \in M_K} \log \|s\|_{n\overline{L}, v, \sup} - \frac{15}{4}(e_1 + e_2)\varphi(C) \\ \geq & -\frac{ng(g+1)d_1 d^2}{4(g-1)(d_1 d_2 - gd^2)} \bar{\omega}_a^2 - \frac{75}{8}(e_1 + e_2)\bar{\omega}_a^2. \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} & \frac{2g-2}{g}((nd_1 + e_1)|P_1|^2 + (nd_2 + e_2)|P_2|^2) - (4g-4)nd\langle P_1, P_2\rangle \\ \geq & -\frac{ng(g+1)d_1 d^2}{4(g-1)(d_1 d_2 - gd^2)} \bar{\omega}_a^2 - \left(\frac{nd_1 + nd_2 + e_1 + e_2}{4g(g-1)} + \frac{75}{8}(e_1 + e_2) \right) \bar{\omega}_a^2. \end{aligned}$$

我们仍有 sumed $|P_2| \geq 10^5 g^{\frac{5}{2}} |P_1|$。应用 Dyson 引理。对于充分大的 d，我们仍然有 e

$$\frac{e_1 |P_1|^2 + e_2 |P_2|^2}{n} \leq \frac{d_1 |P_1|^2}{50\sqrt{5}},$$

and

$$\frac{e_1 + e_2}{n} \leq \frac{d_1}{50\sqrt{5}} \leq 0.01 d_1.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\frac{2g-2}{g}\left(2+\frac{1}{50\sqrt{5}}\right)\sqrt{g+\frac{1}{10^5 g}}|P_1||P_2|-(4g-4)\langle P_1,P_2\rangle\\
\geq&-\left(\frac{10^5 g^2(g+1)}{4(g-1)}\sqrt{g+\frac{1}{10^5 g}}\frac{|P_2|}{|P_1|}+\left(\frac{1.01}{4g(g-1)}+\frac{3}{32}\right)\sqrt{g+\frac{1}{10^5 g}}\frac{|P_2|}{|P_1|}+\frac{1}{4g(g-1)}\sqrt{g+\frac{1}{10^5 g}}\frac{|P_1|}{|P_2|}\right)\bar{\omega}_a^2\\
\geq&-\left(\frac{10^5 g^2(g+1)}{4(g-1)}+\left(\frac{1.01}{4g(g-1)}+\frac{3}{32}\right)+\frac{10^{-10}g^{-5}}{4g(g-1)}\right)\sqrt{g+\frac{1}{10^5 g}}\frac{|P_2|}{|P_1|}\bar{\omega}_a^2\\
\geq&-\left(\frac{10^5 g^2(g+1)}{4(g-1)}+0.23\right)\sqrt{g+\frac{1}{10^5 g}}\frac{|P_2|}{|P_1|}\bar{\omega}_a^2\\
\geq&-\left(\frac{10^5 g^2(g+1)}{4(g-1)}+0.23\right)\sqrt{g+\frac{1}{10^5 g}}\cdot 10^{-8}g^{-2}|P_1|\cdot|P_2|\\
\geq&-6\cdot 10^{-4}\sqrt{g+\frac{1}{10^5 g}}\cdot|P_1|\cdot|P_2|.
\end{aligned}$$

这里，第二个不等式用到了 $|P_2|\geq 10^5 g^{\frac{5}{2}}|P_1|$，第四个不等式用到了 $|P_1|\geq 10^4 g\sqrt{\bar{\omega}_a^2}$.
证明的其余部分与定理 3.1 的证明相同。 □

我们还有定理3.6中定量 Mumford 不等式的以下几何类比。

定理 3.13。 设 K 是特征为0的域 k 上的一元函数域。设 C 是特征为 0 的函数域 K 上亏格为 $g\geq 2$ 的曲线。设 P_1、$P_2\in C(K)$ 为不同的有理点。假设

$$|P_1|\geq 10^4 g^{\frac{7}{3}}\sqrt{\bar{\omega}_a^2}.$$

and

$$|P_1|\leq|P_2|\leq 1.15|P_1|.$$

Then

$$\cos\angle(P_1,P_2)\leq\frac{1.01}{g}.$$

证明。 证明与定理 3.6 类似。事实上，定理 3.4 和定理 2.4 推出

$$h_{\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a}(P)=\sum_{v\in M_K}G_{a,v}(P_1,P_2)\geq-\frac{15}{4}\sum_{v\in M_K}\varphi(C_{K_v})\geq-\frac{45}{4}\bar{\omega}_a^2.$$

由定理 2.7，可得

$$\frac{1}{g}(|P_1|^2+|P_2|^2)-2\langle P_1,P_2\rangle\geq-\frac{45}{4}\bar{\omega}_a^2.$$

由 $|P_1|\geq 10^4 g\sqrt{\bar{\omega}_a^2}$，我们得到

$$\frac{1+10^{-7}}{g}|P_1|^2+\frac{1}{g}|P_2|^2-2\langle P_1,P_2\rangle\geq 0.$$

证明的其余部分与定理 3.6的证明相同。 □

4 量化 Bogomolov 猜想

回忆一下，代数点 $|Q|=\sqrt{\hat{h}(\overline{Q})_K}$的范数以及代数点 $\angle(P_1,P_2)$ 的夹角， Q,P_1,P_2 在定义于数域 C上的曲线中， K是根据奈伦–泰特高度定义的，见 §2.1。本节的目标是证明以下定量 Bogomolov 猜想。

定理 4.1 (定理1.11)。 设 K 是一个数域， C 是一个亏格为 $g \geq 2$ 、定义于 K上的曲线，而 J 是 C的雅可比簇。

(1) 对任意 $0 \leq r < \sqrt{\frac{1}{8g}}$与 $x \in J(K)_{\mathbb{R}}$，

$$\#\{P \in C(\overline{K}) : |P - x| \leq r\sqrt{\bar{\omega}_a^2}\} < \frac{3.2 \cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}}}{1 - 8gr^2} \left(1 + 10^{-6} \log\left(\frac{1}{1 - 8gr^2}\right)\right).$$

(2) 设 $\kappa > 1$ 与 $\theta \in (0, \pi/2)$ 为满足

$$g \cos^2 \theta > \frac{(\kappa + 1)^2}{4\kappa} + \frac{1}{3.2 \cdot 10^{11} g^{\frac{11}{3}}}.$$

则对任意非零的 $x \in J(K)_{\mathbb{R}}$，

$$\#\{P \in C(\overline{K}) : |x| \leq |P| \leq \kappa|x|, \angle(P, x) \leq \theta\} \leq 3.2 \cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}}.$$

如引言中所述，该定理的第(1)部分在常数非显式的情形下，即为一致Bogomolov猜想，由Dimitrov–Gao–Habegger [DGH21]与K¨uhne [Kuh21], 以及Yuan [Yua24]用不同方法证明。该定理的第(2)部分受到[Yua24] 主要定理中额外项的启发。

第(1)部分的几何版本最初由Looper–Silverman–Wilms [LSW25]证明。我们当前的算术版本遵循 [LSW25] 的框架，通过应用由 φ不变量给出的Faltings–Elkies不变量的下界，该不变量来自本文第二部分。

回顾一下，Manin–Mumford 猜想由 Raynaud 证明 [Ray83a，Ray83b]。取 $r = 0$ 定理 4.1中的情形，我们得到 Manin–Mumford 猜想的以下定量版本。

定理 4.2 （Manin–Mumford 猜想的定量版本）。设 K 是特征为0的域， C 是亏格为$g \geq 2$ 的曲线，定义在 K 上， J 是 C的雅可比簇。对于 C上的任意次数为1 的线丛 α，

$$\#\big((C(K) - \alpha) \cap J(K)_{\mathrm{tor}}\big) \leq 3.2 \cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}}.$$

证明。通过采用 [DGH22，引理 3 中的约化论证，1],我们可以假设 K 是一个数域。于是该定理就是定理 4.1的情形。 □

4.1 第一部分

证明定理 4.1 的思路是找到 $\sum_{1 \leq i > j \leq n} |P_i - P_j|^2$ 的一个合适下界，以此界定数目 n。下面的二次恒等式摘自 Looper–Silverman–Wilms [LSW25]的证明。

引理 4.3 （二次恒等式）。 对于 $P_1, P_2, \ldots, P_n \in C(K)$，

$$\frac{4(n + g - 1)(g - 1)}{n - 1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |P_i - P_j|^2 = \frac{4ng(g - 1)}{n - 1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} h_{\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a}(P_i, P_j) + \frac{n^2}{2}\bar{\omega}_a^2 + \left|(2g - 2)\sum_{i=1}^{n} P_i - n\omega\right|^2.$$

证明。 存在一个有限扩张 K'/K，使得 $P_1, P_2, \ldots, P_n \in C(K')$。对 C 进行基变换到 K' 后，目标等式中的每一项都乘以 $[K' : K]$。因此不妨设 $P_1, P_2, \ldots, P_n \in C(K)$。

根据算术霍奇指标定理（定理 2.5）和算术伴随公式（定理2.6），我们有

$$\begin{aligned} 2|P_i - P_j|^2 &= -(\overline{\mathcal{O}}(P_i)_a - \overline{\mathcal{O}}(P_j)_a)^2 \\ &= -\overline{\mathcal{O}}(P_i)_a^2 - \overline{\mathcal{O}}(P_j)_a^2 + 2\overline{\mathcal{O}}(P_i)_a \cdot \overline{\mathcal{O}}(P_j)_a \\ &= \bar{\omega}_a \cdot \overline{\mathcal{O}}(P_i)_a + \bar{\omega}_a \cdot \overline{\mathcal{O}}(P_j)_a + 2h_{\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a}(P_i, P_j). \end{aligned}$$

这里我们还用到了定理 2.7(2) 的第一个等式。这给出

$$\sum_{1\le i<j\le n}|P_i-P_j|^2=\frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{n}\bar{\omega}_a\cdot\overline{\mathcal{O}}(P_i)_a+\sum_{1\le i<j\le n}h_{\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a}(P_i,P_j).$$

同样,

$$\begin{aligned}2\left|(2g-2)\sum_{i=1}^{n}P_i-n\omega\right|^2 &= -\left((2g-2)\sum_{i=1}^{n}\overline{\mathcal{O}}(P_i)_a-n\bar{\omega}_a\right)^2\\ &=(2g-2)(2n+2g-2)\sum_{i=1}^{n}\bar{\omega}_a\cdot\overline{\mathcal{O}}(P_i)_a-2(2g-2)^2\sum_{1\le i<j\le n}h_{\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a}(P_i,P_j)-n^2\bar{\omega}_a^2.\end{aligned}$$

消去项 $\sum_i \bar{\omega}_a\cdot\mathcal{O}(P_i)_a$ ，得到等式。 □

现在我们准备证明定理 4.1 的第一部分。下文中，应用广义平行四边形法则以获得更好的估计这一思路，是 Pascal Autissier 向作者提出的。

定理 *4.1*（*1*）的证明。设 P_1、$P_2\ldots$、$P_n\in C$（K）是满足 $|P_i-x|^2\le r^2\bar{\omega}_a^2$ 的互异点。这很容易推出

$$|P_i-P_j|^2\le(|P_i-x|+|P_j-x|)^2\le 4r^2\bar{\omega}_a^2$$

从而

$$\sum_{1\le i<j\le n}|P_i-P_j|^2\le 2n(n-1)r^2\bar{\omega}_a^2.$$

事实上，广义平行四边形法则

$$\sum_{1\le i<j\le n}|P_i-P_j|^2=n\sum_{i=1}^{n}|P_i-x|^2-\left|\sum_{i=1}^{n}P_i-nx\right|^2$$

推出更强的界

$$\sum_{1\le i<j\le n}|P_i-P_j|^2\le n^2r^2\bar{\omega}_a^2.$$

根据引理 4.3，并略去非负项

$$\left|(2g-2)\sum_{i=1}^{n}P_i-n\omega\right|^2\ge 0,$$

我们得到一个二次不等式

$$\left(\frac{4n^2(n+g-1)(g-1)}{n-1}r^2-\frac{n^2}{2}\right)\bar{\omega}_a^2\ge\frac{4ng(g-1)}{n-1}\sum_{1\le i<j\le n}h_{\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a}(P_i,P_j).$$

我们需要证明

$$n<\frac{3.2\cdot 10^{11}g^{\frac{17}{3}}}{1-8gr^2}\left(1+10^{-6}\log\left(\frac{1}{1-8gr^2}\right)\right).$$

I对于 $n<g^2$，我们没有什么需要证明的。以下假设 $n\ge g^2$ ，由此可得

$$\frac{(n+g-1)(g-1)}{n-1}<g.$$

于是，二次不等式推出

$$\frac{(8gr^2-1)n^2}{2}\bar{\omega}_a^2 \geq \frac{4ng(g-1)}{n-1}\sum_{1\leq i<j\leq n} h_{\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a}(P_i,P_j).$$

根据定理 3.3 中全局稀疏性的界，

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} h_{\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a}(P_i,P_j) \geq -\left(1.2\cdot 10^4 g^{\frac{1}{3}} n\log n + 3.96\cdot 10^{10} g^{\frac{11}{3}} n\right)\bar{\omega}_a^2.$$

由此可得

$$\frac{(8gr^2-1)n^2}{2}\bar{\omega}_a^2 \geq -\frac{4ng(g-1)}{n-1}\left(1.2\cdot 10^4 g^{\frac{1}{3}} n\log n + 3.96\cdot 10^{10} g^{\frac{11}{3}} n\right)\bar{\omega}_a^2.$$

由于 $\bar{\omega}_a^2>0$，我们得到

$$1-8gr^2 \leq \frac{8g(g-1)}{n-1}\left(1.2\cdot 10^4 g^{\frac{1}{3}}\log n + 3.96\cdot 10^{10} g^{\frac{11}{3}}\right) < 10^5 g^{\frac{7}{3}}\frac{\log n}{n-1} + 3.17\cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}}\frac{1}{n-1}.$$

记为 $A=(1-8gr^2)^{-1}$。于是有

$$10^5 g^{\frac{7}{3}} A\frac{\log n}{n-1} + 3.17\cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}} A\frac{1}{n-1} > 1.$$

我们需要证明这意味着

$$n < 3.2\cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}} A(1+10^{-6}\log A).$$

This 是显然的，但我们给出证明以核对常数。事实上，对于 $n>4$，我们有

$$\frac{1}{n-1} < \frac{\log n}{n-1} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

由此得到

$$1 < 10^5 g^{\frac{7}{3}} A\frac{1}{\sqrt{n}} + 3.17\cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}} A\frac{1}{\sqrt{n}} < 3.18\cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}} A\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Then

$$\sqrt{n} < 3.18\cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}} A$$

and

$$\log n < 2\log(3.18\cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}} A).$$

代回原不等式，得到

$$10^5 g^{\frac{7}{3}}\cdot 2\log(3.18\cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}} A)\cdot A\frac{1}{n-1} + 3.17\cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}} A\frac{1}{n-1} > 1.$$

由此可得

$$\begin{aligned} n-1 &< 10^5 g^{\frac{7}{3}}\cdot 2\log(3.18\cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}} A)\cdot A + 3.17\cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}} A \\ &< 10^5 g^{\frac{7}{3}}\cdot 2A\log A + 3.18\cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}} A \\ &< 3.18\cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}} A(1+10^{-6}\log A). \end{aligned}$$

这就完成了定理 4.1(1) 的证明。 □

4.2 第二部分

为了证明定理 4.1的第二部分，我们需要经典柯西–施瓦茨不等式的以下逆向版本。

引理 4.4. 对于 $\kappa > 1$ 和 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [1, \kappa]$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq \frac{(\kappa+1)^2}{4\kappa n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2.$$

证明. 对于 $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$(a_i - 1)(a_i - \kappa) \leq 0.$$

将它们求和可得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - (\kappa+1) \sum_{i=1}^{n} a_i + \kappa n \leq 0.$$

So

$$(\kappa+1)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \kappa n \right)^2 \geq 4\kappa n \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

□

定理 *4.1(2)* 的证明。 该证明仍基于二次恒等式。设 $P_1, P_2 \ldots, P_n \in C(K)$ 是满足以下条件的互异点

$$|x| \leq |P_i| \leq \kappa |x|, \quad \angle(P_i, x) \leq \theta.$$

在应用二次恒等式之前，我们先断言

$$\left| (2g-2) \sum_{i=1}^{n} P_i - n\omega \right|^2 \geq \frac{(2g-2)^2 \cos^2\theta}{\gamma - \cos^2\theta} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |P_i - P_j|^2.$$

这里为简便起见，记作 $\gamma = \frac{(\kappa+1)}{4\kappa}^2$。

我们先证明该断言，它也可以写作

$$(\gamma - \cos^2\theta) \left| \sum_{i=1}^{n} P_i \right|^2 \geq (\cos^2\theta) \sum_{1 \leq i < j \leq n} |P_i - P_j|^2.$$

根据广义平行四边形定律

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |P_i - P_j|^2 = n \sum_{i=1}^{n} |P_i|^2 - \left| \sum_{i=1}^{n} P_i \right|^2,$$

只需证明

$$\gamma \left| \sum_{i=1}^{n} P_i \right|^2 \geq n(\cos^2\theta) \sum_{i=1}^{n} |P_i|^2.$$

我们有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} P_i \right|^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} |P_i| \cos \angle(P_i, x) \right)^2 \geq (\cos^2\theta) \left(\sum_{i=1}^{n} |P_i| \right)^2.$$

这里第一个不等式成立，是因为将 P_i 投影到 x 的方向上，得到的结果为 $|P_i|\cos\angle(P_i,x)$ 倍的 $x/|x|$。于是，该命题归结为

$$\gamma\left(\sum_{i=1}^{n}|P_i|\right)^2 \geq n\sum_{i=1}^{n}|P_i|^2.$$

这由引理 4.4 和 $|x|\leq|P_i|\leq\kappa|x|$得出。断言得证。

为证明定理 4.1(2)，我们将分两种情况讨论。若

$$\frac{(2g-2)^2\cos^2\theta}{\gamma-\cos^2\theta}\geq\frac{4(n+g-1)(g-1)}{n-1},$$

那么断言意味着

$$\left|(2g-2)\sum_{i=1}^{n}P_i-n\omega\right|^2\geq\frac{4(n+g-1)(g-1)}{n-1}\sum_{1\leq i<j\leq n}|P_i-P_j|^2.$$

在这种情况下，引理 4.3 意味着

$$-\frac{n^2}{2}\bar{\omega}_a^2\geq\frac{4ng(g-1)}{n-1}\sum_{1\leq i<j\leq n}h_{\overline{\mathcal{O}}(\Delta)_a}(P_i,P_j),$$

于是，定理 4.1(1) 对于 $r=0$ 的证明恰好给出

$$n\leq 3.2\times10^{11}g^{\frac{17}{3}}.$$

另一方面，若

$$\frac{(2g-2)^2\cos^2\theta}{\gamma-\cos^2\theta}<\frac{4(n+g-1)(g-1)}{n-1},$$

then

$$\frac{(g-1)\cos^2\theta}{\gamma-\cos^2\theta}<\frac{g}{n-1}+1,$$

因此

$$n<\frac{g(\gamma-\cos^2\theta)}{g\cos^2\theta-\gamma}+1.$$

该假设

$$g\cos^2\theta>\gamma+(3.2\cdot10^{11}g^{\frac{11}{3}})^{-1}$$

进一步推出

$$n<\frac{g(g\cos^2\theta-\cos^2\theta)}{(3.2\cdot10^{11}g^{\frac{11}{3}})^{-1}}+1<g(g-1)\cdot3.2\cdot10^{11}g^{\frac{11}{3}}+1<3.2\cdot10^{11}g^{\frac{17}{3}}.$$

这证明了定理 4.1(2)。 □

注 4.5。 我们还可以证明如下显式结果，其形式为 [Yua24，定理 1。1]。对于 α 上次数为 1 的任意线丛 C，

$$\#\left\{P\in C(\overline{K}):\hat{h}(P-\alpha)\leq\frac{1}{32g}\bar{\omega}_a^2+\frac{g-2}{2g-2}\hat{h}\left(\alpha-\frac{\omega}{2g-2}\right)\right\}<6.5\cdot10^{11}g^{\frac{17}{3}}.$$

由于后文不会用到，我们省略细节。

4.3 函数域

现在我们给出定理 4.1 在函数域上的如下类比。定理的第 (1) 部分基本归功于 Looper–Silverman–Wilms（参见 [LSW25，定理 1。3]）。请注意，同上引文中的典范高度是我们的两倍，因此从这个意义上说，我们的陈述略强于同上引文中的结果。这一改进得益于采用了 Autissier 在数域情形的证明中所建议的广义平行四边形法则。第 (2) 部分可以用与数域情形相同的方法证明。

定理 4.6。 设 K 是域 k上的一元函数域， C 是 K上的亏格为$g \geq 2$ 的非等构曲线， J 是 C的雅可比簇。

(1) 对于 $0 \leq r < \sqrt{\frac{1}{8g-8}}$ 以及 $x \in J(K)_{\mathbb{R}}$,

$$\#\{P \in C(\overline{K}) : |P - x| \leq r\sqrt{\bar{\omega}_a^2}\} \leq \frac{1}{1 - 8gr^2} \frac{16g^4 + 36g^2 - 26g - 2}{(g-1)^2} + 1.$$

(2) 设 $\kappa > 1$ 和 $\theta \in (0, \pi/2)$。假设

$$g \cos^2 \theta > \frac{(\kappa+1)^2}{4\kappa} + \frac{1}{16}.$$

那么对于任意 $x \in J(\overline{K})_{\mathbb{R}}$,

$$\#\{P \in C(\overline{K}) : |x| \leq |P| \leq \kappa|x|, \angle(P, x) \leq \theta\} \leq 16g^2 + 32g + 124.$$

5 点计数

本节的目标是证明本文的以下主要定理。

定理 5.1 (定理 1.2)**.** 设 K 是特征 0， C 是亏格为 $g \geq 2$ 的曲线，定义在 K上，且J 是 C的雅可比簇。对于 α 上次数为 1 的任意线丛 C ，以及任意有限秩子群 $\Lambda \subset J(K)$ ，

$$\#((C(K) - \alpha) \cap \Lambda) \leq 10^{13} g^8 \cdot \min\left\{1 + \frac{5}{4\sqrt{g}}, 1 + \frac{3\log g}{g}\right\}^{\mathrm{rk}(\Lambda)}.$$

正如我们在引言中提到的，这为 Vojta [Voj91], Dimitrov–Gao–Habegger [DGH21], 和 K¨uhne [Kuh21]证明的一致莫德尔猜想给出了显式常数。我们的 Vojta 不等式、Mumford 不等式和一致莫德尔猜想的定量版本蕴含当前定理具有显式常数，这并不令人意外。尽管如此，我们仍需付出大量努力，才能将 Vojta 常数降低到当前形式。

5.1 不同高度范围

现在我们概述证明定理5.1的思路。通过约化论证，如同 [DGH22，引理 3.1], 我们可以假设 Λ 是有限生成的，且 K 是一个数域。情形 $\mathrm{rk}(\Lambda) = 0$ 正是定量 Manin–Mumford 定理，即定理 4.2。以下我们假设 $\mathrm{rk}(\Lambda) \geq 1$ 。

经过对 K 作有限域扩张后，我们可以假设在 C 上存在一个次数为 1 的线丛 α_0 ，并且有一个同构 $(2g-2)\alpha_0 \cong \omega$。那么我们只需证明更强的界

$$\#((C(K) - \alpha) \cap \Lambda) \leq 10^{13} g^8 \cdot \min\left\{1 + \frac{5}{4\sqrt{g}}, 1 + \frac{3\log g}{g}\right\}^{\mathrm{rk}(\Lambda)-1},$$

在额外假设 $\alpha = \alpha_0$ 的条件下。事实上，令 Λ' 为由 Λ 和 $\alpha - \alpha_0$ 生成的 $J(K)$ 的子群。那么 $\mathbf{rk}(\Lambda') \leq \mathbf{rk}(\Lambda) + 1$，并且

$$(C(K) - \alpha) \cap \Lambda \subset (C(K) - \alpha) \cap \Lambda' = (C(K) - \alpha_0) \cap \Lambda'.$$

因此只需证明

$$\#((C(K) - \alpha_0) \cap \Lambda') \leq 10^{13} g^8 \cdot \min\left\{1 + \frac{5}{4\sqrt{g}}, 1 + \frac{3\log g}{g}\right\}^{\mathrm{rk}(\Lambda')-1}.$$

记 $n = \mathbf{rk}(\Lambda)$。我们将 $C - \alpha_0$ 简写为 C，将其视为 J 的一个子簇。通过记号滥用，我们进一步将 $C(K) \cap \Lambda$ 简写为 $C \cap \Lambda$。我们将集合 $C \cap \Lambda$ 分为以下三个部分：

$$(C \cap \Lambda)_{\mathrm{small}} = \left\{P \in C \cap \Lambda : |P| \leq \sqrt{\frac{\bar{\omega}_a^2}{16g}}\right\},$$

$$(C \cap \Lambda)_{\mathrm{medium}} = \left\{P \in C \cap \Lambda : \sqrt{\frac{\bar{\omega}_a^2}{16g}} < |P| \leq 1.2 \cdot 10^9 g^{\frac{7}{3}} \sqrt{\bar{\omega}_a^2}\right\},$$

$$(C \cap \Lambda)_{\mathrm{large}} = \left\{P \in C \cap \Lambda : |P| > 1.2 \cdot 10^9 g^{\frac{7}{3}} \sqrt{\bar{\omega}_a^2}\right\}.$$

我们对它们得到的界为

$$\#(C \cap \Lambda)_{\mathrm{small}} \leq 6.5 \cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}},$$

$$\#(C \cap \Lambda)_{\mathrm{medium}} \leq 1.64 \cdot 10^{13} g^7 \left(1 + \frac{5}{2\sqrt{2}g}\right)^{n-1},$$

$$\#(C \cap \Lambda)_{\mathrm{large}} \leq 3.4 \cdot 10^6 g^2 \left(1 + \frac{5}{4\sqrt{g}}\right)^{n-1}.$$

它们的和给出

$$\#(C \cap \Lambda) \leq 2 \cdot 10^{13} g^7 \left(1 + \frac{5}{4\sqrt{g}}\right)^{n-1} \leq 10^{13} g^8 \left(1 + \frac{5}{4\sqrt{g}}\right)^{n-1}.$$

此外，对于 $g \geq 142$ 和 $n \geq 1$，我们有一个精细上界

$$\#(C \cap \Lambda)_{\mathrm{large}} \leq 2.4 \cdot 10^4 g^8 \left(1 + \frac{3\log g}{g}\right)^{n-1}.$$

将其代入上述大点的上界，我们对于 $g \geq 142$ 有：

$$\#(C \cap \Lambda) \leq 10^{13} g^8 \left(1 + \frac{3\log g}{g}\right)^{n-1}.$$

注意，对于整数 $g \geq 2$,

$$1 + \frac{3\log g}{g} \leq 1 + \frac{5}{4\sqrt{g}} \iff g \geq 142.$$

因此，这两种情形意味着对于 $g \geq 2$,

$$\#(C \cap \Lambda) \leq 10^{13} g^8 \cdot \min\left\{1 + \frac{5}{4\sqrt{g}}, 1 + \frac{3\log g}{g}\right\}^{n-1}.$$

因此，任务是证明不同高度范围的子集的界。注意，$\#(C \cap \Lambda)_{\mathrm{small}}$ 的界是定理4.1（1）结合 $r = \sqrt{\frac{1}{16g}}$ 的推论。下面我们将证明中等点的界以及大点的两个界。

5.2 中等点

对于任意 $0 < r < r'$，令

$$(C \cap \Lambda)_{r,r'} = \{P \in C \cap \Lambda : r < |P| \le r'\}$$

为内半径为 r、外半径为 r' 的球壳中的点集。我们将估计 $\#(C \cap \Lambda)_{r,\ r'}$。中等点集是以下特殊情形：

$$r = \sqrt{\frac{\bar{\omega}_a^2}{16g}}, \quad r' = 1.2 \cdot 10^9 g^{\frac{7}{3}} \sqrt{\bar{\omega}_a^2}.$$

We 由于覆盖，只需对某个 $\kappa > 1$ 以及所有 $r > 0$，给出 $\#(C \cap \Lambda)_{r,\ \kappa r}$ 的上界

$$(C \cap \Lambda)_{r,r'} \subset \bigcup_{i=1}^{\left\lceil \log_\kappa(\frac{r'}{r}) \right\rceil} (C \cap \Lambda)_{\kappa^{i-1}r, \kappa^i r}.$$

记 $n = \mathrm{rk}(\Lambda) \ge 1$。赋予范数 $|\cdot|$ 的空间 $\Lambda_{\mathbb{R}}$ 与欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 等距。记球面

$$S^{n-1} = \{x \in \Lambda_{\mathbb{R}} : |x| = 1\}.$$

现在，赋予 S^{n-1} 标准欧几里得测度 vol。

Take

$$\theta = \arccos \sqrt{\frac{1.13}{g}}, \quad \kappa = 2.$$

那么 $(\theta,\ \kappa)$ 满足定理 4.1(2) 的假设。对于任意 $P \in (C \cap \Lambda)_{r,\ \kappa r}$，令

$$\mathrm{cap}(P, \theta) = \{x \in \Lambda_{\mathbb{R}} : |x| = 1, \angle(x, P) \le \theta\}$$

是球面 S^{n-1} 上以 $\dfrac{P}{|P|}$ 为中心、角半径为 θ 的球冠。

对于任意 $s \in S^{n-1}$，$x = rs$ 的定理 4.1(2) 意味着，s 至多属于 $P \in (C \cap \Lambda)_{r,\ \kappa r}$ 个球冠 $\mathrm{cap}(P, \theta)$。换言之，在自然映射下

$$\coprod_{P \in (C \cap \Lambda)_{r,\kappa r}} \mathrm{cap}(P, \theta) \longrightarrow S^{n-1},$$

每个点至多有 $3.2 \cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}}$ 个原像。比较体积，可得

$$\#(C \cap \Lambda)_{r,\kappa r} \cdot \mathrm{vol}(\mathrm{cap}(P, \theta)) \le 3.2 \cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}} \mathrm{vol}(S^{n-1}).$$

总测度为

$$\mathrm{vol}(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

当 $n \ge 2$ 时，

$$\mathrm{vol}(\mathrm{cap}(P, \theta)) = \int_0^\theta \sin^{n-2}(t) \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} dt > \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\theta \sin^{n-2}(t) \cos t dt = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{\sin^{n-1}\theta}{n-1} = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} \sin^{n-1}\theta}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

这对于 $n = 1$ 也成立。因此

$$\#(C \cap \Lambda)_{r,\kappa r} \le 3.2 \cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}} \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\sin^{n-1}\theta} \le 3.2 \cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}} \frac{\sqrt{2\pi n}}{\sin^{n-1}\theta}.$$

这里最后一个不等式由 Wendel 经典不等式推出（参见 [Wen48]），

$$\Gamma(x+s) \le x^s \Gamma(x), \quad x>0,\ 0<s<1.$$

由此可得

$$\#(C\cap\Lambda)_{r,\kappa r} \le 3.2\cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}} \cdot \sqrt{2\pi n}\left(1-\frac{1.13}{g}\right)^{-\frac{n-1}{2}}.$$

为了进一步简化这个界，我们将多次用到以下基本事实。

引理 5.2. 对于任意 n、$t>0$ 和 $a>1$,

$$n^t \le \left(\frac{t}{e\log a}\right)^t a^n.$$

证明。 这很容易由.....推出

$$\frac{n\log a}{t} \le e^{\frac{n\log a}{t}-1} = \frac{a^{\frac{n}{t}}}{e}, \quad \forall n,t>0,\ a>1.$$

□

取 $t=\frac{1}{2}$ 和

$$a=\left(1+\frac{5}{2\sqrt{2}g}\right)\sqrt{1-\frac{1.13}{g}}.$$

它满足

$$e^{\frac{1}{eg}} \le a \le \sqrt{2}.$$

这里要证明第一个不等式，只需注意到对数 $a-\frac{1}{eg}$ 是关于$\frac{1}{g}$的凹函数。于是引理 5.2 推出

$$\sqrt{n} \le \left(\frac{1}{2e\log a}\right)^{\frac{1}{2}} a^n \le \sqrt{g}a^{n-1} = \sqrt{g}\left(1+\frac{5}{2\sqrt{2}g}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1.13}{g}\right)^{\frac{n-1}{2}}.$$

由此可得

$$\sqrt{2\pi n}\left(1-\frac{1.13}{g}\right)^{-\frac{n-1}{2}} \le \sqrt{2\pi g}\left(1+\frac{5}{2\sqrt{2}g}\right)^{n-1}.$$

因此,

$$\#(C\cap\Lambda)_{r,\kappa r} \le 3.2\cdot 10^{11} g^{\frac{17}{3}}\cdot\sqrt{2\pi g}\left(1+\frac{5}{2\sqrt{2}g}\right)^{n-1} \le 8.1\cdot 10^{11} g^{\frac{37}{6}}\left(1+\frac{5}{2\sqrt{2}g}\right)^{n-1}.$$

So

$$\#(C\cap\Lambda)_{r,r'} \le 8.1\cdot 10^{11} g^{\frac{37}{6}}\left(1+\frac{5}{2\sqrt{2}g}\right)^{n-1}\left\lceil\log_2(\frac{r'}{r})\right\rceil.$$

特别地,

$$\#(C\cap\Lambda)_{\text{medium}} \le 8.1\cdot 10^{11} g^{\frac{37}{6}}\left(1+\frac{5}{2\sqrt{2}g}\right)^{n-1}\lceil\log_2(1.2\cdot 10^9 g^{\frac{7}{3}}\sqrt{16g})\rceil \le 1.64\cdot 10^{13} g^7\left(1+\frac{5}{2\sqrt{2}g}\right)^{n-1}.$$

这就给出了中等点的上界。

5.3 大点：第一上界

这里的目标是证明

$$\#(C\cap\Lambda)_{\text{large}} \le 3.4\cdot 10^6 g^2\left(1+\frac{5}{4\sqrt{g}}\right)^{n-1}.$$

这是关于大点的第一个界。

球堆积给出的界

我们首先回顾球面堆积中的一个结果。对于任意正整数 n 和 $\theta \in (0,\ \pi)$，记 $A(n,\ \theta)$ 为满足以下条件的非零点 P_1、……、$P_N \in \mathbb{R}^n$ 的最大数量：其中任意两点之间的角至少为 θ。在每个点 P_i 处，我们都有一个角半径为 $\theta/2$ 的球冠，其表示为

$$\mathrm{cap}(P_i, \theta/2) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1, \angle(x, P_i) \le \theta/2\}.$$

于是，这些球冠的内部两两不相交。因此，$A(n,\ \theta)$也是标准单位球面上角半径为 $\theta/2$ 的球冠的最大数目，且任意两个这样的球冠的内部均不相交。

上一小节中的体积比较给出了一个界

$$A(n,\theta) \le \frac{\mathrm{vol}(S^{n-1})}{\mathrm{vol}(\mathrm{cap}(P,\theta/2))} \le \frac{\sqrt{2\pi n}}{\sin^{n-1}\frac{\theta}{2}}.$$

在我们的应用中，θ 接近 $\pi/2$，因此该界大致按$(\sqrt{2})^n$增长；对于我们希望使 V̄ojta 常数（即底数）接近 1 的目的而言，这个界太大了。因此，我们将寻求更强的 $A(n,\ \theta)$上界。

以下关于 $A(n,\ \theta)$的引理估计基本上归功于 Rankin。

引理 5.3。设 n 为正整数。若 $\theta \in (0,\ \pi)$，则

$$A(n,\theta) \le \frac{(1+\sqrt{\cos\theta})n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\cos\theta}(1-\cos\theta)^{\frac{n-1}{2}}}.$$

若 $\theta \in (\pi/2, \pi)$，则 $A(n,\theta) \le n+1$。

证明。当 $n = 1$ 时，结果成立，因为 $A(1,\theta) = 2$。以下假设 $n \ge 2$ 。我们将应用 Rankin [Ran55]的结果。注意，我们的 $\theta/2$ 对应于 α 同上引文中的情形。若 $\theta \in (\pi/2, \pi)$，则有$N(n,\theta) = n+1$ 根据 [Ran55、定理 1（iii）]。

现在我们考虑一般的 $\theta \in (0, \pi/2]$ 。以下根据 Rankin [Ran55、定理 2]，，可得以下上界

$$A(n,\theta) \le \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sin\beta\tan\beta}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\int_0^\beta(\sin x)^{n-2}(\cos x - \cos\beta)dx}, \quad n \ge 2.$$

这里的角

$$\beta = \arcsin\left(\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}\right) = \arccos(\sqrt{\cos\theta}).$$

我们先简　　化这个上界，这也会使上界略微变宽。令 $t = \sin x \in [0, \sin\beta]$。　　n

$$\int_0^\beta (\sin x)^{n-2}(\cos x - \cos\beta)dx = \int_0^{\sin\beta}\left(t^{n-2} - \frac{t^{n-2}}{\sqrt{1-t^2}}\cos\beta\right)dt.$$

根据 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的凸性，我们有

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \le \frac{1-\cos\beta}{\sin^2\beta\cos\beta}t^2 + 1.$$

也可以通过注意到该不等式对 $t^2 = 0$ 和 $t^2 = \sin^2\beta$ 成立来验证；左侧关于 t^2 是凸的，而右侧关于 t^2 是线性的。

由此可得

$$\int_0^\beta (\sin x)^{n-2}(\cos x - \cos\beta)dx \ge (1-\cos\beta)\int_0^{\sin\beta}\left(t^{n-2} - \frac{t^n}{\sin^2\beta}\right)dt = \frac{2(1-\cos\beta)\sin^{n-1}\beta}{n^2-1}.$$

我们指出，该结果捕捉到了大 n时衰减中的指数部分，与相反方向的界相比

$$\int_0^\beta (\sin x)^{n-2}(\cos x - \cos\beta)dx < \int_0^\beta (\sin x)^{n-2}\cos x dx = \frac{\sin^{n-1}\beta}{n-1}.$$

因此，

$$A(n,\theta) \le \frac{(n^2-1)\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\tan\beta}{4\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(1-\cos\beta)\sin^{n-2}\beta}.$$

再次根据 Wendel 经典不等式（参见 [Wen48]），

$$\frac{(n^2-1)\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{4\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{(n+1)\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \le \frac{(n+1)\pi^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}} \le n^{\frac{3}{2}}.$$

于是我们有

$$A(n,\theta) \le \frac{n^{\frac{3}{2}}\tan\beta}{(1-\cos\beta)\sin^{n-2}\beta} \le \frac{(1+\cos\beta)n^{\frac{3}{2}}}{\sin^{n-1}\beta\cos\beta} = \frac{(1+\sqrt{\cos\theta})n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\cos\theta}(1-\cos\theta)^{\frac{n-1}{2}}}.$$

□

点计数

现在我们回到大点的界。对任意 θ，存在 $(C\cap\Lambda)^{\text{large}}$ 的一个子集 S，满足以下性质。

(1) 对任意 $P\in(C\cap\Lambda)^{\text{large}}$，存在 $Q\in S$，使得 $\angle(P,Q)\le\theta$ 且 $|Q|\le|P|$。

(2) 对于互不相同的 $Q_1, Q_2\in S$，有 $\angle(Q_1,Q_2)>\theta$。因此，$\#S\le A(n,\theta)$.

这个集合可以按如下方式归纳构造。根据 Northcott 性质，我们可以取 $Q_1\in(C\cap\Lambda)^{\text{large}}$，使得 $|Q_1|$ 最小。取定 $Q_1,\dots,Q_n$ 后，令 $Q_{n+1}\in(C\cap\Lambda)^{\text{large}}$ 为满足 (2) 且 $|Q_{n+1}|$ 最小的一个点。这个过程会在 $A(n,\theta)$ 步后结束。因此，对于任意 $P\in(C\cap\Lambda)^{\text{large}}$，都存在一个 $Q_i\in S$，使得 $\angle(P,Q_i)\le\theta$。令 i 为满足条件的最小 i。那么，第 i 步中 $|Q_i|$ 的最小性意味着 $|P|\ge|Q_i|$；否则，这一步就会选取 P。这就证明了 (1)。

对任意 $\kappa>1$，我们有覆盖

$$\begin{aligned}(C\cap\Lambda)_{\text{large}} &= \bigcup_{Q\in S}\{P\in C\cap\Lambda : |P|\ge|Q|,\ \angle(P,Q)<\theta\}\\ &= \bigcup_{Q\in S}\bigcup_{i=1}^{\infty}\{P\in C\cap\Lambda : \kappa^{i-1}|Q|\le|P|\le\kappa^i|Q|,\ \angle(P,Q)<\theta\}.\end{aligned}$$

取 $\theta=$反余弦 $\left(\sqrt{\frac{1.01}{g}}\right)$。由定理 3.1 中的定量 Vojta 不等式，若 $P\in(C\cap\Lambda)^{\text{large}}$满足 $\angle(P,Q)<\theta$ 对某个 $Q\in S$，则 $|P|\le 10^5 g^{\frac{5}{2}}|Q|$。因此

$$(C\cap\Lambda)_{\text{large}} = \bigcup_{Q\in S}\bigcup_{i=1}^{\lceil\log_\kappa(10^5 g^{\frac{5}{2}})\rceil}\{P\in C(K)\cap\Lambda : \kappa^{i-1}|Q|\le|P|\le\kappa^i|Q|,\ \angle(P,Q)<\theta\}$$

取 $\kappa=1.15$。对于每个 $Q\in S$ 和 i，假设我们有两个不同的点

$$P_1,P_2\in\{P\in C(K)\cap\Lambda : \kappa^{i-1}|Q|\le|P|\le\kappa^i|Q|,\ \angle(P,Q)<\theta\}.$$

那么根据定理 3.6 中的定量 Mumford 不等式,

$$\angle(P_1, P_2) \geq \arccos\left(\frac{1.01}{g}\right).$$

取正交分解

$$\frac{P_i}{|P_i|} = a_i \frac{Q}{|Q|} + x_i.$$

这里 $a_i \in \mathbb{R}$ 和 $x_i \in Q^\perp = \{x \in \Lambda_{\mathbb{R}} : \langle x, Q\rangle = 0\}$。因此

$$a_i = \left\langle \frac{P_i}{|P_i|}, \frac{Q}{|Q|} \right\rangle = \cos\angle(P_i, Q) > \sqrt{\frac{1.01}{g}}$$

and

$$a_1 a_2 + \langle x_1, x_2\rangle = \left\langle \frac{P_1}{|P_1|}, \frac{P_2}{|P_2|} \right\rangle = \cos\angle(P_1, P_2) \leq \frac{1.01}{g}.$$

我们得到 $\langle x_1, x_2\rangle < 0$，因此 $\angle(x_1, x_2) > \frac{\pi}{2}$。

应用引理 5.3对.....的正交投影

$$\{P \in C \cap \Lambda : \kappa^{i-1}|Q| \leq |P| \leq \kappa^i |Q|,\ \angle(P, Q) < \theta\}.$$

到空间 $Q^\perp$。我们有

$$\#\{P \in C \cap \Lambda : \kappa^{i-1}|Q| \leq |P| \leq \kappa^i |Q|,\ \angle(P, Q) < \theta\} \leq A(n-1, \frac{\pi}{2}) \leq n.$$

因此，我们得到了以下结果。

命题 5.4. 我们有

$$\#(C \cap \Lambda)_{\text{large}} \leq \lceil \log_{1.15}(10^5 g^{\frac{5}{2}}) \rceil n A(n, \theta).$$

根据引理 5.3再次，该命题给出

$$\begin{aligned}
\#(C \cap \Lambda)_{\text{large}} &\leq \lceil \log_{1.15}(10^5 g^{\frac{5}{2}}) \rceil \frac{(1+\sqrt{\cos\theta}) n^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\cos\theta}(1-\cos\theta)^{\frac{n-1}{2}}} \\
&= \lceil \log_{1.15}(10^5 g^{\frac{5}{2}}) \rceil\, n^{\frac{5}{2}} \left(\sqrt[4]{\frac{g}{1.01}} + 1\right) \left(1 - \sqrt{\frac{1.01}{g}}\right)^{-\frac{n-1}{2}}.
\end{aligned}$$

应用引理 5.2 于 $t = \frac{5}{2}$ 和 –

$$a = \left(1 + \frac{5}{4\sqrt{g}}\right) \sqrt{1 - \sqrt{\frac{1.01}{g}}}.$$

注意到

$$e^{\frac{1}{60\sqrt{g}}} \leq a \leq 1.2.$$

该引理给出

$$n^{\frac{5}{2}} \leq \left(\frac{5}{2e \log a}\right)^{\frac{5}{2}} a^n \leq 1.2 \left(\frac{150\sqrt{g}}{e}\right)^{\frac{5}{2}} a^{n-1}.$$

于是我们得到

$$n^{\frac{5}{2}} \left(\sqrt[4]{\frac{g}{1.01}} + 1\right) \left(1 - \sqrt{\frac{1.01}{g}}\right)^{-\frac{n-1}{2}} \leq 1.2 \left(\frac{150\sqrt{g}}{e}\right)^{\frac{5}{2}} \left(\sqrt[4]{\frac{g}{1.01}} + 1\right) \cdot \left(1 + \frac{5}{4\sqrt{g}}\right)^{n-1} \leq 5 \cdot 10^4 g^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{5}{4\sqrt{g}}\right)^{n-1}.$$

因此,

$$\#(C \cap \Lambda)_{\text{large}} \leq \lceil \log_{1.15}(10^5 g^{\frac{5}{2}}) \rceil \cdot 5 \cdot 10^4 g^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{5}{4\sqrt{g}}\right)^{n-1} \leq 3.4 \cdot 10^6 g^2 \left(1 + \frac{5}{4\sqrt{g}}\right)^{n-1}.$$

这证明了大点的第一个界。

5.4 大点：精细界

本小节的目标是证明，对于 $g \geq 142$ 和 $n \geq 1$,

$$\#(C \cap \Lambda)_{\text{large}} \leq 2.4 \cdot 10^4 g^8 \left(1 + \frac{3 \log g}{g}\right)^{n-1}.$$

事实上，这可由下述界推出。

命题 5.5. 假设 $g \geq 142$ *and* $n \geq 2g$。那么

$$\#(C \cap \Lambda)_{\text{large}} \leq 2.4 \cdot 10^4 g \left(1 + \frac{3 \log g}{g}\right)^{n-1}.$$

很容易将该命题推广到 $g \geq 142$ and 所有 $n \geq 1$，但界会较弱。注意，若 $n < 2g$，我们可以在 $J(K)$ 中取一个秩为 $2g$ 的子群 Λ'，使其包含 Λ；只需添加 $2g - n$ 个线性独立的生成元即可做到这一点，而将 K 替换为一个有限扩张后，这也是可能的。于是

$$\#(C \cap \Lambda)_{\text{large}} \leq \#(C \cap \Lambda')_{\text{large}} \leq 2.4 \cdot 10^4 g^2 \left(1 + \frac{3 \log g}{g}\right)^{2g-1} \leq 2.4 \cdot 10^4 g^8.$$

这里，最后一个不等式用到了

$$\left(1 + \frac{3 \log g}{g}\right)^{g} = \left(\left(1 + \frac{3 \log g}{g}\right)^{\frac{g}{3 \log g}}\right)^{3 \log g} \leq e^{3 \log g} = g^3.$$

结合该命题，我们得到对所有 $g \geq 142$ and $n \geq 1$ 都成立的界。

那么，本小节的目标是证明命题5.5。证明通过改进引理 $A(n,\ \theta)$ 中的上界5.3得到。

球堆积给出的精细上界

对于 $g \geq 2$，取与前一小节相同的 $\theta =$ 反余弦 $\sqrt{\frac{1.01}{g}}$。我们的目标是为 $A(n,\ \theta)$ 推导一个尖锐的上界。

目前已知的最佳渐近界由 Kabatjanski $A(n,\ \theta)$ i 和 Leven˘ste˘in 在 ˘KL78中给出，Lev79](参见 [SZ24])。对于任意非负整数 m，微分方程

$$(1 - x^2)\frac{d^2 f}{dx^2} - (n-1)x\frac{df}{dx} + m(m+n-2)f = 0$$

存在一个唯一的多项式解（相差一个比例因子）。记其最大根为 $x_{(n,m)}$。于是

$$-1 < x_{(n,m)} < x_{(n,m+1)} < 1.$$

关键在于 Kabatjanski˘i–Leven˘ste˘in 在 [KL78，§6 (52)]中的以下结果。

定理 5.6。如果$\cos\theta \leq x_{(n,m)}$，那么

$$A(n,\theta) \leq \frac{4\binom{m+n-2}{n-2}}{1 - x_{(n,m+1)}}.$$

通过取

$$m \approx \frac{1 - \sin\theta}{2\sin\theta} n,$$

他们得到 $x_{(n,m)} \to \cos\theta$ 和

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log A(n,\theta) \le \frac{1+\sin\theta}{2\sin\theta} \log \frac{1+\sin\theta}{2\sin\theta} - \frac{1-\sin\theta}{2\sin\theta} \log \frac{1-\sin\theta}{2\sin\theta}.$$

然而，这个渐近界不足以满足我们的目的。我们需要对 $x_{(n,m)}$ 给出一个显式估计。

接下来，我们取

$$\beta = \arccos\sqrt{\frac{10.7}{g}}, \qquad m = \left\lceil \frac{1-\sin\beta}{2\sin\beta} n \right\rceil.$$

由于 $x_{(n,m)} \to \cos\beta > \cos\theta$，当 n 足够大时，我们有 $x_{(n,m)} \ge \cos\theta$，因此可以应用上述界。我们将给出其显式形式，得到以下结果。

命题 5.7. 对于 $g \ge 142$ 和 $n \ge 2g$,

$$A(n,\theta) \le 6\binom{m+n-2}{n-2} \le 6e \left(\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}\right)^{\frac{1-\sin\beta}{2\sin\beta}n+1} \left(\frac{1+\sin\beta}{2\sin\beta}\right)^{n-2}.$$

为证明该命题而应用定理 5.6 时，用于估计零点的主要工具是以下经典的斯图姆比较定理。

定理 5.8. 对于 $i = 1,2$，设 $r_i(x)$ 是在某个开区间上非零的连续函数，且 $F_i(x)$是微分方程的一个非零解

$$\frac{d^2F}{dx^2} + r_i(x)F = 0.$$

假设 $r_1(x) \le r_2(x)$。那么对于 $F_1(x)$的任意两个根 $a < b$， $[a,b]$中存在一个 $F_2(x)$ 的根。

现在我们证明命题 5.7。证明分为几个步骤。设 $f_{(n,m)}(x)$ 是前一个微分方程的多项式解，且具有最大的根 $x_{(n,m)}$。那么

$$F_{(n,m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{n-1}{4}} f_{(n,m)}(x)$$

是该微分方程的一个解

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{p_{(n,m)} - q_{(n,m)}x^2}{4(1-x^2)^2} F = 0,$$

其中

$$q_{(n,m)} = (2m+n-1)(2m+n-3),$$
$$p_{(n,m)} = q_{(n,m)} - (n-1)(n-5).$$

$F_{(n,m)}$ 在区间（-1，1）内的最大根仍然是 $x_{(n,m)}$。

我们先列出一些显然的界。注意， $n \ge 1.99g$ 蕴含

$$m \ge \frac{1-\sin\beta}{2\sin\beta} n \ge \frac{\cos^2\beta}{4} n > 5.$$

由于 $n \ge 6$，我们有 $p_{(n,m)} < q_{(n,m)}$。由

$$\frac{1-\sin\beta}{2\sin\beta} n \le m \le \frac{1-\sin\beta}{2\sin\beta} n + 1,$$

我们可以得到一个简单的界

$$\frac{n}{\sin\beta} \le 2m + n \le \frac{n}{\sin\beta} + 2.$$

关于根的第一个界是下面这个直接的结果。

引理 5.9。 对于 $n \geq 6$，我们有 $x_{(n,m)} \leq \sqrt{\frac{p_{(n,m)}}{q_{(n,m)}}}$。

证明。 我们首先注意到，对于 $x \in (\sqrt{\frac{p_{(n,m)}}{q_{(n,m)}}}, 1)$，我们有

$$\frac{p_{(n,m)} - q_{(n,m)}x^2}{4(1-x^2)^2} < 0.$$

则该引理由定理 5.8 通过将 $F_{(n,m)}$ 与.....的解相比较而得到

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 0.$$

或者，我们可以如下证明该引理。为推出矛盾，假设 $u = x_{(n,m)}$ 位于 $(\sqrt{\frac{p_{(n,m)}}{q_{(n,m)}}}, 1)$ 中。注意 1 是 $F_{(n,m)}$ 的一个根。则 $F_{(n,m)}$ 的值在区间 $(u, 1)$ 上符号固定。若 $F_{(n,m)} > 0$ 在 $(u, 1)$ 上，则该微分方程给出 $F''_{(n,m)} > 0$ 在 $(u, 1)$ 上。于是 $F_{(n,m)}$ 在 $(u,1)$ 上是凸的，从而

$$F_{(n,m)} \leq \max\{F_{(n,m)}(u), F_{(n,m)}(1)\} = 0$$

在 $(u, 1)$ 上。这是一个矛盾。若 $F_{(n,m)} < 0$ 在 $(u,1)$ 上，则可得到类似的矛盾。这就证明了该引理。

□

另一方面，我们将证明 $x_{(n,m)} \geq \cos\theta$ 如下。为了应用定理 5.8，我们需要以下初等结果。

引理 5.10。 假设 $n \geq 2g$。对于 $x \in [\cos\theta, \frac{1}{3}(2\cos\beta + \cos\theta)]$，

$$\frac{p_{(n,m)} - q_{(n,m)}x^2}{4(1-x^2)^2} > \frac{9\pi^2}{4(\cos\beta - \cos\theta)^2}.$$

证明。 我们只需证明

$$p_{(n,m)} - q_{(n,m)}x^2 > \frac{9\pi^2}{(\cos\beta - \cos\theta)^2}$$

在 $[\cos\theta, \frac{1}{3}(2\cos\beta + \cos\theta)]$ 上。由于 $p_{(n,m)} - q_{(n,m)}x^2$ 在此区间上递减，这等价于

$$p_{(n,m)} - q_{(n,m)}(\frac{2\cos\beta + \cos\theta}{3})^2 > \frac{9\pi^2}{(\cos\beta - \cos\theta)^2}.$$

另一方面，

$$\frac{p_{(n,m)}}{q_{(n,m)}} = 1 - \frac{(n-1)(n-5)}{(2m+n-1)(2m+n-3)} \geq 1 - \left(\frac{n}{2m+n}\right)^2 \geq \cos^2\beta.$$

我们还有 $q_{(n,m)} \geq n^2$。因此

$$p_{(n,m)} - q_{(n,m)}(\frac{2\cos\beta + \cos\theta}{3})^2 \geq n^2\left(\cos^2\beta - (\frac{2\cos\beta + \cos\theta}{3})^2\right) = \left(10.7 - (\frac{2\sqrt{10.7} + \sqrt{1.01}}{3})^2\right)\frac{n^2}{g}.$$

另一方面，

$$\frac{9\pi^2}{(\cos\beta - \cos\theta)^2} = \frac{9\pi^2}{(\sqrt{10.7} - \sqrt{1.01})^2}g.$$

由于 $n \geq 2g$，只需证明

$$\left(10.7 - (\frac{2\sqrt{10.7} + \sqrt{1.01}}{3})^2\right) \cdot 2^2 > \frac{9\pi^2}{(\sqrt{10.7} - \sqrt{1.01})^2}.$$

这一点可以通过数值方法验证。 □

有了这个引理后，考虑微分方程

$$\frac{d^2F}{dx^2}+\frac{9\pi^2}{4(\cos\beta-\cos\theta)^2}F=0,$$

它有一个解

$$F^*(x)=\sin\frac{3\pi(x-\cos\theta)}{2(\cos\beta-\cos\theta)}.$$

于是 $\cos\theta$ 和 $\frac{1}{3}(2\cos\beta+\cos\theta)$ 是 F^*的根。根据定理 5.8 和引理 5.10，函数 $F_{(n,m)}$ 在 $[\cos\theta,\frac{1}{3}(2\cos\beta+\cos\theta)]$中有一个根。因此，$x_{(n,m)}\geq\cos\theta$。于是定理 5.6 推出

$$A(n,\theta)\leq\frac{4\binom{m+n-2}{n-2}}{1-x_{(n,m+1)}}.$$

根据引理 5.9，我们有

$$x^2_{(n,m+1)}\leq\frac{p_{(n,m+1)}}{q_{(n,m+1)}}=1-\frac{(n-1)(n-5)}{(2m+n+1)(2m+n-1)}.$$

对于 $g\geq 142$ 和 $n\geq 2g$，我们有

$$2m+n\leq\frac{n}{\sin\beta}+2=\frac{n}{\sqrt{1-\frac{10.7}{g}}}+2\leq 1.04n+2.$$

我们还有

$$\frac{(n-1)(n-5)}{(2m+n+1)(2m+n-1)}\geq\frac{(n-1)(n-5)}{(1.04n+3)(1.04n+1)}\geq 0.89.$$

由此可得

$$x^2_{(n,m+1)}\leq 1-0.89<\frac{1}{9},\quad x_{(n,m+1)}<\frac{1}{3}.$$

因此，该界意味着

$$A(n,\theta)\leq 6\binom{m+n-2}{n-2}.$$

这证明了命题5.7的第一个不等式。

命题5.7 的第二个不等式由以下引理得出。

引理 5.11。我们有

$$\binom{m+n-2}{n-2}\leq e\left(\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}\right)^{\frac{1-\sin\beta}{2\sin\beta}n+1}\left(\frac{1+\sin\beta}{2\sin\beta}\right)^{n-2}.$$

证明。记

$$\log\binom{m+n-2}{n-2}=\log(m+n-2)!-\log m!-\log(n-2)!.$$

根据 Robbins 的 Stirling 公式有效版本，对于所有正整数 k,

$$\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k e^{\frac{1}{12k+1}}<k!<\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k e^{\frac{1}{12k}}.$$

这给出了 $\log(m+n-2)!$ 的上界，以及 $\log m!$ 和 $\log(n-2)!$ 各自的下界。因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&\log\binom{m+n-2}{n-2}\\
\le\ &-\frac{1}{2}\log(2\pi)+\frac{1}{2}\log\frac{m+n-2}{m(n-2)}+(m+n-2)\log(m+n-2)-m\log m-(n-2)\log(n-2)\\
\le\ &-\frac{1}{2}\log(6\pi)+m\log\frac{m+n-2}{m}+(n-2)\log\frac{m+n-2}{n-2}.
\end{aligned}$$

As

$$\frac{1-\sin\beta}{2\sin\beta}n\le m\le\frac{1-\sin\beta}{2\sin\beta}n+1,$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\log\binom{m+n-2}{n-2}\\
<\ &-\frac{1}{2}\log(6\pi)+\left(\frac{1-\sin\beta}{2\sin\beta}n+1\right)\log\frac{\frac{1-\sin\beta}{2\sin\beta}n+n-2}{\frac{1-\sin\beta}{2\sin\beta}n}+(n-2)\log\frac{\frac{1-\sin\beta}{2\sin\beta}n+n-1}{n-2}\\
\le\ &-\frac{1}{2}\log(6\pi)+\left(\frac{1-\sin\beta}{2\sin\beta}n+1\right)\log\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}+(n-2)\log\frac{1+\sin\beta}{2\sin\beta}+(n-2)\log\frac{n}{n-2}\\
\le\ &\left(\frac{1-\sin\beta}{2\sin\beta}n+1\right)\log\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}+(n-2)\log\frac{1+\sin\beta}{2\sin\beta}+1.
\end{aligned}$$

□

点计数

现在很容易证明命题 5.5，它断言对于 $g\ge 142$ 和 $n\ge 2g$,

$$\#(C\cap\Lambda)_{\text{large}}\le 2.4\cdot 10^4 g\left(1+\frac{3\log g}{g}\right)^{n-1}.$$

以下假设 $g\ge 142$ 和 $n\ge 2g$。

由命题 5.4,

$$\#(C\cap\Lambda)_{\text{large}}\le\lceil\log_{1.15}(10^5 g^{\frac{5}{2}})\rceil nA(n,\theta).$$

由命题5.7，进一步可得

$$\#(C\cap\Lambda)_{\text{large}}\le\lceil\log_{1.15}(10^5 g^{\frac{5}{2}})\rceil\cdot 6en\left(\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}\right)^{\frac{1-\sin\beta}{2\sin\beta}n+1}\left(\frac{1+\sin\beta}{2\sin\beta}\right)^{n-2}.$$

这里 β 定义为

$$\cos\beta=\sqrt{\frac{10.7}{g}}.$$

注意

$$\left(\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}\right)\left(\frac{1+\sin\beta}{2\sin\beta}\right)^{-2}=\frac{4\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\le\frac{4}{\cos^2\beta}=\frac{4g}{10.7}.$$

我们有

$$\#(C\cap\Lambda)_{\text{large}}\le\lceil\log_{1.15}(10^5 g^{\frac{5}{2}})\rceil\cdot 6.1gnB^n,$$

其中

$$B=\left(\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}\right)^{\frac{1-\sin\beta}{2\sin\beta}}\frac{1+\sin\beta}{2\sin\beta}.$$

我们有以下初等估计。

引理 5.12。对于 $g \geq 142$,

$$\log B < \frac{2.84 \log g}{g},$$

and

$$B < \left(1 + \frac{3 \log g}{g}\right) \left(1 + \frac{0.01 \log g}{g}\right)^{-1}.$$

证明。记作

$$s = \frac{1 - \sin \beta}{2 \sin \beta} > 0.$$

注意，对于 $g \geq 142$,

$$\cos \beta = \sqrt{\frac{10.7}{g}}, \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \frac{10.7}{g}} > 0.961.$$

于是我们有

$$s = \frac{1 - \sin \beta}{2 \sin \beta} = \frac{\cos^2 \beta}{2 \sin \beta (1 + \sin \beta)} = \frac{10.7}{2 \sin \beta (1 + \sin \beta) g} < \frac{2.84}{g}.$$

根据定义,

$$B = \left(\frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta}\right)^{\frac{1 - \sin \beta}{2 \sin \beta}} \frac{1 + \sin \beta}{2 \sin \beta} = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s (s + 1).$$

记作

$$b = \log B = s \log \left(1 + \frac{1}{s}\right) + \log(s + 1) = (s + 1) \log(s + 1) - s \log s.$$

将 b 视为 $s > 0$ 的函数。于是我们有

$$\frac{db}{ds} = \log(s + 1) - \log s > 0.$$

由此可知， b 关于 s递增。因此,

$$\begin{aligned} b < & \left(1 + \frac{2.84}{g}\right) \log \left(1 + \frac{2.84}{g}\right) - \frac{2.84}{g} \log \frac{2.84}{g} \\ = & \left(1 + \frac{2.84}{g}\right) \log \left(1 + \frac{2.84}{g}\right) - \frac{2.84}{g} \log 2.84 + \frac{2.84}{g} \log g \\ < & \left(1 + \frac{2.84}{g} - \log 2.84\right) \log \left(1 + \frac{2.84}{g}\right) + \frac{2.84}{g} \log g \\ < & \frac{2.84}{g} \log g. \end{aligned}$$

这通过对.....取商空间给出了 B 的界

$$e^{\frac{2.85}{g} \log g} < 1 + \frac{3 \log g}{g}, \quad e^{\frac{0.01}{g} \log g} > 1 + \frac{0.01}{g} \log g.$$

□

因此，我们有

$$\#(C \cap \Lambda)_{\text{large}} < \lceil \log_{1.15}(10^5 g^{\frac{5}{2}}) \rceil \cdot 6.1 g n \left(1 + \frac{3 \log g}{g}\right)^n \left(1 + \frac{0.01 \log g}{g}\right)^{-n}.$$

根据二项式界

$$\left(1 + \frac{0.01 \log g}{g}\right)^n \geq \frac{0.01 \log g}{g} n,$$

我们有

$$\begin{aligned}\#(C\cap\Lambda)_{\text{large}} &< \frac{\log_{1.15}(10^5 g^{\frac{5}{2}})+1}{\log g}\cdot 610g^2\left(1+\frac{3\log g}{g}\right)^n\\ &< 34.8\cdot 610g^2\left(1+\frac{3\log g}{g}\right)^n\\ &< 2.13\cdot 10^4 g^2\left(1+\frac{3\log g}{g}\right)^n\\ &< 2.4\cdot 10^4 g^2\left(1+\frac{3\log g}{g}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

这就证明了命题 5.5，从而完成了定理 5.1的证明。

5.5 函数域

最后，我们得到定理 5.1在特征 0 的函数域上的对应结果。不出所料，该结果可用类似的方法证明，而且常数更优。

定理 5.13 （定理 1.5）。设 K 是一个特征为 0 的域，C 是 $g\geq 2$ 上的一条亏格为 K的曲线，且J 是 C的雅可比簇。假设 C 在 $\mathbb{Q}$ 上不是等变的，即 C_K 不能下降到 $\mathbb{Q}$。那么，对于 α 上任意一个次数为1 的线丛 C 以及任意一个 $\Lambda\subset J(K)$ 有限秩子群，

$$\#((C-\alpha)\cap\Lambda)\leq 1.8\cdot 10^6 g^3\cdot\left(1+\frac{5}{4\sqrt{g}}\right)^{\mathrm{rk}(\Lambda)},$$

$$\#((C-\alpha)\cap\Lambda)\leq 2.5\cdot 10^4 g^8\cdot\left(1+\frac{3\log g}{g}\right)^{\mathrm{rk}(\Lambda)}.$$

证明。按照 [Yu25 中的标准论证，§4], 我们不妨假设 K 是一元函数域，其底域为 k，且 C 在 k上是非等构的。与定理 5.1的证明一样，我们假设 $\alpha=\alpha_0$ 并将$C\cap\Lambda$ 分成以下三部分:

$$\begin{aligned}(C\cap\Lambda)_{\text{small}} &= \left\{P\in C\cap\Lambda : |P|\leq\sqrt{\frac{\bar{\omega}_a^2}{16g}}\right\},\\ (C\cap\Lambda)_{\text{medium}} &= \left\{P\in C\cap\Lambda : \sqrt{\frac{\bar{\omega}_a^2}{16g}}<|P|\leq 10^4 g\sqrt{\bar{\omega}_a^2}\right\},\\ (C\cap\Lambda)_{\text{large}} &= \left\{P\in C\cap\Lambda : |P|>10^4 g\sqrt{\bar{\omega}_a^2}\right\}.\end{aligned}$$

这里调整了中等点与大点之间的边界，使其与定理中的条件一致3.12。只需证明

$$\begin{aligned}\#(C\cap\Lambda)_{\text{small}} &\leq 200g^2,\\ \#(C\cap\Lambda)_{\text{medium}} &\leq 10^4 g^3\left(1+\frac{5}{2\sqrt{2}g}\right)^{n-1},\\ \#(C\cap\Lambda)_{\text{large}} &\leq 3.4\cdot 10^6 g^2\left(1+\frac{5}{4\sqrt{g}}\right)^{n-1},\end{aligned}$$

并且对于 $g\geq 142$ 和 $n\geq 1$,

$$\#(C\cap\Lambda)_{\text{large}}\leq 2.4\cdot 10^4 g^8\left(1+\frac{3\log g}{g}\right)^{n-1}.$$

对于小点，我们应用定理 4.6(1)，并取 $r = \sqrt{\frac{1}{16g}}$ 得到

$$\#(C \cap \Lambda)_{\text{small}} \leq 200g^2.$$

对于中等点，取

$$\theta = \arccos\sqrt{\frac{1.13}{g}}, \quad \kappa = 1.67$$

定理 4.6(2) 中。然后，§5.2 的方法给出

$$\begin{aligned}
\#(C \cap \Lambda)_{r,\kappa r} &\leq (16g^2 + 32g + 124)\frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{\sin^{n-1}\theta} \\
&\leq (16g^2 + 32g + 124)\sqrt{2\pi g}\left(1 + \frac{5}{2\sqrt{2}g}\right)^{n-1} \\
&\leq 158g^{\frac{5}{2}}\left(1 + \frac{5}{2\sqrt{2}g}\right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

So

$$\#(C \cap \Lambda)_{\text{medium}} \leq \lceil \log_{1.67}(10^4 g\sqrt{16g})\rceil 158g^{\frac{5}{2}}\left(1 + \frac{5}{2\sqrt{2}g}\right)^{n-1} \leq 10^4 g^3\left(1 + \frac{5}{2\sqrt{2}g}\right)^{n-1}.$$

最后，由于定理 3.12 和 3.13中的角度和比率与定理 3.1 和定理 3.6中的对应项完全相同，因此可以类似地得到大点的界。 □

6 超椭圆曲线的进一步界

回忆一下，域 k 上的超椭圆曲线是指一条亏格为 $g \geq 2$ 、定义在 k 上的曲线 C，并带有一个次数为 2 的有限可分态射 $C \to \mathbb{P}^1_k$。曲线 C恰有 $2g + 2$ 个魏尔斯特拉斯点，即 $C(k)$ 中在 $\mathbb{P}^1_k$ 上分歧的点。本节将讨论定量莫德尔猜想对于超椭圆曲线的一些推论。

6.1 关于判别式的界

这里的目标是证明定理 1.6 针对超椭圆曲线的以下加强形式。

定理 6.1 （定理 1.7）。设 K 是一个次数为 d 的数域，其基域为 $\mathbb{Q}$。设 $f(x) \in O_K[x]$ 是一个首一无平方因子多项式。设 $\Delta_f \in O_K$ 是 f的判别式。

(1) 若 $\deg f = 2g + 1$，其中 $g \geq 2$ 为某个整数，则

$$\#\{(x, y) \in K^2 : y^2 = f(x)\} \leq 10^{13} \cdot 2^d g^{9d\log_2(2gd+d)+18d+8}(2gd+d)^{\frac{3}{2}d} \cdot |N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_f|^{4\log_2 g+\frac{1}{2}} \cdot |\Delta_{K/\mathbb{Q}}|^{3\log_2 g+\frac{1}{2}}.$$

(2) 若 $\deg f = 2g + 2$，其中 $g \geq 2$ 为某个整数，则

$$\#\{(x, y) \in K^2 : y^2 = f(x)\} \leq 10^{13} \cdot 2^{6d+1} g^{9d\log_2(2gd+2d)+18d+8}(2gd+2d)^{\frac{9}{2}d} \cdot |N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_f|^{4\log_2 g+\frac{5}{2}} \cdot |\Delta_{K/\mathbb{Q}}|^{3\log_2 g+\frac{3}{2}}.$$

为了证明该定理，我们需要利用下述定理的第 (3)–(4) 部分来界定超椭圆曲线的 Mordell–Weil 秩。

定理 6.2. 设 C 为数域 K 上亏格为 $g \geq 2$ 的超椭圆曲线。设 J 为 C的雅可比簇。

(1) 设 L_1，……，L_m 为 C 的魏尔斯特拉斯点的伽罗瓦轨道的剩余域。设 S 为 M_K 中由所有阿基米德赋值、所有位于 2 之上的赋值，以及所有使 C 具有坏约化的非阿基米德赋值组成的子集。则

$$\operatorname{rk} J(K) \leq 1 + (2g+3)\#S + \sum_{i=1}^{m} \dim_{\mathbb{F}_2} \mathrm{Cl}_S(L_i)[2] + \dim_{\mathbb{F}_2} \mathrm{Cl}_S(K)[2].$$

这里，$\mathrm{Cl}_S(L)$ 表示 S-整数环$O_{L,\ S}$ 其中 L 是 K的有限扩张。

(2) 在第 *(1)* 部分中，若对于某个 i，$[L_i : K]$ 为奇数，则

$$\operatorname{rk} J(K) \leq 2g\#S + \sum_{i=1}^{m} \dim_{\mathbb{F}_2} \mathrm{Cl}_S(L_i)[2] - 2\dim_{\mathbb{F}_2} \mathrm{Cl}_S(K)[2].$$

(3) 假设 C包含一条仿射曲线 $\operatorname{Spec} K[x,y]/(y^2 - f(x))$作为开子簇，其中 $f(x) \in O_K[x]$ 是一个首一无平方因子多项式，判别式为 $\Delta_f \in O_K$，且$\deg f = 2g+1$。那么

$$\operatorname{rk} J(K) \leq (\frac{4}{3}g + \frac{1}{2}) \log_2 |N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_f| + (g + \frac{1}{2}) \log_2 |\Delta_{K/\mathbb{Q}}| + (3g + \frac{3}{2}) d \log_2(2gd+d) + (6g+1)d.$$

(4) 假设 C包含一条仿射曲线 $\operatorname{Spec} K[x,y]/(y^2 - f(x))$作为开子簇，其中 $f(x) \in O_K[x]$ 是一个首一无平方因子多项式，判别式为 $\Delta_f \in O_K$，且$\deg f = 2g+2$。那么

$$\operatorname{rk} J(K) \leq (\frac{4}{3}g + \frac{5}{2}) \log_2 |N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_f| + (g + \frac{3}{2}) \log_2 |\Delta_{K/\mathbb{Q}}| + (3g + \frac{9}{2}) d \log_2(2gd+2d) + (6g+6)d + 1.$$

如果所有魏尔斯特拉斯点都是有理点，则 $L_1 = \cdots = L_{2g+2} = K$，第二个界变为

$$\operatorname{rk} J(K) \leq 2g\#S + 2g \dim_{\mathbb{F}_2} \mathrm{Cl}_S(K)[2],$$

这正是 [OT89，定理 2]。如果 $K = \mathbb{Q}$ 和 C 具有一个有理魏尔斯特拉斯点，则第二个界可由 [Sto01，引理 4 得出。10]。所有这些结果都基于 2-下降，而类似的方法也可导出我们的一般情形。由于该界隐含在同上引文中，我们将在稍后给出证明。在此之前，我们先证明定理 1.7。

定理 *6.1* 的证明。我们首先证明（1）。将定理 6.2（3）应用于定理 5.1。由于 e

$$\left(1 + \frac{3\log g}{g}\right)^{g} \leq g^3,$$

我们有

$$\begin{aligned}
\#C(K) &\leq 10^{13} g^8 \cdot \left(1 + \frac{5}{4\sqrt{g}}\right)^{\frac{1}{2}\log_2 |N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_f| + \frac{1}{2}\log_2 |\Delta_{K/\mathbb{Q}}| + \frac{3}{2} d \log_2(2gd+d) + d} \\
&\quad \cdot \left(1 + \frac{3\log g}{g}\right)^{g\left(\frac{4}{3}\log_2 |N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_f| + \log_2 |\Delta_{K/\mathbb{Q}}| + 3d\log_2(2gd+d) + 6d\right)} \\
&\leq 10^{13} g^8 \cdot 2^{\frac{1}{2}\log_2 |N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_f| + \frac{1}{2}\log_2 |\Delta_{K/\mathbb{Q}}| + \frac{3}{2} d \log_2(2gd+d) + d} \\
&\quad \cdot g^{4\log_2 |N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_f| + 3\log_2 |\Delta_{K/\mathbb{Q}}| + 9d\log_2(2gd+d) + 18d} \\
&= 10^{13} \cdot 2^d g^{9d\log_2(2gd+d) + 18d + 8} (2gd+d)^{\frac{3}{2}d} \cdot |N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_f|^{4\log_2 g + \frac{1}{2}} \cdot |\Delta_{K/\mathbb{Q}}|^{3\log_2 g + \frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

这就证明了 (1)。

为证明 (2)，将定理 6.2(4) 应用于定理 5.1。我们有

$$\begin{aligned}\#C(K) &\le 10^{13} g^8 \cdot 2^{\frac{5}{2}\log_2|N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_f| + \frac{3}{2}\log_2|\Delta_{K/\mathbb{Q}}| + \frac{9}{2}d\log_2(2gd+2d)+6d+1} \\ &\quad \cdot g^{4\log_2|N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_f| + 3\log_2|\Delta_{K/\mathbb{Q}}| + 9d\log_2(2gd+2d)+18d} \\ &= 10^{13}\cdot 2^{6d+1} g^{9d\log_2(2gd+2d)+18d+8}(2gd+2d)^{\frac{9}{2}d}\cdot |N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_f|^{4\log_2 g+\frac{5}{2}}\cdot |\Delta_{K/\mathbb{Q}}|^{3\log_2 g+\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

这就证明了（2）。 □

为了证明定理 6.2，我们需要以下经典事实。由于缺少合适的参考文献，这里给出证明。

引理 6.3。设 k 是一个代数闭域，且$\mathrm{char}(k) \neq 2$。设 C 是 k 上亏格为 $g \ge 2$ 的超椭圆曲线。设 $P_0, \dots, P_{2g+1}$ 是 C 的魏尔斯特拉斯点。那么，作为一个 $\mathbb{F}_2$-向量空间，$\mathrm{Pic}(C)[2]$ 由 $\{P_j - P_0 : j = 1, \dots, 2g+1\}$ 生成，且唯一的关系是 $\sum_{j=1}^{2g+1}(P_j - P_0) = 0$。

证明。记 $\mathrm{Div}^0_W(C)$ 为由支集位于魏尔斯特拉斯点处且次数为零的 C 的除子构成的 $\mathbb{Z}$-模，即由 $P_j - P_0$ 的形式 $\mathbb{Z}$-线性组合构成，其中 $j = 1, \dots, 2g+1$。考虑自然映射

$$\Phi : \mathrm{Div}^0_W(C) \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(C).$$

记 $\mathcal{P}$为由 $2\,\mathrm{Div}^0_W(C)$ 生成的 $\mathrm{Div}^0_W(C)$ 的子群，并且

$$D_0 = (P_1 + \cdots + P_{2g+1}) - (2g+1)P_0.$$

我们断言 $\mathcal{P} = \ker(\Phi)$。

我们首先证明 $\mathcal{P} \subseteq \ker(\Phi)$。记 $\pi: C \to \mathbb{P}^1$ 为次数为 2 的有限态射。由于 $2P_j$ 与 $\pi^*\mathcal{O}(1)$ 线性等价，我们看到 $2\,\mathrm{Div}^0_W(C)$ 包含于 $\ker(\Phi)$ 中。

由于扩张 $k(C)/k(\mathbb{P}^1)$ 的次数为 2，我们可以将 $k(C)$ 写成 $= k(\mathbb{P}^1)(\sqrt{f})$，其中 $f \in k(\mathbb{P}^1)^\times$ 为某个非常数多项式。我们还可以假设 P_0 在 $\infty \in \mathbb{P}^1$ 上，且 f 是无平方因子多项式。于是 $\mathrm{div}(\sqrt{f}) = D_0$。由于 $\mathrm{div}(\sqrt{f})$ 和 $2\,\mathrm{Div}^0_W(C)$ 都包含于 $\ker(\Phi)$ 中，我们看到 $\mathcal{P}$包含于 $\ker(\Phi)$ 中。

现在证明 $\ker(\Phi) \subseteq \mathcal{P}$。对于任意 $D \in \ker(\Phi)$，设 $D = \mathrm{div}(\alpha)$，其中 $\alpha \in k(C)^\times$。记$\sigma : C \to C$为 C 在 $\mathbb{P}^1$ 上的非平凡自同构。于是

$$\mathrm{div}(\sigma^*\alpha) = \sigma^* D = D = \mathrm{div}(\alpha), \qquad \mathrm{div}(\sigma^*\alpha/\alpha) = 0.$$

因此，$\sigma^*\alpha/\alpha = c$，其中某个 $c \in k^\times$。再施加一次 σ^* 的作用，得到 $\alpha/\sigma^*\alpha = c$。因此 $c^2 = 1$。由此可得 $\sigma^*(\alpha^2) = \alpha^2$，进而 $\alpha^2 \in k(\mathbb{P}^1)^\times$。与上面的表达式$k(C) = k(\mathbb{P}^1)(\sqrt{f})$比较可知，对于某个 $h \in k(\mathbb{P}^1)^\times$，有 $\alpha = h\sqrt{f}$ 或 $\alpha = h$。于是 $D = \mathrm{div}(\alpha)$ 属于 $\mathcal{P}$。这就证明了 $\ker(\Phi) \subseteq \mathcal{P}$。

既然 $\ker(\Phi) = \mathcal{P}$，我们就有一个单射

$$\Phi : \mathrm{Div}^0_W(C)_{\mathbb{F}_2}/(\mathbb{F}_2 D_0) \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(C)[2]$$

$\mathbb{F}_2$-向量空间。由于两边的维数都是 $2g$，它是一个同构。 □

现在我们证明定理 6.2 中 Mordell–Weil 秩的界。

定理 *6.2*（*1*）（*2*）的证明。我们先证明（1）。令 K_S 为 K 在 S之外不分歧的最大扩张。令 $G = \mathrm{Gal}(K_S/K)$ 为伽罗瓦群。Kummer 映射

$$J(K)/2J(K) \longrightarrow H^1(G, J[2](K_S))$$

是单射，因此

$$\mathrm{rk}\ J(K) \le \dim H^1(G, J[2](K_S)).$$

只需证明 $\dim H^1(G, J[2](K_S))$ 的上界。

设 $P_j \in C(K_S)$ 中的 $j = 0$、1、.....、$2g+1$ 是 C 的魏尔斯特拉斯点。用 $\mathrm{Div}_W(C_{K_S})$ 表示支集位于魏尔斯特拉斯点上的 $\mathbb{Z}$-模除子群。用 $\mathrm{Div}_W^0(C_{K_S})$ 表示 $\mathrm{Div}_W(C_{K_S})$ 中次数为零的除子子群。通过张量积，我们也有 $\mathrm{Div}_W(C_{K_S})_{\mathbb{F}_2}$ 和 $\mathrm{Div}_W^0(C_{K_S})_{\mathbb{F}_2}$。

由引理 6.3，自然映射

$$\mathrm{Div}_W^0(C_{K_S}) \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(C_{\overline{K}})$$

其像为 $\mathrm{Pic}^0(C_K)[2] = J[2](K)$，因此诱导出一个满射

$$\mathrm{Div}_W^0(C_{K_S})_{\mathbb{F}_2} \longrightarrow J[2](K_S).$$

此映射的核由以下元素生成

$$D_1 = \sum_{i=0}^{2g+1} P_i,$$

这里将 D_1 视为

$$\mathrm{Div}_W^0(C_{K_S})_{\mathbb{F}_2} = \ker(\deg : \mathrm{Div}_W(C_{K_S})_{\mathbb{F}_2} \longrightarrow \mathbb{F}_2),$$

因为 $\deg(D_1) = 2g+2$ 在 $\mathbb{F}_2$ 中为 0。因此，我们有一个 G-等变正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{F}_2 \longrightarrow \mathrm{Div}_W^0(C_{K_S})_{\mathbb{F}_2} \longrightarrow J[2](K_S) \longrightarrow 0.$$

定义还给出了一个 G-等变正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Div}_W^0(C_{K_S})_{\mathbb{F}_2} \longrightarrow \mathrm{Div}_W(C_{K_S})_{\mathbb{F}_2} \xrightarrow{\deg} \mathbb{F}_2 \longrightarrow 0.$$

对每个 i，固定一个从 L_i 到 K_S 的嵌入。记 $G_i = \mathrm{Gal}(K_S/L_i)$ 为 K_S 关于 L_i 的伽罗瓦群。那么

$$\mathrm{Div}_W(C_{K_S})_{\mathbb{F}_2} = \bigoplus_{i=1}^{m} \left(\bigoplus_{K(P_j)=L_i} \mathbb{F}_2 P_j \right) \cong \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ind}_{G_i}^{G} \mathbb{F}_2.$$

对这两个短正合列取群上同调，得到

$$\begin{aligned} \dim H^1(G, J[2](K_S)) &\le \dim H^1(G, \mathrm{Div}_W^0(C_{K_S})_{\mathbb{F}_2}) + \dim H^2(G, \mathbb{F}_2) \\ &\le \dim H^0(G, \mathbb{F}_2) + \dim H^1(G, \mathrm{Div}_W(C_{K_S})_{\mathbb{F}_2}) + \dim H^2(G, \mathbb{F}_2) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{m} \dim H^1(G_i, \mathbb{F}_2) + \dim H^2(G, \mathbb{F}_2). \end{aligned}$$

令 O_S 为 $O_{K,\,S}$ 在 K_S 中的整闭包。通过唯一的同构，我们将 $\mathbb{F}_2$ 与 $\{\pm 1\}$ 等同。于是短正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{F}_2 \longrightarrow O_S^{\times} \xrightarrow{[2]} O_S^{\times} \longrightarrow 0$$

推出

$$\begin{aligned} \dim H^1(G, \mathbb{F}_2) &= \dim H^0(G, O_S^{\times}) \otimes \mathbb{F}_2 + \dim H^1(G, O_S^{\times})[2], \\ \dim H^2(G, \mathbb{F}_2) &= \dim H^1(G, O_S^{\times}) \otimes \mathbb{F}_2 + \dim H^2(G, O_S^{\times})[2]. \end{aligned}$$

根据 [NSW08，命题 8.3。11]，

$$\begin{aligned} H^0(G, O_S^{\times}) &= O_{K,S}^{\times}, \\ H^1(G, O_S^{\times}) &= \mathrm{Cl}_S(K), \\ H^2(G, O_S^{\times})[2] &= \ker\Big(\bigoplus_{\substack{v \in S \\ K_v \neq \mathbb{C}}} \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{F}_2 \Big). \end{aligned}$$

因此我们得到

$$\dim H^1(G,\mathbb{F}_2) = \dim O_{K,S}^\times/(O_{K,S}^\times)^2 + \dim \mathrm{Cl}_S(K)[2]$$

and

$$\dim H^2(G,\mathbb{F}_2) \le \dim \mathrm{Cl}_S(K)/2\mathrm{Cl}_S(K) + \#S = \dim \mathrm{Cl}_S(K)[2] + \#S.$$

这里最后一个等式成立，是因为 $\mathrm{Cl}_S(K)$ 是有限的。

注意， K_S 也是 L_i 在 S之外不分歧的最大扩张。因 s,

$$\begin{aligned}\dim H^1(G_i,\mathbb{F}_2) =& \dim O_{L_i,S}^\times/(O_{L_i,S}^\times)^2 + \dim \mathrm{Cl}_S(L_i)[2]\\ \le& [L_i:K]\dim O_{K,S}^\times/(O_{K,S}^\times)^2 + \dim \mathrm{Cl}_S(L_i)[2],\end{aligned}$$

这里的不等式由 S-单位群的结构得出。

总之，

$$\begin{aligned}\dim H^1(G,J[2](K_S)) &\le 1 + \sum_{i=1}^m \Big([L_i:K]\dim O_{K,S}^\times/(O_{K,S}^\times)^2 + \dim \mathrm{Cl}_S(L_i)[2]\Big) + \dim \mathrm{Cl}_S(K)[2] + \#S\\ &= 1 + (2g+2)\dim O_{K,S}^\times/(O_{K,S}^\times)^2 + \sum_{i=1}^m \dim \mathrm{Cl}_S(L_i)[2] + \dim \mathrm{Cl}_S(K)[2] + \#S\\ &\le 1 + (2g+3)\#S + \sum_{i=1}^m \dim \mathrm{Cl}_S(L_i)[2] + \dim \mathrm{Cl}_S(K)[2].\end{aligned}$$

这就完成了定理 6.2(1) 的证明。

对于定理 6.2(2)，根据假设， $[L_i:\ K]$ 对某个 i是奇数，因此我们假设 $[K(P_0):\ K]$ 是奇数。我们声称在此情况下，两个短正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{F}_2 \longrightarrow \mathrm{Div}_W^0(C_{K_S})_{\mathbb{F}_2} \longrightarrow J[2](K_S) \longrightarrow 0$$

and

$$0 \longrightarrow \mathrm{Div}_W^0(C_{K_S})_{\mathbb{F}_2} \longrightarrow \mathrm{Div}_W(C_{K_S})_{\mathbb{F}_2} \xrightarrow{\deg} \mathbb{F}_2 \longrightarrow 0$$

是 G-分裂的。事实上，为了分裂第一个短正合列，我们取投影

$$\mathrm{Div}_W^0(C_{K_S})_{\mathbb{F}_2} \longrightarrow \mathbb{F}_2,\quad \sum_{j=0}^{2g+1} a_jP_j \longmapsto \sum_{P_j\in \mathrm{Gal}(K_S/K)P_0} a_j.$$

为了分裂第二个短正合列，我们取注入

$$\mathbb{F}_2 \longrightarrow \mathrm{Div}_W(C_{K_S})_{\mathbb{F}_2},\quad a \longmapsto \sum_{P_j\in \mathrm{Gal}(K_S/K)P_0} aP_j.$$

借助这些分解，可以进一步精细化维数的估计：

$$\begin{aligned}\dim H^1(G,J[2](K_S)) =& \dim H^1(G,\mathrm{Div}_W^0(C_{K_S})_{\mathbb{F}_2}) - \dim H^1(G,\mathbb{F}_2)\\ =& \dim H^1(G,\mathrm{Div}_W(C_{K_S})_{\mathbb{F}_2}) - 2\dim H^1(G,\mathbb{F}_2)\\ =& \sum_{j=1}^m \dim H^1(G_i,\mathbb{F}_2) - 2\dim H^1(G,\mathbb{F}_2).\end{aligned}$$

上述计算进一步给出

$$\begin{aligned}
&\dim H^1(G, J[2](K_S)) \\
=& \sum_{j=1}^{m} \left(\dim O_{L_i,S}^{\times}/(O_{L_i,S}^{\times})^2 + \dim \mathrm{Cl}_S(L_i)[2]\right) - 2\left(\dim O_{K,S}^{\times}/(O_{K,S}^{\times})^2 + \dim \mathrm{Cl}_S(K)[2]\right) \\
\leq& \sum_{j=1}^{m} \left([L_i:K]\dim O_{K,S}^{\times}/(O_{K,S}^{\times})^2 + \dim \mathrm{Cl}_S(L_i)[2]\right) - 2\left(\dim O_{K,S}^{\times}/(O_{K,S}^{\times})^2 + \dim \mathrm{Cl}_S(K)[2]\right) \\
=& 2g\dim O_{K,S}^{\times}/(O_{K,S}^{\times})^2 + \sum_{j=1}^{m} \dim \mathrm{Cl}_S(L_i)[2] - 2\dim \mathrm{Cl}_S(K)[2] \\
\leq& 2g\#S + \sum_{j=1}^{m} \dim \mathrm{Cl}_S(L_i)[2] - 2\dim \mathrm{Cl}_S(K)[2].
\end{aligned}$$

这就证明了定理 6.2(2)。 □

为证明定理 6.2（3）（4），我们需要界定数域 K的理想类群的2-挠元个数。Minkowski界结合基本的计数论证给出

$$\#\mathrm{Cl}(K) \leq |\Delta_{K/\mathbb{Q}}|^d.$$

这里 $d=[K:\ \mathbb{Q}]$，且 $\Delta_{K/\mathbb{Q}}$ 是 K 在 $\mathbb{Q}$上的判别式。由此得到 #Cl(K)[2] 的一个粗略界。为得到更精细的界，[BSTTTZ20，定理 1.1] 利用“2-扭子”这一信息并证明

$$\#\mathrm{Cl}(K)[2] = O_{d,\epsilon}(|\Delta_{K/\mathbb{Q}}|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2d}+\epsilon}).$$

我们将应用 [BSTTTZ20，定理 1.1] 的如下有效版本。

定理 6.4. 设 K 为一个数域，其次数为 $d=[K:\ \mathbb{Q}]$。则

$$\#\mathrm{Cl}(K)[2] \leq 2^d d^{\frac{3}{2}d}|\Delta_{K/\mathbb{Q}}|^{\frac{1}{2}}.$$

证明。 我们的证明沿用 [BSTTTZ20，定理 1.1]，的证明，但我们格外注意以得到显式常数。

在 K 上定义范数 $\|\cdot\|$，使得

$$\|x\|^2 = \sum_{v\in M_{K,\infty}} \epsilon_v |x|_v^2, \quad x\in K.$$

这里，实位对应 $\epsilon_v=1$ v；复位对应 $\epsilon_v=2$ v。该范数扩展为 $V=K\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ 上的范数。记

$$B(r)=\{x\in V:\|x\|\leq r\}$$

V 中半径为 $r>0$ 的球。令 vol(·) 表示 V 上满足 vol(B(1)) $=1$. 的唯一 Haar测度。整数环 O_K 是 V 中的格。经典结果表明

$$\mathrm{vol}(V/O_K) = \pi^{-\frac{d}{2}}\Gamma(\frac{d}{2}+1)|\Delta_{K/\mathbb{Q}}|^{\frac{1}{2}}.$$

由 [BSTTTZ20，定理 1。5], Cl(K)[2] 中的每个理想类都由一个整理想 I 表示，该整理想属于 O_K，并满足 $I^2=xO_K$，其中存在 $x\in O_K$ 使得 $|x|_v\leq|\Delta_{K/\mathbb{Q}}|^{\frac{1}{d}}$ 对所有阿基米德赋值 v 上的 K。这样的 x属于 $B(r_1)$，且

$$r_1 = d^{\frac{1}{2}}|\Delta_{K/\mathbb{Q}}|^{\frac{1}{d}}.$$

由此可得

$$\#\mathrm{Cl}(K)[2] \leq \#(O_K\cap B(r_1)).$$

问题归结为估计右侧。

取一组基 $e_0, e_1, \dots, e_{d-1} \in O_K$，使其达到 O_K 的逐次极小值，也就是说，e_i 满足

$$\|e_i\| = \min\{\|x\| : x \in O_K \setminus \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\{e_0, e_1, \dots, e_{i-1}\}\}.$$

注意，$e_0, e_1, \dots, e_{d-1}$ 不一定构成 O_K 的 $\mathbb{Z}$-基。因为对于任意 $x \in O_K \setminus \{0\}$。

$$\|x\|^2 \geq d \left(\prod_{v \in M_{K,\infty}} |x|_v^{2\epsilon_v} \right)^{\frac{1}{d}} = d \cdot |N_{K/\mathbb{Q}}(x)|^{\frac{2}{d}} \geq d = \|1\|^2,$$

我们可以取 $e_0 = 1$。根据 [BSTTTZ20 定理 3 的证明，1], 存在一个 $\{1, \dots, d-2\}$的置换 σ，使得对于 $i = 1, \dots, d-2$,

$$e_i e_{\sigma(i)} \notin \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\{e_0, e_1, \dots, e_{d-2}\}.$$

So

$$\|e_{d-1}\| \leq \|e_i e_{\sigma(i)}\| \leq \|e_i\| \cdot \|e_{\sigma(i)}\|,$$

因此

$$\|e_{d-1}\|^d \leq \prod_{i=1}^{d-1} \|e_i\|^2 \leq \frac{4^d \mathrm{vol}(V/O_K)^2}{d}.$$

这里最后一个不等式由闵可夫斯基第二定理推出，该定理断言 t

$$\prod_{i=0}^{d-1} \|e_i\| \leq 2^d \mathrm{vol}(V/O_K).$$

因此,

$$\|e_0\| \leq \|e_1\| \leq \cdots \leq \|e_{d-1}\| \leq \frac{4\mathrm{vol}(V/O_K)^{\frac{2}{d}}}{d^{\frac{1}{d}}} = 4\pi^{-1}\Gamma(\frac{d}{2}+1)^{\frac{2}{d}} d^{-\frac{1}{d}} |\Delta_{K/\mathbb{Q}}|^{\frac{1}{d}}.$$

根据上述界，子集

$$D = \left\{ \sum_{i=0}^{d-1} a_i e_i : -\frac{1}{2} < a_i < \frac{1}{2} \right\}$$

V 包含于 $B(r_2)$中，其中

$$r_2 = 2\pi^{-1}\Gamma(\frac{d}{2}+1)^{\frac{2}{d}} d^{1-\frac{1}{d}} |\Delta_{K/\mathbb{Q}}|^{\frac{1}{d}}.$$

考虑自然映射

$$\coprod_{x \in O_K \cap B(r_1)} (x + D) \longrightarrow B(r_1 + r_2).$$

注意，$B(r_1 + r_2)$中的每个点至多有 $[O_K : \sum_{i=0}^{d-1} \mathbb{Z}e_i]$ 个原像。比较体积可得

$$\#(O_K \cap B(r_1)) \leq \frac{\mathrm{vol}(B(r_1+r_2))}{\mathrm{vol}(D)} \cdot [O_K : \sum_{i=0}^{d-1} \mathbb{Z}e_i] = \frac{(r_1+r_2)^d}{\mathrm{vol}(V/O_K)} = \frac{\left(d^{\frac{1}{2}} + 2\pi^{-1}\Gamma(\frac{d}{2}+1)^{\frac{2}{d}} d^{1-\frac{1}{d}}\right)^d}{\pi^{-\frac{d}{2}}\Gamma(\frac{d}{2}+1)} |\Delta_{K/\mathbb{Q}}|^{\frac{1}{2}}.$$

右侧系数的第 d 个根恰好是

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} + 2\pi^{-1}\Gamma(\frac{d}{2}+1)^{\frac{2}{d}} d^{1-\frac{1}{d}}}{\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{d}{2}+1)^{\frac{1}{d}}} = \frac{(d\pi)^{\frac{1}{2}}}{A} + \frac{2d^{1-\frac{1}{d}}}{\pi^{\frac{1}{2}}} A$$

with

$$A = \Gamma(\frac{d}{2}+1)^{\frac{1}{d}}.$$

我们需要证明它至多为 $2d^{\frac{3}{2}}$。我们可以假设 $d \geq 2$。那么，上述不等式可直接由

$$1 \leq A \leq (\frac{d}{2})^{\frac{1}{2}}.$$

□

现在我们可以证明定理 6.2的其余部分，它们可视为 [BSTTTZ20定理 1.3(b)]的有效版本。

定理 *6.2(3)(4)* 的证明。 由定理 6.4，对于任意有限扩张 L/K，

$$\dim \mathrm{Cl}_S(L)[2] \leq \dim \mathrm{Cl}(L)[2] \leq \frac{1}{2}\log_2|\Delta_{L/\mathbb{Q}}| + \frac{3}{2}[L:\mathbb{Q}]\log_2[L:\mathbb{Q}] + [L:\mathbb{Q}].$$

这里第一个不等式 由满射 $\mathrm{Cl}(L) \to \mathrm{Cl}_S(L)$ 得出。我们还需要以下平凡界

$$\#S \leq 2d + \log_3|N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_f| \leq 2d + \frac{2}{3}\log_2|N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_f|.$$

这是因为每个非阿基米德赋值 $v \in S$ 都整除 $2\Delta_f$。

现在证明定理的第 (3) 部分。无穷远点是一个有理魏尔斯特拉斯点。因此我们可以假设 $L_1 = K$。记 $d_i = [L_i\colon \mathbb{Q}]$。对于 $i = 1, \ldots, 2g+2$, L_i 同构于 $K[T]/(f_i(T))$，其中 $f_i(x)$ 是 $f(x)$ 的某个因子。如 $f(x) = f_1(x)\cdots f_{2g+2}(x)$，则 $\Delta_{f_1}\cdots\Delta_{f_{2g+2}}$ 整除 Δ_f。我们还有 $\Delta_{L_i/K} \mid \Delta_{f_i}$，因此

$$\log_2|\Delta_{L_i/\mathbb{Q}}| = \log_2|N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_{L_i/K}| + \frac{d_i}{d}\log_2|\Delta_{K/\mathbb{Q}}| \leq \log_2|N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_{f_i}| + \frac{d_i}{d}\log_2|\Delta_{K/\mathbb{Q}}|.$$

我们得到

$$\dim \mathrm{Cl}_S(L_i)[2] \leq \frac{1}{2}\log_2|N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_{f_i}| + \frac{d_i}{2d}\log_2|\Delta_{K/\mathbb{Q}}| + \frac{3}{2}d_i\log_2 d_i + d_i.$$

因此，该定理的第（2）部分意味着

$$\begin{aligned}
\mathrm{rk}\, J(K) &\leq 2g(2d + \frac{2}{3}\log_2|N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_f|) + \sum_{i=2}^{m}\left(\frac{1}{2}\log_2|N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_{f_i}| + \frac{d_i}{2d}\log_2|\Delta_{K/\mathbb{Q}}| + \frac{3}{2}d_i\log_2 d_i + d_i\right)\\
&\leq 4gd + (\frac{4}{3}g+\frac{1}{2})\log_2|N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_f| + (g+\frac{1}{2})\log_2|\Delta_{K/\mathbb{Q}}| + (3g+\frac{3}{2})d\log_2(2gd+d) + (2g+1)d\\
&= (\frac{4}{3}g+\frac{1}{2})\log_2|N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_f| + (g+\frac{1}{2})\log_2|\Delta_{K/\mathbb{Q}}| + (3g+\frac{3}{2})d\log_2(2gd+d) + (6g+1)d.
\end{aligned}$$

这就证明了定理 6.2（3）。

第（4）部分的证明与第（3）部分类似，只是我们应用第（1）部分而不是第（2）部分。于是有

$$\begin{aligned}
\mathrm{rk}\, J(K) &\leq 1 + (2g+3)(2d + \frac{2}{3}\log_2|N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_f|) + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\log_2|N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_{f_i}| + \frac{d_i}{2d}\log_2|\Delta_{K/\mathbb{Q}}| + \frac{3}{2}d_i\log_2 d_i + d_i\right)\\
&\quad + \frac{1}{2}\log_2|\Delta_{K/\mathbb{Q}}| + \frac{3}{2}d\log_2 d + d\\
&\leq 1 + (4g+6)d + (\frac{4}{3}g+\frac{5}{2})\log_2|N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_f| + (g+\frac{3}{2})\log_2|\Delta_{K/\mathbb{Q}}| + (3g+3)d\log_2(2gd+2d)\\
&\quad + \frac{3}{2}d\log_2 d + (2g+3)d\\
&\leq 1 + (6g+6)d + (\frac{4}{3}g+\frac{5}{2})\log_2|N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_f| + (g+\frac{3}{2})\log_2|\Delta_{K/\mathbb{Q}}| + (3g+\frac{9}{2})d\log_2(2gd+2d).
\end{aligned}$$

这证明了定理 6.2(4)，从而证明了整个定理。 □

6.2 平均上界

设 C 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上、亏格为 $g \geq 2$、带有一个标记有理点 $P \in C(\mathbb{Q})$ 的超椭圆曲线。设 J_C 为 C 在 $\mathbb{Q}$ 上的雅可比簇。若 P 是魏尔斯特拉斯点，则仿射曲线 $C \setminus \{P\}$ 具有方程

$$y^2 = x^{2g+1} + c_2 x^{2g-1} + c_3 x^{2g-2} + \cdots + c_{2g+1}, \quad c_i \in \mathbb{Q}.$$

点 P 在此方程下是无穷远点。此外，若要求方程在 $\mathbb{Z}$ 上是极小的，则这些系数是唯一的，即 $c_i \in \mathbb{Z}$，且不存在素数 p 使得每个 c_i 都被 p^{2i} 整除。假设该方程是极小的，并定义 (C, P) 的高度为

$$h(C, P) = \log \max\{1, |c_2|^{\frac{1}{2}}, \ldots, |c_{2g+1}|^{\frac{1}{2g+1}}\}.$$

By Bhargava–Gross [BG13], 2-塞尔默群 Sel 的平均大小$_2(J_C)$ 为 3，即

$$\lim_{A\to\infty} \frac{\sum\limits_{h(C,P)<A} \#\mathrm{Sel}_2(J_C)}{\sum\limits_{h(C,P)<A} 1} = 3.$$

Kummer 映射

$$J_C(\mathbb{Q})/2J_C(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Sel}_2(J_C)$$

是单射。因此，该结果意味着

$$\limsup_{A\to\infty} \frac{\sum\limits_{h(C,P)<A} 2^{\mathrm{rk}\, J_C(\mathbb{Q})}}{\sum\limits_{h(C,P)<A} 1} \leq 3.$$

注意 $1 + \sqrt[5]{4} \leq 2$ 对于 $g \geq 2$。根据定理 5.1，有理点的平均数量至多为

$$\limsup_{A\to\infty} \frac{\sum\limits_{h(C,P)<A} \#C(\mathbb{Q})}{\sum\limits_{h(C,P)<A} 1} \leq 10^{13} g^8 \cdot \limsup_{A\to\infty} \frac{\sum\limits_{h(C,P)<A} 2^{\mathrm{rk}\, J_C(\mathbb{Q})}}{\sum\limits_{h(C,P)<A} 1} \leq 3 \cdot 10^{13} g^8.$$

若 P 不是魏尔斯特拉斯点，则记 P' 为 P 在超椭圆对合下的像。于是仿射曲线 $C \setminus \{P, P'\}$ 的方程为

$$y^2 = x^{2g+2} + c_2 x^{2g} + c_3 x^{2g-1} + \cdots + c_{2g+2}, \quad c_i \in \mathbb{Q}.$$

点 P, P' 位于无穷远处。假设该方程如上所述在 $\mathbb{Z}$ 上是极小的。这将$c_i \in \mathbb{Z}$ 确定到相差一个符号。定义 (C, P) 的高度为

$$h(C, P) = \log \max\{1, |c_2|^{\frac{1}{2}}, \ldots, |c_{2g+2}|^{\frac{1}{2g+2}}\}.$$

在这种情况下，Shankar–Wang [SW18] 证明了 2-塞尔默群的平均大小至多为 6。因此，上述论证给出

$$\limsup_{A\to\infty} \frac{\sum\limits_{h(C,P)<A} \#C(\mathbb{Q})}{\sum\limits_{h(C,P)<A} 1} \leq 10^{13} g^8 \cdot \limsup_{A\to\infty} \frac{\sum\limits_{h(C,P)<A} 2^{\mathrm{rk}\, J_C(\mathbb{Q})}}{\sum\limits_{h(C,P)<A} 1} \leq 6 \cdot 10^{13} g^8.$$

综上，我们得到以下定理。

定理 6.5 (定理 1.8)。 ***(1)*** 对于亏格为 $g \geq 2$、定义在 $\mathbb{Q}$ 上且带有一个有理魏尔斯特拉斯点的超椭圆曲线，有理点的平均数至多为 $3 \cdot 10^{13} g^8$.

(2) 对于亏格为 $g \geq 2$、定义在 $\mathbb{Q}$ 上且带有一个有理非韦尔斯特拉斯点的超椭圆曲线，有理点的平均数至多为 $6 \cdot 10^{13} g^8$.

我们指出，该平均值依赖于由高度 $h(C,\ P)$ 给出的次序。这个高度可以看作是 C 的某个高度与 P 的某个高度的正线性组合。如果 P 是魏尔斯特拉斯点，那么 P 的高度应当被 C 的高度的某个倍数所上界，因此 $h(C,\ P)$ 应当被 C 的高度的某个倍数所上界。在这种情况下，我们或许能够将结果转化为关于按 C 的高度取平均的表述。如果 P 不是魏尔斯特拉斯点，问题就困难得多，因为它与有效莫德尔猜想有关。

第二部分

解析估计

本部分包含本文中的复分析论证。在第一部分中，我们在假设三个解析结果成立的前提下证明了主要定理（定理1.2 或定理5.1）：定理3.5、定理3.9和定理3.10。本部分的主要目标是证明这三个结果。事实上，它们各自的强化版本分别在定理10.11、定理11.7和定理9.19中得到证明。

7 预备　　双曲几何与Tian峰截面

本节汇集了分析亏格为 $g \geq 2$的复曲线几何结构所需的一些预备知识。我们首先回顾双曲度量的一些局部黎曼几何和K¨ahler几何性质。然后，我们按照 [Tia90a、Tia90b、Tia13、Tia15]回顾Tian的峰截面方法的基本框架。另请参阅 [MM07，定义5.1。1]。沿用 [Zho24第 4], 节中的方法，我们通过截面空间上的有界线性泛函构造峰截面，并在该空间上赋予 L^2 内积。为简便起见，我们将讨论范围限定于复一维流形及其余切丛，同时允许一般的光滑截面，不一定是全纯的。

设 C 是定义在 $\mathbb{C}$ 上、亏格为 $g \geq 2$ 的曲线，并以 ω_C 表示其典范丛。记 μ_{hyp} 为 C 上唯一的 K¨ahler 度量，其常曲率为 $4\pi\,(1-g)$，且体积为 1；记 $\mu_{\mathrm{KE}} = 4\pi\,(g-1)\,\mu_{\mathrm{hyp}}$ 为 C 上唯一的 K¨ahler 度量，其常曲率为 -1。由于 $\dim C = 1$，我们将 K¨ahler 度量 μ 与其相应的体积形式及测度视为相同。

7.1 双曲度量的局部结构

除短测地线附近外，双曲度量的局部结构由庞加莱圆盘模型给出。在短测地线的邻域内，其局部结构则由双曲圆柱模型给出，这种邻域称为领圈。下面将详细介绍这两种局部模型。

庞加莱模型与一致化

设 C 是亏格为 $g \geq 2$ 的紧黎曼曲面，并配备常曲率为 -1 的黎曼度量 ds^2 。那么 $(C,\ ds^2)$ 的万有覆盖与常曲率为 -1 的双曲平面等距。

~ ~

定理 7.1。 设 $\rho_{\widetilde{C}}:\ C \to C$ 为万有覆盖映射，并用 $ds^2 = \rho_{\widetilde{C}}^* ds^2$ 表示ds^2的拉回。则黎曼流形 $(\widetilde{C}, \widetilde{ds^2})$ 与赋予黎曼度量 $\widetilde{ds^2} = dr^2 + $双曲正弦$^2\, r d\theta^2$的实平面 $\mathbb{R}^2$ 等距，其中 (r,θ) 是 $\mathbb{R}^2$的极坐标。

证明。 这直接源于：给定常曲率的单连通空间形式在等距意义下唯一。参见 [Pet06，例 1.4.6，定理 5.6。7]。 □

上文引入的度量来自扭曲积度量，并非自然地与某个 K¨ahler 微分形式相关联。现在我们描述万有覆盖空间上的 K¨ahler 结构。令 $\mathbb{D}$ 表示单位圆盘

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

并令 $\mathcal{H}$ 表示上半平面

$$\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\tau) > 0\}.$$

¨的万有覆盖空间上的 Kähler 结构可以如下描述。

定理 7.2（庞加莱模型）。设 μ_{KE} 是 C 上具有常曲率 -1的唯一 *Kähler* 度量。设 $\rho_{\widetilde{C}}:\ C\to C$ 是万有覆盖映射，$\widetilde{\mu_{\mathrm{KE}}}=\rho_{\widetilde{C}}^{*}\mu_{\mathrm{KE}}$ 是 μ_{KE}的拉回。那么，*Kähler* 曲线 $(C,\ \widetilde{\mu_{\mathrm{KE}}})$ 与以下两个模型中的每一个都双全纯且等距等价。

- 庞加莱单位圆盘：$(\mathbb{D},\mu_{\mathbb{D}})=\left(\mathbb{D},\ \frac{4\mu_{\text{欧氏}}}{(1-|z|^2)^2}\right)$。
- 庞加莱上半平面：$(\mathcal{H},\mu_{\mathcal{H}})=\left(\mathcal{H},\ \frac{\mu_{\text{欧氏}}}{(\mathrm{Im}(\tau))^2}\right)$。

这里 $\mu_{\mathrm{Euc}}=\frac{idz\wedge d\bar{z}}{2}$ 是 $\mathbb{C}$上的标准欧氏 *Kähler* 度量。

证明。 参见 [Pet06，第4.3.3小节，定理 5.6。7]。 □

由于这两个庞加莱模型是显式的，我们现在给出它们之间的一个同构。定义

$$f:\mathbb{D}\longrightarrow\mathcal{H},\quad z\longmapsto\frac{z+i}{iz+1}.$$

可以验证，f 是从 $\mathbb{D}$到 $\mathcal{H}$的一个同构。

接下来，我们描述 C 的典范丛上的厄米度量。令 ω_C 为 C 的典范丛。存在唯一的厄米度量$\|\cdot\|_{\mathrm{hyp},C}$，定义在 ω_C 上，使得对于经典拓扑中的任意开子集 $U\subset C$ 以及 U 上的任意全纯 1-形式 α，

$$i\alpha\wedge\bar{\alpha}=\frac{\|\alpha\|^2_{\mathrm{hyp},C}}{2}\mu_{\mathrm{KE}}.$$

令 $\rho_{\mathbb{D}}:\ \mathbb{D}\to C$ 和 $\rho_{\mathcal{H}}:\ \mathcal{H}\to C$ 分别为来自单位圆盘模型和上半平面模型的万有覆盖映射。那么，$\Omega^1_{\mathbb{D}}=\rho_{\mathbb{D}}^{*}\omega_C$ 和 $\Omega^1_{\mathcal{H}}=\rho_{\mathcal{H}}^{*}\omega_C$ 分别是单位圆盘模型和上半平面模型上的全纯 1-形式线丛。

由于 $\rho_{\mathbb{D}}$ 和 $\rho_{\mathcal{H}}$ 是万有覆盖映射，它们诱导出厄米度量$\|\cdot\|_{\mathrm{hyp},\ \mathbb{D}}$ 和$\|\cdot\|_{\mathrm{hyp},\ \mathcal{H}}$，使得对于经典拓扑中的任意开子集 $U\subset C$ 以及 U 上的任意全纯 1-形式 α，

$$\|\alpha\|^2_{\mathrm{hyp},C}(\rho_{\mathbb{D}}(z))=\|\rho_{\mathbb{D}}^{*}\alpha\|^2_{\mathrm{hyp},\mathbb{D}}(z),\ \ \|\alpha\|^2_{\mathrm{hyp},C}(\rho_{\mathcal{H}}(\tau))=\|\rho_{\mathcal{H}}^{*}\alpha\|^2_{\mathrm{hyp},\mathcal{H}}(\tau),$$

其中 $z\in\rho_{\mathbb{D}}^{-1}(U)$，且 $\tau\in\rho_{\mathcal{H}}^{-1}(U)$。根据$\|\cdot\|_{\mathrm{hyp},C}$的定义，我们有

$$\begin{aligned}idz\wedge d\bar{z}&=\frac{\|dz\|^2_{\mathrm{hyp},\mathbb{D}}}{2}\rho_{\mathbb{D}}^{*}\mu_{\mathrm{KE}}=\frac{2\|dz\|^2_{\mathrm{hyp},\mathbb{D}}\mu_{\mathrm{Euc}}}{(1-|z|^2)^2}=\frac{i\|dz\|^2_{\mathrm{hyp},\mathbb{D}}}{(1-|z|^2)^2}dz\wedge d\bar{z},\\ id\tau\wedge d\bar{\tau}&=\frac{\|d\tau\|^2_{\mathrm{hyp},\mathcal{H}}}{2}\rho_{\mathcal{H}}^{*}\mu_{\mathrm{KE}}=\frac{\|d\tau\|^2_{\mathrm{hyp},\mathcal{H}}\mu_{\mathrm{Euc}}}{2(\mathrm{Im}(\tau))^2}=\frac{i\|d\tau\|^2_{\mathrm{hyp},\mathcal{H}}}{4(\mathrm{Im}(\tau))^2}d\tau\wedge d\bar{\tau}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\|dz\|_{\mathrm{hyp},\mathbb{D}}=1-|z|^2,\ \ \|d\tau\|_{\mathrm{hyp},\mathcal{H}}=2\mathrm{Im}(\tau),$$

and

$$\|f^{*}\alpha\|_{\mathrm{hyp},\mathbb{D}}(z)=\|\alpha\|_{\mathrm{hyp},\mathcal{H}}(f(z)),\quad\forall z\in\mathbb{D},\alpha\in\Gamma(\mathcal{H},\Omega^1_{\mathcal{H}}).$$

由于双曲厄米度量在自同构下保持不变，因此只要上下文清楚，我们就写作 $\|\cdot\|_{\mathrm{hyp}}$，而不注明空间。

注 7.3. 设 $\mu^{\mathrm{BK}}_{\mathrm{hyp}}$ 是 C 上具有常双全纯截面曲率 -1 的 K¨ahler 度量。那么 $\mu^{\mathrm{BK}}_{\mathrm{hyp}}=\frac{1}{4}\mu_{\mathrm{KE}}$，并且

$$\frac{i}{2}\alpha\wedge\bar{\alpha}=\|\alpha\|^2_{\mathrm{hyp},C}\mu^{\mathrm{BK}}_{\mathrm{hyp}}.$$

另请参见 [Tia00，第 1 节。2] 以了解有关双全纯截面曲率的更多细节。

双曲曲面的厚薄分解

经典结果表明，任何紧双曲曲面都存在厚薄分解：足够短的测地线对应着领圈，而其补集的几何性质则一致有界。现在我们陈述描述这一结构的领圈定理。

定理 7.4 (领圈定理)。 设 C 是一个亏格为 $g \geq 2$ 的紧黎曼曲面，配备了常曲率为 -1 的黎曼度量 ds^2，且 γ_1、$\cdots$、γ_m 是 C 上两两不交的简单闭测地线。则以下结论成立：

(1) $m \leq 3g-3$。

(2) 存在简单闭测地线 γ_{m+1}、$\cdots$、γ_{3g-3}，它们与 γ_1、$\cdots$、γ_m 一起将 C 分解为裤子曲面，即亏格为零且有三个边界分支的连通曲面。

(3) 领圈

$$\mathscr{C}(\gamma_j) = \{p \in C \mid \mathrm{dist}_{ds^2}(p, \gamma_j) \leq w(\gamma_j)\}$$

宽度为

$$w(\gamma_j) = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{\sinh \frac{\ell(\gamma_j)}{2}}\right)$$

对于 $j = 1$、$\cdots$、$3g-3$，彼此不相交，其中 $\ell(\gamma)$ 是 γ的长度，而 距离$_{ds^2}$ 是由黎曼度量 ds^2在C 上诱导的距离。

(4) 每个 $\mathscr{C}\ \gamma_j$ $[-w\ \gamma_j\ \ w\ \gamma_j\ ] \times\ \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ $ds^2\ = ()$ 都与圆柱 $()()()$ 等距，其黎 $dr^2 + \ell^2$ $^2\, rdt^2$ 曼度量为 (γ_j)双曲余弦。

此外，令 γ_1'、$\cdots$、$\gamma_{m'}'$ 为 C上长度为 ≤ 2 反双曲正弦 1 的所有简单闭测地线组成的集合。则有以下结论：

(5) $m' \leq 3g-3$。

(6) γ_1'、$\cdots$、$\gamma_{m'}'$ 彼此不相交。

(7) 对所有 $x \in C \setminus \left(\cup_{j=1}^{m'} \mathscr{C}(\gamma_j')\right)$，单射半径 $\mathrm{inj}_{ds^2}(x)\ >$ 反双曲正弦1 。

(8) 单射半径 $\mathrm{inj}_{ds^2}(x)$ 满足

$$\sinh \mathrm{inj}_{ds^2}(x) = \sinh\left(\frac{\ell(\gamma_j')}{2}\right) \cosh \mathrm{d}_{\gamma_j'}(x) = \cosh\left(\frac{\ell(\gamma_j')}{2}\right) \cosh \mathrm{d}_{\partial\mathscr{C}(\gamma_j')}(x) - \sinh \mathrm{d}_{\partial\mathscr{C}(\gamma_j')}(x),$$

对所有 $x \in \mathscr{C}(\gamma_j')$，其中 $\mathrm{d}^{\gamma_j'}(x)\ = \mathrm{dist}_{ds^2}(x,\ \gamma_j')$，且 $\mathrm{d}_{\partial\mathscr{C}(\gamma_j')}(x)\ = \mathrm{dist}_{ds^2}(x,\ \partial\mathscr{C}(\gamma_j'))$。

注7.5。点 $x \in C$ 处的单射半径 $\mathrm{inj}_{ds^2}(x)$，按定义是满足以下条件的半径 $r > 0$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ 的上确界：万有覆盖 (C, ds^2) 中的度量球 $B_r(\tilde{x})$ 在 (C, ds^2) 上的像经投影后，在 C 中保持等距，其中 $\tilde{x}$ 是 x 的一个提升。在我们的情形中，由于 $(C, ds^2)\ = (C, \mu_{\mathrm{KE}})$ 具有负截面曲率，$\mathrm{inj}_{ds^2}(x)$ 等价于以 x 为基点的最短非平凡测地环长度的一半。更多详情另见[Pet06，引理 5.7。12]

证明。 证明基于对双曲平面中直角六边形长度的显式计算，这些六边形自然地由曲面的裤子分解产生。利用这些公式，可以构造领圈并验证其性质。更多详情请参见 [Bus92、定理4.1.1 和定理 4.1。6]。 □

作为领圈定理的直接推论，我们得到以下推论，它讨论了另一条闭测地线与一条短闭测地线之间的关系。

推论 7.6。设 C 是一个亏格为 $g \geq 2$ 的紧黎曼曲面，并配备一个常曲率为 -1 的黎曼度量 ds^2。设 γ 是 C 上长度为 $\ell(\gamma) \leq 2$ 反双曲正弦 1 的简单闭测地线，并将其相应的领圈记为 $\mathscr{C}(\gamma)$。设 $\mathbf{c}\colon \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to C$ 是一条不同于 γ 的简单闭测地线。则：

(1) 若 $c \cap \gamma \neq \varnothing$，则 $\sinh\left(\frac{\ell(\gamma)}{2}\right) \cdot \sinh\left(\frac{\ell(c)}{2}\right) > 1$，并且将 c 与自然投影 $P_{[-w(\gamma),w(\gamma)]}\colon \mathscr{C}(\gamma) \to [-w(\gamma)\ w(\gamma)]$ 复合所定义的函数 $P_{[-w(\gamma),w(\gamma)]} \circ c$，在包含 $c \cap \gamma$ 中一点的 $c^{-1}(\mathscr{C}(\gamma))$ 的任意连通分支 $I \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上严格单调。

(2) 若 $\mathbf{c} \cap \gamma = \varnothing$，则对于任意 $x \in \mathbf{c} \cap \mathscr{C}(\gamma)$，单射半径满足 $\mathrm{inj}_{ds^2}(x) >$ 反双曲正弦 $\frac{\sqrt{2}}{2}$。

注 7.7. 由领圈定理，$\mathbf{I} \neq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$；因此，它可以自然地识别为一个闭区间 $\widetilde{\mathbf{I}}$ 在 $\mathbb{R}$ 中。此外，同样的论证表明，若 $\mathbf{c}\colon [0,1] \to \mathscr{C}(\gamma)$ 是一条测地线段，且 $\mathbf{c}(\{0,1\}) = \mathbf{c}([0,1]) \cap \partial\mathscr{C}(\gamma)$，则推论 7.6 中的估计仍然成立。

证明。我们从 (1) 开始。由定理 7.4，可得

$$\sinh\left(\frac{\ell(\gamma)}{2}\right)\sinh\left(\frac{\ell(\mathbf{c})}{2}\right) > \sinh\left(\frac{\ell(\gamma)}{2}\right)\sinh(w(\gamma)) = 1,$$

另见 [Bus92，推论 4.1.2]。为证明单调性，我们考虑万有覆盖映射 $\rho_{\mathcal{H}}\colon \sim \mathcal{H} \to C$ 以及提升 $\tilde{\mathbf{c}}\colon \mathbb{R} \to C \cong \mathcal{H}$ 和 $\tilde{\gamma}\colon \mathbb{R} \to C \cong \mathcal{H}$，并选择它们使得 $\tilde{\gamma} \cap \tilde{\mathbf{c}} \neq \varnothing$，且 $\rho_{\mathcal{H}}(\tilde{\gamma} \cap \tilde{\mathbf{c}}) \in \mathbf{c}(\mathbf{I})$。注意，$\tilde{\gamma}$ 和 $\tilde{\mathbf{c}}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的测地线；特别地，$\#(\tilde{\gamma} \cap \tilde{\mathbf{c}}) \leq 1$。假设 $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\mathbf{c}}(0)$，并将 $\widetilde{\mathbf{I}}$ 识别为包含 0 的闭区间 $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$。令 $\theta_{\tilde{\gamma},\tilde{\mathbf{c}}}$ 表示 $\tilde{\gamma}$ 与 $\tilde{\mathbf{c}}$ 在 $\tilde{\gamma}(0)$ 处的夹角。由于 $\mathbf{c} \neq \gamma$，$\sin\theta_{\tilde{\gamma},\tilde{\mathbf{c}}} \neq 0$。根据双曲三角形公式（见 [Bus92，定理 2.2.2]），

$$\sinh \mathrm{dist}_{\mu_{\mathcal{H}}}(\tilde{\mathbf{c}}(t), \tilde{\gamma}) \cdot |\sin\theta_{\tilde{\gamma},\tilde{\mathbf{c}}}| = \sinh(|t|\ell(\mathbf{c})),$$

其中 $\mu_{\mathcal{H}} = \rho_{\mathcal{H}}^{*}\mu_{\mathrm{KE}}$。根据领圈定理，对于 $t \in \mathbf{I}$，我们有 $\sinh \mathrm{dist}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(\mathbf{c}(t)\ \gamma) = \sinh \mathrm{dist}_{\mu_{\mathcal{H}}}(\tilde{\mathbf{c}}(t)\ \tilde{\gamma})$，单调性由此得证。这就完成了 (1) 的证明。

现在转向 (2)。不失一般性，假设 $x \in \mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}$ 是 $\mathscr{C}(\gamma)$ 的内部。令 $\mathbf{c}_x$ 表示 $\mathbf{c} \cap \mathscr{C}(\gamma)$ 中包含 x 的连通分支。于是，$\mathbf{c}_x \cap \partial\mathscr{C}(\gamma)$ 由两个点组成，记为 y 和 y'。因此，$\mathbf{c}_x$ 是一条连接 y 和 y' 的测地线。由于 $\mathbf{c} \cap \gamma = \varnothing$，点 y 和 y' 位于 $\partial\mathscr{C}(\gamma)$ 的同一个连通分支中。根据 $\mathscr{C}(\gamma)$ 的描述（定理 7.4），自然投影 $[-w(\gamma)\ w(\gamma)] \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 诱导出映射 $\mathrm{P}_\gamma\colon \mathscr{C}(\gamma) \to \gamma$。由于 $\mathbf{c}$ 是简单曲线，限制映射 $\mathrm{P}_\gamma|_{\mathbf{c}_x}$ 是单射。应用双曲三直角四边形公式（见 [Bus92，定理 2.3.1 和 (4.1.7)]），可得

$$\begin{aligned}
\sinh\left(\mathrm{dist}_{ds^2}(x,\gamma)\right) &\geq \frac{\sinh(\mathrm{dist}_{ds^2}(y,\gamma))}{\sqrt{1+\sinh^2(\frac{\ell(\mathbf{P}_\gamma(\mathbf{c}_x))}{2})\cosh^2(\mathrm{dist}_{ds^2}(y,\gamma))}} \\
&\geq \frac{1}{\sinh\frac{\ell(\gamma)}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\frac{\ell(\gamma)}{2})\cdot(1+\frac{1}{\sinh^2(\frac{\ell(\gamma)}{2})})}} \\
&= \frac{1}{\sinh\frac{\ell(\gamma)}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\cosh^2(\frac{\ell(\gamma)}{2})}}.
\end{aligned}$$

再次应用双曲三直角四边形公式，

$$\sinh\left(\mathrm{inj}_{ds^2}(x)\right) \geq \sinh\left(\frac{\ell(\gamma)}{2}\right)\cosh\left(\mathrm{dist}_{ds^2}(x,\gamma)\right) = \frac{\cosh^2\left(\frac{\ell(\gamma)}{2}\right)}{\sqrt{1+\cosh^2\left(\frac{\ell(\gamma)}{2}\right)}} > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

证明至此完成。 □

设 $\Gamma \leq \mathrm{Aut}(\mathcal{H}) \cong \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 是亏格为 $g \geq 2$ 的紧黎曼曲面 C 的一致化所对应的甲板变换群。于是 $\mathcal{H}/\Gamma \cong C$ 是一个 K¨ahler 流形。根据上述领圈定理，我们得到轨道 Γz 关于 $z \in \mathcal{H}$ 的局部结构的如下描述。

引理 7.8. 设 $z \in \mathcal{H}$，并设 $\sigma_z \in \Gamma$ 是满足下述条件的一个元素

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z, \sigma_z z) = \inf_{\sigma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}_{\mathcal{H}}\}} \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z, \sigma z),$$

其中，距离$_{\mathcal{H}}$ 是由 *K¨ahler* 度量 $\mu_{\mathcal{H}} = {}_2^{idz\wedge d\bar{z}}{}_z\,(\mathrm{Im}())^2$诱导的 $\mathcal{H}$ 上的距离。对于 $r > 0$ 和 $y \in \mathcal{H}$，记$B_r(y)$ $= \{\tau \in \mathcal{H} \mid$ 距离$_{\mathcal{H}}(y, \tau) < r\}$。则：

(1)$B_{2\,\text{反双曲正弦}\,1}(z) \cap \Gamma z \subset \left\{\sigma_z^k z\colon\ k \in \mathbb{Z}\right\}$。

(2) 若 $B_{2\,\mathrm{arcsinh}\,1}(z) \cap \Gamma z \neq \{z\}$，则存在一条长度至多为 2 反双曲正弦 1的简单闭测地线 γ，使得 $\rho_{\mathcal{H}}(z) \in \mathscr{C}$ (γ)。此外，对所有 $k \geq 0$,

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z, \sigma_z^{k+1} z) \geq \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z, \sigma_z^k z) + \ell(\gamma).$$

(3) 设 $\rho_{\mathcal{H}}\colon \mathcal{H} \to C$ 为自然投影。若 $\mathrm{inj}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(\rho_{\mathcal{H}}(z)) = r_z \leq$反双曲正弦1 且 距离$_{\mathcal{H}}(z, y) \leq$对数 2，则

$$\#\left(B_{r_z}(\tau) \cap \Gamma y\right) \leq 2, \quad \forall \tau \in \mathcal{H}.$$

注记 7.9。 在单位圆盘模型中，以 0 为中心、半径为反双曲正弦 1 的双曲球 $B_{\mathrm{arcsinh}\,1}(0)$ 与欧几里得圆盘 $\mathbb{D}_{\sqrt{2}-1}(0)$ 重合。

证明。我们先证明 (1)。由定理 7.4，若 $B_{2\,\mathrm{arcsinh}\,1}(z) \cap \Gamma z \neq \{z\}$，则对于某个与长度为 ≤ 2反双曲正弦 1 的短简单闭测地线 $\gamma \in C$相关的领圈$\mathscr{C}(\gamma) \subset C$，有 $\rho_{\mathcal{H}}(z) \in \mathscr{C}(\gamma)$，且 σ_z是由 γ给出的元素。此外，若同伦类中的非平凡闭环路 c : $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to C$ 满足 c(0) $= \rho_{\mathcal{H}}(z)$ 且ℓ(c) ≤ 2 反双曲正弦 1，则 c $\subset \mathscr{C}(\gamma)$。由此可得 $B_{2\,\mathrm{arcsinh}\,1}(z) \cap \Gamma z \subset \left\{\sigma_z^k z\colon\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

现在证明 (2)。根据 (1) 中的论证可知 γ 存在。令 $\tilde{\gamma}$ 为 γ 的提升，并令$w \in \tilde{\gamma}$为 $\tilde{\gamma}$上距离 z最近的点。那么，对任意 $k \in \mathbb{Z}$，dist$_{\mathcal{H}}(w, \sigma_z^k w) = |k|\ell(\gamma)$。由双曲三直角四边形公式 [Bus92、定理 2.3.1 和 (4.1.7) 可得],

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z, \sigma_z^k z)\right) = \sinh\left(\frac{|k|\ell(\gamma)}{2}\right) \cdot \cosh\left(\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z, w)\right), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

对任意 $k \geq 0$，定义 $u_k(t) =$ 2反双曲正弦 $\left(t$ 双曲正弦 $\overline{{}_2^{|k|\ell(}{}^{\gamma}}\right)$。那么

$$\frac{d(u_{k+1} - u_k)}{dt}(t) = \frac{2}{\sqrt{t^2 + \left(\sinh\left(\frac{(k+1)\ell(\gamma)}{2}\right)\right)^{-2}}} - \frac{2}{\sqrt{t^2 + \left(\sinh\left(\frac{k\ell(\gamma)}{2}\right)\right)^{-2}}} > 0.$$

由于 dist$_{\mathcal{H}}(z, \sigma_z^k z) = u_k$(双曲余弦 (dist$_{\mathcal{H}}(z, w)$))，我们可以得出

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z, \sigma_z^{k+1} z) - \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z, \sigma_z^k z) \geq u_{k+1}(1) - u_k(1) = \ell(\gamma).$$

最后，我们证明 (3)。再次由定理 7.4 可知，若 # $(B_{r_z}(\tau) \cap \Gamma y) \geq 2$，其中某个 $\tau \in \mathcal{H}$，则 inj$_{\mu_{\mathrm{KE}}}(\rho_{\mathcal{H}}($ $y))$ $\leq r_z$。因此，对于某个与长度为 ≤ 2arcsinh 1 的短简单闭测地线 γ相关联的领圈 $\mathscr{C}(\gamma) \subset C$，有 $\rho_{\mathcal{H}}($ $y) \in \mathscr{C}(\gamma)$。令 $\sigma_y \in \Gamma$ 为与 γ 对应的甲板变换。令 $\tilde{\gamma}$ 为 γ 的一个提升，并令 w_y、$w_z \in \tilde{\gamma}$ 分别为 $\tilde{\gamma}$ 上距 y 和 z 最近的点。再次由双曲三直角四边形公式,

$$\sinh\left(\frac{\ell(\gamma)}{2}\right) \cdot \cosh\left(\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z, w_z)\right) = \sinh\left(\frac{1}{2}\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z, \sigma_y z)\right) \geq \sinh \mathrm{inj}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(\rho_{\mathcal{H}}(z)) = \sinh r_z,$$

且对任意 $k \in \mathbb{Z}$,

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z,\sigma_y^k z)\right) = \sinh\left(\frac{|k|\ell(\gamma)}{2}\right)\cdot\cosh\left(\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(y,w_y)\right).$$

由于 $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z,\ y) \leq$ 对数 2，我们有

$$\cosh\left(\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(y,w_y)\right) \geq \max\{1,\cosh\left(\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z,w_z)-\log 2\right)\} > \frac{1}{2}\cosh\left(\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z,w_z)\right).$$

因此，对任意 $k \geq 2$,

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(y,\sigma_y^k y)\right) > \frac{1}{2}\sinh\left(\frac{k\ell(\gamma)}{2}\right)\cdot\cosh\left(\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z,w_z)\right) > \sinh\left(\frac{1}{2}\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z,\sigma_y z)\right) > \sinh r_z.$$

这表明， $\mathcal{H}$ 中半径为 r_z 的任意球与轨道 Γy 至多相交于两个点，即

$$\#\left(B_{r_z}(\tau)\cap\Gamma y\right) \leq 2,\ \ \forall \tau \in \mathcal{H}.$$

至此证明完成。 □

K¨ahler领圈上的度量结构

为方便起见，我们用复坐标重述领圈上的度量。容易看出，与 $\mathscr{C}(\gamma)$上的黎曼度量相容的K¨ahler结构是等价的。

引理 7.10 （K¨ähler 领圈）。 设 C 是亏格为 $g \geq 2$的紧黎曼曲面，配备了常曲率为 -1的 *K¨ähler* 度量 μ_{KE}，并设 γ是一条长度为 ℓ（γ） $\leq$ 2反双曲正弦 1 的简单闭测地线，位于C上。那么，领圈 $\mathscr{C}$（γ） 与配备 *K¨ähler* 度量的 $\mathbb{D}_{e^{-\nu(\gamma)}}$（0） $\setminus \mathbb{D}_{e^{\nu(\gamma)-\frac{2\pi^2}{\ell}\gamma}()}$ （0） 等距同构

$$\mu_{\mathrm{KE}}|_{\mathscr{C}(\gamma)} = \frac{\ell^2(\gamma)\mu_{\mathrm{Euc}}}{4\pi^2|z|^2\sin^2\left(\frac{\ell(\gamma)}{2\pi}\log|z|\right)},$$

其中 $\mu_{\mathrm{Euc}} = \frac{idz\wedge d\bar{z}}{2}$ 是 $\mathbb{C}$上的标准欧氏度量，而 ν（γ） $\in$ （0， $2e^{\pi}$ （γ）） 满足 ν（γ）ℓ（γ） $=2\pi$ 反正弦 $\left(\text{双曲正切}^{\ell}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right)$ 。此外，短简单闭测地线 γ的像是圆 $|z| = e^{-\ell^{\frac{\pi^2}{\gamma}}()}$ 。 —

证明。 论证与 [Pet06第4.3小节中的相同。3]。由于 $\mathscr{C}(\gamma)$上的双曲度量可表示为扭曲积，我们只需找到一个微分同胚 $(r,\theta) \mapsto (\varsigma(r)\ \theta)$ 以及一个光滑函数 $\Upsilon(\varsigma)$，使得

$$\Upsilon^2(\varsigma)(d\varsigma^2+\varsigma^2 d\theta^2) = dr^2+\ell^2(\gamma)\cosh^2 r dt^2.$$

注意到 $d\varsigma = \varsigma'(r)dr$ 且 $2\pi dt = d\theta$。由此得到如下方程组 :

$$\varsigma'(r)\Upsilon(\varsigma) = 1,\quad 2\pi\varsigma(r) = \varsigma'(r)\ell(\gamma)\cosh r.$$

可以 验证下列一对函数是上述方程组的一个特解:

$$\varsigma(r) = e^{4\pi\cdot\frac{\arctan e^r-\pi/2}{\ell(\gamma)}},\quad \Upsilon(\varsigma) = \frac{-\ell(\gamma)}{2\pi\varsigma\sin\left(\frac{\ell(\gamma)}{2\pi}\log\varsigma\right)}.$$

显然， $z = \varsigma e^{i\theta}$ 正是我们所需要的全纯坐标。 □

现在我们介绍 K¨ahler 领圈（$\mathscr{C}(\gamma)$ μ_{KE}）上关于黎曼结构和 K¨ahler 结构的一些性质。

命题 7.11。 设 C 是一个亏格为 $g \geq 2$的紧黎曼曲面，配备一个 ¨*ahler* 度量μ_{KE}，其常曲率为 -1，并设 γ是长度为 $\ell(\gamma)$ 反双曲正弦 1 上的 C。令$\mathscr{C}(\gamma)$ 和 $\nu(\gamma)$ 按引理 7.10中的定义设定。则以下性质成立。

(1) $\frac{\pi^2}{\ell(\gamma)} - \nu(\gamma)$ 和 $\nu(\gamma)$ 是关于 $\ell(\gamma)$的递减函数。此外，$\frac{\pi^2}{4}$ 反双曲正弦 $1 \leq \nu(\gamma) < \pi$.

(2) 对任意 $\varsigma_0 \in (e^{-\frac{\pi^2}{\ell(\gamma)}}, e^{-\nu(\gamma)})$ 和 $z_0 \in \mathbb{D}_{\varsigma_0}(0) \setminus \mathbb{D}_{e^{-\frac{\pi^2}{\ell(\gamma)}}}(0)$，距离

$$\mathrm{dist}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(z_0, \partial\overline{\mathbb{D}_{\varsigma_0}(0)}) = \log\left(\frac{\tan\left(-\frac{\ell(\gamma)\log|z_0|}{4\pi}\right)}{\tan\left(-\frac{\ell(\gamma)\log\varsigma_0}{4\pi}\right)}\right) \geq \log\left(\frac{\log|z_0|}{\log\varsigma_0}\right).$$

(3) 对任意 $z_0 \in \overline{\mathbb{D}_{e^{-\nu(\gamma)}}(0) \setminus \mathbb{D}_{e^{-2\nu(\gamma)}}(0)}$，单射半径

$$\mathrm{inj}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(z_0) \geq \mathrm{arcsinh}\left(-\frac{\nu(\gamma)}{\log|z_0|}\right).$$

证明。 我们首先证明（1）。根据定义， $\nu(\gamma) = \frac{2\pi}{\text{反正弦}(\tanh\frac{\ell(\gamma)}{2})}$ 是 $\ell(\gamma)$ 的函数。为证明 $\nu(\gamma)$ 是递减的，令 $u_1(t) = \frac{t}{\text{反正弦}(\text{双曲正切}\, t)}$, $\forall t > 0$。于是

$$\frac{du_1(t)}{dt} = \frac{1}{t\cosh t} - \frac{\arcsin(\tanh t)}{t^2} = \frac{\frac{t}{\cosh t} - \arcsin(\tanh t)}{t^2},$$

and

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{\cosh t} - \arcsin(\tanh t)\right) = -\frac{t\sinh t}{\cosh^2 t} < 0.$$

因此，对于 $t > 0$, $\frac{t}{\text{双曲余弦}\, t}$ 反正弦(双曲正切 t) 严格递减，而且为负。由此可得，当 $t > 0$ 时$\frac{du_1}{dt} < 0$。由于 $\nu(\gamma) = \pi u_1(\frac{\ell(\gamma)}{2})$，我们得出 $\nu(\gamma)$严格递减。于是

$$\pi = \lim_{t\to 0^+} \pi u_1(t) > \pi u_1(\frac{\ell(\gamma)}{2}) = \nu(\gamma) \geq \pi u_1(\mathrm{arcsinh}\, 1) = \frac{\pi^2}{4\,\mathrm{arcsinh}\, 1}.$$

类似地，对于任意 $t > 0$，我们计算得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{2t} - u_1(t)\right) = -\frac{\pi}{2t^2} - \frac{1}{t\cosh t} + \frac{\arcsin(\tanh t)}{t^2} < \frac{-\pi+\pi}{2t^2} = 0.$$

由此可知， $\frac{\pi^2}{\ell(\gamma)} - \nu(\gamma) = \pi\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\ell(\gamma)/2} - u_1(\frac{\ell(\gamma)}{2})\right)$关于 $\ell(\gamma)$ 也是递减的。这就证明了 (1)。

现在我们转向 (2)。由于度量 μ_{KE} 在变换 $z \mapsto e^{-2\pi^2\ell^{-1}(\gamma)}z^{-1}$和 $z \mapsto e^{i\theta}z$, $\forall\theta \in [0, 2\pi)$ 下保持不变，因此

$$\mathrm{dist}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(z_0, \partial\overline{\mathbb{D}_{\rho_0}(0)}) = \mathrm{dist}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(z_0, \rho_0|z_0|^{-1}z_0).$$

设 $\varsigma = |z|$ 和 $z = \varsigma e^{i\theta}$。于是

$$\mu_{\mathrm{KE}}|_{\mathscr{C}(\gamma)} = \frac{\ell^2(\gamma)(d\varsigma^2 + \varsigma^2 d\theta^2)}{4\pi^2\varsigma^2\sin^2(\frac{\ell(\gamma)}{2\pi}\log\varsigma)}.$$

由于 tan 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上是凸且递增的，我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(z_0, \partial\overline{\mathbb{D}_{\varsigma_0}(0)}) &= \int_{|z_0|}^{\varsigma_0} \frac{-\ell(\gamma)d\varsigma}{2\pi\varsigma\sin(\frac{\ell(\gamma)}{2\pi}\log\varsigma)} = \log\left(\frac{\tan\left(\frac{\ell(\gamma)\log|z_0|}{-4\pi}\right)}{\tan\left(\frac{\ell(\gamma)\log\varsigma_0}{-4\pi}\right)}\right) \\ &\geq \log\left(\frac{\frac{\ell(\gamma)\log|z_0|}{-4\pi} - 0}{\frac{\ell(\gamma)\log\varsigma_0}{-4\pi} - 0}\right) = \log\left(\frac{\log|z_0|}{\log\varsigma_0}\right).\end{aligned}$$

这就证明了 (2)。

最后，我们考虑 (3)。对于 $t \in \left(0, \frac{\ell(\gamma)\nu(\gamma)}{2\pi}\right)$，定义

$$u_2(t) = \cosh t \cosh\left(\log\left(\frac{\tan\frac{\vartheta t}{2}}{\tan\frac{t}{2}}\right)\right) - \sinh\left(\log\left(\frac{\tan\frac{\vartheta t}{2}}{\tan\frac{t}{2}}\right)\right),$$

其中 $\vartheta = -\frac{\log|z_0|}{\nu(\gamma)} \in [1, 2)$。根据定理 7.4 及前述性质，我们有

$$\begin{aligned}\sinh\left(\operatorname{inj}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(z_0)\right) &= \cosh\left(\log\left(\frac{\tan\left(\frac{\vartheta\ell(\gamma)\nu(\gamma)}{4\pi}\right)}{\tan\left(\frac{\ell(\gamma)\nu(\gamma)}{4\pi}\right)}\right)\right)\cosh\frac{\ell(\gamma)}{2} \\ &\quad - \sinh\left(\log\left(\frac{\tan\left(\frac{\vartheta\ell(\gamma)\nu(\gamma)}{4\pi}\right)}{\tan\left(\frac{\ell(\gamma)\nu(\gamma)}{4\pi}\right)}\right)\right) \\ &> u_2\left(\frac{\ell(\gamma)\nu(\gamma)}{2\pi}\right).\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{t\to 0^+} u_2(t) = \cosh 0 \cosh(\log(\vartheta)) - \sinh(\log(\vartheta)) = \vartheta^{-1},$$

只需证明 $u_2(t)$ 在 $t \in \left(0, \frac{\ell(\gamma)\nu(\gamma)}{2\pi}\right)$ 上递增。对于 $\vartheta \in [1, 2)$ 和 $t \in \left(0, \frac{\ell(\gamma)\nu(\gamma)}{2\pi}\right)$，容易验证

$$0 < \frac{\sin(\vartheta t)}{\vartheta} = t\int_0^1 \cos(\vartheta t\varsigma)d\varsigma \leq t\int_0^1 \cos(t\varsigma)d\varsigma = \sin t.$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}\frac{du_2(t)}{dt} &= \cosh\left(\log\left(\frac{\tan\frac{\vartheta t}{2}}{\tan\frac{t}{2}}\right)\right)\left(\sinh(t) - \frac{\vartheta}{\sin(\vartheta t)} + \frac{1}{\sin t}\right) \\ &\quad + \cosh(t)\sinh\left(\log\left(\frac{\tan\frac{\vartheta t}{2}}{\tan\frac{t}{2}}\right)\right)\left(\frac{\vartheta}{\sin(\vartheta t)} - \frac{1}{\sin t}\right) \\ &\geq \cosh\left(\log\left(\frac{\tan\frac{\vartheta t}{2}}{\tan\frac{t}{2}}\right)\right)\left(\sinh(t) - \frac{\vartheta}{\sin(\vartheta t)} + \frac{1}{\sin t}\right).\end{aligned}$$

设定 $u_3(t) = t - \frac{\vartheta}{\sin(\vartheta t)} + \frac{1}{\sin t}$，不等式 $u_3(t) \geq 0$ 蕴含 $\frac{du_2(t)}{dt} \geq 0$。根据 $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)$ 关于 $t \to 0^+$ 的泰勒展开，我们有

$$\lim_{t\to 0^+} u_3(t) = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{t - \sin t}{t\sin t}\right) - \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{\vartheta t - \sin(\vartheta t)}{t\sin(\vartheta t)}\right) = 0.$$

进一步计算可得 $\frac{du_3(t)}{dt} = 1 + \frac{\vartheta^2 \cos(\vartheta t)\sin^2(\vartheta t) - \cos t \sin^2 t}{}$，并且

$$\frac{d^2u_3(t)}{dt^2} = \frac{\vartheta^3}{\sin(\vartheta t)} - \frac{2\vartheta^3}{\sin^3(\vartheta t)} - \frac{1}{\sin t} + \frac{2}{\sin^3 t}.$$

令 $u_4(t) = t^3\left(\frac{2}{\sin^3 t} - \frac{1}{\sin t}\right)$, $t \in (0, \pi/2)$。如果 $\tan t \geq 2$，直接计算可得

$$\frac{du_4(t)}{dt} = \frac{t^3\cos t}{\sin^2 t}\left(\frac{3\tan t}{t} - 5 + \frac{6}{\tan^2 t}\left(\frac{\tan t}{t} - 1\right)\right) > \frac{t^3\cos t}{\sin^2 t} > 0.$$

现在假设 $\tan t \in [1, 2]$。在这种情况下，函数 $t^2 \tan^2 t \cdot \left(\tan t - 1\right)$ 关于 $\tan t$ 递增。由于对所有 $\forall t \in (0, \pi/2)$, $\tan t > t + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15}$ 都成立，因此可得

$$\begin{aligned}
\frac{du_4(t)}{dt} &= \frac{t^3\cos t}{\sin^2 t}\left(\frac{3\tan t}{t} - 5 + \frac{6}{t^2}\cdot\frac{t^2}{\tan^2 t}\cdot\left(\frac{\tan t}{t} - 1\right)\right) \\
&\geq \frac{t^3\cos t}{\sin^2 t}\left(t^2 + \frac{2t^4}{5} - 2 + \frac{2 + \frac{4t^2}{5}}{\left(1 + \frac{t^2}{3} + \frac{2t^4}{15}\right)^2}\right) \\
&= \frac{t^3\cos t}{\sin^2 t}\cdot\frac{t^2(525 + 350t^2 + 525t^4 + 230t^6 + 60t^8 + 8t^{10})}{5(15 + 5t^2 + 2t^4)^2} > 0.
\end{aligned}$$

因此，$\frac{d^2u_3(t)}{dt^2} = t^{-3}(u_4(t) - u_4(\vartheta t)) < 0, \forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2\vartheta}\right)$。因此，对于任意 $t \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$,

$$\begin{aligned}
u_3(t) &> \min\left\{\lim_{t\to 0^+} u_3(t), \lim_{t\to\left(\frac{\pi}{4}\right)^-} u_3(t)\right\} = \min\left\{0, \frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{\sin\frac{\pi\vartheta}{4}} + \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}\right\} \\
&\geq \min\left\{0, \frac{\pi}{4} - 2 + \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}\right\} = 0.
\end{aligned}$$

由于 $\nu(\gamma)\ell(\gamma) = 2\pi$ 反双曲正弦 $\left(\text{双曲正切 } \frac{\ell(\gamma)}{2}\right)$，我们可以得出

$$\frac{\ell(\gamma)\nu(\gamma)}{2\pi} = \arcsin\left(\tanh\frac{\ell(\gamma)}{2}\right) \leq \arcsin\left(\tanh\left(\operatorname{arcsinh} 1\right)\right) = \frac{\pi}{4}.$$

于是 $\frac{du_2(t)}{dt} > 0$、$\forall t \in \left(0, \frac{\ell(\gamma)\nu\gamma}{2\pi}\right)$，从而证明了 (3)。 □

7.2 L^2 内积与霍奇分解

为准备构造峰截面，我们回顾 L^2 微分形式上的内积概念及相应的霍奇分解。

设 C 是一条赋有经典拓扑的连通紧致光滑复曲线，μ 是 C 上的 K¨ahler 度量。记 $\mathscr{A}^k_{C,\mathbb{R}}$ 为系数取自 $\mathbb{R}$ 的光滑 k- 形式层，并令 $\mathscr{A}^k_{C,\mathbb{C}} = \mathscr{A}^k_{C,\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$，其中 $k \in \{0, 1, 2\}$。可以验证，$\mathscr{A}^0_{C,\mathbb{R}}$ 自然构成一个环层，并与 C 上取值于 $\mathbb{R}$ 的光滑函数层同构。因此，对于任意 $k \in \{0, 1, 2\}$ 和 $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$，$\mathscr{A}^k_{C,K}$ 继承自然的 $\mathscr{A}^0_{C,\mathbb{R}}$- 模结构。因此，系数取自 K 的光滑微分形式层 $\mathscr{A}_{C,K} = \bigoplus_{k=0}^2 \mathscr{A}^k_{C,K}$ 也是一个 $\mathscr{A}^0_{C,\mathbb{R}}$- 模。此外，对于任意经典开子集 $U \subset C$，典范映射

$$\alpha \mapsto \alpha \otimes_{\mathbb{R}} 1, \ \forall \alpha \in \mathscr{A}_{C,\mathbb{R}}(U),$$

定义了一个 $\mathscr{A}^0_{C,\mathbb{R}}(U)$-同态 $\mathscr{A}_{C,\mathbb{R}} \to \mathscr{A}_{C,\mathbb{C}}$。这样，层 $\mathscr{A}_{C,\mathbb{R}}$ 自然地视为 $\mathscr{A}_{C,\mathbb{C}}$ 的一个 $\mathscr{A}^0_{C,\mathbb{R}}$-子模。

现在我们引入与 C 上的 K¨ahler 度量 μ 相关的 Hodge $\star$-算子。设 $x \in C$，并令U_x 为 x 的一个经典开邻域，其局部坐标为 $z: U_x \to \mathbb{C}$。记 $u \in \mathscr{A}^0_{C,\mathbb{C}}(U_x)$ 为 U_x上的一个光滑 $\mathbb{C}$-值函数。那么 Hodge $\star$-算子

$$\star \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^0_{C,\mathbb{R}}}\left(\mathscr{A}_{C,\mathbb{C}}, \mathscr{A}_{C,\mathbb{C}}\right)$$

是一个同构，且在局部由以下关系确定

$$\star(u) = \bar{u}\mu, \ \ \star(u\mu) = \bar{u}, \ \ \star(udz) = i\bar{u}d\bar{z}, \ \ \star(ud\bar{z}) = -i\bar{u}dz,$$

其中 μ 是 C上的 K¨ahler 微分形式。可以验证这些限制

$$\star|_{\mathscr{A}_{C,\mathbb{R}}} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^0_{C,\mathbb{R}}}\left(\mathscr{A}_{C,\mathbb{R}}, \mathscr{A}_{C,\mathbb{R}}\right), \ \ \star^2|_{\mathscr{A}^k_{C,\mathbb{C}}} = (-1)^k \mathrm{Id}_{\mathscr{A}^k_{C,\mathbb{C}}},$$

其中 $\mathrm{Id}_{\mathscr{A}^k_{C,\mathbb{C}}}: \mathscr{A}^k_{C,\mathbb{C}} \to \mathscr{A}^k_{C,\mathbb{C}}$ 是恒等态射。另见 [Huy05，第 1 节。2] 有关 Hodge $\star$-算子的更多细节。

特别地，限制 $\star|_{\mathscr{A}^k_{C,\mathbb{C}}}: \mathscr{A}^k_{C,\mathbb{C}} \to \mathscr{A}^{1-k}_{C\mathbb{C}}$，是共轭线性的；对于 $k = 1$，Hodge $\star$-算子与复共轭的复合定义了一个 $\mathbb{C}$-线性算子

$$\bar{\star}: \mathscr{A}^1_{C,\mathbb{C}}(C) \to \mathscr{A}^1_{C,\mathbb{C}}(C), \ \ \alpha \mapsto \overline{\star\alpha},$$

其特征 值为 $-i$ 和 i。相应的特征子空间给出一个 L^2-正交分解 on:

$$\mathscr{A}^1_{C,\mathbb{C}}(C) = \mathscr{A}^{1,0}_{C,\mathbb{C}}(C) \oplus \mathscr{A}^{0,1}_{C,\mathbb{C}}(C).$$

对于任意 $\alpha \in \mathscr{A}^1_{C,\mathbb{C}}(C)$，令 $\alpha^{1,0}$ 和 $\alpha^{0,1}$ 分别表示 α 在 $\mathscr{A}^{1,0}_{C\mathbb{C}}(C)$ 和 $\mathscr{A}^{0,1}_{C\mathbb{C}}(C)$ 上的投影。¯微分算子 ∂ 和 $\bar{\partial}$ 定义如下:

$$\partial u = (du)^{1,0}, \ \bar{\partial}u = (du)^{0,1}, \ \partial\alpha = d\alpha^{0,1}, \ \bar{\partial}\alpha = d\alpha^{1,0},$$

对于任意 $u \in \mathscr{A}^0_{C,\mathbb{C}}(C)$ 和 $\alpha \in \mathscr{A}^1_{C,\mathbb{C}}(C)$。

对于任意开子集 $U \subset C$ （在经典拓扑中）以及任意 $\alpha_U \in \mathscr{A}_{C,\mathbb{C}}(U)$，存在一个光滑非负函数 $\eta_{\alpha_U}: U \to [0,\infty) \subset \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_U \wedge \star\alpha_U = \eta_{\alpha_U}\mu \geq 0.$$

由此可在 $\mathscr{A}_{C,\mathbb{C}}(U)$ 上定义一个厄米内积:

$$\langle \alpha_U, \beta_U \rangle_{L^2;U} = \frac{1}{2}\int_U \alpha_U \wedge \star\beta_U, \ \ \forall \alpha_U, \beta_U \in \mathscr{A}_{C,\mathbb{C}}(U).$$

我们用 $\|\cdot\|_{L^2;U}$表示相应的 L^2-范数。显然，$\langle \alpha_U, \beta_U \rangle_{L^2,U} \in \mathbb{R}$若 $\alpha_U, \beta_U \in \mathscr{A}_{C,\mathbb{R}}(U)$，因此将厄米内积限制在 $\mathscr{A}_{C,\mathbb{R}}(U) \times \mathscr{A}_{C,\mathbb{R}}(U)$ 上，便得到一个实内积。

接下来，我们回顾霍奇分解。和之前一样，为简单起见，我们将讨论范围限制在黎曼曲面的情形。

定理 7.12 (霍奇分解)。 设 C 是一个配备经典拓扑的连通紧致光滑复曲线，且 μ 是 C 上的一个 *K¨ahler* 度量。那么对于 $k \in \{0,1,2\}$ 和 $K \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$，取值于 K 的光滑 k-形式空间 $\mathscr{A}^k_{C,K}(C)$具有如下 L^2-正交分解:

$$\mathscr{A}^k_{C,K}(C) = d\mathscr{A}^{k-1}_{C,K}(C) \oplus \mathscr{H}^k_{C,K}(C) \oplus \star d\mathscr{A}^{1-k}_{C,K}(C),$$

其中 $\mathscr{A}^j_{C,K} = 0$ 对于 $j \notin \{0,1,2\}$，且 $\mathscr{H}^k_{C,K}$ 表示系数取 K 的调和 k-微分形式层定义为

$$\mathscr{H}^k_{C,K}(U) = \left\{\alpha \in \mathscr{A}^k_{C,K}(U) : d\alpha = d\star\alpha = 0\right\},$$

对于任意经典开子集 $U \subset C$。特别地，维数$_K \mathscr{H}^k_{C,\ K}(C) < \infty$。此外，在 $K = \mathbb{C}$ 和$k = 1$ 的情况下，*Hodge* $\star$-算子与复共轭的复合定义了一个 $\mathbb{C}$-线性算子

$$\bar{\star} : \mathscr{H}^1_{C,\mathbb{C}}(C) \to \mathscr{H}^1_{C,\mathbb{C}}(C), \quad \alpha \mapsto \overline{\star\alpha},$$

其特征值为 $-i$ 和 i。对应的特征子空间给出一个 L^2-正交分解：

$$\mathscr{H}^1_{C,\mathbb{C}}(C) = \Gamma(C, \omega_C) \oplus \overline{\Gamma(C, \omega_C)},$$

其中

$$\Gamma(C, \omega_C) = \mathscr{H}^1_{C,\mathbb{C}}(C) \cap \mathscr{A}^{1,0}_{C,\mathbb{C}}(C) = \{\alpha \in \mathscr{H}^1_{C,\mathbb{C}}(C) : \bar{\star}(\alpha) = -i\alpha\}$$

是 C上的全纯1-微分形式空间。

证明。 参见 [War83，定理 6。8] 以及 [Huy05，定理 3.2。8]。 □

令$\mathscr{Z}^k_{C,\ K}$ 表示由 K上的系数构成的闭 k-微分形式层，定义如下

$$\mathscr{Z}^k_{C,K}(U) = \left\{\alpha \in \mathscr{A}^k_{C,K}(U) : d\alpha = 0\right\},$$

对于任意经典开子集 $U \subset C$ 和 $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$。系数取自 K 的德拉姆上同调则定义为

$$H^k_{\mathrm{dR}}(U; K) = \mathscr{Z}^k_{C,K}(U)/d\mathscr{A}^{k-1}_{C,K}(U).$$

由定理 7.12可知，调和 k-形式空间自然同构于 k阶德拉姆上同调群。

推论 7.13。 设 C 是配备经典拓扑的连通紧致光滑复曲线， μ 是 C上的 *K¨ahler* 度量。那么嵌入$\mathscr{H}^k_{C,\ K}(C) \to \mathscr{Z}^k_{C,\ K}(C)$ 给出一个同构$\mathscr{H}^k_{C,\ K}(C) \cong H^k_{\mathrm{dR}}(C;\ K)$。

证明。 对于任意$\alpha \in \mathscr{Z}^k_{C,\ K}(C)$和$\beta \in \mathscr{A}^{1-k}_{C\ K}{}_{,}(C)$，有

$$\langle \alpha, \star d\beta\rangle_{L^2;C} = \int_C \alpha \wedge \star^2 d\beta = (-1)^k \int_C \alpha \wedge d\beta = -\int_C d\alpha \wedge \beta = 0.$$

因此$\mathscr{Z}^k_{C,\ K}(C)$和$\star d\mathscr{A}^{1-k}_{C\ K}{}_{,}(C)$彼此 L^2-正交。由定理 7.12可得

$$\mathscr{Z}^k_{C,K}(C) = d\mathscr{A}^{k-1}_{C,K}(C) \oplus \mathscr{H}^k_{C,K}(C).$$

由此可得$\mathscr{H}^k_{C,\ K}(C) \cong \mathscr{Z}^k_{C,\ K}(C)/d\mathscr{A}^{k-1}_{C\ K}{}_{,}(C) = H^k_{\mathrm{dR}}(C; K)$。 □

现在我们聚焦于情形 $k = 1$。根据 Hodge $\star$-算子的定义，限制 $\star|_{\mathscr{A}^1_{C,\mathbb{C}}(C)}$ 只取决于 C 的复结构，而不取决于 K¨ahler 度量的具体选择。作为一个实向量空间，$\mathscr{H}^1_{C,\mathbb{C}}(C)$ 有两种自然的 $\mathbb{R}$-线性分解。一种是将实部和虚部分开：

$$\mathscr{H}^1_{C,\mathbb{C}}(C) = \mathscr{H}^1_{C,\mathbb{R}}(C) \oplus i\mathscr{H}^1_{C,\mathbb{R}}(C),$$

另一种是将复线性对合 $\bar{\star}$ 的特征子空间分解，其特征值为 $-i$ 和 i：

$$\mathscr{H}^1_{C,\mathbb{C}}(C) = \Gamma(C, \omega_C) \oplus \overline{\Gamma(C, \omega_C)}.$$

下面，我们比较这两种分解，并阐明它们之间的关系。

推论 7.14. 设 C 是配备经典拓扑的连通紧致光滑复曲线，μ 是 C上的*K¨ahler*度量。则 $\mathbb{R}$-线性映射

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{H}^1_{C,\mathbb{R}}(C) & \longrightarrow & \mathscr{H}^1_{C,\mathbb{C}}(C), \\ \alpha & \longmapsto & \alpha + i\star\alpha, \end{array}$$

给出了$\mathscr{H}^1_{C,\ \mathbb{R}}(C) \cong \Gamma(C,\omega_C)$ 之间的 $\mathbb{R}$-向量空间同构。

证明。 设$\alpha \in \mathscr{H}^1_{C,\ \mathbb{R}}(C)$。由于 $\star$ 保持调和形式且 α 取实值，微分形式 $\alpha + i\star\alpha$ 属于$\mathscr{H}^1_{C,\ \mathbb{C}}(C)$。此外，我们计算得：

$$\bar{\star}(\alpha + i\star\alpha) = \bar{\star}\alpha + i\bar{\star}\star\alpha = \star\alpha + i\star^2\alpha = \star\alpha - i\alpha = -i(\alpha + i\star\alpha),$$

因此 $\alpha + i\star\alpha$ 是 $\bar{\star}$ 的特征向量，对应特征值为 $-i$，从而属于 $\Gamma(C,\ \omega_C)$。这个映射显然是 $\mathbb{R}$-线性的且为单射。为证明满射性，我们比较维数：

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathscr{H}^1_{C,\mathbb{R}}(C) = \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{H}^1_{C,\mathbb{C}}(C) = 2\dim_{\mathbb{C}} \Gamma(C,\omega_C) = \dim_{\mathbb{R}} \Gamma(C,\omega_C) < \infty.$$

因此该映射给出了$\mathscr{H}^1_{C,\ \mathbb{R}}(C)$与 $\cong \Gamma(C,\ \omega_C)$之间的同构。 □

7.3 K¨ahler 领圈上的全纯 1-形式

受 L^2 AMM21 [、AMM22和Zho24],中针对复双曲尖点所发展的局部分析的启发，我们现在对 K¨ahler 领圈进行类似研究。在本小节中，我们对 K L^2 ähler 领圈上的局部内积¨进行显式计算，这将作为后续使用的重要例子。这种对 L^2-可积全纯 1-形式的局部描述，对于几何局部化论证至关重要。

令 $\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}$ 表示 $\mathscr{C}(\gamma)$ 的内部，并令 $\Omega^1_{\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}}$ 表示 $\mathscr{C}(\gamma)$ 上全纯 1-形式的线丛。接下来，我们构造 $\Gamma^{\mathrm{hol}}_{L^2}(\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}, \Omega^1_{\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}})$ 的 L^2-正交基；这是 $\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}$ 上关于局部 L^2-内积的L^2-可积全纯 1-形式所构成的希尔伯特空间

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{L^2;\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}} = \frac{i}{2}\int_{\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}} \alpha \wedge \bar{\beta}.$$

引理 *7.15.* 设 C 是亏格为 $g \geq 2$ 的紧黎曼曲面，配备常曲率为 -1 的 *K¨ahler* 度量 μ_{KE}，且 γ 是 C 上长度为 $\ell(\gamma) \leq 2$ 反双曲正弦 *1* 的简单闭测地线。设 $\mathscr{C}(\gamma)$ 和$\nu(\gamma)$ 如引理 *7.10* 中定义。则 $\{a_k z^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 构成 $\Gamma^{\mathrm{hol}}_{L^2}(\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}, \Omega^1_{\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}})$ 的 L^2 正交基，其中

$$|a_k|^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\left(\frac{\pi^2}{\ell(\gamma)} - \nu(\gamma)\right)}, & k = -1; \\ \dfrac{(k+1)e^{2(k+1)\nu(\gamma)}}{\pi\left(1 - e^{4(k+1)(\nu(\gamma) - \frac{\pi^2}{\ell(\gamma)})}\right)}, & k \neq -1. \end{cases}$$

证明。 由Laurent级数展开可得

$$\Gamma^{\mathrm{hol}}_{L^2}(\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}, \Omega^1_{\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}}) = \overline{\oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}z^k dz},$$

其中闭包是相对于上文所定义的 L^2-内积取的。直接计算可得

$$\begin{aligned} \langle z^k dz, z^k dz \rangle_{L^2;\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}} &= \frac{i}{2}\int_{\mathscr{C}(\gamma)} |z|^{2k} dz \wedge d\bar{z} = 2\pi \int_{e^{\nu(\gamma) - \frac{2\pi^2}{\ell(\gamma)}}}^{e^{-\nu(\gamma)}} t^{2k+1} dt \\ &= \begin{cases} \dfrac{4\pi^3}{\ell(\gamma)} - 4\pi\nu(\gamma), & k = -1; \\ \dfrac{\pi}{k+1}\left(e^{-2(k+1)\nu(\gamma)} - e^{2(k+1)(\nu(\gamma) - \frac{2\pi^2}{\ell(\gamma)})}\right), & k \neq -1, \end{cases} \end{aligned}$$

从而该引理成立。 □

现在我们给出关于 $\Gamma^{\mathrm{hol}}_{L^2}(\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}},\ \Omega^1_{\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}})$ 的一些显式估计。

命题 7.16. 设 C 是亏格为 $g\geq 2$ 的紧黎曼曲面，配备常曲率为 -1 的 *Kähler* 度量 μ_{KE}，并设 γ 是 C 上长度为 $\ell(\gamma)\leq 2$反双曲正弦 *1* 的简单闭测地线。令 $\mathscr{C}(\gamma)$ 和 $\nu(\gamma)$ 如引理 *7.10* 中所定义，并令 $\Gamma^{\mathrm{hol}}_{L^2}(\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}},\ \Omega^1_{\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}})$ 为上文定义的希尔伯特空间。

设 $\alpha\in\Gamma^{\mathrm{hol}}_{L^2}(\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}、\Omega^1_{\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}})$ 满足 $\|\alpha\|_{L^2;\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}}=1$。则以下性质成立。

(1) 假设 $\int_\gamma\alpha=0$。那么对于任意 $z\in\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}$，我们有逐点估计

$$i\alpha\wedge\bar\alpha\leq\frac{2e^{2\nu(\gamma)}}{\pi(1-e^{-3\pi})}\left(\frac{1}{\left(1-|z|^2e^{2\nu(\gamma)}\right)^2}+\frac{|z|^{-4}e^{-\frac{4\pi^2}{\ell(\gamma)}}}{\left(1-|z|^{-2}e^{2\left(\nu(\gamma)-\frac{2\pi^2}{\ell(\gamma)}\right)}\right)^2}\right)\mu_{\mathrm{Euc}}.$$

(2) 假设 $\int_\gamma\alpha=0$。那么，对于任意两点 $z_0,z_1\in\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}$ 以及任意分段光滑曲线$\mathbf{c}\colon[0,1]\to\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}$，其中 $\mathbf{c}(0)=z_0$ 且$\mathbf{c}(1)=z_1$，积分 $\int_{\mathbf{c}}\alpha=\int_0^1\mathbf{c}^*\alpha$ 仅取决于 z_0 和 z_1。此外，若 $|z_0|\leq|z_1|$，则有

$$\left|\int_{\mathbf{c}}\alpha\right|^2\leq\frac{e^{2\nu(\gamma)}}{\pi(1-e^{-3\pi})}\left(\frac{|z_1-z_0|^2}{\left(1-|z_1|^2e^{2\nu(\gamma)}\right)^2}+\frac{|z_1^{-1}-z_0^{-1}|^2e^{-\frac{4\pi^2}{\ell(\gamma)}}}{\left(1-|z_0|^{-2}e^{2\left(\nu(\gamma)-\frac{2\pi^2}{\ell(\gamma)}\right)}\right)^2}\right)$$

(3) 对于任意两点 $z_0,z_1\in\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}$，存在一条分段光滑曲线 $\mathbf{c}\colon[0,1]\to\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}$，使得$\mathbf{c}(0)=z_0$、$\mathbf{c}(1)=z_1$，且

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbf{c}}\mathrm{Re}(\alpha)\right|\ \leq\ &\left(\frac{-\log\left(\left(1-e^{2\nu(\gamma)}|z_1|^2\right)\left(1-e^{2(\nu(\gamma)-\frac{2\pi^2}{\ell(\gamma)})}|z_0|^{-2}\right)\right)}{\pi(1-e^{-3\pi})\left(1+\left|\frac{z_0}{z_1}\right|\right)^{-2}}\right)^{\frac12}\\&+\frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma\mathrm{Im}(\alpha)\right|\left|\log\left|\frac{z_1}{z_0}\right|\right|+\frac12\left|\int_\gamma\mathrm{Re}(\alpha)\right|,\end{aligned}$$

w这里 $\alpha=\mathrm{Re}(\alpha)+i\mathrm{Im}(\alpha)$ 是将 α 分解为实部和虚部。

证明。 令 $\{a_jz^jdz\}_{j\in\mathbb{Z}}$为 L^2的正交规范基 $\Gamma^{\mathrm{hol}}_{L^2}(\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}},\Omega^1_{\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}})$，它由引理 7.15构造。由Laurent级数展开，存在常数 $b_j\in\mathbb{C}$ 使得 $\sum|b_j|^2=1$，且 $\alpha=\sum_{j\in\mathbb{Z}}a_jb_jz^jdz$。 $j\in\mathbb{Z}$

现在我们考虑估计 **(1)**。由于 $b_{-1}=0$，由柯西–施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}i\alpha\wedge\bar\alpha\ &=\ 2\left|\sum_{j\in\mathbb{Z}}a_jb_jz^j\right|^2\mu_{\mathrm{Euc}}\leq 2\left(\sum_{j\neq-1}|b_j|^2\right)\left(\sum_{j\neq-1}\left|a_jz^j\right|^2\right)\mu_{\mathrm{Euc}}\\&=\ 2\left(\sum_{j=0}^\infty|a_j|^2|z|^{2j}+\sum_{j=0}^\infty|a_{-2-j}|^2|z|^{-4-2j}\right)\mu_{\mathrm{Euc}}.\end{aligned}$$

由于命题 7.11 推出 $\nu(\gamma)<\pi$，我们得出

$$\frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{\ell(\gamma)}-\nu(\gamma)\right)>4\left(\frac{\pi}{2\,\mathrm{arcsinh}\,1}-1\right)\approx 3.1288559\cdots>3.$$

由引理 7.15，可知

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|^2\,|z|^{2j} &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+1)e^{2(j+1)\nu(\gamma)}|z|^{2j}}{\pi\left(1-e^{4(j+1)(\nu(\gamma)-\frac{\pi^2}{\ell(\gamma)})}\right)}\\ &< \frac{e^{2\nu(\gamma)}}{\pi\left(1-e^{4(\nu(\gamma)-\frac{\pi^2}{\ell(\gamma)})}\right)}\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\left(e^{2\nu(\gamma)}|z|^2\right)^j\\ &\le \frac{e^{2\nu(\gamma)}}{\pi\left(1-e^{-3\pi}\right)\left(1-e^{2\nu(\gamma)}|z|^2\right)^2},\end{aligned}$$

类似地，

$$\sum_{j=0}^{\infty}|a_{-2-j}|^2\,|z|^{-4-2j}\le\frac{|z|^{-4}e^{2(\nu(\gamma)-\frac{2\pi^2}{\ell(\gamma)})}}{\pi\left(1-e^{-3\pi}\right)\left(1-e^{2(\nu(\gamma)-\frac{2\pi^2}{\ell(\gamma)})}|z|^{-2}\right)^2}.$$

这就完成了（1）的证明。

接下来我们来估计（2）。积分 $\int_{\mathbf{c}}\alpha$ 的不变性可由庞加莱引理[BT82b，命题 4，7] 以及庞加莱对偶性 [BT82b，(5.4)]在德拉姆上同调中的结果推出。不过，由于我们的情形是显式的，我们将给出一种构造性证明，并估计其值。

令 $u(z)=\sum_{j\neq-1}\frac{a_jb_jz^{j+1}}{j+1}$。则 u 在 $\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}$上全纯，并且满足

$$du=\sum_{j\in\mathbb{Z}}a_jb_jz^j\,dz=\alpha.$$

对于任意分段光滑实曲线 $\mathbf{c}\colon[0,1]\to\mathscr{C}(\gamma)^{\mathrm{int}}$，其中 $\mathbf{c}(0)=z_0$ 且 $\mathbf{c}(1)=z_1$，有 $\int_{\mathbf{c}}\alpha=u(z_1)-u(z_0)$，因此积分仅取决于 z_0 和 z_1。由柯西-施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbf{c}}\alpha\right|^2 &= \left|\sum_{j\neq-1}\frac{a_jb_j(z_1^{j+1}-z_0^{j+1})}{j+1}\right|^2\le\left(\sum_{j\neq-1}|b_j|^2\right)\left(\sum_{j\neq-1}\frac{|a_j|^2|z_1^{j+1}-z_0^{j+1}|^2}{(j+1)^2}\right)\\ &\le \sum_{j=0}^{\infty}\frac{|a_j|^2|z_1^{j+1}-z_0^{j+1}|^2}{(j+1)^2}+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|a_{-2-j}|^2|z_1^{-j-1}-z_0^{-j-1}|^2}{(j+1)^2}.\end{aligned}$$

如同对 (i) 的论证，引理 7.15 给出：

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|a_j|^2|z_1^{j+1}-z_0^{j+1}|^2}{(j+1)^2} &= |z_1-z_0|^2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|a_j|^2|\sum_{k=0}^{j}z_1^kz_0^{j-k}|^2}{(j+1)^2}\\ &\le |z_1-z_0|^2\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|^2|z_1|^{2j}\\ &< \frac{|z_1-z_0|^2e^{2\nu(\gamma)}}{\pi\left(1-e^{-3\pi}\right)\left(1-e^{2\nu(\gamma)}|z_1|^2\right)^2},\end{aligned}$$

并且类似地，

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|a_{-2-j}|^2|z_1^{-j-1}-z_0^{-j-1}|^2}{(j+1)^2}<\frac{\left|z_0^{-1}-z_1^{-1}\right|^2e^{2(\nu(\gamma)-\frac{2\pi^2}{\ell(\gamma)})}}{\pi(1-e^{-3\pi})\left(1-e^{2(\nu(\gamma)-\frac{2\pi^2}{\ell(\gamma)})}|z_0|^{-2}\right)^2},$$

由此得到（2）。

最后，我们讨论估计（3）。不失一般性，假设 $z_0 = |z_0|$，且 $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ with$\theta_1 \in [-\pi, \pi]$。令 $\mathbf{c}:[0,1] \to \mathscr{C}(\gamma)^{\text{int}}$ 为如下分段光滑曲线

$$\mathbf{c}(t) = \begin{cases} 2t|z_1| + (1-2t)|z_0|, & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ |z_1|e^{i(2t-1)\theta_1}, & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

剩下的工作是估计积分$|\int_{\mathbf{c}} \alpha|$。令 $\alpha' = \alpha - a_{-1}b_{-1}z^{-1}dz$。于是 $\int_\gamma \alpha' = 0$，且 $\int_\gamma \alpha = a_{-1}b_{-1}\int_\gamma z^{-1}dz = 2\pi a_{-1}b_{-1}i$。记 $a'_{-1} = a_{-1}b_{-1}$，由柯西–施瓦茨不等式可得

$$\left|\int_{\mathbf{c}} \alpha'\right| \leq \left(\sum_{j\neq -1} |b_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j\neq -1} \frac{|a_j|^2|z_1^{j+1} - z_0^{j+1}|^2}{(j+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j\neq -1} \frac{|a_j|^2|z_1^{j+1} - z_0^{j+1}|^2}{(j+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

此外，直接计算可得

$$\operatorname{Re}\left(a'_{-1}\int_{\mathbf{c}} z^{-1}dz\right) = \operatorname{Re}\left(a'_{-1}\right)\log\left|\frac{z_1}{z_0}\right| - \operatorname{Im}\left(a'_{-1}\right)\theta_1.$$

因此

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbf{c}} \operatorname{Re}(\alpha)\right| &\leq \left|\int_{\mathbf{c}} \alpha'\right| + \left|\int_{\mathbf{c}} \operatorname{Re}(\alpha - \alpha')\right| \\ &\leq \left(\sum_{j\neq -1} \frac{|a_j|^2|z_1^{j+1} - z_0^{j+1}|^2}{(j+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left|\operatorname{Re}\left(a'_{-1}\right)\log\left|\frac{z_1}{z_0}\right|\right| + \left|\operatorname{Im}\left(a'_{-1}\right)\theta_1\right|, \end{aligned}$$

其中 $z = \varsigma e^{i\theta}$ 是极坐标。

与式 (1) 中一样，引理7.15 给出了所需的和的估计，从而得到

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|a_j|^2|z_1^{j+1} - z_0^{j+1}|^2}{(j+1)^2} &= \sum_{j=0}^{\infty} \left|1 - \frac{z_0^{j+1}}{z_1^{j+1}}\right|^2 \frac{|a_j|^2|z_1|^{2(j+1)}}{(j+1)^2} \\ &\leq \frac{\left(1 + \left|\frac{z_0}{z_1}\right|\right)^2}{\pi(1 - e^{-3\pi})} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{2(j+1)\nu(\gamma)}|z_1|^{2(j+1)}}{j+1} \\ &= \frac{-\log\left(1 - e^{2\nu(\gamma)}|z_1|^2\right)}{\pi(1 - e^{-3\pi})} \left(1 + \left|\frac{z_0}{z_1}\right|\right)^2, \end{aligned}$$

同样地，

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|a_{-2-j}|^2|z_1^{-j-1} - z_0^{-j-1}|^2}{(j+1)^2} \leq \frac{-\log\left(1 - e^{2(\nu(\gamma) - \frac{2\pi^2}{\ell(\gamma)})}|z_0|^{-2}\right)}{\pi(1 - e^{-3\pi})} \left(1 + \left|\frac{z_0}{z_1}\right|\right)^2.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbf{c}}\mathrm{Re}(\alpha)\right| &\le \left(\sum_{j\neq -1}\frac{|a_j|^2|z_1^{j+1}-z_0^{j+1}|^2}{(j+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left|\mathrm{Re}\left(a'_{-1}\right)\log\left|\frac{z_1}{z_0}\right|\right|+\left|\mathrm{Im}\left(a'_{-1}\right)\theta_1\right| \\ &\le \left(\frac{-\log\left(\left(1-e^{2\nu(\gamma)}|z_1|^2\right)\left(1-e^{2(\nu(\gamma)-\frac{2\pi^2}{\ell(\gamma)})}|z_0|^{-2}\right)\right)}{\pi(1-e^{-3\pi})\left(1+\left|\frac{z_0}{z_1}\right|\right)^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad +\frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma\mathrm{Im}(\alpha)\right|\left|\log\left|\frac{z_1}{z_0}\right|\right|+\frac{1}{2}\left|\int_\gamma\mathrm{Re}(\alpha)\right|,\end{aligned}$$

正如所声称的。 □

7.4 Tian 的峰截面

现在我们可以为黎曼曲面引入 Tian 的峰截面。

田峰值截面的基本性质

设 C 是一个赋有经典拓扑的连通紧致光滑复曲线，且 μ 是 C 上的 K¨ahler 度量。用 $\mathscr{A}_{C,\,K}(C)$ 表示 C 上取值于 $K\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ 的光滑微分形式空间，并赋予其 L^2-内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{L^2;\,C}$。设 $\mathbf{X}\subset\mathscr{A}_{C,\,K}(C)$ 是一个非零的 K-线性子空间，且 $\mathbf{T_X}:\mathbf{X}\to K$ 是一个有界的 K-线性泛函。

元素 $\alpha\in\mathbf{X}$ 称为 $\mathbf{T_X}$ 的峰截面，当且仅当它满足 $\|\alpha\|_{L^2;\,C}=1$，并且达到该泛函的算子范数：$\mathbf{T_X}(\alpha)=\|\mathbf{T_X}\|$。

接下来，我们给出峰截面的若干基本性质。尽管它们可由经典泛函分析推出，我们仍附上证明的简要概述。

命题7.17. 设 C、μ、K、$\mathscr{A}_{C,\,K}(C)$、$\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{T_X}$ 如上所述。则下列性质成立。

(1) 若 $\mathbf{T_X}=0$，则 $\alpha\in\mathbf{X}$ 是 $\mathbf{T_X}$ 的峰截面，当且仅当 $\|\alpha\|_{L^2;\,C}=1$。

(2) 若 $\mathbf{T_X}\neq 0$，则

$$\inf\left\{\|\alpha\|_{L^2;C}:\alpha\in\mathbf{X},\ \ |\mathbf{T_X}(\alpha)|=\|\mathbf{T_X}\|\right\}=1.$$

(3) 若 $\mathbf{T_X}\neq 0$，则 $\mathbf{T_X}$ 至多有一个峰截面。

(4) 若 $\mathbf{T_X}\neq 0$ 且 $\alpha\in\mathbf{X}$ 是 $\mathbf{T_X}$ 的峰截面，则 $\mathbf{X}$ 具有 L^2-正交分解：

$$\mathbf{X}=K\alpha\oplus\ker\mathbf{T_X}.$$

证明。 命题 (1) 和 (2) 可直接由 $\|\mathbf{T_X}\|$ 的定义得出。因此我们从性质 (3) 开始。

设 $\alpha,\alpha'\in\mathbf{X}$ 为 $\mathbf{T_X}$ 的两个峰截面。只需证明 $\alpha=\alpha'$。由定义，我们有 $\mathbf{T_X}(\frac{1}{2}(\alpha+\alpha'))=\frac{1}{2}(\mathbf{T_X}(\alpha)+\mathbf{T_X}(\alpha'))=\|\mathbf{T_X}\|$。因此，$L^2$-范数满足 $\left\|\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')\right\|_{L^2;C}\ge 1$。另一方面，我们计算：

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')\right\|^2_{L^2;C} &= \frac{1}{2}\|\alpha\|^2_{L^2;C}+\frac{1}{2}\|\alpha'\|^2_{L^2;C}-\left\|\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')\right\|^2_{L^2;C} \\ &= 1-\left\|\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')\right\|^2_{L^2;C}.\end{aligned}$$

由此可得 $\left\|\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')\right\|_{L^2;C}=1$ 以及 $\left\|\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')\right\|_{L^2;C}=0$。因此，$\alpha=\alpha'$。

现在我们转而讨论性质（4）。

根据定义，$\mathbf{T_X}(\alpha)=\|\mathbf{T_X}\|>0$，因此 $\mathbf{X}$ 具有如下分解:

$$\mathbf{X}=K\alpha\oplus\ker\mathbf{T_X}.$$

还需证明这是一个 L^2-正交分解。

令 $\beta\in\ker\mathbf{T_X}\setminus\{0\}$。那么，

$$\mathbf{T_X}\left(\alpha-\frac{\langle\alpha,\beta\rangle_{L^2;C}}{\langle\beta,\beta\rangle_{L^2;C}}\beta\right)=\mathbf{T_X}(\alpha)=\|\mathbf{T_X}\|.$$

根据性质（ii），我们必须有 $\left\|\alpha-\frac{\langle\alpha,\beta\rangle_{L^2;C}}{\langle\beta,\beta\rangle_{L^2;C}}\beta\right\|_{L^2;C}\geq 1$。然而，直接计算可得:

$$\begin{aligned}\left\|\alpha-\frac{\langle\alpha,\beta\rangle_{L^2;C}}{\langle\beta,\beta\rangle_{L^2;C}}\beta\right\|_{L^2;C}^2 &= \|\alpha\|_{L^2;C}^2-\frac{\left|\langle\alpha,\beta\rangle_{L^2;C}\right|^2}{\langle\beta,\beta\rangle_{L^2;C}}\\ &= 1-\frac{\left|\langle\alpha,\beta\rangle_{L^2;C}\right|^2}{\langle\beta,\beta\rangle_{L^2;C}}.\end{aligned}$$

因此，我们必须有 $\langle\alpha,\beta\rangle_{L^2;C}=0$。这表明该分解确实是 L^2-正交的，从而完成证明。

□

一般而言，确定给定的线性泛函是否有界并不容易。此外，由于空间 $\mathscr{A}_{C,\,K}(C)$ 并不完备，给定的有界泛函不一定存在峰截面。然而，如果该线性泛函可以约化到一个有限维线性子空间上，那么其有界性以及峰截面的存在性便自动成立。

命题 *7.18.* 设 $C,\mu,K,\mathscr{A}_{C,K}(C)$ 以及 X 如上。设 $T_{\mathbf{X}}: X\to K$ 是一个 K-线性泛函（不一定有界）。假设 X 具有一个 L^2-正交分解 $X=X_1\oplus X_2$，使得 $\dim_K X_1<\infty$，且限制 $T_{\mathbf{X}_2}:=T_{\mathbf{X}}|_{\mathbf{X}_2}=0$。那么，$T_{\mathbf{X}}$ 是一个有界的 K-线性泛函，并且存在 $T_{\mathbf{X}}$ 的峰截面 $\alpha\in X_1\subset X$。

证明. 不失一般性，可假设 $\mathrm{T}_{\mathbf{X}}\neq 0$。由于 $\dim_K\mathrm{X}_1<\infty$，限制 $\mathrm{T}_{\mathbf{X}_1}:=\mathrm{T}_{\mathbf{X}}|_{\mathbf{X}_1}$ 是 X_1 上的一个有界 K-线性泛函。根据里斯表示定理，存在唯一的元素 $\alpha\in\mathrm{X}_1$，使得 $\|\alpha\|_{L^2,C}=1$ 且 $\mathrm{T}_{\mathbf{X}_1}(\alpha)=\|\mathrm{T}_{\mathbf{X}_1}\|$。因此，$\alpha$ 是 $\mathrm{T}_{\mathbf{X}_1}$ 的峰截面。根据命题7.17，空间 X_1 具有 L^2-正交分解 $\mathrm{X}_1=K\alpha\oplus\ker\mathrm{T}_{\mathbf{X}_1}$。由于限制 $\mathrm{T}_{\mathbf{X}_2}=0$，我们有 $\ker\mathrm{T}_{\mathbf{X}}=\ker\mathrm{T}_{\mathbf{X}_1}\oplus\mathrm{X}_2,$，从而 X 具有 L^2-正交分解 $\mathrm{X}=K\alpha\oplus\ker\mathrm{T}_{\mathbf{X}}$。因此，$\|\mathrm{T}_{\mathbf{X}}\|=\|\mathrm{T}_{\mathbf{X}_1}\|=\mathrm{T}_{\mathbf{X}}(\alpha)$，故 α 是 $\mathrm{T}_{\mathbf{X}}$ 的峰截面。 □

作为推论，我们看到，在与我们所处情形相关的某些特殊情况下，峰截面总是存在。

推论 7.19。设 C 是配备经典拓扑的连通紧致光滑复曲线。记 $\mathscr{A}_{C,K}(C)$ 为 C 上取值于 $K\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ 的光滑微分形式空间，赋予 L^2-内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2,C}$。设 $\mathbf{X}\subset\mathscr{A}_{C,K}(C)$ 是一个非零的 K-线性子空间，并设 $\mathbf{T_X}:\mathbf{X}\to K$ 是一个 K-线性泛函（不一定有界）。

那么，在以下两种情形中的每一种情形下，$\mathbf{T_X}$ 都是一个有界的 K-线性泛函，并且存在一个属于$\mathbf{T_X}$的峰截面 $\alpha\in\mathbf{X}$:

(1) 域 $K=\mathbb{C}$、空间 $\mathbf{X}\subset\Gamma(C,\omega_C)\subset\mathscr{A}^1_{C,\mathbb{C}}(C)$，并且存在一点 $x\in C$ 以及一个定义在 x 的开邻域 $U_x\subset C$ 上的全纯局部坐标 $z: U_x\to\mathbb{C}$，使得

$$\alpha(x)=\mathbf{T_X}(\alpha)dz,\quad\forall\alpha\in\mathbf{X},$$

其中 $\alpha(x)$ 是 α 在 x 处的取值。

(2) 空间 $\mathbf{X} \subset \mathscr{Z}^1_{C,\mathbb{C}}(C)$，并且存在微分形式 $\beta \in \mathscr{Z}^1_{C,\mathbb{C}}(C)$ 使得

$$\mathbf{T}_{\mathbf{X}}(\alpha) = \int_C \alpha \wedge \beta, \quad \forall \alpha \in \mathbf{X}.$$

证明。 在第一种情形中，由于 C 是紧的，我们有 $\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{X} \leq \dim_{\mathbb{C}} \Gamma(C, \omega_C) < \infty$。因此，命题7.18 适用，从而得到 $\mathbf{T}_{\mathbf{X}}$ 的有界性以及一个峰截面的存在性。

现在考虑第二种情形。由推论 7.13，我们有 L^2-正交分解

$$\mathscr{Z}^1_{C,K}(C) = d\mathscr{A}^0_{C,K}(C) \oplus \mathscr{H}^1_{C,K}(C),$$

而且关于 $\mathbf{T}_{\mathbf{X}}$ 的假设意味着 $\mathbf{T}^{\mathbf{X}}|_{d\mathscr{A}^0_{C,K}(C)} = 0$。由于 $\dim^K \mathscr{H}^1_{C,K}(C) < \infty$，根据定理 7.12，命题7.18再次适用，结论随之得出。 □

峰截面的两种情形：在一点处和沿着一个圈

下一步是进一步分析推论7.19中描述的两种情形。

现在我们转而对推论 7.19中的第一种情形进行更详细的研究。

设 C 是一个赋予经典拓扑的连通紧致光滑复曲线，并设 μ是 C上的一个 K¨ahler 度量。记 $\Gamma(C, \omega_C)$ 为 C上的全纯 1-形式空间，并赋予其L^2-内积

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{L^2;C} = \frac{1}{2} \int_C \alpha \wedge \star\beta = \frac{1}{2} \int_C \alpha \wedge \bar{\beta}, \quad \forall \alpha, \beta \in \Gamma(C, \omega_C).$$

若存在定义在 x的某个开邻域 $U_x \subset C$ 上的全纯局部坐标 $z: U_x \to \mathbb{C}$，使得 $\beta(x) = \mathbf{T}_{\mathbf{X}}(\beta) dz$, $\forall \beta \in \mathbf{X}$，则称 α 是$\mathbf{X} \subset \Gamma(C, \omega_C)$在点 $x \in C$处的峰截面，其中 $\beta(x)$表示 β 在点 x处的取值。上述关系等价于$\mathbf{T}_{\mathbf{X}}(\beta) = \beta(x)(\frac{\partial}{\partial z}|_x)$, $\forall \beta \in \mathbf{X}$。给定点 $x \in C$ 处$\mathbf{X}$ 中的峰截面集合可描述如下。

引理 7.20。 设 $C, \Gamma(C, \omega_C)$ 和$\mathbf{X}$ 如上。设 $\alpha_0 \in \mathbf{X}$ 满足$\|\alpha_0\|_{L^2;C} = 1$ 且 $\alpha_0(x) \neq 0$，其中 $x \in C$为某个对象。那么，当且仅当 α_0 与$\mathbf{X}$中在 x处消失的截面所构成的子空间 L^2-正交时， α_0 才是$\mathbf{X}$ 在 x 处的峰截面：

$$\mathbf{X}(x) = \{\alpha \in \mathbf{X} : \alpha(x) = 0\}.$$

此外，如果 α_0 和 α_1 都是$\mathbf{X}$ 在 x处的峰截面，那么存在一个常数 $\theta \in [0, 2\pi)$ 使得$\alpha_1 = e^{i\theta}\alpha_0$。

证明。 我们先证明“仅当”方向。假设 α_0 是$\mathbf{X}$ 在 x处的峰截面。那么存在一个全纯局部坐标 $z: U_x \to \mathbb{C}$，它定义在 x 的某个开邻域 $U_x \subset C$ 上，并且α_0 是与泛函 $\mathbf{T}_{\mathbf{x},0}: \mathbf{X} \to \mathbb{C}$ 对应的峰截面，该泛函由 $\mathbf{T}_{\mathbf{x},0}(\alpha) = \alpha(x)(\frac{\partial}{\partial z}|_x)$, $\forall \alpha \in \mathbf{X}$定义。显然，$\ker \mathbf{T}_{\mathbf{x},0} = \mathbf{X}(x)$。根据命题 7.17，峰截面 α_0必定与 $\ker\mathbf{T}_{\mathbf{x},0} = \overline{\mathbf{X}}(x)$ L^2-正交，由此证明了“仅当”方向。

现在我们来证明“当”方向。设 $z: U_x \to \mathbb{C}$ 是定义在 x的某个邻域$U_x \subset C$ 上的全纯局部坐标。由于 $\alpha_0(x) \neq 0$，我们可以将 $\alpha_0(x) = a_0 dz$ 写成某个 $a_0 \in \mathbb{C}^*$。在 U_x上定义一个新的局部坐标$w = a_0 z$，使得 $dw(x) = a_0 dz(x)$。现在考虑 $\mathbb{C}$-线性泛函 $\mathbf{T}_{\mathbf{x},1}: \mathbf{X} \to \mathbb{C}$，其定义满足 $\alpha(x) = \mathbf{T}_{\mathbf{x},1}(\alpha) dw$, $\forall \alpha \in \mathbf{X}$。于是 $\mathbf{T}_{\mathbf{x},1}(\alpha_0) = 1$，并且同样有 $\ker \mathbf{T}_{\mathbf{x},0} = \mathbf{X}(x)$。根据假设，$\mathbf{X} = \mathbb{C}\alpha_0 \oplus \mathbf{X}(x)$ 是一个 L^2-正交分解。于是，根据命题 7.18，存在一个 $\mathbf{T}_{\mathbf{x},1}$的峰截面$\alpha_0' \in \mathbb{C}\alpha_0$。根据定义，我们有$\|\alpha_0'\|_{L^2;C} = 1 = \|\alpha_0\|_{L^2;C}$，且 $\mathbf{T}_{\mathbf{x},1}(\alpha_0)$、$\mathbf{T}_{\mathbf{x},1}(\alpha_0') \in (0, \infty) \subset \mathbb{R}$。由此可知， $\alpha_0 = \alpha_0'$ 是 $\mathbf{T}_{\mathbf{x},1}$ 的峰截面。这就证明了“当”方向。

最后，假设 α_0 和 α_1 都是$\mathbf{X}$ 在 x处的峰截面。那么，通过类似的论证， $\alpha_1 \in \mathbb{C}\alpha_0$和$\|\alpha_0\|_{L^2;C} = \|\alpha_1\|_{L^2;C} = 1$。因此，对于某个 $\theta \in [0, 2\pi)$， $\alpha_1 = e^{i\theta}\alpha_0$。 □

根据上述引理，如果存在一个元素 $\alpha \in \mathbf{X}$，它在给定点 x处不为零，那么 $x \in C$ 处的所有峰截面在复旋转 $e^{i\theta}$下都等价。然而，要比较不同点处的峰截面，我们需要使用 K¨ahler 度量 μ。

令 $\{\alpha_j\}^{\dim_{\mathbb{C}}\mathbf{X}}{}_{j=1}$ 为一个 L^2-正交基。则存在一个非负的、取值于 $\mathbb{R}$ 的函数$\mathbf{bx},_{\mu}$，定义在 C 上，使得

$$\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{\dim_{\mathbb{C}}\mathbf{X}} \alpha_j \wedge \bar{\alpha}_j = \mathbf{b}_{\mathbf{X},\mu}\cdot\mu.$$

显然，$\mathbf{bx},_{\mu}$ 与所选的 L^2-正交基无关。函数$\mathbf{bx},_{\mu}$ 称为与 $(\mathbf{X}\ \mu)$ 相关联的伯格曼核函数。若一点 $x \in C$满足$\mathbf{bx},_{\mu}(x) = \|\mathbf{bx},_{\mu}\|_{L^\infty}$，则称它为 $(\mathbf{X}\ \mu)$ 的峰值点。

现在我们来记录伯格曼核函数的一些基本性质。

引理 7.21. 设 $C, \mu, \Gamma(C, \omega_C)$、$\mathbf{X}$ 和$\mathbf{bx},_{\mu}$ 如上所述。则有以下性质。

(1) 设 $\alpha \in \mathbf{X}$ 是在 $x \in C$ 处的峰截面。则在 x 处，

$$\frac{i}{2}\alpha(x)\wedge\bar{\alpha}(x) = \mathbf{b}_{\mathbf{X},\mu}(x)\mu(x).$$

(2) L^∞-范数 $\|\mathbf{bx},_{\mu}\|_{L^\infty} = \sup|\mathbf{bx},_{\mu}|$ 满足C

$$\|\mathbf{b}_{\mathbf{X},\mu}\|_{L^\infty} \geq \frac{\dim_{\mathbb{C}}\mathbf{X}}{\int_C \mu}.$$

证明。设 $x \in C$，并设 $\alpha \in \mathbf{X}$ 是 x处的峰截面。不妨设 α（x）。选择一个 L^2-正交归一基 $\{\alpha_j\}^{\dim_{\mathbb{C}}\mathbf{X}}$，其 $\mathbf{X}$ 满足 $\alpha_1 = \alpha$。于是根据引理 7.20，有 α_j（x）$= 0$对所有 $j \geq 2$均成立。因此，在 x处，

$$\frac{i}{2}\alpha(x)\wedge\bar{\alpha}(x) = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{\dim_{\mathbb{C}}\mathbf{X}} \alpha_j\wedge\bar{\alpha}_j = \mathbf{b}_{\mathbf{X},\mu}(x)\mu(x),$$

这就证明了（1）。

为证明（2），注意到根据$\mathbf{bx}$的定义，μ有

$$\|\mathbf{b}_{\mathbf{X},\mu}\|_{L^\infty}\cdot\int_C\mu \geq \int_C \mathbf{b}_{\mathbf{X},\mu}\cdot\mu = \int_C \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{\dim_{\mathbb{C}}\mathbf{X}}\alpha_j\wedge\bar{\alpha}_j = \dim_{\mathbb{C}}\mathbf{X},$$

这就得到了（2）。 □

现在转向推论 7.19所述的第二种情形。

设 C 是一个赋予经典拓扑的连通紧致光滑复曲线，并设 μ 是 C上的一个 K¨ahler 度量。记 $\mathscr{A}^1_{C,K}(C)$为 C上的光滑 1-形式空间，并赋予其 L^2-内积

$$\langle\alpha,\beta\rangle_{L^2;C} = \frac{1}{2}\int_C \alpha\wedge\star\beta,\quad \forall\alpha,\beta\in\mathscr{A}^1_{C,K}(C),$$

其中 $K = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$。

令$\mathbf{X} \subset \mathscr{Z}^1_K(C) \subset \mathscr{A}^1_K(C)$为闭1形式的一个子空间，其中 $K = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$。给定一个奇异1-循环$\sigma \in Z_1(C;K)$，我们定义一个线性泛函$\mathbf{Tx},_{\sigma} : \mathbf{X} \to K$，如下所示

$$\mathbf{T}_{\mathbf{X},\sigma}(\alpha) = \sum_{j=1}^{N} a_j\int_{\gamma'_j}\alpha = \int_C \alpha\wedge\beta,$$

其中 $\sigma = \sum_{j=1}^{N} a_j \gamma_j'$ 是表示同调类$[\sigma] \in H_1(C;\, K)$的光滑定向环路的 K-线性组合，而 $[\beta] \in H^1_{\mathrm{dR}}(C;K)$是其庞加莱对偶。泛函$\mathbf{Tx},_\sigma$在$\mathbf{X}$上定义良好，因为这两个表达式仅取决于 α 的上同调类和 σ的同调类。

我们称微分形式 $\alpha \in \mathbf{X}$ 是沿圈 σ 的峰截面，如果它是泛函$\mathbf{Tx},_\sigma$的峰截面。此外，若存在 $\alpha \in \mathbf{X}$ 使得 $\int_C \alpha \wedge \beta \neq 0$，则沿圈 σ的$\mathbf{X}$ 中的峰截面是唯一的。

现在我们考虑闭微分形式某些自然子空间中峰截面的显式形式。

引理 7.22. 设 C 和 μ 如上。设 $\sigma \in Z_1(C;K)$ 是一个圈，$[\beta] \in H^1_{\mathrm{dR}}(C;K)$ 是其庞加莱对偶，其中 $K = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$。设 $\beta_{\mathscr{H}}$是与 $[\beta]$对应的调和1-形式。假设 $[\beta] \neq 0$。设 α是$\mathbf{X} \subset \mathscr{H}^1_{C,K}(C)$ 中沿圈 σ的峰截面。那么以下性质成立。

(1) Assume that $\mathscr{H}^1_{C,K}(C) \subset \mathbf{X}$. *Then* $\alpha = -\frac{1}{\|\beta_{\mathscr{H}}\|_{L^2;C}} \star \beta_{\mathscr{H}}$.

(2) 假设 $K = \mathbb{R}$ 且 $\mathbf{X} = \Gamma(C, \omega_C)$。则

$$\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2\|\beta_{\mathscr{H}}\|_{L^2;C}} \star \beta_{\mathscr{H}} + \frac{\sqrt{2}i}{2\|\beta_{\mathscr{H}}\|_{L^2;C}} \beta_{\mathscr{H}}.$$

证明。 我们首先证明 (1)。

由柯西-施瓦茨不等式，对任意 $\alpha' \in \mathbf{X}$，我们有

$$\begin{aligned} \int_C \alpha' \wedge \beta &= \int_C \alpha' \wedge \beta_{\mathscr{H}} = 2\langle \alpha', - \star \beta_{\mathscr{H}} \rangle_{L^2;C} \\ &\leq 2\|\alpha'\|_{L^2;C} \cdot \| \star \beta_{\mathscr{H}}\|_{L^2;C} = 2\|\alpha'\|_{L^2;C} \cdot \|\beta_{\mathscr{H}}\|_{L^2;C}, \end{aligned}$$

等号成立当且仅当对某个 $a \in (0, \infty)$ 有 $\alpha' = -a(\star\beta_{\mathscr{H}})$。由于 $\star\beta_{\mathscr{H}} \in \mathscr{H}^1_{C,K}(C) \subset \mathbf{X}$，从而 $\alpha = -\frac{1}{\|\beta_{\mathscr{H}}\|_{L^2;C}} \star \beta_{\mathscr{H}}$。注意 $\|\alpha\|_{L^2} = 1$。由此得到 (1)。

现在我们转向 (2)。

再次由柯西-施瓦茨不等式，对任意 $\alpha'' \in \mathbf{X}$，我们有

$$\begin{aligned} \int_C \alpha'' \wedge \beta &= \int_C \mathrm{Re}(\alpha'') \wedge \beta_{\mathscr{H}} = 2\langle \mathrm{Re}(\alpha''), - \star \beta_{\mathscr{H}} \rangle_{L^2} \\ &\leq 2\|\mathrm{Re}(\alpha'')\|_{L^2;C} \cdot \| \star \beta_{\mathscr{H}}\|_{L^2;C} = 2\|\mathrm{Re}(\alpha'')\|_{L^2;C} \cdot \|\beta_{\mathscr{H}}\|_{L^2;C} \\ &= \|\alpha''\|_{L^2;C} \cdot \|\beta_{\mathscr{H}}\|_{L^2;C}, \end{aligned}$$

满足等式 当且仅当对某个 $a \in (0,\ \infty)$，$\mathrm{Re}(\alpha'') = -a(\star\beta_{\mathscr{H}})$ 时成立。由于$\|\alpha\|_{L^2;C} = 1$，我们有e

$$\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2\|\beta_{\mathscr{H}}\|_{L^2;C}} \star \beta_{\mathscr{H}} + \frac{\sqrt{2}i}{2\|\beta_{\mathscr{H}}\|_{L^2;C}} \beta_{\mathscr{H}}.$$

这就完成了 (2) 的证明。 □

8 双曲特征值和特征函数

设 C 为 $\mathbb{C}$上亏格为 $g \geq 2$ 的曲线，并设 ω_C 表示其典范丛。设 μ_{hyp} 为 C 上具有常曲率 $4\pi(1-g)$且体积为1的唯一K¨ahler度量，并设 μ_{KE} 为 C 上具有常曲率 -1的唯一K¨ahler度量。特别地，$\mu_{\mathrm{KE}} = 4\pi(g-1)\mu_{\mathrm{hyp}}$。由于$\dim C = 1$，我们将K¨ahler度量 μ 与其相伴的体积形式和测度等同。

对任意K¨ahler度量 μ，其相伴的拉普拉斯算子由下式给出

$$\Delta_\mu = \frac{dd^c}{\mu} = \frac{i}{\pi}\frac{\partial\bar{\partial}}{\mu} = \frac{1}{2\pi} \star_\mu d \star_\mu d,$$

其中 $d^c = \frac{1}{2\pi i}(\partial - \bar{\partial})$，而 $\star_\mu$ 是与 (C, μ) 相关联的霍奇 $\star$-算子。

Δ_μ 的谱由特征值组成

$$0 = \lambda_{\mu,0} < \lambda_{\mu,1} \leq \lambda_{\mu,2} \leq \cdots,$$

按重数列出。相应地，存在一个 L^2-正交基 $\{\phi_{\mu,l}\}_{l=0}^{\infty}$，它是 L^2 完备化 $\mathscr{A}^0_{C,\mathbb{R}}(C)$，$L^2(C, \mu; \mathbb{R})$ 的基，使得

$$\Delta_\mu \phi_{\mu,l} + \lambda_{\mu,l}\phi_{\mu,l} = 0.$$

对于 $(x, y) \in C \times C$ 和 $t > 0$，我们引入核

$$\begin{aligned} G_\mu(x, y; t) &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{-t\lambda_{\mu,l}}}{\lambda_{\mu,l}} \phi_{\mu,l}(x)\phi_{\mu,l}(y), \\ K_\mu(x, y; t) &= \sum_{l=1}^{\infty} e^{-t\lambda_{\mu,l}} \phi_{\mu,l}(x)\phi_{\mu,l}(y). \end{aligned}$$

根据构造，对于任意固定的 $y_0 \in C$，函数 $(x, t) \mapsto G_\mu(x, y_0; t)$ 和 $(x, t) \mapsto K_\mu(x, y_0; t)$ 满足热方程 $\frac{\partial u_{(x,t)}}{\partial t} = \Delta_\mu u(x, t)$。此外，我们有以下弱极限（按分布的意义）

$$\lim_{t\to 0^+} G_\mu(x, y_0; t) = G_\mu(x, y_0) \quad \text{and} \quad \lim_{t\to 0^+} K_\mu(x, y_0; t) = \delta_{y_0} - \mu(C)^{-1},$$

其中，$G_\mu(x, y_0)$ 是对角线 $\Delta \subset C \times C$ 的 μ-容许格林函数，而 δ_{y_0} 是位于 y_0 的狄拉克测度。因此，$G_\mu(x, y; t)$ 可视为格林函数 $G_\mu(x, y)$ 在正时间上的延拓。此外，

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial t}(x, y; t) = \Delta_{\mu,x} G_\mu(x, y; t) = \Delta_{\mu,y} G_\mu(x, y; t) = -K_\mu(x, y; t).$$

令 $t \to 0^+$，我们便可在分布的意义下得到

$$\Delta_{\mu,x} G_\mu(x, y_0) = -\delta_{y_0} + \mu(C)^{-1}.$$

特别地，根据 Poincar´e–Lelong 公式 [MM07，定理 B.2。19], 对于任意以 z为中心的全纯坐标 y_0，格林函数 $G_\mu(x, y_0)$ 具有如下局部展开

$$G_\mu(x, y_0) = -\log|z(x)| + o(1).$$

当 $\mu = \mu_{\mathrm{Ar}}$ 时，格林函数 $G_{\mu_{\mathrm{Ar}}}(x, y)$ 与 G_a §2.5 中定义的 §2.5格林函数相同。由热方程的最大值原理可得

$$K_\mu(x, y; t) \geq -\mu(C)^{-1},$$

因此，

$$G_\mu(x, y; t) \leq t\mu(C)^{-1} + G_\mu(x, y), \quad \text{if } x \neq y.$$

另请参阅 [Li12，定理 10。1] 了解更多详情。

当 $\mu = \mu_{\mathrm{Ar}}$、μ_{hyp} 或 μ_{KE}时，我们省略下标中的 μ。例如，我们将相应的拉普拉斯算子写作 Δ_{Ar}、Δ_{hyp} 和 Δ_{KE}。

本节中，我们建立与 Δ_{KE} 和Δ_{hyp}相关的特征值及特征函数的估计。我们的方法是利用热核控制较大的特征值和特征函数，同时分别估计较小的特征值和特征函数。特别地，[OR09的一个结果，定´理`指出，2] 正特征值至多有 $2g - 3$ 个 $\leq \frac{1}{8\pi}$。请注意，我们对拉普拉斯算子的正规化与经典约定相差一个 2π因子。

8.1 双曲热核的一个显式上界

令 $\rho_{\mathcal{H}}:\ \mathcal{H}\to C$ 为万有覆盖映射，其中 $\mathcal{H}$ 是配备度量 $\widetilde{\mu_{\mathrm{KE}}}=\ ^{\mu_{\mathrm{Euc}}}(\mathrm{Im}(\tau))^2$，的庞加莱上半平面，$\mu_{\mathrm{Euc}}=\frac{idz\wedge d\bar{z}}{2}$ 为 $\mathbb{C}$ 上的标准欧氏度量。另见定理 7.2。则甲板变换群 $\pi_1(C)$ 嵌入 $\mathrm{Aut}(\mathcal{H})\cong\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$，并且 C 作为一条 K¨ahler 曲线同构于商空间 $\mathcal{H}/\Gamma$，其中 Γ 是 $\pi_1(C)$ 的像。此外，$\rho_{\mathcal{H}}$ 对应于自然投影 $\mathcal{H}\to\mathcal{H}/\Gamma$。

现在，我们将 C 识别为商空间 $\mathcal{H}/\Gamma$，并通过 $\mathcal{H}$ 上的 Γ 作用计算 C 上的热核。

Le引理 8.1. 设 C、$\rho_{\mathcal{H}}$、$\mathcal{H}$ 和 Γ 如上。则对任意 z、$w\in\mathcal{H}$ 和 $t>0$，有 e

$$\begin{aligned}K_{\mathrm{hyp}}(\rho_{\mathcal{H}}(z),\rho_{\mathcal{H}}(w);t) &= 4\pi(g-1)K_{\mathrm{KE}}(\rho_{\mathcal{H}}(z),\rho_{\mathcal{H}}(w);4\pi(g-1)t)\\ &= -1+4\pi(g-1)\sum_{\sigma\in\Pi}K_{\mathcal{H}}(z,\sigma w;2(g-1)t),\end{aligned}$$

其中

$$K_{\mathcal{H}}(z,w;t)=\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{t}{4}}}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z,w)}^{\infty}\frac{\varsigma e^{-\frac{\varsigma^2}{4t}}}{(\cosh\varsigma-\cosh(\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z,w)))^{\frac{1}{2}}}d\varsigma,$$

且 距离$_{\mathcal{H}}$ 表示由 $^{\mu_{\mathrm{Euc}}(\mathrm{Im}(\tau))^2}$ 确定的 $\mathcal{H}$ 上的双曲距离。 ———

证明。 第一个等式可由 $\mu_{\mathrm{KE}}=4\pi(g-1)\mu_{\mathrm{hyp}}$ 直接得到，而第二个等式则需要更详细的论证。

令 $K_\Gamma(\rho_{\mathcal{H}}(z)\ \rho_{\mathcal{H}}(w);\ t)\ =\sum_{\sigma\in\Gamma}K_{\mathcal{H}}(z,\sigma w;t)$。根据 [Bus92，定理 7.5.11]，$K_\Gamma$ 是热方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=(\star_{\mathrm{KE}}d)^2u=2\pi\Delta_{\mathrm{KE}}u$的基本解。因此，对于任意 $y_0\in\mathcal{H}/\Gamma$，我们有弱极限 $\lim_{t\to0^+}K_\Gamma(x,y_0;\ t)=\delta_{y_0}$。定义 $K'_{\mathrm{KE}}(\rho_{\mathcal{H}}(z)\ \rho_{\mathcal{H}}(w);\ t)\ =K_\Gamma(\rho_{\mathcal{H}}(z)\ \rho_{\mathcal{H}}(w);\ \frac{t}{2\pi})-\ ^{1}_{4\pi}(g-1)$。可以验证，对于任意 y_0，$(x;\ t)\mapsto K'_{\mathrm{KE}}(x,y_0;\ t)$ 满足热方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta_{\mathrm{KE}}u$ 以及初始条件 $\lim_{t\to0^+}K'_{\mathrm{KE}}(x,y_0;\ t)\equiv\delta_{y_0}-\ ^{1}_{4\pi}(g-1)$。根据热核的唯一性 [Li12，定理 10.2]，，我们得到 $K_{\mathrm{KE}}(x,y;t)\ =K'_{\mathrm{KE}}(x,y;t)$，证毕。

□

在估计 双曲热核 $K_{\mathrm{hyp}}(x,\ x;t)$ 之前，我们先给出关于 $K_{\mathcal{H}}$ 的以下估计 .

引理 8.2. 令 $u(a,t)=\int_a^\infty\ ^{\varsigma e^{-\frac{\varsigma^2}{4t}}}_{(\text{双曲余弦}\ \varsigma-\text{双曲余弦}\ a)^{\frac{1}{2}}}d\varsigma$，$a>0$，$t>0$. 则

$$u(a,t)<\frac{3\sqrt{2}}{4}ae^{-\frac{a^2}{4t}}+\frac{5\sqrt{2\pi t}}{3}e^{-\frac{25a^2}{64t}}\le\frac{3\sqrt{t}}{\sqrt{2e}}\cdot e^{-\frac{a^2}{8t}}+\frac{5\sqrt{2\pi t}}{3}e^{-\frac{25a^2}{64t}}$$

特别地，对于 $a\ge2$ 反双曲正弦 1 和 $t\in(0,\frac{1}{20}]$，，有

$$\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\int_a^\infty\frac{\varsigma e^{-\frac{\varsigma^2}{4t}}}{(\cosh\varsigma-\cosh a)^{\frac{1}{2}}}d\varsigma<\frac{3}{100000}.$$

证明. 证明过程沿用 [Bus92 的引理 7.4 中的论证。6]。
由于双曲余弦 $\varsigma-$ 双曲余弦 $a=\int_a^\varsigma$ 双曲正弦 $\vartheta d\vartheta>\int_a^\varsigma\vartheta d\vartheta=\frac{1}{2}(\varsigma^2-a^2)$，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\frac{5a}{4}}^\infty\frac{\varsigma e^{-\frac{\varsigma^2}{4t}}}{(\cosh\varsigma-\cosh a)^{\frac{1}{2}}}d\varsigma &< \sqrt{2}\int_{\frac{5a}{4}}^\infty\frac{\varsigma}{(\varsigma^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{-\frac{\varsigma^2}{4t}}d\varsigma<\frac{5\sqrt{2}}{3}\int_0^\infty e^{-\frac{(\varsigma+\frac{5a}{4})^2}{4t}}d\varsigma\\ &< \frac{5\sqrt{2}}{3}e^{-\frac{25a^2}{64t}}\int_0^\infty e^{-\frac{\varsigma^2}{4t}}d\varsigma=\frac{5\sqrt{2\pi t}}{3}e^{-\frac{25a^2}{64t}}.\end{aligned}$$

同样，

$$\int_a^{\frac{5a}{4}}\frac{\varsigma e^{-\frac{\varsigma^2}{4t}}}{(\cosh\varsigma-\cosh a)^{\frac{1}{2}}}d\varsigma<\sqrt{2}\int_a^{\frac{5a}{4}}\frac{\varsigma e^{-\frac{a^2}{4t}}}{(\varsigma^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}d\varsigma=\frac{3\sqrt{2}}{4}ae^{-\frac{a^2}{4t}}.$$

由此可得

$$\int_a^\infty \frac{\varsigma e^{-\frac{\varsigma^2}{4t}}}{(\cosh\varsigma-\cosh a)^{\frac{1}{2}}}d\varsigma < \frac{3\sqrt{2}}{4}ae^{-\frac{a^2}{4t}}+\frac{5\sqrt{2\pi t}}{3}e^{-\frac{25a^2}{64t}}.$$

引理陈述中的第二个不等式可直接由初等估计$re^{-\frac{r^2}{2}} \le e^{-\frac{1}{2}}$推出。

当 $a \ge 2$反双曲正弦 1 且 $t \le \frac{1}{20}$时，可以验证总和 $\frac{3\sqrt{2}}{4t^{\frac{3}{2}}}ae^{-\frac{a^2}{4t}}+\frac{5\sqrt{2\pi}}{3t}e^{-\frac{25a^2}{64t}}$ 随 t 增大。特别地，当 $a=2$反双曲正弦 1 且 $t=\frac{1}{20}$ 时，该总和约为 $0.0000299\cdots < \frac{3}{100000}$，由此可证引理。□

下面我们将在对角线上建立双曲热核 $K_{\mathrm{hyp}}(x,x;t)$ 的一个上界。

引理 8.3. 设

$$K_{\mathrm{hyp}}(x,y;t)=\sum_{l=1}^{\infty}e^{-t\lambda_{\mathrm{hyp},l}}\phi_{\mathrm{hyp},l}(x)\phi_{\mathrm{hyp},l}(y)$$

是 $C\cong\mathcal{H}/\Gamma$ 上的双曲热核。令 $\mathrm{sys}(C)$ 表示 (C,μ_{KE}) 的最短闭测地线长度。
那么，对于任意 $x\in C$ 和 $t\in\left(0,\frac{1}{40(g-1)}\right]$，以下不等式成立：

$$1+K_{\mathrm{hyp}}(x,x;t)\le\frac{1}{2t}+\frac{6\sqrt{g-1}}{\sqrt{t}\cdot\mathrm{sys}(C)}+\frac{g-1}{100}\cdot\left(1+\frac{4\,\mathrm{arcsinh}\,1}{\mathrm{sys}(C)}\right).$$

证明。 结合引理 8.1 和引理 8.2，可知对于每个点 $z\in\mathcal{H}$ 以及每个 $t>0$,

$$1+K_{\mathrm{hyp}}(\rho_{\mathcal{H}}(z),\rho_{\mathcal{H}}(z);t)=4\pi(g-1)\sum_{\sigma\in\Gamma}K_{\mathcal{H}}(z,\sigma z;2(g-1)t)$$

$$=\sum_{\sigma\in\Gamma}\frac{4\sqrt{2}\pi(g-1)e^{-\frac{(g-1)t}{2}}}{(8\pi(g-1)t)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z,\sigma z)}^{\infty}\frac{\varsigma e^{-\frac{\varsigma^2}{8(g-1)t}}}{(\cosh\varsigma-\cosh(\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z,\sigma z)))^{\frac{1}{2}}}d\varsigma.$$

通过选取一族以 Γz 中的点为中心、半径为反双曲正弦 1 的极大互不相交双曲球，我们得到一个满足以下性质的序列 $\mathcal{S}_\Gamma=\{\sigma_j\}_{j=0}^{\infty}\subset\Gamma$：

- $\sigma_0=\mathrm{id}_{\mathcal{H}}$，且序列 $\mathbf{d}j=\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(\sigma_j z,z)$ 关于 j.
- $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(\sigma_j z,\sigma_k z)\ge 2$反双曲正弦 1，对所有 $j\ne k$ 均成立。
- 对于每个 $\sigma\in\Gamma$，存在一个 $\sigma_j\in\mathcal{S}_\Gamma$，使得 $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(\sigma_j z,\sigma z)<2$反双曲正弦1。

现在我们估计 $K_{\mathrm{hyp}}(\rho_{\mathcal{H}}(z)\ \rho_{\mathcal{H}}(z);t)$。
根据定义，我们有如下分解：

$$\Gamma z=\{z\}\bigcup(\Gamma z\cap\mathbf{B}_0\setminus\{z\})\bigcup\bigcup_{j=1}^{\infty}(\Gamma z\cap(\mathbf{B}_j\setminus\mathbf{B}_0)),$$

其中 $\mathbf{B}_j=B_{2\,\mathrm{arcsinh}\,1}(\sigma_j z)$，且 $B_r(w)=\{w'\in\mathcal{H}:\ \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(w,w')<r\}$。
按照引理8.2中的论证，我们得到

$$\begin{aligned}4\pi(g-1)K_{\mathcal{H}}(z,z;2(g-1)t) &= \frac{4\sqrt{2}\pi(g-1)e^{-\frac{(g-1)t}{2}}}{(8\pi(g-1)t)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty\frac{\varsigma e^{-\frac{\varsigma^2}{8(g-1)t}}}{(\cosh\varsigma-1)^{\frac{1}{2}}}d\varsigma\\ &< \frac{4\sqrt{2}\pi(g-1)e^{-\frac{(g-1)t}{2}}}{(8\pi(g-1)t)^{\frac{3}{2}}}\cdot\sqrt{2}\cdot\int_0^\infty e^{-\frac{\varsigma^2}{8(g-1)t}}d\varsigma\\ &= \frac{e^{-\frac{(g-1)t}{2}}}{2t}<\frac{1}{2t},\end{aligned}$$

由此可得第一部分的估计。

对于第二部分，选择 $\sigma_z \in \Gamma$ 使得

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z, \sigma_z z) = \inf\left\{\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z, \sigma z), \sigma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}_{\mathcal{H}}\}\right\}.$$

根据引理 7.8，如果 $\sigma' \in \mathbf{B}_j$，那么 $\sigma_j^{-1}\sigma' \in \langle \sigma_z \rangle$。此外，对于任意 $k \geq 0$，可得

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z, \sigma_z^{k+1} z) \geq \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z, \sigma_z^{k} z) + \mathrm{sys}(C).$$

因此，存在一个整数 $k_z \geq 0$，使得 $\sigma_z^k z \in \mathbf{B}_0$ 当且仅当 $|k| \leq k_z$。如果 $\Gamma z \cap \mathbf{B}_0 \setminus \{z\} \neq \varnothing$，那么$k_z \geq 1$，并且

$$\begin{aligned}
& 4\pi(g-1) \sum_{\sigma z \in \Gamma z \cap \mathbf{B}_0 \setminus \{z\}} K_{\mathcal{H}}(z, \sigma z; 2(g-1)t) \\
< \; & \frac{1}{t} \sum_{\sigma z \in \Gamma z \cap \mathbf{B}_0 \setminus \{z\}} \left(\frac{3}{4\sqrt{e\pi}} \cdot e^{-\frac{\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z,\sigma z)^2}{16(g-1)t}} + \frac{5}{6} \cdot e^{-\frac{25 \cdot \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z,\sigma z)^2}{128(g-1)t}} \right) \\
< \; & \frac{2}{t} \sum_{k=1}^{k_z} \frac{\int_{\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z,\sigma_z^{k-1} z)}^{\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z,\sigma_z^{k} z)} \left(\frac{3}{4\sqrt{e\pi}} \cdot e^{-\frac{\vartheta^2}{16(g-1)t}} + \frac{5}{6} \cdot e^{-\frac{25 \cdot \vartheta^2}{128(g-1)t}} \right) d\vartheta}{\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z, \sigma_z^k z) - \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z, \sigma_z^{k-1} z)} \\
< \; & \frac{2}{\mathrm{sys}(C) \cdot t} \int_0^{\infty} \left(\frac{3}{4\sqrt{e\pi}} \cdot e^{-\frac{\vartheta^2}{16(g-1)t}} + \frac{5}{6} \cdot e^{-\frac{25 \cdot \vartheta^2}{128(g-1)t}} \right) d\vartheta \\
= \; & \frac{(9 + 4\sqrt{2e\pi})\sqrt{g-1}}{3\sqrt{e} \cdot \mathrm{sys}(C)\sqrt{t}} < \frac{6\sqrt{g-1}}{\sqrt{t} \cdot \mathrm{sys}(C)}.
\end{aligned}$$

因此我们 得到第二部分所声称的估计　　部分。

剩下的部分需要考虑。根据构造，我们有

$$\bigcup_{j=0}^{k} B_{\mathrm{arcsinh}\,1}(\sigma_j z) \subset B_{\mathbf{d}_k + \mathrm{arcsinh}\,1}(z).$$

由此可知，对任意 $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
2(k+1)\pi\left(\sqrt{2}-1\right) &= \sum_{j=0}^{k} \mathrm{vol}_{\mathcal{H}}\left(B_{\mathrm{arcsinh}\,1}(\sigma_j z)\right) \leq \mathrm{vol}_{\mathcal{H}}\left(B_{\mathbf{d}_k + \mathrm{arcsinh}\,1}(z)\right) \\
&= 2\pi\left(\cosh\left(\mathbf{d}_k + \mathrm{arcsinh}\,1\right) - 1\right) \\
&\leq \pi\left(\left(\sqrt{2}+1\right)e^{\mathbf{d}_k} + \left(\sqrt{2}-1\right)^3 - 2\right).
\end{aligned}$$

因此，对所有 $k \geq 1$，$\mathbf{d}_k \geq \min\{$对数 $(2k) - 2$ 反双曲正弦 $\mathbf{1}$，2 反双曲正弦 $1\}$。此外，对于任意 $\sigma z \in \Gamma z \cap (\mathbf{B}_k \setminus \mathbf{B}_0)$，距离

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z, \sigma z) \geq \min\{\log(2k) - 4\,\mathrm{arcsinh}\,1, 2\,\mathrm{arcsinh}\,1\}.$$

根据引理 7.8，$\#(\Gamma z \cap (\mathbf{B}_j \setminus \mathbf{B}_0)) \leq 1 + {}^{4\text{反双曲正弦}\,1\,\mathrm{sys}(C)}$。然后，引理 8.2 推出，对任意 $k \geq 1$，$t \in \left(0, \frac{1}{40(g-1)}\right]$，以及 $\sigma z \in \Gamma z \cap (\mathbf{B}_k \setminus \mathbf{B}_0)$,

$$\frac{1}{(2(g-1)t)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z,\sigma z)}^{\infty} \frac{\varsigma e^{-\frac{\varsigma^2}{8(g-1)t}}}{\sqrt{\cosh\varsigma - \cosh(\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(z,\sigma z))}} d\varsigma \leq \frac{3}{100000},$$

因此

$$4\pi(g-1)K_{\mathcal{H}}(z, \sigma z; 2(g-1)t) < \frac{(g-1)e^{-\frac{(g-1)t}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{3}{100000} < \frac{g-1}{80000}.$$

由此可得

$$4\pi(g-1)\sum_{\substack{\sigma z\in\Gamma z\cap(\mathbf{B}_k\setminus\mathbf{B}_0)\\1\le k\le 400}}K_{\mathcal{H}}(z,\sigma z;2(g-1)t)<\frac{g-1}{200}\cdot\left(1+\frac{4\operatorname{arcsinh}1}{\operatorname{sys}(C)}\right).$$

现在考虑 $k\ge 401$ 的情形。再次由引理 8.2，对于任意 $k\ge 401$, $t\in\left(0,\ {}_{40}{}^{1}{}_{(g-1)}\right]$, 以及 $\sigma z\in\Gamma z\cap(\mathbf{B}_k\setminus\mathbf{B}_0)$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2(g-1)t}}\int_{\operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(z,\sigma z)}^{\infty}\frac{\varsigma e^{-\frac{\varsigma^2}{8(g-1)t}}}{\sqrt{\cosh\varsigma-\cosh(\operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(z,\sigma z))}}d\varsigma\\
\le\ &\frac{3}{\sqrt{2e}}\cdot e^{-\frac{\operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(z,\sigma(z))^2}{16(g-1)t}}+\frac{5\sqrt{2\pi}}{3}e^{-\frac{25\operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(z,\sigma(z))^2}{128(g-1)t}}\\
\le\ &\left(\frac{3}{\sqrt{2e}}+\frac{5\sqrt{2\pi}}{3}e^{-\frac{85}{4}(\operatorname{arcsinh}1)^2}\right)e^{-\frac{\operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(z,\sigma(z))^2}{16(g-1)t}}<\frac{3}{2}\cdot e^{-\frac{\operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(z,\sigma(z))^2}{16(g-1)t}},
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
4\pi(g-1)K_{\mathcal{H}}(z,\sigma z;2(g-1)t)\ &<\ \frac{1}{2t\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{3}{2}\cdot e^{-\frac{\operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(z,\sigma(z))^2}{16(g-1)t}-\frac{(g-1)t}{2}}\\
&<\ \frac{20(g-1)}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{3}{2}\cdot e^{-\frac{5\cdot\operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(z,\sigma(z))^2}{2}}\\
&<\ 20(g-1)\cdot e^{-\frac{5\cdot(\log(2k)-4\operatorname{arcsinh}1)^2}{2}}.
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&4\pi(g-1)\sum_{\substack{\sigma z\in\Gamma z\cap(\mathbf{B}_k\setminus\mathbf{B}_0)\\k\ge 401}}K_{\mathcal{H}}(z,\sigma z;2(g-1)t)\\
<\ &\sum_{k=401}^{\infty}\left(1+\frac{4\operatorname{arcsinh}1}{\operatorname{sys}(C)}\right)\cdot 20(g-1)\cdot e^{-\frac{5\cdot(\log(2k)-4\operatorname{arcsinh}1)^2}{2}}\\
<\ &\left(1+\frac{4\operatorname{arcsinh}1}{\operatorname{sys}(C)}\right)\cdot 20(g-1)\cdot\int_{400}^{\infty}e^{-\frac{5\cdot(\log(2\varsigma)-4\operatorname{arcsinh}1)^2}{2}}d\varsigma\\
=\ &\left(1+\frac{4\operatorname{arcsinh}1}{\operatorname{sys}(C)}\right)\cdot 20(g-1)\cdot\frac{e^{4\operatorname{arcsinh}1+\frac{1}{10}}}{\sqrt{10}}\int_{\frac{\sqrt{10}}{2}(\log(800)-4\operatorname{arcsinh}1-\frac{1}{10})}^{\infty}e^{-\varsigma^2}d\varsigma\\
<\ &\left(1+\frac{4\operatorname{arcsinh}1}{\operatorname{sys}(C)}\right)\cdot 2\sqrt{10}(g-1)\cdot e^{4\operatorname{arcsinh}1+\frac{1}{10}}\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{5}{2}\cdot(\log(800)-4\operatorname{arcsinh}1-\frac{1}{10})^2-\varsigma^2}d\varsigma\\
<\ &\frac{g-1}{200}\cdot\left(1+\frac{4\operatorname{arcsinh}1}{\operatorname{sys}(C)}\right).
\end{aligned}$$

这里用到了公式

$$\int_{\varsigma_0}^{\infty}e^{-a(\log(2\varsigma)-b)^2}d\varsigma=\frac{e^{b+\frac{1}{4a}}}{2\sqrt{a}}\int_{\sqrt{a}(\log(2\varsigma_0)-b-\frac{1}{2a})}^{\infty}e^{-\varsigma^2}d\varsigma,\quad\forall a,b,\varsigma_0>0.$$

现在我们可以得出结论：

$$4\pi(g-1)\sum_{\substack{\sigma z\in\Gamma z\cap(\mathbf{B}_k\setminus\mathbf{B}_0)\\k\ge 1}}K_{\mathcal{H}}(z,\sigma z;2(g-1)t)<\frac{g-1}{100}\cdot\left(1+\frac{4\operatorname{arcsinh}1}{\operatorname{sys}(C)}\right).$$

综合这三个部分，我们得出结论：

$$1+K_{\mathrm{hyp}}(\rho_{\mathcal{H}}(z),\rho_{\mathcal{H}}(z);t)\le\frac{1}{2t}+\frac{6\sqrt{g-1}}{\sqrt{t}\cdot\mathrm{sys}(C)}+\frac{g-1}{100}\cdot\left(1+\frac{4\,\mathrm{arcsinh}\,1}{\mathrm{sys}(C)}\right),\quad\forall z\in\mathcal{H}.$$

证明完毕。 □

8.2 第一特征值与双曲曲面的分解

设 C 是一个亏格为 $g\ge 2$ 的连通紧黎曼曲面，并令 $\mu_{\mathrm{KE}}=4\pi(g-1)\mu_{\mathrm{hyp}}$ 表示 C 上曲率为 -1 的 K¨ahler 度量。

回顾一下， C 上的分离多重曲线是指由有限条互不相交的简单闭测地线组成的集合，且其并集将 C 分成至少两个连通分支。令 $\ell_\Sigma(C,\ \mu)$ 表示分离多重曲线中所有测地线总长度的下确界。根据定义，存在一个分离多重曲线 $\{\gamma_j\}_{j=1}^{m}$，使得 $\ell_\Sigma(C,\ \mu)\ =\ \sum_{j=1}^{m}\ell(\gamma_j)$。

Schoen–Wolpert–Yau 的一个经典结果 [SWY80] 表明，商空间 $\lambda_{\mathrm{KE}}.\ \ell_\Sigma\ C\ \mu(.\ )$ 存在一个仅取决于亏格 g的正下界；另见 Dodziuk–Randol [DR86] ，其中给出了另一种证明。最近，Wu–Xue [WX22a] 证明了，该下界可以取为关于 g的一个二次多项式的倒数。在本小节中，我们给出这一估计的改进，而我们的方法不同于 Wu–Xue 的方法。更确切地说，我们的方法建立在将共形变换与 Cheeger 不等式相结合的基础上。类似的共形技巧已被用于相关的估计 [GLN24]。

我们先介绍曲面的 Cheeger 不等式。

定理 8.4 (曲面的 Cheeger 不等式)。 设 C 是一条配备 *K¨ahler* 度量 μ 的连通紧黎曼曲面，且 $\lambda_{\mu}^{\mathrm{Rm}},_1>0$ 是黎曼拉普拉斯算子 $\Delta_\mu^{\mathrm{Rm}}=\star_\mu d\star_\mu d$ 的第一特征值。那么我们有

$$\lambda_{\mu,1}^{\mathrm{Rm}}\ge\frac{1}{4}\cdot\inf_{U\subset C}\frac{\ell_\mu^2(\partial U)}{\min\{\mu(U),\mu(C\setminus U)\}^2},$$

其中 U 遍历 C 的所有连通开子集，这些子集的补集 $C\setminus U$ 连通且具有光滑边界 ∂U； $\ell_\mu(\partial U)$ 是 ∂U 的长度，而 $\mu(U)$ 是 U 的测度。

证明。 参见 [Bus92，定理 8.3.3，引理 8.3。6]。 □

专家们熟知 Cheeger 不等式的以下加权版本。为求完整起见，我们从经典的 Cheeger 不等式推导出它。

推论 8.5。 设 C 是一条配备 *K¨ahler* 度量 μ 的连通紧黎曼曲面，设 $u{:}C\to[1,\infty)$ 是一个连续函数，令 $\mu_u=u\cdot\mu$ 为加权测度，并设 $\lambda_{\mu,1}>0$ 表示拉普拉斯算子 $\Delta_\mu=\frac{dd^c}{\mu}$ 的第一特征值。那么我们有

$$\lambda_{\mu,1}\ge\frac{1}{8\pi}\cdot\inf_{U\subset C}\frac{\ell_{\mu_u}^2(\partial U)}{\min\{\mu_u(U),\mu_u(C\setminus U)\}^2},$$

其中 U遍历所有具有连通补集 $C\setminus U$ 和光滑边界 ∂U 的 C 连通开子集， $\ell_{\mu_u}(\partial U)$ 是 ∂U 的加权长度，而 $\mu_u(U)$ 是 U 的加权测度。

注 8.6。 注意， $\Delta_\mu=\frac{1}{2\pi}\Delta_\mu^{\mathrm{Rm}}$，因此 $\lambda_{\mu,\ 1}=\frac{1}{2\pi}\lambda_{\mu\ 1}^{\mathrm{Rm}}$。

证明。 首先，假设 u 是光滑的。则 μ_u 也是一个 K¨ahler 度量，因此经典的 Cheeger 不等式蕴含

$$\lambda_{\mu_u,1}\ge\frac{1}{8\pi}\cdot\inf_{U\subset C}\frac{\ell_{\mu_u}^2(\partial U)}{\min\{\mu_u(U),\mu_u(C\setminus U)\}^2}.$$

现在我们将证明$\lambda_{\mu,\,1} \geq \lambda_{\mu_u,\,1}$。由于 $u \geq 0$，我们有 $\mu_u \geq \mu$。对任意光滑函数 η，令$\eta_{\mathrm{aver}} = \mu(C)^{-1} \int_C \eta \, d\mu$ 以及$\eta_{\mathrm{aver},\,u} = \mu_u(C)^{-1} \int_C \eta \, d\mu_u$。根据特征值的瑞利原理 [Bus92，定理 8.2。1]，我们有

$$\begin{aligned}\lambda_{\mu_u,1} &= \inf_{\eta\in C^\infty(C;\mathbb{R})\setminus\mathbb{R}} \frac{-\int_C \eta\wedge dd^c\eta}{\int_C (\eta-\eta_{\mathrm{aver},u})^2\,d\mu_u} \leq \inf_{\eta\in C^\infty(C;\mathbb{R})\setminus\mathbb{R}} \frac{-\int_C \eta\wedge dd^c\eta}{\int_C (\eta-\eta_{\mathrm{aver},u})^2\,d\mu} \\ &\leq \inf_{\eta\in C^\infty(C;\mathbb{R})\setminus\mathbb{R}} \frac{-\int_C \eta\wedge dd^c\eta}{\int_C (\eta-\eta_{\mathrm{aver}})^2\,d\mu} = \lambda_{\mu,1}.\end{aligned}$$

一般而言，用一列光滑函数 u_j 来逼近连续函数 u，使其在 C 上一致收敛于 u，其中 $u_j \geq 1$、$\forall j \in \mathbb{N}$。根据上述论证，对于所有 $j \in \mathbb{N}$，$\lambda_{\mu,\,1} \geq \lambda_{\mu_{u_j},\,1}$。因此，对于每个 $j \in \mathbb{N}$，

$$\lambda_{\mu,1} \geq \frac{1}{8\pi} \cdot \inf_{U\subset C} \frac{\ell^2_{\mu_{u_j}}(\partial U)}{\min\left\{\mu_{u_j}(U), \mu_{u_j}(C\setminus U)\right\}^2}.$$

由于 $u_j \to u$ 在 C 上一致收敛，我们得到

$$\lim_{j\to\infty}\left(\inf_{U\subset C} \frac{\ell^2_{\mu_{u_j}}(\partial U)}{\min\left\{\mu_{u_j}(U), \mu_{u_j}(C\setminus U)\right\}^2}\right) = \inf_{U\subset C} \frac{\ell^2_{\mu_u}(\partial U)}{\min\left\{\mu_u(U), \mu_u(C\setminus U)\right\}^2},$$

这就完成了证明。 □

以下初等等周不等式为专家所熟知。

引理 *8.7.* 设 C 是一条亏格为 $g \geq 2$ 的连通光滑复曲线，配备常曲率为 -1 的唯一 *Kähler* 度量 μ_{KE}；设 $U \subset C$ 是一个边界光滑的连通开子集 ∂U。假设补集 $C \setminus U$ 也是连通的。若 ∂U 有一个零伦连通分支，或有两个自由同伦的连通分支，则 $\ell(\partial U) \geq \mu_{\mathrm{KE}}(U)$，其中 $\ell(\partial U) = \ell_{\mu_{\mathrm{KE}}}(\partial U)$ 是 ∂U 在 (C, μ_{KE}) 中的长度。结合定理 *8.4*，我们得到

$$\lambda_{\mathrm{KE},1} \geq \min\left\{\frac{1}{8\pi}, \frac{(\ell_\Sigma(C,\mu_{\mathrm{KE}}))^2}{32\pi^3(g-1)^2}\right\}.$$

证明。 参见 [WX22a，（25）] 以及 [WX22b，引理 8、引理 9]。 □

现在假设 $\ell_\Sigma(C, \mu_{\mathrm{KE}}) \leq 1$。在这种情况下，我们构造一个适当的共形扰动 μ_{KE}，然后应用推论8.5。

令 $\{\gamma_j\}_{j=1}^m$ 为 (C, μ_{KE}) 上所有长度为 ≤ 1 的简单闭测地线组成的集合。设 $\epsilon_j = \max\{\ell(\gamma_j)\ \ell_\Sigma(C, \mu_{\mathrm{KE}})\}$，其中 $\ell(\gamma_j)$ 是 (C, μ_{KE}) 中 γ_j 的长度。现在我们利用 K¨ahler 领圈 $\mathscr{C}(\gamma_j)$ 的结构来构造权函数。根据引理 7.10，每个 γ_j 都有一个 K¨ahler 领圈 $\mathscr{C}(\gamma_j)$，其全纯坐标

$$z_j : \mathscr{C}(\gamma_j) \to \overline{\mathbb{D}_{e^{-\nu(\gamma_j)}}(0)} \setminus \mathbb{D}_{e^{\nu(\gamma_j)-\frac{2\pi^2}{\ell(\gamma_j)}}}(0)$$

使得

$$z_j^*(\mu_{\mathrm{KE}}) = \frac{\ell^2(\gamma_j)\mu_{\mathrm{Euc}}}{4\pi^2|z_j|^2\sin^2(\frac{\ell(\gamma_j)}{2\pi}\log|z_j|)},$$

其中 $\mu_{\mathrm{Euc}} = \frac{idz\wedge d\bar{z}}{2}$ 是 $\mathbb{C}$上的标准欧氏度量，而 $\nu(\gamma_j) \in (0,\ _{2\ell}{}^{\pi^2}{}_{(\gamma_j)})$ 由下式确定

$\nu(\gamma_j)\ell(\gamma_j) = 2\pi$ 反双曲正切 $\left(\frac{\ell(\gamma_j)}{2}\right)$。在每个领圈 $\mathscr{C}(\gamma_j)$ 上，我们记

$$\begin{aligned} u_j(z_j) &= \max\left\{1, \frac{\sin^2\left(\frac{\ell(\gamma_j)}{2\pi}\log|z_j|\right)}{\epsilon_j}\right\} \\ &= \begin{cases} 1, & \left|\log|z_j| + \frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}\right| > \frac{\pi^2 - 2\pi\arcsin\sqrt{\epsilon_j}}{\ell(\gamma_j)}; \\ \frac{\sin^2\left(\frac{\ell(\gamma_j)}{2\pi}\log|z_j|\right)}{\epsilon_j}, & \left|\log|z_j| + \frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}\right| \le \frac{\pi^2 - 2\pi\arcsin\sqrt{\epsilon_j}}{\ell(\gamma_j)}, \end{cases} \end{aligned}$$

and

$$u(x) = \begin{cases} u_j(z_j(x)), & x \in \mathscr{C}(\gamma_j); \\ 1, & x \in C \setminus \bigcup_{j=1}^m \mathscr{C}(\gamma_j). \end{cases}$$

因此， $u \ge 1$ 在 C上，而 u 关于 μ_{KE}是利普希茨连续的。

令 $\mu_{\mathrm{KE};u} = u\,\mu_{\mathrm{KE}}$ 为加权测度。则 $\mu_{\mathrm{KE};u}$ 在 C上给出了一个利普希茨黎曼度量。现在我们列出加权测度 $\mu_{\mathrm{KE};u}$的一些基本性质。

引理 8.8。 设 C、 μ_{KE}、 $\{\gamma_j\}_{j=1}^m$、 u_j、 u和 $\mu_{\mathrm{KE};u}$ 如上所述。则以下性质成立 :

(1) $\mu_{\mathrm{KE};u} \ge \mu_{\mathrm{KE}}$ 和$\mu_{\mathrm{KE};u}|_{C\setminus\bigcup_{j=1}^m \mathscr{C}(\gamma_j)} = \mu_{\mathrm{KE}}|_{C\setminus\bigcup_{j=1}^m \mathscr{C}(\gamma_j)}$。*(*

2) $\mu_{\mathrm{KE};u}(\mathscr{C}(\gamma_j)) < \mu_{\mathrm{KE}}(\mathscr{C}(\gamma_j)) + \pi$、 $j = 1$、 $\cdots$、 m。

(3) 距离$\mathrm{dist}_{\mu_{\mathrm{KE}}}\left(\{u \ne 1\}, C \setminus \bigcup_{j=1}^m \mathscr{C}(\gamma_j)\right) \ge$对数 2。

证明。 (1) 根据 u的定义可直接得出。现在证明(2)。

根据构造,

$$\{u \ne 1\} \cap \mathscr{C}(\gamma_j) = \left\{\left|\log|z_j| + \frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}\right| \le \frac{\pi^2 - 2\pi\arcsin\sqrt{\epsilon_j}}{\ell(\gamma_j)}\right\},$$

因此

$$\begin{aligned} \mu_{\mathrm{KE};u}(\mathscr{C}(\gamma_j)) - \mu_{\mathrm{KE}}(\mathscr{C}(\gamma_j)) &= \int_{\mathscr{C}(\gamma_j)} (u_j - 1)\mu_{\mathrm{KE}} < \int_{\{u\ne1\}\cap\mathscr{C}(\gamma_j)} u_j\mu_{\mathrm{KE}} \\ &= \int_{\left\{\left|\log|z_j| + \frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}\right| \le \frac{\pi^2 - 2\pi\arcsin\sqrt{\epsilon_j}}{\ell(\gamma_j)}\right\}} \frac{\ell(\gamma_j)^2\mu_{\mathrm{Euc}}}{4\pi^2|z_j|^2\epsilon_j} \\ &= \frac{(\pi - 2\arcsin\sqrt{\epsilon_j})\cdot\ell(\gamma_j)}{\epsilon_j} < \pi. \end{aligned}$$

对于 (3)，只需检验距离 $\mathrm{dist}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(\{u \ne 1\} \cap \mathscr{C}(\gamma_j)\ \partial\mathscr{C}(\gamma_j)) \ge$对数 2。由命题 7.11，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(\{u \ne 1\} \cap \mathscr{C}(\gamma_j), \partial\mathscr{C}(\gamma_j)) &\ge \log\left(\frac{2\pi\arcsin\sqrt{\epsilon_j}}{\ell(\gamma_j)\nu(\gamma_j)}\right) \\ &\ge \log\left(\frac{\arcsin\sqrt{\ell(\gamma_j)}}{\arcsin\left(\tanh\left(\ell(\gamma_j)/2\right)\right)}\right) \\ &> \log\left(\frac{2}{\sqrt{\ell(\gamma_j)}}\right) \ge \log 2. \end{aligned}$$

这就证明了（3），从而证明了引理。 □

构造 基于前述分析，我们现在考虑 $(C, \mu_{\mathrm{KE};u})$ 上的等周不等式 .

引理 *8.9.* 设 C、μ_{KE}、$\{\gamma_j\}_{j=1}^m$、u_j、u 和 $\mu_{\mathrm{KE};u}$ 如引理 *8.8* 中所述。设 $U \subset C$ 是 C 的一个具有光滑边界 ∂U 的开子集。假设 $\ell_\Sigma(C, \mu_{\mathrm{KE}}) \leq 1$，$\ell_{\mathrm{KE};u}(\partial U) \leq 2$ 对数 *2*，且 U 同胚于一个开圆盘或一个圆柱。那么 $\ell_{\mathrm{KE};u}(\partial U) \geq {}^{2}\sqrt{\ell_\Sigma}(C,\mu_{\mathrm{KE}})\,\pi$ $\mu_{\mathrm{KE};u}(U)$，其中 $\ell_{\mathrm{KE};u}(\partial U)$ 是 ∂U 在 $(C, \mu_{\mathrm{KE};u})$ 中的长度。

证明。我们首先假设 $\partial U \nsubseteq \mathscr{C}(\gamma_j)$ 对任意 γ_j。由于反双曲正弦 $1 >$ 对数 2，定理 7.4 表明 ∂U 的每个连通分支都是零伦的。由引理 8.8，这意味着 $\partial U \subset \{u = 1\}$。因此$U \subset \{u = 1\}$。在此情形下，不等式由引理 8.7得出。

现在假设对于某个 γ_j，$\partial U \subset \mathscr{C}(\gamma_j)$。那么要么 $U \subset \mathscr{C}(\gamma_j)$，要么 $C \setminus U \subset \mathscr{C}(\gamma_j)$。由于 $\mathscr{C}(\gamma_j)$ 和 U 的第一贝蒂数都是 ≤ 1，而 C 的第一贝蒂数为 $2g \geq 4$，后一种情况不可能。因此 $U \subset \mathscr{C}(\gamma_j)$。令

$$\Psi(z_j) \quad = \quad \begin{cases} -\log\left(-\sin\left(\dfrac{\ell(\gamma_j)}{2\pi}\log|z_j|\right)\right), & z_j \in \{u_j = 1\}; \\ \dfrac{\ell^2(\gamma_j)\tan\theta_j}{8\pi^2\theta_j}\cdot\left(\log|z_j| + \dfrac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}\right)^2 + \vartheta_j, & z_j \in \{u_j \neq 1\}, \end{cases}$$

其中 $\theta_j = \frac{\pi}{2} -$为 $\arcsin\sqrt{\epsilon_j}$，而 $\vartheta_j = -$为 $\log\sqrt{\epsilon_j} - \frac{\theta_j}{\text{正切}}\frac{\theta_j}{2}$。由于

$$\{u_j \neq 1\} = \left\{\left|\log|z_j| + \frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}\right| < \frac{2\pi\theta_j}{\ell(\gamma_j)}\right\},$$

我们有

$$d\Psi(z_j) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{-\ell(\gamma_j)\,(\bar{z}_j dz_j + z_j d\bar{z}_j)}{4\pi|z_j|^2\tan\left(\frac{\ell(\gamma_j)}{2\pi}\log|z_j|\right)}, & z_j \in \{u_j = 1\}; \\ \dfrac{\ell^2(\gamma_j)\left(\log|z_j| + \frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}\right)\tan\theta_j}{8\pi^2\theta_j|z_j|^2}\cdot(\bar{z}_j dz_j + z_j d\bar{z}_j), & z_j \in \{u_j \neq 1\}. \end{cases}$$

因此，Ψ 和 $d\Psi$ 在 $\mathscr{C}(\gamma_j)$ 上是利普希茨连续的。此外，

$$d\star d\Psi(z_j) \quad = \quad \begin{cases} \mu_{\mathrm{KE}}, & z_j \in \{u_j = 1\}; \\ \dfrac{\ell^2(\gamma_j)\tan\theta_j}{4\pi^2\theta_j|z_j|^2}\mu_{\mathrm{Euc}}, & z_j \in \{u_j \neq 1\}, \end{cases}$$

其中 $\star$ 表示霍奇 $\star$-算子。注意，它在 1-形式上的作用仅取决于复结构。

由于对于 $z_j \in \{\overline{u_j} \neq 1\}$，$\cos\theta_j = \sqrt{\epsilon_j}$，我们得到

$$\begin{aligned} d\star d\Psi(z_j) \quad &= \quad \frac{\ell^2(\gamma_j)\tan\theta_j}{4\pi^2\theta_j|z_j|^2}\mu_{\mathrm{Euc}} = \frac{\epsilon_j\tan\theta_j}{\theta_j}\mu_{\mathrm{KE};u} \\ &= \quad \frac{\sqrt{\epsilon_j}\sin\theta_j}{\theta_j}\mu_{\mathrm{KE};u} \geq \frac{2\sqrt{\epsilon_j}}{\pi}\mu_{\mathrm{KE};u}. \end{aligned}$$

应用引理 8.7 中的论证即可得到

$$\ell_{\mathrm{KE};u}(\partial U) \geq \frac{2\sqrt{\epsilon_j}}{\pi}\mu_{\mathrm{KE};u}(U) \geq \frac{2\sqrt{\ell_\Sigma(C,\mu_{\mathrm{KE}})}}{\pi}\mu_{\mathrm{KE};u}(U),$$

这就是我们要证明的结论。 □

综合以上论证，我们得到以下估计：

命题 8.10。设 C 是亏格为 $g \geq 2$的连通光滑复曲线，令 μ_{KE} 表示 C 上曲率为 -1的唯一 *Kähler* 度量。那么以下至少有一种情况成立：

(1) $\ell_\Sigma(C,\mu_{\mathrm{KE}}) \geq 1$ 和 $\lambda_{\mathrm{KE},1} \geq$ 最小 $\left\{\frac{1}{8\pi}, \frac{(\ell_\Sigma(C,\mu_{\mathrm{KE}}))^2}{32\pi^3}\right\}$。

(2) $\ell_\Sigma(C,\mu_{\mathrm{KE}}) \leq 1$ 和 $\lambda_{\mathrm{KE},1} \geq$ 最小 $\left\{\frac{\ell_\Sigma(C,\mu_{\mathrm{KE}})}{2\pi^3}, \frac{1}{52\pi^3(g-1)^2}\right\}$。

(3) $\ell_\Sigma(C,\mu_{\mathrm{KE}}) \leq 1$，并且存在一个极小分离多重曲线 $\{\gamma_j\}_{k=1}^{m'}$，将 C 分成两部分 C_1、C_2，使得

$$\lambda_{\mathrm{KE},1} \geq \frac{\sum_{j=1}^{m'}\ell(\gamma_j)}{8\pi^3}\cdot\frac{1}{\min\left\{7(g_1-1)+5m', 7(g_2-1)+5m', \frac{7(g-1)}{2}\right\}^2},$$

其中 g_1、g_2 分别是 C_1 和 C_2 的亏格。

注 8.11. 作为命题 8.10 的直接推论，我们得到 $\lambda_{\mathrm{KE},1}^{\mathrm{Rm}} \geq \frac{\ell_\Sigma(C,\mu_{\mathrm{KE}})}{49\pi^2(g-1)^2}$。注意，Bers 常数的经典估计 [Bus92, 定理 5.1.4] 给出了上界 $\ell_\Sigma(C,\mu_{\mathrm{KE}}) \leq 78(g-1)$[WX22a, 引理 6]。此外，[HW25, 命题 5] 中得到了一个形如 $\ell_\Sigma(C,\mu_{\mathrm{KE}}) \leq 38$对数 g 的改进上界。

证明。如果 $\ell_\Sigma(C,\mu_{\mathrm{KE}}) \geq 1$，则性质 (1) 可由引理 8.7直接推出。现在我们假设$\ell_\Sigma(C,\mu_{\mathrm{KE}}) \leq 1$。

令 $\{\gamma_j\}_{j=1}^m$, u_j, u，以及 $\mu_{\mathrm{KE};u}$ 如引理 8.8所述。由定理 7.4，可得

$$\mu_{\mathrm{KE};u}(C) < \mu_{\mathrm{KE}}(C) + m\pi \leq 7(g-1)\pi.$$

设 $U \subset C$ 是一个边界为光滑边界 ∂U 的连通开子集，且 $C\setminus U$ 也是连通的。首先，考虑 $\ell_{\mu_{\mathrm{KE};u}}(\partial U) \geq 2\log 2$ 的情形。在这种情况下，

$$\begin{aligned}\frac{1}{8\pi}\cdot\frac{\ell^2_{\mu_{\mathrm{KE};u}}(\partial U)}{\min\{\mu_{\mathrm{KE};u}(U),\mu_{\mathrm{KE};u}(C\setminus U)\}^2} &\geq \frac{(2\log 2)^2}{2\pi\cdot(7\pi(g-1))^2}\\ &= \frac{(2\log 2)^2}{98\pi^3(g-1)^2} > \frac{1}{52\pi^3(g-1)^2}.\end{aligned}$$

现在假设 $\ell_{\mu_{\mathrm{KE};u}}(\partial U) \leq 2\log 2$。如果 ∂U有一个零伦连通分支，或者有两个自由同伦的连通分支，那么引理 8.9 推出

$$\begin{aligned}\frac{1}{8\pi}\cdot\frac{\ell^2_{\mu_{\mathrm{KE};u}}(\partial U)}{\min\{\mu_{\mathrm{KE};u}(U),\mu_{\mathrm{KE};u}(C\setminus U)\}^2} &\geq \frac{1}{8\pi}\cdot\frac{\ell^2_{\mu_{\mathrm{KE};u}}(\partial U)}{\mu_{\mathrm{KE};u}(U)^2}\\ &\geq \frac{1}{8\pi}\cdot\frac{4\ell_\Sigma(C,\mu_{\mathrm{KE}})}{\pi^2} = \frac{\ell_\Sigma(C,\mu_{\mathrm{KE}})}{2\pi^3}.\end{aligned}$$

否则，∂U 的每个连通分支都不是零伦的，并且 ∂U 的任意两个连通分支都不同伦等价。

令 $\{\mathsf{c}_j\}_{j=1}^{m'}$表示 ∂U的连通分支集合。由于 $\ell_{\mu_{\mathrm{KE};u}}(\partial U) \leq 2\log 2 < 2\operatorname{arcsinh} 1$，可知，将短闭测地线 $\{\gamma_j\}_{j=1}^m$重新排序后，对每个 $j=1,\cdots,m'$，都有 $\mathsf{c}_j \subset \mathscr{C}(\gamma_j)$。因此，$\{\gamma_j\}_{j=1}^{m'}$ 将 C 分隔成两个区域 C_1 和 C_2。令 g_1, g_2 分别表示 C_1 和 C_2的亏格。由高斯-博内公式，$\mu_{\mathrm{KE}}(C_1) = 2\pi(2g_1+m'-2)$，且 $\mu_{\mathrm{KE}}(C_2) = 2\pi(2g_2+m'-2)$。此外，由定理 7.4，得到 $\#\{\gamma_j\colon \gamma_j \subset C_1, 1\leq j\leq m\} \leq 3(g_1-1)+m'$，以及 $\#\{\gamma_j\colon \gamma_j \subset C_2, 1\leq j\leq m\} \leq 3(g_2-1)+m'$。

直接计算可得

$$\begin{aligned}\mu_{\mathrm{KE}}(\mathscr{C}(\gamma_j)\cap C_1) &= \mu_{\mathrm{KE}}(\mathscr{C}(\gamma_j)\cap C_2)\\ &= \int_0^{w(\gamma_j)} \ell(\gamma_j)\cosh r dr = \frac{\ell(\gamma_j)}{\sinh\frac{\ell(\gamma_j)}{2}} < 2,\end{aligned}$$

其中 $w(\gamma_j)>0$ 满足双曲正弦($w(\gamma_j)$) 双曲正弦 $\left(\frac{\ell(\gamma_j)}{2}\right)=1$。由此可得

$$\begin{aligned}&\min\{\mu_{\mathrm{KE};u}(U),\mu_{\mathrm{KE};u}(C\setminus U)\}\\ \le\ &\min\left\{\mu_{\mathrm{KE};u}\left(C_1\bigcup\left(\bigcup_{j=1}^{m'}\mathscr{C}(\gamma_j)\right)\right),\right.\\ &\qquad\left.\mu_{\mathrm{KE};u}\left(C_2\bigcup\left(\bigcup_{j=1}^{m'}\mathscr{C}(\gamma_j)\right)\right),\frac{1}{2}\mu_{\mathrm{KE};u}(C)\right\}\\ \le\ &\min\left\{\mu_{\mathrm{KE}}(C_1)+\sum_{j=1}^{m'}\mu_{\mathrm{KE}}(\mathscr{C}(\gamma_j)\cap C_2)+(3(g_1-1)+2m')\pi,\right.\\ &\qquad\left.\mu_{\mathrm{KE}}(C_2)+\sum_{j=1}^{m'}\mu_{\mathrm{KE}}(\mathscr{C}(\gamma_j)\cap C_1)+(3(g_2-1)+2m')\pi,\frac{1}{2}\mu_{\mathrm{KE};u}(C)\right\}\\ \le\ &\min\left\{(7(g_1-1)+5m')\pi,(7(g_2-1)+5m')\pi,\frac{7(g-1)\pi}{2}\right\}.\end{aligned}$$

现在我们考虑 $\ell_{\mu_{\mathrm{KE};u}}(\partial U)$。根据该构造，我们有 $\sum_{j=1}^{m'}\ell(\gamma_j)\ge\ell_\Sigma(C,\mu_{\mathrm{KE}})$。此外，若$\ell(\gamma_j)\le 1$，则有 $\ell_{\mu_{\mathrm{KE};u}}(\gamma_j)=\ell_{(\gamma_j)\text{最大}\{\sqrt{\ell_\Sigma(C,\mu_{\mathrm{KE}})},\sqrt{\ell(\gamma_j)}\}}$。

假设对所有 $j=1,\cdots,m'$，均有 $\ell(\gamma_j)\le\ell_\Sigma(C,\mu_{\mathrm{KE}})$。则

$$\begin{aligned}\ell^2_{\mu_{\mathrm{KE};u}}(\partial U) &= \left(\sum_{j=1}^{m'}\ell_{\mu_{\mathrm{KE};u}}(\mathbf{c}_j)\right)^2 \ge \left(\sum_{j=1}^{m'}\ell_{\mu_{\mathrm{KE};u}}(\gamma_j)\right)^2\\ &\ge \left(\frac{\sum_{j=1}^{m'}\ell(\gamma_j)}{\sqrt{\ell_\Sigma(C,\mu_{\mathrm{KE}})}}\right)^2 \ge \left(\frac{\sum_{j=1}^{m'}\ell(\gamma_j)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m'}\ell(\gamma_j)}}\right)^2 = \sum_{j=1}^{m'}\ell(\gamma_j).\end{aligned}$$

如果存在某个 j，使得 $\ell(\gamma_j)>\ell_\Sigma(C,\mu_{\mathrm{KE}})$，那么我们有 $\ell_{\mu_{\mathrm{KE};u}}(\gamma_j)\ge\sqrt{\ell(\gamma_j)}\ge\sqrt{\ell_\Sigma(C,\mu_{\mathrm{KE}})}$。不失一般性，我们可以假设 $\ell(\gamma_j)>\ell_\Sigma(C,\mu_{\mathrm{KE}})$ 当且仅当对于某个指标 m'' 有 $m''\le j\le m'$ $1\le m''\le m'-1$。因此

$$\begin{aligned}\ell^2_{\mu_{\mathrm{KE};u}}(\partial U) &= \left(\sum_{j=1}^{m'}\ell_{\mu_{\mathrm{KE};u}}(\mathbf{c}_j)\right)^2 \ge \left(\sum_{j=1}^{m'}\ell_{\mu_{\mathrm{KE};u}}(\gamma_j)\right)^2\\ &\ge \left(\frac{\sum_{j=1}^{m''-1}\ell(\gamma_j)}{\sqrt{\ell_\Sigma(C,\mu_{\mathrm{KE}})}}+\sum_{j=m''}^{m'}\sqrt{\ell(\gamma_j)}\right)^2\\ &> \sqrt{\frac{\ell(\gamma_{m'})}{\ell_\Sigma(C,\mu_{\mathrm{KE}})}}\cdot\sum_{j=1}^{m''-1}\ell(\gamma_j)+\sum_{j=m''}^{m'}\ell(\gamma_j)\ge\sum_{j=1}^{m'}\ell(\gamma_j).\end{aligned}$$

由此可知，对于任意 $\epsilon > 0$，如果将 $\lambda_{\mathrm{KE},1}$ 替换为 $\lambda_{\mathrm{KE},1} + \epsilon$，则本命题中的估计仍然成立。令 $\epsilon \to 0$，则对于 $\lambda_{\mathrm{KE},1}$，这些估计同样成立。注意，在 C 上只有有限多个极小分离多重曲线。这就完成了证明。 □

8.3 小特征值的特征函数

设 C 是亏格为 $g \geq 2$ 的连通光滑复曲线，并设 μ_{KE} 表示 C 上曲率为 -1 的唯一凯勒度量。

我们考虑与黎曼拉普拉斯算子的一个小特征值 $\lambda = \epsilon \in (0, 1\ 10)$ 相关联的 $\mathbb{R}$ 值特征函数 Φ 的上确界范数 —

$$\Delta_{\mathrm{KE}}^{\mathrm{Rm}} = \star_{\mathrm{KE}}\, d\, \star_{\mathrm{KE}}\, d = 2\pi\Delta_{\mathrm{KE}}.$$

下面的引理给出了万有覆盖上特征函数的局部估计，由此可得厚部上 Φ 的估计。

引理 8.12。 设 $(\mathbb{D}, \mu_{\mathbb{D}})$ 表示庞加莱 ′圆盘（见定理 7.2），且 Φ 是定义在 $\mathbb{D}$上的一个 $\mathbb{R}$ 值函数，满足 $\Delta_{\mathrm{KE}}^{\mathrm{Rm}}\Phi = -\epsilon\Phi$，其中 $\epsilon \in (0,1)$。那么对于任意 $r \in (0, 反双曲正弦\ 1],$，有

$$|\Phi(0)|^2 \leq \frac{1}{2\pi(\cosh r - 1)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \epsilon \log\left(\frac{1+\cosh r}{2}\right)\right)^2} \int_{B_r(0)} |\Phi(z)|^2 d\mu_{\mathbb{D}},$$

其中 $B_r(0) = \{z \in \mathbb{D} : \mathrm{dist}_{\mu_{\mathbb{D}}}(z, 0) < r\} = \left\{z \in \mathbb{D} :\ |z| < 双曲正切\ \frac{r}{2}\right\}$.

证明。 令 $\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(ze^{i\theta})d\theta$ 表示 Φ 关于原点的圆周平均。于是 $\Phi_0(0) = \Phi(0), d\Phi_0(0) = 0$, $\Delta_{\mathrm{KE}}^{\mathrm{Rm}}\Phi_0 = -\epsilon\Phi_0$，且 $\Phi_0(z)$ 只依赖于 $|z|$，也就是说，Φ_0 是径向的。令 $\mathbf{r}(z) = \mathrm{dist}_{\mu_{\mathbb{D}}}(z, 0) = 2\mathrm{arctanh}(|z|)$。那么在极坐标 $(\mathbf{r}\ \vartheta)$ 下，由定理 7.1 可得 $\mu_{\mathbb{D}} = \sinh\mathbf{r} d\mathbf{r} \wedge d\vartheta$。令 $\Phi_1(\mathbf{r}) = \Phi_0(\tanh\ \mathbf{r}\ 2)$。由于 Φ_0 只依赖于 $\mathbf{r}$，拉普拉斯算子可化为径向算子

$$\Delta_{\mathrm{KE}}^{\mathrm{Rm}}\Phi_0 = \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\mathbf{r}^2} + \frac{\cosh\mathbf{r}}{\sinh\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial\Phi_1}{\partial\mathbf{r}} = -\epsilon\Phi_0.$$

不失一般性，假设 $\Phi_0(0) = \Phi(0) > 0$。那么我们有 $\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\ ^2}\mathbf{r}(0) = -\epsilon\Phi_0(0) \leq 0,$ 因此存在一个包含 0 的开邻域 U，使得 $\Phi_0(z) < \Phi_0(0), \forall z \in U \setminus \{0\}$。对于任意 $\mathbf{r} > 0$，直接计算可得

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(\sinh\mathbf{r} \cdot \frac{\partial\Phi_1}{\partial\mathbf{r}}(\mathbf{r})\right) = -\epsilon\sinh\mathbf{r} \cdot \Phi_1(\mathbf{r}).$$

因此，若 $\Phi_1(\mathbf{r}) \geq 0$ 对$\mathbf{r} \in (0,\mathbf{r}_0)$成立，则 $\frac{\partial\Phi_1}{\partial\ \mathbf{r}}\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} < 0$，从而 $\Phi_1(\mathbf{r}_0) < \Phi_1(0)$。

根据柯西-施瓦茨不等式，对于任意 $r > 0$，有

$$\begin{aligned}\int_{B_r(0)} |\Phi(z)|^2 d\mu_{\mathbb{D}} &= \int_0^r \sinh\mathbf{r} \int_0^{2\pi} |\Phi(\tanh(\mathbf{r})e^{i\vartheta})|^2 d\vartheta d\mathbf{r} \\ &\geq \int_0^r \sinh\mathbf{r} \int_0^{2\pi} |\Phi_0(\tanh\mathbf{r})|^2 d\vartheta d\mathbf{r} = \int_{B_r(0)} |\Phi_0(z)|^2 d\mu_{\mathbb{D}}.\end{aligned}$$

还需证明

$$|\Phi_0(0)|^2 \leq \frac{1}{2\pi(\cosh r - 1)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \epsilon \log\left(\frac{1+\cosh r}{2}\right)\right)^2} \int_{B_r(0)} |\Phi_0(z)|^2 d\mu_{\mathbb{D}}.$$

令 $u(t) = 对数\left(\frac{1+\cosh t}{2}\right)$。那么 $u(0) = u'(0) = 0$，直接计算可得

$$u''(t) + \frac{\cosh t}{\sinh t} \cdot u'(t) = \frac{1}{1+\cosh t} + \frac{\cosh t}{1+\cosh t} = 1.$$

记 $\Phi_u(z) = (1-\epsilon u(\mathbf{r}(z)))\Phi_0(0)$ 和 $\Phi_{u,1}(\mathbf{r}) = \Phi_u$(双曲正切 $\mathbf{r}_2$)。那么有 $\Phi_u(0) = \Phi_0(0)$, $d\Phi_u(0) = d\Phi_0(0) = 0$, 并且

$$\Delta_{\mathrm{KE}}^{\mathrm{Rm}}\Phi_u = \frac{\partial^2\Phi_{u,1}}{\partial\mathbf{r}^2} + \frac{\cosh\mathbf{r}}{\sinh\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial\Phi_{u,1}}{\partial\mathbf{r}} = -\epsilon\Phi_0(0).$$

现在我们证明 $\Phi_0(0) \geq \Phi_0(z) \geq \Phi_u(z)$, $\forall z \in B_r(0)$。由于 $\epsilon \in (0, 1)$ 且 $r \in (0,$ 反双曲正弦 $1]$, , 因此对任意 $z \in B_r(0)$,

$$\Phi_0(0) \geq \Phi_u(z) = \Phi_0(0)\cdot(1-\epsilon u(\mathbf{r}(z))) > \Phi_0(0)\cdot(1-\log 2) > 0.$$

对于任意 $\mathbf{r} > 0$, 直接计算可得

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(\sinh\mathbf{r}\cdot\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mathbf{r}} - \sinh\mathbf{r}\cdot\frac{\partial\Phi_{u,1}}{\partial\mathbf{r}}\right) = \epsilon\sinh\mathbf{r}\cdot\left(\Phi_0(0) - \Phi_0\left(\tanh\frac{\mathbf{r}}{2}\right)\right).$$

因此, 若对 $\mathbf{r} \in (0, \mathbf{r}_0)$, 有 $\Phi_0(0) \geq \Phi_0$ (双曲正切 $\mathbf{r}_2$), 则 $\partial_{(\Phi_0-\Phi_u)\,\partial\mathbf{r}}(\mathbf{r}_0) > 0$, 这意味着 Φ_u (双曲正切 $\frac{\mathbf{r}_0}{2}$) $\leq \Phi_0$ (双曲正切 $\frac{\mathbf{r}_0}{2}$)。

令 $\mathbf{r}_{\max}$ 为 $[0,\infty)$ 中满足 $\Phi_0(0) \geq \Phi_0(z) \geq \Phi_u(z)$, $\forall z \in B_{\mathbf{r}_{\max}}(0)$ 的最大半径。由于存在 0 的一个开邻域 U, 使得 $\Phi_0(z) < \Phi_0(0)$, $\forall z \in U\setminus\{0\}$, 因此可以找到 $\mathbf{r}_1 \in (0, r)$, 使得 Φ_u (双曲正切 $\mathbf{r}_2$) $< \Phi_0$ (双曲正切 $\mathbf{r}_2$), $\forall \mathbf{r} \in (0, \mathbf{r}_1)$。因此 $\mathbf{r}_{\max} \geq \mathbf{r}_1 > 0$。由于 $\Phi_0 > 0$ 在 $B_r(0)$ 上, 若 $\mathbf{r}_{\max} < r$, 则

$$\left.\frac{\partial(\Phi_1-\Phi_{u,1})}{\partial\mathbf{r}}\right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\max}} > 0 > \left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mathbf{r}}\right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\max}}$$

意味着在 $B_{\mathbf{r}_{\max}}(0)$ 的一个开邻域上有 $\Phi_0(0) \geq \Phi_0(z) \geq \Phi_u(z)$, 这与$\mathbf{r}_{\max}$ 的定义相矛盾。因此 $\mathbf{r}_{\max} \geq r$, 且 $\Phi_0(0) \geq \Phi_0(z) \geq \Phi_u(z)$, $\forall z \in B_r(0)$。

最后, 综合上述估计可得

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(0)}|\Phi(z)|^2 d\mu_{\mathbb{D}} &\geq \int_{B_r(0)}|\Phi_0(z)|^2 d\mu_{\mathbb{D}} \geq \int_{B_r(0)}|\Phi_u(z)|^2 d\mu_{\mathbb{D}} \\
&= \int_0^r 2\pi\sinh\varsigma\cdot|\Phi_0(0)|^2\cdot(1-\epsilon u(\varsigma))^2 d\varsigma \\
&\geq 2\pi|\Phi_0(0)|^2\cdot\int_0^r\sinh\varsigma\cdot\left(1-\epsilon\log\left(\frac{1+\cosh r}{2}\right)\right)^2 d\varsigma \\
&= 2\pi\left(\cosh r-1\right)\cdot\left(1-\epsilon\log\left(\frac{1+\cosh r}{2}\right)\right)^2|\Phi(0)|^2,
\end{aligned}$$

从而完成证明。 □

在估计领圈上局部特征函数的上确界范数之前, 我们回顾常微分方程的下述基本比较原理。

引理 8.13. 设 $T \in (0,\infty)$, 设 $a_1(t) \geq a_2(t) \geq 0$ 为 $[0,T)$ 上的光滑函数, 并设 $u_1(t)$, $u_2(t)$ 为 $[0,T)$ 上满足下列方程的光滑函数:

$$\begin{cases} u_j''(t) = a_j(t)u_j(t), & \forall t\in[0,T),\ \forall j\in\{1,2\}; \\ u_1(0)\geq u_2(0)\geq 0, & u_1'(0)\geq u_2'(0)\geq 0. \end{cases}$$

则我们有 $u_1(t) \geq u_2(t)$, $u_1'(t) \geq u_2'(t)$, $\forall t \in [0,T)$。

证明。 尽管这一结果为专家所熟知, 我们仍在此给出证明, 以求完整。论证基本遵循常微分方程解的存在唯一性的标准证明。

对于 $j \in \{1,2\}$，令 $u_{j,0,1}(t) = u_j(0)$，且 $u_{j,0,2}(t) = u_j'(0)$。接着，我们通过归纳定义两个函数序列 $\{u_{j,k,1}\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{u_{j,k,2}\}_{k=1}^{\infty}$：

$$\begin{aligned} u_{j,k,1}(t) &= u_j(0) + \int_0^t u_{j,k-1,2}(\varkappa)d\varkappa\,, \\ u_{j,k,2}(t) &= u_j'(0) + \int_0^t a_j(\varkappa)u_{j,k-1,1}(\varkappa)d\varkappa\,. \end{aligned}$$

对 k 使用归纳法可得 $u_{1,k,1} \geq u_{2,k,1}$ 以及 $u_{1,k,2} \geq u_{2,k,2}$，$\forall k \in \mathbb{N}$。由于 $u_j(t) = \lim_{k\to\infty} u_{j,k,1}(t)$，$j \in \{1,2\}$，我们得到 $u_1(t) \geq u_2(t)$，$\forall t \in [0,T)$。类似的论证可得，在 $[0,T)$ 上 $u_1'(t) \geq u_2'(t)$，从而完成证明。

□

作为引理 8.13的一个应用，我们得到以下估计。

引理 8.14. 设 $\ell \in (0,\infty)$ 和 $\epsilon \in (0,1/4)$ 为常数。对于任意的 $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \{1,2\}$，令 $u_{k,j}(t)$ 表示初值问题的唯一解：

$$u_{k,j}''(t) = \left(\frac{1}{4} - \epsilon + \frac{1}{4\cosh^2 t} + \frac{4k^2\pi^2}{\ell^2\cosh^2 t}\right)\cdot u_{k,j}(t)$$

满足初始条件

$$\begin{cases} u_{k,1}(0) = 1,\ u_{k,1}'(0) = 0; \\ u_{k,2}(0) = 0,\ u_{k,2}'(0) = 1. \end{cases}$$

则以下性质成立：

(1) 函数$u_{k,1}(t)$ 是偶函数，而 $u_{k,2}(t)$ 是奇函数。

(2) 对于任意 $T \in (0,\infty)$，函数 $u_{k,j}(t)$ 双曲余弦$\left(\ell^{\frac{2k\pi t}{\text{双曲余弦}\, T}}\right)$ 在 $[0,T]$ 上单调递增。

(3) 双曲余弦$\left(\frac{\sqrt{1-4\epsilon}}{2}t\right) \leq u_{0,1}(t) \leq \sqrt{\text{双曲余弦}}\ t$, $\forall t \in [0,\infty)$。

(4) $\frac{2}{\sqrt{1-4\epsilon}}$双曲正弦$\left(\frac{\sqrt{1-4\epsilon}}{2}t\right) \leq u_{0,2}(t) \leq 2\left(\text{反正切}\ e^t - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\text{双曲余弦}}\ t$, $\forall t \in [0,\infty)$。

证明。 性质 (1) 可由微分方程的对称性以及给定的初始条件和解的唯一性立即得出。

下一步是证明 (2)。根据定义，我们有

$$\frac{1}{4} - \epsilon + \frac{1}{4\cosh^2 t} + \frac{4k^2\pi^2}{\ell^2\cosh^2 t} > \left(\frac{2k\pi}{\ell\cosh T}\right)^2, \quad \forall t \in [0,T].$$

接着，引理 8.13 意味着 $u_{k,j}(t) > 0$ 和 $u_{k,j}'(t) > 0$, $\forall t \in (0,T]$。直接计算表明，对于任意 $t \in (0,T]$,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(u_{k,j}'(t)\cosh\left(\frac{2k\pi t}{\ell\cosh T}\right) - \frac{2k\pi}{\ell\cosh T}\sinh\left(\frac{2k\pi t}{\ell\cosh T}\right)u_{k,j}(t)\right) \\ =\ &\cosh\left(\frac{2k\pi t}{\ell\cosh T}\right)\left(u_{k,j}''(t) - \left(\frac{2k\pi}{\ell\cosh T}\right)^2 u_{k,j}(t)\right) > 0, \end{aligned}$$

因而

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u_{k,j}(t)}{\cosh(\frac{2k\pi t}{\ell\cosh T})}\right) = \frac{u_{k,j}'(t)\cosh(\frac{2k\pi t}{\ell\cosh T}) - \frac{2k\pi}{\ell\cosh T}\sinh(\frac{2k\pi t}{\ell\cosh T})u_{k,j}(t)}{\cosh^2(\frac{2k\pi t}{\ell\cosh T})} > u_{k,j}'(0) \geq 0.$$

这就证明了 (2)。

性质（3）和（4）直接由引理 8.13得出。 □

现在我们可以考虑领圈上局部特征函数的上确界范数。

引理 8.15. 设 $\gamma \subset (C, \mu_{\mathrm{KE}})$ 是一条短简单闭测地线，且其长度 $\ell(\gamma) = \ell \in (0, \frac{1}{4}]$ 反双曲正弦，并设

$$(\mathscr{C}(\gamma), ds^2) \cong \left([-w, w] \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}), dr^2 + \ell^2 \cosh^2 r dt^2\right)$$

是 γ $w = \{1/\frac{\ell}{2}\}$ Φ $\mathbb{R}$ $\mathscr{C}$ γ $\Delta_{\mathrm{KE}}^{\mathrm{Rm}}\Phi =$ 的领圈，其中 反双曲正弦 $-\epsilon\Phi$ $\epsilon \in$ $r \in 0$ $w - \frac{}{2}$ 双曲正弦( )。设 是定义在 () 上的一个取值于 的函数，满足对某个 $(0, 1\ 10)$。那么对任意 (,对数)， $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，有

$$|\Phi(r,t)|^2 \leq (2\ell^{-4\epsilon} + 1) \int_{\mathscr{C}(\gamma)} |\Phi|^2 d\mu_{\mathrm{KE}},$$

证明。 不失一般性，我们可以假设 $\int_{\mathscr{C}(\gamma)} |\Phi|^2 \mu_{\mathrm{KE}} = 1$。

对于任意 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $j \in \{1, 2\}$，令

$$\Phi_{k,1}(r) = \int_0^1 \Phi(r,t) \cos(2k\pi t) dt \quad \text{and} \quad \Phi_{k,2}(r) = \int_0^1 \Phi(r,t) \sin(2k\pi t) dt.$$

由 Φ的傅里叶展开，我们得到

$$\Phi(r,t) \quad = \quad \Phi_0(r) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{k,1}(r) \cos(2k\pi t) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{k,2}(r) \sin(2k\pi t).$$

由于 Φ 是光滑的 在 C上，因此傅里叶展开在 C^∞ 意义下收敛。根据定义 ，

$$\Delta_{\mathrm{KE}}^{\mathrm{Rm}}\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \tanh r \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{\ell^2 \cosh^2 r} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}.$$

因此，对于任意的 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $j \in \{1, 2\}$，函数$\Phi_{k,\ j}(r)$满足常微分方程 :

$$\Phi''_{k,j}(r) + \tanh r \cdot \Phi'_{k,j}(r) = \left(\frac{4\pi^2 k^2}{\ell^2 \cosh^2 r} - \epsilon\right) \cdot \Phi_{k,j}(r).$$

直接计算可知，函数 $\Phi_k(r) \cdot \sqrt{}$双曲余弦 r 满足

$$\frac{\frac{d^2}{dr^2}\left(\Phi_{k,j}(r)\sqrt{\cosh r}\right)}{\Phi_{k,j}(r)\sqrt{\cosh r}} = \left(\frac{1}{4} - \epsilon + \frac{1}{4\cosh^2 r} + \frac{4\pi^2 k^2}{\ell^2 \cosh^2 r}\right).$$

对每个 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $m \in \{1, 2\}$，令 $u_{k,m}$ 表示以下初值问题的唯一解:

$$u''_{k,m}(t) = \left(\frac{1}{4} - \epsilon + \frac{1}{4\cosh^2 t} + \frac{4k^2\pi^2}{\ell^2 \cosh^2 t}\right) \cdot u_{k,m}(t)$$

初始条件为

$$\begin{cases} u_{k,1}(0) = 1, \ u'_{k,1}(0) = 0; \\ u_{k,2}(0) = 0, \ u'_{k,2}(0) = 1. \end{cases}$$

那么，对于任意 $k \in \mathbb{Z}$和 $j, m \in \{1, 2\}$，存在一个常数 $a_{k,j,m}$ 使得

$$\Phi_{k,j}(r)\sqrt{\cosh r} = a_{k,j,1} u_{k,1}(r) + a_{k,j,2} u_{k,2}(r).$$

因此我们得到如下 L^2-正交分解:

$$\begin{aligned} \Phi(r,t)\sqrt{\cosh r} \quad = \quad & \sum_{m=1}^{2} a_{0,1,m} u_{0,m}(r) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{2} a_{k,1,m} u_{k,m}(r) \cos(2k\pi t) \\ & + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{2} a_{k,2,m} u_{k,m}(r) \sin(2k\pi t). \end{aligned}$$

由于 $\int_C |\Phi|^2 \mu_{\mathrm{KE}} = 1$，我们有

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-w}^{w} \left(\int_0^1 |\Phi(r,t)|^2 \, \ell \cosh r dt \right) dr \\ &= \ell \sum_{m=1}^{2} |a_{0,1,m}|^2 \int_{-w}^{w} |u_{0,m}(r)|^2 dr + 2\ell \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2} |a_{k,1,m}|^2 \int_{-w}^{w} |u_{k,m}(r)|^2 dr \\ &\quad + 2\ell \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2} |a_{k,2,m}|^2 \int_{-w}^{w} |u_{k,m}(r)|^2 dr. \end{aligned}$$

由柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned} |\Phi(r,t)|^2 \cosh(r) &= \left| \sum_{m=1}^{2} a_{0,1,m} u_{0,m}(r) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2} a_{k,1,m} u_{k,m}(r) \cos(2k\pi t) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2} a_{k,2,m} u_{k,m}(r) \sin(2k\pi t) \right|^2 \\ &\leq \sum_{m=1}^{2} \frac{|u_{0,m}(r)|^2}{\ell \int_{-w}^{w} |u_{0,m}(\varsigma)|^2 d\varsigma} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2} \frac{2|u_{k,m}(r)|^2 \cos^2(2k\pi t)}{\ell \int_{-w}^{w} |u_{k,m}(\varsigma)|^2 d\varsigma} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2} \frac{2|u_{k,m}(r)|^2 \sin^2(2k\pi t)}{\ell \int_{-w}^{w} |u_{k,m}(\varsigma)|^2 d\varsigma} \\ &= \sum_{m=1}^{2} \frac{|u_{0,m}(r)|^2}{\ell \int_{-w}^{w} |u_{0,m}(\varsigma)|^2 d\varsigma} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2} \frac{2|u_{k,m}(r)|^2}{\ell \int_{-w}^{w} |u_{k,m}(\varsigma)|^2 d\varsigma}. \end{aligned}$$

现在我们利用引理8.14来估计上述不等式中的各项。

由引理 8.14，有双曲余弦 $\left(\frac{\sqrt{1-4\epsilon}}{2} r\right) \leq u_{0,\,1}(r) \leq$ 双曲余弦 r，因此

$$\begin{aligned} \frac{|u_{0,1}(r)|^2}{\ell \cosh r \int_{-w}^{w} |u_{0,1}(\varsigma)|^2 d\varsigma} &\leq \frac{1}{\ell \int_{-w}^{w} \cosh^2 \left(\frac{\sqrt{1-4\epsilon}}{2} \varsigma \right) d\varsigma} \\ &= \frac{2}{\ell \int_{-w}^{w} \left(\cosh \left(\sqrt{1-4\epsilon} \cdot \varsigma \right) + 1 \right) d\varsigma} \\ &\leq \frac{\sqrt{1-4\epsilon}}{\ell \left(\sinh \left(\sqrt{1-4\epsilon} \cdot w \right) + \sqrt{1-4\epsilon} \cdot w \right)}. \end{aligned}$$

由于

$$\sqrt{1-4\epsilon} \cdot w \geq \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \operatorname{arcsinh} \left\{ \frac{1}{\sinh(\frac{\operatorname{arcsinh} 1}{8})} \right\} \approx 2.246232 \cdots > 2,$$

我们得出 $2\sqrt{1-4\epsilon} \cdot w > e^{-\sqrt{1-4\epsilon} \cdot w}$，并且

$$2\sqrt{1-4\epsilon} \cdot w e^{-\sqrt{1-4\epsilon} \cdot w} + e^{-2\sqrt{1-4\epsilon} \cdot w} \leq 0.486 \cdots < \frac{1}{2}.$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{|u_{0,1}(r)|^2}{\ell \cosh r \int_{-w}^{w} |u_{0,1}(\varsigma)|^2 d\varsigma} &\leq \frac{\sqrt{1-4\epsilon}}{\ell \left(\sinh \left(\sqrt{1-4\epsilon} \cdot w \right) + \sqrt{1-4\epsilon} \cdot w \right)} \\ &< 2\ell^{-1} e^{-\sqrt{1-4\epsilon} \cdot w}. \end{aligned}$$

类似地，由引理 8.14，对于任意 $r \in (0, w]$，有

$$\frac{2}{\sqrt{1-4\epsilon}} \sinh\left(\frac{\sqrt{1-4\epsilon}}{2} r\right) \leq u_{0,2}(r) \leq 2\left(\arctan e^r - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\cosh(r)}.$$

因此

$$\begin{aligned}
\frac{|u_{0,2}(r)|^2}{\ell \cosh(r) \int_{-w}^{w} |u_{0,2}(t)|^2 dt} &\leq \frac{\left(\arctan e^{|r|} - \frac{\pi}{4}\right)^2}{\ell \int_{-w}^{w} \frac{1}{1-4\epsilon} \sinh^2\left(\frac{\sqrt{1-4\epsilon}}{2}\varsigma\right) d\varsigma} \\
&< \frac{\pi^2(1-4\epsilon)}{16\ell \int_{-w}^{w} \sinh^2\left(\frac{\sqrt{1-4\epsilon}}{2}\varsigma\right) d\varsigma} \\
&= \frac{\pi^2(1-4\epsilon)^{\frac{3}{2}}}{16\ell\left(\sinh\left(\sqrt{1-4\epsilon}\cdot w\right) - \sqrt{1-4\epsilon}\cdot w\right)} \\
&\leq \frac{\pi^2}{4\ell} \cdot e^{-\sqrt{1-4\epsilon}\cdot w}.
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{2} \frac{|u_{0,m}(r)|^2}{\ell \int_{-w}^{w} |u_{0,m}(\varsigma)|^2 d\varsigma} &\leq \left(2 + \frac{\pi^2}{4}\right) \cdot \ell^{-1} e^{-\sqrt{1-4\epsilon}\cdot w} \\
&= \left(2 + \frac{\pi^2}{4}\right) \cdot \ell^{-1} \cdot \left(\tanh\left(\frac{\ell}{4}\right)\right)^{\sqrt{1-4\epsilon}} \\
&< \left(2 + \frac{\pi^2}{4}\right) \cdot 2^{-2\sqrt{\frac{3}{5}}} \cdot \ell^{-1+\sqrt{1-4\epsilon}} \\
&< 2\ell^{-4\epsilon}.
\end{aligned}$$

若 $k \geq 1$，引理 8.14 蕴含 $u_{k,j}(r)$ 双曲余弦($e^{\frac{2k\pi r}{\text{双曲余弦 } w}}$) 在 $[0, w]$ 上递增。由此可得

$$\begin{aligned}
\int_{-w}^{w} |u_{k,m}(\varsigma)|^2 d\varsigma &\geq 2\int_{w-\log 2}^{w} |u_{k,m}(\varsigma)|^2 d\varsigma \\
&> 2\int_{w-\log 2}^{w} \frac{|u_{k,m}(w-\log 2)|^2 \cosh^2(3k\varsigma)}{\cosh^2(3k(w-\log 2))} d\varsigma \\
&\geq 2|u_{k,m}(w-\log 2)|^2 \int_{w-\log 2}^{w} \frac{e^{6k(\varsigma - w + \log 2)}}{(1+e^{-6(w-\log 2)})^2} d\varsigma \\
&\geq \frac{2|u_{k,m}(w-\log 2)|^2}{(1+e^{-6})^2} \cdot \frac{1}{6k} \cdot \left(2^{6k} - 1\right) \\
&\geq \frac{(1-2^{-6})^3}{3k} \cdot 2^{6k} \cdot |u_{k,m}(w-\log 2)|^2.
\end{aligned}$$

因此，对任意 $r \in [-w + \text{对数}\ 2, w - \text{对数}\ 2]$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{2} \frac{2|u_{k,m}(r)|^2}{\ell \cosh r \int_{-w}^{w} |u_{k,m}(\varsigma)|^2 d\varsigma} &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{2} \frac{2|u_{k,m}(w-\log 2)|^2}{\ell \cosh(w-\log 2)} \cdot \frac{1}{\int_{-w}^{w} |u_{k,m}(\varsigma)|^2 d\varsigma} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{2} \frac{2}{2^{-1}\ell \cosh w} \cdot \frac{3k \cdot 2^{-6k}}{(1-2^{-6})^3} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{2} \frac{2\tanh \frac{\ell}{2}}{\ell} \cdot \frac{6k \cdot 2^{-6k}}{(1-2^{-6})^3} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} 24k \cdot 2^{-6k} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{(1-\frac{1}{64})^2} < \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

结合上述估计，我们得出

$$\begin{aligned}
|\Phi(r,t)|^2 &\leq \sum_{m=1}^{2} \frac{|u_{0,m}(r)|^2 (\cosh r)^{-1}}{\ell \int_{-w}^{w} |u_{0,m}(\varsigma)|^2 d\varsigma} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{2} \frac{2|u_{k,m}(r)|^2 (\cosh r)^{-1}}{\ell \int_{-w}^{w} |u_{k,m}(\varsigma)|^2 d\varsigma} \\
&< 2\ell^{-4\epsilon} + 1.
\end{aligned}$$

证明完毕。 □

结合 厚部和领圈上的估计，我们得到以下全局估计 e.

命题 8.16。 设 $\gamma \subset (C, \mu_{\mathrm{KE}})$ 为一条最短简单闭测地线，并设 Φ 是 $\mathscr{C}(\gamma)$ 上的一个 $\mathbb{R}$-值函数，满足 $\Delta_{\mathrm{KE}}\Phi = -\epsilon\Phi$ 其中某个 $\epsilon \in (0, \frac{1}{20\pi})$。则有

$$\sup_{C} |\Phi|^2 \leq \max\left\{2\ell^{-8\pi\epsilon} + 1, \frac{16}{5}\right\} \cdot \int_{C} |\Phi|^2 d\mu_{\mathrm{KE}},$$

其中， $\ell = \ell(\gamma)$ 表示 γ的长度。

证明。 设 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_m$ 为长度 $\ell(\gamma_j) \leq$ 反双曲正弦1 4 的简单闭测地线，并设

$$(\mathscr{C}(\gamma_j), ds^2) \cong \left([-w_j, w_j] \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}), dr_j^2 + \ell(\gamma_j)^2 \cosh^2 r_j dt_j^2\right)$$

为 γ_j 的领圈，其中 $w_j =$ 反双曲正弦$\{1/$双曲正弦$(\ell(\gamma_j)/2)\}$。

设定 $U = \bigcup_{j=1}^{m} \{x \in \mathcal{C}(\gamma_j) : |r_j(x)| \leq w - \text{对数}\ 2\}$。由引理 8.15，可得

$$\sup_{U} |\Phi|^2 \leq (2\ell^{-8\pi\epsilon} + 1) \int_{C} |\Phi|^2 d\mu_{\mathrm{KE}}.$$

注意到 $\Delta_{\mathrm{KE}}^{\mathrm{Rm}} = 2\pi\Delta_{\mathrm{KE}}$。

现在考虑 Φ 在 $C \setminus U$上的上确界范数。任取 $x \in C \setminus U$，取覆盖映射 $\rho_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \to C$，它从庞加莱圆盘出发，并满足 $\rho_{\mathbb{D}}(0) = x$。由引理7.8，可得

$$\#\left(B_{\operatorname{arcsinh} 1}(0) \cap \rho_{\mathbb{D}}^{-1}(x')\right) \leq \max\left\{\frac{2\operatorname{arcsinh} 1}{\frac{1}{4}\operatorname{arcsinh} 1}, 2\right\} = 8, \quad \forall x' \in C,$$

其中 $B_r(y)$ 是 $(\mathbb{D}, \mu_{\mathbb{D}})$ 中半径为 r 、中心为 y的度量球。由引理8.12 可得 s

$$\begin{aligned}\sup_{C\setminus U}|\Phi|^2 &\leq 8\cdot\frac{1}{2\pi(\sqrt{2}-1)}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{10}\log\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2}\cdot\int_C|\Phi|^2d\mu_{\mathrm{KE}}\\ &= \frac{4}{\pi(\sqrt{2}-1)}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{10}\log\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2}\cdot\int_C|\Phi|^2d\mu_{\mathrm{KE}}\\ &\leq \frac{16}{5}\int_C|\Phi|^2d\mu_{\mathrm{KE}}.\end{aligned}$$

因此

$$\sup_C|\Phi|^2\leq\max\left\{2\ell^{-8\pi\epsilon}+1,\frac{16}{5}\right\}\int_C|\Phi|^2\mu_{\mathrm{KE}},$$

这就证明了该命题。 □

9 Zhang 的 φ-不变量下界

本节将推导曲线上 Zhang 的 φ-不变量的一个显式估计，其中曲线定义在 $\mathbb{C}$ 上。设 C 是一条亏格为 $g\geq 2$ 、定义在 $\mathbb{C}$ 上的曲线，并设 ω_C 表示其典范丛。设 μ_{KE} 是 C 上唯一的常曲率为 -1 的 K¨ahler 度量。设 $\{\alpha_j\}_{j=1}^g$ 是 $\Gamma(C,\ \omega_C)$ 的一个 L^2-正交基。阿拉克洛夫 K¨ahler 度量定义为

$$\mu_{\mathrm{Ar}}=\frac{i}{2g}\sum_{k=1}^g\alpha_k\wedge\bar{\alpha}_k,$$

且与基的选取无关。 φ-不变量定义为

$$\varphi(C)=-\int_{C^2}G_{\mathrm{Ar}}\,c_1(\Delta,G_{\mathrm{Ar}})^{\wedge 2},$$

其中 $G_{\mathrm{Ar}}:\ C^2\setminus\Delta\longrightarrow\mathbb{R}$ 表示阿拉克洛夫 Green 函数， $\Delta\subset C^2$ 是对角线。

9.1 不变量的等价表述

在开始估计 Zhang 的 φ-不变量之前，我们先将其改写为一种更适合分析的形式。首先回顾与阿拉克洛夫 K¨ahler 度量 μ_{Ar}相关的拉普拉斯算子 Δ_{Ar} 的谱分解。将重数计入后， Δ_{Ar}的特征值构成一个递增序列

$$0=\lambda_{\mathrm{Ar},0}<\lambda_{\mathrm{Ar},1}\leq\lambda_{\mathrm{Ar},2}\leq\cdots.$$

与这些特征值相对应，存在 $L^2(C,\ \mu_{\mathrm{Ar}};\ \mathbb{R})$ 的一个 L^2-正交规范基 $\{\phi_{\mathrm{Ar},l}\}_{l=0}^{\infty}$ ，其中 $L^2(C,\ \mu_{\mathrm{Ar}};\ \mathbb{R})$ 是 $\mathscr{A}^0_{C,\ \mathbb{R}}(C)$ 的L^2-完备化，使得

$$\Delta_{\mathrm{Ar}}\phi_{\mathrm{Ar},l}+\lambda_{\mathrm{Ar},l}\phi_{\mathrm{Ar},l}=0.$$

以下公式归功于 Zhang [Zha10]。

命题 9.1 ([Zha10，命题 2.5。3])。 使用上述记号， φ-不变量为

$$\varphi(C)=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=1}^g\sum_{k=1}^g\frac{1}{2\lambda_{\mathrm{Ar},l}}\left|\int_C\phi_{\mathrm{Ar},l}\cdot\alpha_j\wedge\bar{\alpha}_k\right|^2$$

证明。这可由 L^2-展开式和 G_{Ar} 的恒等式推出

$$c_1(\Delta, G_{\mathrm{Ar}}) = dd^c G_{\mathrm{Ar}} + \delta_\Delta = p_1^*\mu_{\mathrm{Ar}} + p_2^*\mu_{\mathrm{Ar}} - \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{g}(p_1^*\alpha_j \wedge p_2^*\bar{\alpha}_j + p_2^*\alpha_j \wedge p_1^*\bar{\alpha}_j),$$

其中 p_k 表示投影 $C \times C \to C$ 到第 k 个分支。注意 $\frac{i}{2}\int_C \alpha_j \wedge \bar{\alpha}_k = \delta_{jk}$。更多细节请参见 [Zha10，命题 2.5。3]。 □

现在，我们将上述表达式重新表述，为估计 φ-不变量做准备

根据椭圆微分方程的经典理论，对于每一对指标 j，k，都存在唯一的函数 $\mathfrak{u}_{j,k} \in \mathscr{A}^0_{C,\mathbb{C}}(C)$ 满足 $\int_C \mathfrak{u}_{j,k}\mu_{\mathrm{Ar}} = 0$ 并且

$$dd^c\mathfrak{u}_{j,k} = i\alpha_j \wedge \bar{\alpha}_k - \left(\int_C i\alpha_j \wedge \bar{\alpha}_k\right)\mu_{\mathrm{Ar}}.$$

此外，当 $j = k$，$\mathfrak{u}_{j,k}$ 取值于 $\mathbb{R}$ 时，即 $\mathfrak{u}_{j,j} \in \mathscr{A}^0_{C,\mathbb{R}}(C)$。这也可由 $\partial\bar{\partial}$-引理 [Tia00，引理 2。1]。

这些函数 $\mathfrak{u}_{j,k}$ 为 φ-不变量提供了另一种表达方式。

命题 9.2。设 C、μ_{Ar} 和 $\mathfrak{u}_{j,k}$ 如上所述。那么，C 的 φ-不变量满足

$$\varphi(C) = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{g}\int_C d\mathfrak{u}_{j,k} \wedge d^c\bar{\mathfrak{u}}_{j,k} = \frac{1}{2\pi}\sum_{j,k=1}^{g}\|d\mathfrak{u}_{j,k}\|^2_{L^2;C},$$

其中 $d^c = \frac{1}{2\pi i}(\partial - \bar{\partial})$，且 $\|\cdot\|_{L^2;C}$ 是定义在空间 $\mathscr{A}^1_{C,\mathbb{C}}(C)$ 上的 L^2-范数，该空间由 C 上系数取值于 $\mathbb{C}$ 的光滑1-微分形式组成。

证明。设 $\{\lambda_{\mathrm{Ar},l}\}_{j=0}^{\infty}$、$\{\phi_{\mathrm{Ar},l}\}_{j=0}^{\infty}$ 为 Δ_{Ar} 关于 μ_{Ar} 的特征值与特征函数。则对任意 j,k，我们可以展开

$$\mathfrak{u}_{j,k} = \sum_{l=0}^{\infty} a_{j,k,l}\phi_{\mathrm{Ar},l},$$

其中 $a_{j,k,l} = \int_C \mathfrak{u}_{j,k}\phi_{\mathrm{Ar},l}\mu_{\mathrm{Ar}} \in \mathbb{C}$。由于 $\int_C \mathfrak{u}_{j,k}\mu_{\mathrm{Ar}} = 0$，我们有 $a_{j,k,0} = 0$。由 $\mathfrak{u}_{j,k}$ 的定义，对每个 $l \geq 1$ 我们得到

$$\int_C \phi_{\mathrm{Ar},l}\alpha_j \wedge \bar{\alpha}_k = \int_C \phi_{\mathrm{Ar},l}dd^c\mathfrak{u}_{j,k} = \int_C \mathfrak{u}_{j,k}dd^c\phi_{\mathrm{Ar},l} = -\lambda_{\mathrm{Ar},l}a_{j,k,l}.$$

由于对所有 $l \geq 1$ 都有 $\int_C \phi_{\mathrm{Ar},l}\mu_{\mathrm{Ar}} = 0$，我们得到

$$\varphi(C) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{g}\sum_{k=1}^{g}\frac{1}{2\lambda_{\mathrm{Ar},l}}\left|\int_C \phi_{\mathrm{Ar},l}\alpha_j \wedge \bar{\alpha}_k\right|^2 = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{g}\sum_{k=1}^{g}\frac{\lambda_{\mathrm{Ar},l}}{2}|a_{j,k,l}|^2.$$

另一方面，

$$\sum_{l=1}^{\infty}\lambda_{\mathrm{Ar},l}|a_{j,k,l}|^2 = -\int_C \mathfrak{u}_{j,k}dd^c\bar{\mathfrak{u}}_{j,k} = \int_C d\mathfrak{u}_{j,k} \wedge d^c\bar{\mathfrak{u}}_{j,k}.$$

因此

$$\varphi(C) = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{g}\int_C d\mathfrak{u}_{j,k} \wedge d^c\bar{\mathfrak{u}}_{j,k} = \frac{1}{2\pi}\sum_{j,k=1}^{g}\|d\mathfrak{u}_{j,k}\|^2_{L^2;C},$$

其中最后一个等式由 $\|d\mathfrak{u}_{j,k}\|^2_{L^2;C} = \frac{1}{2}\int_C d\mathfrak{u}_{j,k} \wedge \star d\mathfrak{u}_{j,k}$ 以及

$$d^c\bar{\mathfrak{u}}_{j,k} = \frac{1}{2\pi i}(\partial\bar{\mathfrak{u}}_{j,k} - \bar{\partial}\bar{\mathfrak{u}}_{j,k}) = \frac{1}{2\pi}\star(\partial\mathfrak{u}_{j,k} + \bar{\partial}\mathfrak{u}_{j,k}) = \frac{1}{2\pi}\star d\mathfrak{u}_{j,k}.$$

证明至此完成。 □

9.2 关于厚部

在本小节中，我们推导出模空间厚部上定义在 $\mathbb{C}$ 上的曲线的 Zhang φ-不变量的显式估计。根据上述准备，我们通过考察 C 上的全纯 1-形式在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的拉回，来估计 φ-不变量。为此，我们需要以下关于小圆盘的辅助估计。

引理 9.3。 设 $\mathbf{f}$ 是定义在 $\mathbb{D}_{\sqrt{2}-1}(0)$ 上的全纯函数，且满足 $|\mathbf{f}(0)| = 1$，并设 $\mathbf{a} \in [0, 2\sqrt{2}-2]$ 为非负常数。假设 $\mathbf{u}$ 是定义在 $\mathbb{D}_{\sqrt{2}-1}(0)$ 上的光滑 $\mathbb{R}$ 值函数，满足

$$dd^c\mathbf{u} \geq \left(|\mathbf{f}(z)|^2 - \frac{\mathbf{a}}{(1-|z|^2)^2}\right)\mu_{\mathrm{Euc}},$$

其中 $d^c = \frac{1}{2\pi i}(\partial - \bar{\partial})$，且 $\mu_{\mathrm{Euc}} = \frac{idz\wedge d\bar{z}}{2}$ 是标准欧氏度量。于是

$$\int_{\mathbb{D}_{\sqrt{2}-1}(0)} d\mathbf{u}\wedge\star d\mathbf{u} \quad \geq \quad 2\pi^3\int_0^{\sqrt{2}-1} t^3\left(1-\frac{\mathbf{a}}{1-t^2}\right)^2 dt = 2\pi^3\mathbf{I}_1 - 4\pi^3\mathbf{a}\mathbf{I}_2 + 2\pi^3\mathbf{a}^2\mathbf{I}_3,$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_1 &= \int_0^{\sqrt{2}-1} t^3 dt = \frac{(\sqrt{2}-1)^4}{4} \approx 0.0073593\cdots, \\
\mathbf{I}_2 &= \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{t^3}{1-t^2} dt = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}-3+\log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)\right) \approx 0.0083267\cdots, \\
\mathbf{I}_3 &= \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{t^3}{(1-t^2)^2} dt = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}-1-2\log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)\right) \approx 0.0094402\cdots.
\end{aligned}$$

证明。 设 $\mathbf{u}_0(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{u}(ze^{i\theta_1})d\theta_1$ 表示 $\mathbf{u}$ 在原点周围的圆周平均。于是 $\mathbf{u}_0$ 是定义在 $\mathbb{D}_{\sqrt{2}-1}(0)$上的光滑、$\mathbb{R}$值、径向对称函数。由于 μ_{Euc} 在旋转$z \mapsto ze^{i\theta_1}$, $\forall \theta_1 \in \mathbb{R}$下保持不变，我们得到

$$dd^c\mathbf{u}_0 \geq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\mathbf{f}(ze^{i\theta_1})|^2 d\theta_1 - \frac{\mathbf{a}}{(1-|z|^2)^2}\right)\mu_{\mathrm{Euc}}.$$

由柯西-施瓦茨不等式和$\mathbf{f}$的全纯性,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\mathbf{f}(ze^{i\theta_1})|^2 d\theta_1 \geq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{f}(ze^{i\theta_1})d\theta_1\right)^2 = \mathbf{f}(0) = 1.$$

因此

$$dd^c\mathbf{u}_0 \geq \left(1 - \frac{\mathbf{a}}{(1-|z|^2)^2}\right)\mu_{\mathrm{Euc}}.$$

现在转换为极坐标 $z=\varsigma e^{i\theta}$，其中 $\varsigma=|z|$。那么 $\star d\varsigma=\varsigma d\theta$，并且 $\star d\theta=-\frac{1}{\varsigma}d\varsigma$。因此，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}_{\sqrt{2}-1}(0)} d\mathbf{u}\wedge\star d\mathbf{u} &= \int_{\mathbb{D}_{\sqrt{2}-1}(0)}\left(\varsigma\left|\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\varsigma}\right|^2+\frac{1}{\varsigma}\left|\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\theta}\right|^2\right)d\varsigma\wedge d\theta\\ &\geq \int_0^{\sqrt{2}-1}\left(\varsigma\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\varsigma}(\varsigma e^{i\theta})\right|^2 d\theta\right)d\varsigma\\ &\geq \int_0^{\sqrt{2}-1}\left(\frac{\varsigma}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\varsigma}(\varsigma e^{i\theta})d\theta\right|^2\right)d\varsigma\\ &= \int_{\mathbb{D}_{\sqrt{2}-1}(0)}\left(\varsigma\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\varsigma}(\varsigma e^{i\theta+i\theta_1})d\theta_1\right|^2\right)d\varsigma\wedge d\theta\\ &= \int_{\mathbb{D}_{\sqrt{2}-1}(0)}\varsigma\left|\frac{\partial\mathbf{u}_0}{\partial\varsigma}\right|^2 d\varsigma\wedge d\theta=\int_{\mathbb{D}_{\sqrt{2}-1}(0)} d\mathbf{u}_0\wedge\star d\mathbf{u}_0.\end{aligned}$$

由于$\mathbf{u}_0$ 是径向的，我们有 $\lim\limits_{\varsigma\to 0^+}\partial_{\mathbf{u}_{\partial\varsigma^0}}(\varsigma)=0$。直接计算可得

$$dd^c\mathbf{u}_0(\varsigma e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi\varsigma}\frac{\partial}{\partial\varsigma}\left(\varsigma\frac{\partial\mathbf{u}_0}{\partial\varsigma}\right)(\varsigma e^{i\theta})\mu_{\mathrm{Euc}},\ \ \forall\varsigma\in(0,\sqrt{2}-1),\ \theta\in[0,2\pi).$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial\varsigma}\left(\varsigma\frac{\partial\mathbf{u}_0}{\partial\varsigma}\right)(\varsigma e^{i\theta})\geq 2\pi\left(\varsigma-\frac{\mathbf{a}\varsigma}{(1-\varsigma^2)^2}\right),\ \ \forall\varsigma\in(0,\sqrt{2}-1),\ \theta\in[0,2\pi).$$

对 ς 积分可得

$$\varsigma\frac{\partial\mathbf{u}_0}{\partial\varsigma}(\varsigma e^{i\theta})\geq 2\pi\int_0^{\varsigma} t-\frac{\mathbf{a}t}{(1-t^2)^2}dt=\pi\varsigma^2\left(1-\frac{\mathbf{a}}{1-\varsigma^2}\right)\geq\pi\varsigma^2\left(1-\frac{\mathbf{a}}{2(\sqrt{2}-1)}\right)\geq 0,$$

从而

$$\left|\frac{\partial\mathbf{u}_0}{\partial\varsigma}(\varsigma e^{i\theta})\right|\geq\pi\varsigma\left|1-\frac{\mathbf{a}}{1-\varsigma^2}\right|.$$

代回积分式，可得

$$\int_{\mathbb{D}_{\sqrt{2}-1}(0)} d\mathbf{u}_0\wedge\star d\mathbf{u}_0 = \int_{\mathbb{D}_{\sqrt{2}-1}(0)}\varsigma\left|\frac{\partial\mathbf{u}_0}{\partial\varsigma}\right|^2 d\varsigma\wedge d\theta\geq 2\pi^3\int_0^{\sqrt{2}-1}\varsigma^3\left(1-\frac{\mathbf{a}}{1-\varsigma^2}\right)^2 d\varsigma.$$

这就证明了该引理。 □

我们现在着手建立 φ-不变量的估计。在下面的引理中，根据伯格曼核的 L^∞ 范数是大还是小，考虑两种情形。

引理 9.4. 设 C 是亏格为 $g\geq 2$的紧黎曼曲面，配备常曲率为 -1、总体积为 $4\pi(g-1)$的双曲度量 μ_{KE}。用$\mathrm{sys}(C)$表示 (C,μ_{KE}) 的最短闭测地线长度，用 $\mathbf{b}_0$ 表示与 $(\Gamma(C,\omega_C)\ \mu_{\mathrm{KE}})$ 相关联的伯格曼核函数。则下列估计成立：

(1) 对任意 $g\geq 2$,

$$\left(1+\frac{2\,\mathrm{arcsinh}\,1}{\mathrm{sys}(C)}\right)\varphi(C) \geq \frac{32\pi^2 g\|\mathbf{b}_0\|_{L^\infty}^2}{g-1}\left(\mathbf{I}_1-\frac{2}{g}\mathbf{I}_2+\frac{1}{g^2}\mathbf{I}_3\right),$$

其中$\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ 和$\mathbf{I}_3$ 是引理9.3中定义的常数。

(2) 对于任意 $g \geq 3$ 和 $k \in \{1, \cdots, g-1\}$，若 $\|\mathbf{b}_0\|_{L^\infty} \leq (\sqrt{2}-1)\frac{k(g-k)}{g(g-1)}2\pi$，则

$$\left(1 + \frac{2\operatorname{arcsinh} 1}{\operatorname{sys}(C)}\right)\varphi(C) \geq \frac{k(k+1)(2k+1)}{3(g-1)^2}\mathbf{I}_1.$$

证明。令 $\mathbf{X}_0 = \Gamma(C, \omega_C) \cong \mathbb{C}^g$。我们通过对 j 进行归纳，构造一列数据 $(x_j, \alpha_j, \mathbf{X}j)$，其中 $j = 1, \ldots\ldots, g$，满足：

- x_j 是 $(\mathbf{X}j-1, \mu_{\mathrm{KE}})$ 的峰值点。
- $\alpha_j \in \mathbf{X}j-1$ 是 $\mathbf{X}j-1$ 中在 x_j 处的峰截面。
- $\mathbf{X}j$ 是 $\mathbf{X}j-1$ 中相对于 $\mathbb{C}\alpha_j$ 的 L^2-正交补。

对于每个 j，令 $\mathfrak{u}_j \in \mathscr{A}^0_{C,\,\mathbb{R}}(C)$ 为方程的唯一解

$$dd^c\mathfrak{u}_j = i\alpha_j \wedge \bar{\alpha}_j - 2\mu_{\mathrm{Ar}}, \quad \int_C \mathfrak{u}_j\mu_{\mathrm{Ar}} = 0.$$

接下来，我们将这些数据提升到单位圆盘 $\mathbb{D}$，以获得显式估计。令 $\rho_{\mathbb{D},j}: \mathbb{D} \to C$ 为一个万有覆盖映射，且 $\rho_{\mathbb{D},j}(0) = x_j$。置 $\tilde{\alpha}_j = \rho^*_{\mathbb{D},j}\alpha_j$ 以及 $\tilde{\mathfrak{u}}_j = \mathfrak{u}_j \circ \rho_{\mathbb{D},j}$。于是存在定义在 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数 $\mathbf{f}j$，使得拉回 $\tilde{\alpha}_j = \rho^*_{\mathbb{D},j}\alpha_j = \mathbf{f}_j dz$。令 $\mathbf{b}j$ 表示与 $(\mathbf{X}j, \mu_{\mathrm{KE}})$ 相关的伯格曼核函数。由引理 7.21，我们有

$$dd^c\tilde{\mathfrak{u}}_j = 2|\mathbf{f}_j|^2\mu_{\mathrm{Euc}} - \frac{2}{g}(\mathbf{b}_0 \circ \rho_{\mathbb{D},j})\rho^*_{\mathbb{D},j}\mu_{\mathrm{KE}} \geq \left(2|\mathbf{f}_j|^2 - \frac{8\|\mathbf{b}_0\|_{L^\infty}}{g(1-|z|^2)^2}\right)\mu_{\mathrm{Euc}},$$

and $|\mathbf{f}j(0)|^2 = 4\mathbf{b}j-1(x_j) = 4\|\mathbf{b}_{j-1}\|_{L^\infty}$。为了估计 L^2-范数 $d\mathfrak{u}_j$，引理 7.8 给出 s

$$\begin{aligned}\int_C d\mathfrak{u}_j \wedge \star d\mathfrak{u}_j &\geq \int_{\rho_{\mathbb{D},j}(\mathbb{D}_{\sqrt{2}-1}(0))} d\mathfrak{u}_j \wedge \star d\mathfrak{u}_j \\ &\geq \frac{\operatorname{sys}(C)}{2\operatorname{arcsinh} 1 + \operatorname{sys}(C)} \int_{\mathbb{D}_{\sqrt{2}-1}(0)} d\tilde{\mathfrak{u}}_j \wedge \star d\tilde{\mathfrak{u}}_j.\end{aligned}$$

现在我们可以证明所声称的估计了。

我们先证明 **(1)**。对于 $j = 1$，有

$$dd^c\tilde{\mathfrak{u}}_1 \geq 8\|\mathbf{b}_0\|_{L^\infty}\left(\frac{|\mathbf{f}_1|^2}{4\|\mathbf{b}_0\|_{L^\infty}} - \frac{1}{g(1-|z|^2)^2}\right)\mu_{\mathrm{Euc}}, \quad \frac{|\mathbf{f}_1(0)|^2}{4\|\mathbf{b}_0\|_{L^\infty}} = 1.$$

于是引理 9.3 推出

$$\int_{\mathbb{D}_{\sqrt{2}-1}(0)} d\tilde{\mathfrak{u}}_1 \wedge \star d\tilde{\mathfrak{u}}_1 \geq 128\pi^2\|\mathbf{b}_0\|^2_{L^\infty}\int_0^{\sqrt{2}-1} t^3\left(1 - \frac{1}{g(1-t^2)}\right)^2 dt.$$

由于 $dd^c(\sum_{j=1}^g \mathfrak{u}_j) = 0$，我们有 $\sum_{j=1}^g \mathfrak{u}_j = 0$，并由命题 9.2：

$$\begin{aligned}\varphi(C) &\geq \frac{1}{4\pi}\int_C d\mathfrak{u}_1 \wedge \star d\mathfrak{u}_1 + \frac{1}{4\pi(g-1)}\int_C d\left(\sum_{j=2}^g \mathfrak{u}_j\right) \wedge \star d\left(\sum_{j=2}^g \mathfrak{u}_j\right) \\ &= \frac{g}{4\pi(g-1)}\int_C d\mathfrak{u}_1 \wedge \star d\mathfrak{u}_1 \\ &\geq \frac{32\pi^2 g\|\mathbf{b}_0\|^2_{L^\infty} \cdot \operatorname{sys}(C)}{(g-1)(2\operatorname{arcsinh} 1 + \operatorname{sys}(C))}\left(\mathbf{I}_1 - \frac{2}{g}\mathbf{I}_2 + \frac{1}{g^2}\mathbf{I}_3\right),\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ 和 $\mathbf{I}_3$ 是引理 9.3中定义的常数。这证明了（1）。

现在我们来考虑估计（2）。

由于 $\|\mathbf{b}_{j-1}\|_{L^\infty} \geq \text{维数}\ \mathbf{X}_{\mu_{\mathrm{KE}}} \overset{j-1}{C}() = \overset{g-j+1}{4\pi\ (g-1)}$，我们有

$$\begin{aligned} dd^c\tilde{\mathrm{u}}_j &\geq 8\|\mathbf{b}_{j-1}\|_{L^\infty}\left(\frac{|\mathbf{f}_j|^2}{4\|\mathbf{b}_{j-1}\|_{L^\infty}} - \frac{\|\mathbf{b}_0\|_{L^\infty}}{g\|\mathbf{b}_{j-1}\|_{L^\infty}(1-|z|^2)^2}\right)\mu_{\mathrm{Euc}} \\ &\geq \frac{2(g-j+1)}{\pi(g-1)}\left(\frac{|\mathbf{f}_j|^2}{4\|\mathbf{b}_{j-1}\|_{L^\infty}} - \frac{2(\sqrt{2}-1)(g-k)}{(g-j+1)(1-|z|^2)^2}\right)\mu_{\mathrm{Euc}} \end{aligned}$$

且 $\frac{|\ j\ 0\ |^2}{4\|\ \mathbf{f}()\mathbf{b}_{j-1}\|_{L^\infty}} = 1$。与（1）中相同的论证给出

$$\begin{aligned} \varphi(C) &\geq \frac{\mathrm{sys}(C)}{4\pi(2\operatorname{arcsinh}1+\mathrm{sys}(C))}\sum_{j=1}^{k+1}\int_{\mathbb{D}_{\sqrt{2}-1}(0)} d\tilde{\mathrm{u}}_j \wedge \star d\tilde{\mathrm{u}}_j \\ &\geq \frac{32\pi^2\cdot\mathrm{sys}(C)}{2\operatorname{arcsinh}1+\mathrm{sys}(C)}\sum_{j=0}^{k}\int_0^{\sqrt{2}-1} t^3\left(\frac{g-j}{4\pi(g-1)} - \frac{g-k}{4\pi(g-1)}\right)^2 dt \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)\mathrm{sys}(C)}{3(g-1)^2(2\operatorname{arcsinh}1+\mathrm{sys}(C))}\mathbf{I}_1, \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{I}_1$ 是引理 9.3中定义的常数。这就是我们要证明的结论。 □

对于任意 $g \geq 3$ 和 $k \in \{1, \cdots, g-1\}$，令 $\mathbf{I}_4(g,k)$ 表示

$$\mathbf{I}_4(g,k) = \min\left\{\frac{k(k+1)(2k+1)}{3(g-1)^2}\mathbf{I}_1, \frac{8(\sqrt{2}-1)^2(g-k)^2g^3}{(g-1)^3}\left(\mathbf{I}_1 - \frac{2}{g}\mathbf{I}_2 + \frac{1}{g^2}\mathbf{I}_3\right)\right\},$$

其中 $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ 和 $\mathbf{I}_3$ 是引理 9.3中定义的常数。由引理 9.4可推出以下估计。

推论 9.5。 设 C 是亏格为 $g \geq 2$的紧黎曼曲面，配备常曲率为 -1的双曲度量μ_{KE}。令 $\mathrm{sys}(C)$ 表示(C, μ_{KE})的最短闭测地线长度。那么，对于任意 $k \in \{1, \cdots, g-1\}$，有

$$\left(1 + \frac{2\operatorname{arcsinh}1}{\mathrm{sys}(C)}\right)\varphi(C) \geq \max\left\{\mathbf{I}_4(g,k), \frac{2\cdot g^3}{(g-1)^3}\left(\mathbf{I}_1 - \frac{2}{g}\mathbf{I}_2 + \frac{1}{g^2}\mathbf{I}_3\right)\right\}.$$

证明。 由于 $\|\mathbf{b}_0\|_{L^\infty} \geq \text{维}\ \mathbf{X}_{\mu_{\mathrm{KE}}} \overset{0}{C}() = \overset{g}{4\pi\ (g-1)}$，我们可以应用引理 9.3推得

$$\left(1 + \frac{2\operatorname{arcsinh}1}{\mathrm{sys}(C)}\right)\varphi(C) \geq \frac{2\cdot g^3}{(g-1)^3}\left(\mathbf{I}_1 - \frac{2}{g}\mathbf{I}_2 + \frac{1}{g^2}\mathbf{I}_3\right).$$

此外，若 $\|\mathbf{b}_0\|_{L^\infty} \geq (\sqrt{2}-1)g(g-k)\ 2\pi(g-1)$，则引理 9.3 进一步推出

$$\left(1 + \frac{2\operatorname{arcsinh}1}{\mathrm{sys}(C)}\right)\varphi(C) \geq \frac{8(\sqrt{2}-1)^2(g-k)^2g^3}{(g-1)^3}\left(\mathbf{I}_1 - \frac{2}{g}\mathbf{I}_2 + \frac{1}{g^2}\mathbf{I}_3\right).$$

另一方面，若 $\|\mathbf{b}_0\|_{L^\infty} \leq (\sqrt{2}-1)g(g-k)\ 2\pi(g-1)$，则引理 9.3 推出

$$\left(1 + \frac{2\operatorname{arcsinh}1}{\mathrm{sys}(C)}\right)\varphi(C) \geq \frac{k(k+1)(2k+1)}{3(g-1)^2}\mathbf{I}_1.$$

至此证明完成。 □

现在我们可以证明以下关于 φ-不变量的估计。

命题 9.6。 设 C 是一个亏格为 $g \geq 2$ 的紧黎曼曲面，配备常曲率为 -1 的双曲度量μ_{KE} 。记 $\mathrm{sys}(C)$ 为 (C, μ_{KE}) 的最短闭测地线长度。则 φ- 不变量满足

$$\left(1 + \frac{2\,\mathrm{arcsinh}\,1}{\mathrm{sys}(C)}\right)\varphi(C) \geq \mathbf{I}_5(g),$$

其中 $\mathbf{I}_5(g)$ 定义如下：

g	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	≥ 13
$\mathbf{I}_5(g)$	$\frac{11}{495}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{3}{175}$	$\frac{7}{400}$	$\frac{7}{312}$	$\frac{17}{625}$	$\frac{4}{125}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{47}$	$\frac{g}{400}$

证明。 根据引理 9.4，对于任意 $g \geq 2$,

$$\left(1 + \frac{2\,\mathrm{arcsinh}\,1}{\mathrm{sys}(C)}\right)\varphi(C) \quad \geq \quad \frac{2g^3}{(g-1)^3}\left(\mathbf{I}_1 - \frac{2}{g}\mathbf{I}_2 + \frac{1}{g^2}\mathbf{I}_3\right),$$

其中 $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2$ 和 $\mathbf{I}_3$ 是引理 9.3中定义的常数。对于 $g \in \{2,3,4,5\}$，右侧为：

g	表达式	数值
2	$16\left(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{I}_3\right)$	$0.02228\cdots > \frac{11}{495}$
3	$\frac{27}{4}\left(\mathbf{I}_1 - \frac{2}{3}\mathbf{I}_2 + \frac{1}{9}\mathbf{I}_3\right)$	$0.01928\cdots > \frac{1}{52}$
4	$\frac{128}{27}\left(\mathbf{I}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{I}_2 + \frac{1}{16}\mathbf{I}_3\right)$	$0.01794\cdots > \frac{1}{56}$
5	$\frac{125}{32}\left(\mathbf{I}_1 - \frac{2}{5}\mathbf{I}_2 + \frac{1}{25}\mathbf{I}_3\right)$	$0.01721\cdots > \frac{3}{175}$

根据引理 9.4，对于任意 $g \geq 2$ 和 $k \in \{1, \cdots, g-1\}$,

$$\left(1 + \frac{2\,\mathrm{arcsinh}\,1}{\mathrm{sys}(C)}\right)\varphi(C) \quad \geq \quad \mathbf{I}_4(g,k),$$

其中

$$\mathbf{I}_4(g,k) = \min\left\{\frac{k(k+1)(2k+1)}{3(g-1)^2}\mathbf{I}_1, \frac{8(\sqrt{2}-1)^2(g-k)^2g^3}{(g-1)^3}\left(\mathbf{I}_1 - \frac{2}{g}\mathbf{I}_2 + \frac{1}{g^2}\mathbf{I}_3\right)\right\}.$$

对于 $g = 6, \cdots, 12$，定义 $k(g)$ 如下：

g	6	7	8	9	10	11	12
$k(g)$	4	5	6	7	8	9	10

直接计算表明，对所有 $6 \leq g \leq 12$，均有 $\mathbf{I}_4(g, k(g)) > \mathbf{I}_5(g)$。

现在我们转向情形 $g \geq 13$。设 $k(g)$ 为其中唯一的整数

$$\left[g - \frac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{g}}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{3}, g - \frac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{g}}{2\sqrt{3}} + \frac{2}{3}\right).$$

定义 $\mathbf{p}(x) = 1 - \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{3x}} + \frac{2}{3x}$。由于 $\mathbf{p}'(x) = \frac{\sqrt{2}+1}{4x\sqrt{3x}} - \frac{2}{3x^2} > 0$ for $x \geq 4$，可知 $\mathbf{p}(g)$ 是 g 的递增函数。同样，对于 $g \geq 13$，量 $\frac{g^3}{(g-1)^3}\left(\mathbf{I}_1 - \frac{2}{g}\mathbf{I}_2 + \frac{1}{g^2}\mathbf{I}_3\right)$ 随 g 递减，而 $\frac{(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{g}}$ 随 g 递增。

因此

$$\begin{aligned}\frac{k(k+1)(2k+1)}{3g(g-1)^2}\mathbf{I}_1 &\geq \frac{2\mathbf{I}_1}{3}\cdot\mathbf{p}(13)\left(\mathbf{p}(13)-\frac{1}{26}\right)\left(\mathbf{p}(13)-\frac{1}{13}\right)\\ &\approx 0.0026945\cdots>\frac{1}{400},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{8(\sqrt{2}-1)^2(g-k)^2g^3}{g(g-1)^3}\left(\mathbf{I}_1-\frac{2}{g}\mathbf{I}_2+\frac{1}{g^2}\mathbf{I}_3\right) &\geq \frac{8(\sqrt{2}-1)^2(g-k)^2\mathbf{I}_1}{g}\\ &\geq 8(\sqrt{2}-1)^2\cdot\left(\frac{(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{3}}-\frac{2}{3\sqrt{13}}\right)^2\cdot\frac{(\sqrt{2}-1)^4}{4}\\ &\approx 0.0026482\cdots>\frac{1}{400}.\end{aligned}$$

因此，对于所有 $g\geq 13$，都有$\mathbf{I}_4(g,k(g))>\mathbf{I}_5(g)$，这就证明了该命题。 □

9.3 分离情形

如上所述，令 C 为 一条亏格为 $g\geq 2$ 、定义在 $\mathbb{C}$ 上的曲线，并令 ω_C 表示其典范丛。记 μ_{KE} 为 r唯一的 K¨ahler C 上的常曲率 -1 度量。

在本小节中，我们估计存在一组有限条短测地线将 C 分成两个分支时的 φ-不变量。如果一组有限条两两不交的简单闭测地线将 C 分成至少两个连通分支，就称其为分离多重曲线。若一个分离多重曲线的任何真子集都不是分离的，则称它是极小的。

作为庞加莱对偶的推论，一组 $\{\gamma_j\}_{j=1}^m$ 中两两不交的简单闭测地线是分离的，当且仅当 $\mathbb{C}$-张成的 $\sum_{j=1}^m\mathbb{C}[\gamma_j]\subset H_1(C;\mathbb{C})$ 的维数至多为 $m-1$。还要注意，对于任何具有光滑边界 ∂U 的开子集 $U\subset C$，链 ∂U 是其连通分支的非平凡线性组合，但它在 $H_1(C;\mathbb{C})$ 中的同调类为零。

我们从以下拓扑引理开始。

引理 9.7。 设 C 是一个亏格为 $g\geq 2$ 的紧黎曼曲面，且 γ_1、.....、γ_m 是 C 上两两不相交的简单闭测地线。假设 $\{\gamma_j\}_{j=1}^m$ 构成一个极小分离多重曲线。那么 $C\setminus\bigcup_{j=1}^m\gamma_j$ 恰好有两个连通分支，记为 C_1 和 C_2。它们的闭包 C_1、C_2 是具有公共边界$\bigcup_{j=1}^m\gamma_j$ 的紧曲面；若 g_k 表示 C_k 的亏格，则 $g_1+g_2+m-1=g$。

此外，存在一族光滑环路 $\{\mathbf{c}_j\}^{2(g_1+g_2)}{}_{j=1}$ 位于 C 上，使得：

(1) 对于 $1\leq j\leq 2g_1$，$\mathbf{c}_j\subset C_1$，且对于 $2g_1+1\leq j\leq 2(g_1+g_2)$，$\mathbf{c}_j\subset C_2$；

(2) $\{\mathbf{c}_j\}_{j=1}^{g_1}\cup\{\mathbf{c}_j\}_{j=2g_1+1}^{2g_1+g_2}$ 由两两不相交的环路组成；

(3) $\{[\mathbf{c}_j]\}^{2(g_1+g_2)}{}_{j=1}$ 在 $H_1(C;\mathbb{C})$ 中 $\mathbb{C}$-线性无关；

(4) $\bigcup_{j=1}^m\gamma_j$ 同时位于$C_1\setminus\bigcup_{j=1}^{2g_1}\mathbf{c}j$ 和 $C_2\setminus\bigcup^{2(g_1+g_2)}{}_{j=2\overline{g_1}+1}\mathbf{c}j$ 的同一个连通分支中。

证明。 这是一个纯粹的拓扑事实，可直接由带边界紧曲面的分类定理推出（参见 [AS60，第一章，41A]）。因此我们省略证明。 □

为了应用Tian的峰截面方法，我们需要以下引理，它可视为H¨ormander的 L^2 估计的一个类比，该估计出现在Tian的原始论文 [Tia90a]中。回想一下，调和1-形式恰好是此前定义的沿圈的峰截面。

引理*9.8*。设 C 是亏格为 $g \geq 2$的紧黎曼曲面，且 $\{\gamma_j\}_{j=1}^m$ 是 C 上的极小分离多重曲线，其总长度为 $\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j) \leq \frac{1}{4}$。对于任意分段光滑环$c: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to C$，记$T_c$ 为$\mathscr{Z}^1_C$上的线性泛函，$\mathbb{c}(C)$由$\beta \mapsto \int_c \beta$给出。令 $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$，并设$X \subset \mathscr{H}^1_{C,K}(C)$为满足$T_{\gamma_j}(\beta) = T_{\gamma_j}(\star\beta) = 0,\ j = 1, \cdots, m$的调和*1*-形式 β子空间。设 C_1 是 $C \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m \gamma_j\right)$的两个连通分支之一，并令 $\{c_j\}_{j=1}^{2(g_1+g_2)}$ 为引理 *9.7* 中构造的光滑环路系统。

那么存在一个线性算子

$$\Psi_{C_1,\mathrm{loc}} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathscr{Z}^1_{C;K}(C),$$

满足：

(1) $\Psi_{C_1,\mathrm{loc}}$ 的像满足

$$\Psi_{C_1,\mathrm{loc}}(\mathbf{X}) \subset \left(\bigcap_{j=2g_1+1}^{2(g_1+g_2)} \ker \mathbf{T}_{\mathbf{c}_j}\right) \bigcap \left(\bigcap_{j=1}^{m} \ker \mathbf{T}_{\gamma_j}\right).$$

(2) 与恒等映射的偏差满足

$$\left(\Psi_{C_1,\mathrm{loc}} - \mathrm{id}_{\mathbf{X}}\right)(\mathbf{X}) \subset \bigcap_{j=1}^{2g_1} \ker \mathbf{T}_{\mathbf{c}_j},$$

其中$\mathrm{id}_{\mathbf{X}}$ 是$\mathbf{X}$上的恒等映射。

(3) 对任意 $\beta \in \mathbf{X}$,

$$\|\Psi_{C_1,\mathrm{loc}}(\beta)\|^2_{L^2;C} \leq \|\beta\|^2_{L^2;C_1} + 200 e^{-\frac{\pi^2}{\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j)}} \|\beta\|^2_{L^2;C},$$

where $\|\beta\|^2_{L^2;C_1} = \frac{1}{2}\int_{C_1} \beta \wedge \star\beta$.

证明。不失一般性，我们假设 $K = \mathbb{R}$。我们将利用K¨ahler领圈$\mathscr{C}(\gamma_j)$来构造线性算子$\Psi_{C_1,\ \mathrm{loc}}$。由引理7.10，存在全纯坐标

$$z_j : \mathscr{C}(\gamma_j) \to \overline{\mathbb{D}_{e^{-\nu(\gamma_j)}}(0)} \setminus \mathbb{D}_{e^{\nu(\gamma_j) - \frac{2\pi^2}{\ell(\gamma_j)}}}(0)$$

使得 $z_j(\mathscr{C}(\gamma_j) \cap C_1) = \mathbb{D}_{e^{-\nu(\gamma_j)}}(0) \setminus \mathbb{D}_{e^{-\ell^{\pi^2}_{\gamma_j}()}}(0)$，其中 $\nu(\gamma_j) \in (0, 2\ell^{\pi}(\gamma_j))$满足

$$\nu(\gamma_j)\ell(\gamma_j) = 2\pi \arcsin\left(\tanh\frac{\ell(\gamma_j)}{2}\right).$$

$_{\pi^2}$固定 $x_j \in \gamma_j$，其中 $j = 1$、$\cdots$、m。则 $|z_j(x_j)| = e^{-\ell(\gamma_j)}$。设 β是 C上的调和 1-形式，满足 $T_{\gamma_j}(\beta) = T_{\gamma_j}(\star\beta) = 0$，对所有 j均成立。对于每个 j，存在唯一的函数 $u_{\beta,j}$ 定义在 $\mathscr{C}(\gamma_j)$ 上，使得 $du_{\beta,j} = \beta + i \star \beta$ 且 $u_{\beta,j}(x_j) = 0$。注意，$\ell^{\pi^2}(\gamma_j) \geq 4\pi^2 > 6\nu(\gamma_j)$。由于 $\beta + i \star \beta$ 是全纯的，

命题 7.16 意味着，对于任意满足 $|z_j(x)| \le e^{-2\nu(\gamma_j)}$ 的 $x \in \mathscr{C}(\gamma_j) \cap C_1$，我们有 e

$$\begin{aligned}
|u_{\beta,j}(x)|^2 &\le \frac{e^{2\nu(\gamma_j)}\|\beta + i\star\beta\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)}}{\pi(1-e^{-3\pi})} \cdot \frac{|z_j(x) - z_j(x_j)|^2}{\left(1-|z_j(x)|^2 e^{2\nu(\gamma_j)}\right)^2} \\
&\quad + \frac{e^{2\nu(\gamma_j)}\|\beta + i\star\beta\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)}}{\pi(1-e^{-3\pi})} \cdot \frac{|z_j(x)^{-1} - z_j(x_j)^{-1}|^2 e^{-\frac{4\pi^2}{\ell(\gamma_j)}}}{\left(1-e^{2\left(\nu(\gamma_j)-\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}\right)}\right)^2} \\
&\le \frac{2e^{2\nu(\gamma_j)}\|\beta\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)}}{\pi(1-e^{-3\pi})} \left(\frac{\left(|z_j(x)| + e^{-\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}}\right)^2}{\left(1-|z_j(x)|^2 e^{2\nu(\gamma_j)}\right)^2} + \frac{4e^{-\frac{2\pi^2}{\ell(\gamma_j)}}}{(1-e^{-4\pi^2})^2} \right).
\end{aligned}$$

这里我们用到了

$$\|\beta + i\star\beta\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)} = \frac{1}{2}\int_{\mathscr{C}(\gamma_j)} (\beta + i\star\beta) \wedge \star\overline{(\beta + i\star\beta)} = \int_{\mathscr{C}(\gamma_j)} \beta \wedge \star\beta = 2\|\beta\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)}.$$

需要考虑两种子情况。

若 $|z_j(x)|^2 e^{2\nu(\gamma_j)} \le e^{-3\pi}$，则 $1 - |z_j(x)|^2 e^{2\nu(\gamma_j)} \ge 1 - e^{-3\pi}$。由柯西–施瓦茨不等式，我们得到

$$|u_{\beta,j}(x)|^2 \le \frac{4e^{2\nu(\gamma_j)}\|\beta\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)}}{\pi(1-e^{-3\pi})^3} \left(|z_j(x)|^2 + 3e^{-\frac{2\pi^2}{\ell(\gamma_j)}} \right).$$

若 $e^{-3\pi} \le |z_j(x)|^2 e^{2\nu(\gamma_j)} \le e^{-2\nu(\gamma_j)}$，则

$$\begin{aligned}
\frac{\left(|z_j(x)| + e^{-\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}}\right)^2}{\left(1-|z_j(x)|^2 e^{2\nu(\gamma_j)}\right)^2} &\le \frac{\left(1 + e^{\frac{3\pi}{2} - \left(\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)} - \nu(\gamma_j)\right)}\right)^2}{\left(1-e^{-2\nu(\gamma_j)}\right)^2} \cdot |z_j(x)|^2 \\
&\le \frac{(1+e^{-2\pi^2})^2}{(1-e^{-4})^2} \cdot |z_j(x)|^2 < 2|z_j(x)|^2.
\end{aligned}$$

因此，对任意 $x \in z_j^{-1}\left(\mathbb{D}_{e^{-2\nu(\gamma_j)}}(0) \setminus \mathbb{D}_{e^{-\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}}}(0)\right) \subset \mathscr{C}(\gamma_j) \cap C_1$，我们得到如下界

$$|u_{\beta,j}(x)|^2 \le \frac{4e^{2\nu(\gamma_j)}\|\beta\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)}}{\pi(1-e^{-3\pi})^3} \left(|z_j(x)|^2 + 3e^{-\frac{2\pi^2}{\ell(\gamma_j)}} \right).$$

接下来，令 $\eta_{j,0} \in C^{0,1}(\mathbb{R}; [0,1])$ 为由下式定义的截断函数：

$$\eta_{j,0}(r) = \begin{cases} 0, & r < e^{-\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}}; \\ \dfrac{2\log 2 - \log\left(1 + 3r^{-2}e^{-\frac{2\pi^2}{\ell(\gamma_j)}}\right)}{2\log 2 - \log\left(1 + 3e^{4\nu(\gamma_j) - \frac{2\pi^2}{\ell(\gamma_j)}}\right)}, & e^{-\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}} \le r \le e^{-2\nu(\gamma_j)}; \\ 1, & r \ge e^{-2\nu(\gamma_j)}. \end{cases}$$

容易验证 $\eta'_{j,0} \in L^\infty(\mathbb{R};\ [0,\infty))$。于是 $u_{\beta,j} d(\eta_{j,0}(|z_j|))$ 是一个在 L^∞ 上取值于 $\mathscr{C}(\gamma_j)$ 的 1-形式，其 L^2-范数可利用命题 7.16 进行估计：

$$\begin{aligned}
&\|\mathrm{Re}(u_{\beta,j}) d(\eta_{j,0}(|z_j|))\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)} \le \frac{1}{2}\int_{e^{-\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}} \le |z_j| \le e^{-2\nu(\gamma_j)}} |u_{\beta,j}|^2 |\eta'_{j,0}(|z_j|)|^2 d\mu_{\mathrm{Euc}} \\
\le\ & \frac{4e^{2\nu(\gamma_j)}\|\beta\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)}}{(1-e^{-3\pi})^3} \int_{e^{-\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}}}^{e^{-2\nu(\gamma_j)}} t\left(t^2 + 3e^{-\frac{2\pi^2}{\ell(\gamma_j)}}\right) |\eta'_{j,0}(t)|^2 dt \\
\le\ & \frac{4e^{2\nu(\gamma_j)}\|\beta\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)}}{(1-e^{-3\pi})^3} \cdot \frac{6e^{-\frac{2\pi^2}{\ell(\gamma_j)}}}{2\log 2 - 3e^{-6\pi}} \le \frac{240 e^{2\pi - \frac{2\pi^2}{\ell(\gamma_j)}}}{13} \|\beta\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)}.
\end{aligned}$$

注意，$\left(1-e^{-3\pi}\right)^4 > 1 - \frac{1}{1000}$ 以及 $2\log 2 \approx 1.386\cdots > \frac{13}{10}\cdot(1+\frac{3}{50})$。因此，这个和可以被估计为

$$\begin{aligned}
&\|\mathrm{Re}(u_{\beta,j}) d(\eta_{j,0}(|z_j|))\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)} + 2\|\beta\|_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)} \|\mathrm{Re}(u_{\beta,j}) d(\eta_{j,0}(|z_j|))\|_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)} \\
\le\ & \left(\frac{240 e^{2\pi - \frac{2\pi^2}{\ell(\gamma_j)}}}{13} + 2\sqrt{\frac{240 e^{2\pi - \frac{2\pi^2}{\ell(\gamma_j)}}}{13}} \right) \|\beta\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)} \\
\le\ & \left(\frac{240 e^{2\pi - 4\pi^2}}{13} + 2\sqrt{\frac{240 e^{2\pi}}{13}} \right) e^{-\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}} \|\beta\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)} \le 199 e^{-\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}} \|\beta\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)}.
\end{aligned}$$

注意，$\left(\frac{240 e^{2\pi - 4\pi^2}}{13} + 2\sqrt{\frac{240 e^{2\pi}}{13}} \right) \approx 198.8567\cdots < 199.$ 因此，

$$\begin{aligned}
\|d\left((\eta_{j,0}(|z_j|))\mathrm{Re}(u_{\beta,j})\right)\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)} \le\ & \|\mathrm{Re}(u_{\beta,j}) d(\eta_{j,0}(|z_j|))\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)} \\
& + 2\|\beta\|_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)} \|\mathrm{Re}(u_{\beta,j}) d(\eta_{j,0}(|z_j|))\|_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)} + \|\beta\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)\cap C_1} \\
\le\ & \|\beta\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)\cap C_1} + 199 e^{-\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}} \|\beta\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)}.
\end{aligned}$$

为了得到光滑截断函数，我们对 $\eta_{j,0}$ 进行平滑化。对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $\eta_{j,\epsilon} \in C^\infty(\mathbb{R};\ [0,1])$，使得

$$\eta_{j,\epsilon} = 0 \text{ on } \left(-\infty, e^{-\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}}\right], \qquad \eta_{j,\epsilon} = 1 \text{ on } \left[e^{-2\nu(\gamma_j)}, \infty\right),$$

and

$$\sup |\eta_{j,\epsilon} - \eta_{j,0}|^2 + \int_{e^{-\nu(\gamma_j) - \frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}}}^{e^{-\nu(\gamma_j)}} |\eta'_{j,\epsilon}(t) - \eta'_{j,0}(t)|^2 dt \le \epsilon.$$

由此可得

$$\left\| d\Big((\eta_{j,0}(|z_j|) - \eta_{j,\epsilon}(|z_j|))\mathrm{Re}(u_{\beta,j}) \Big) \right\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)} \le 100\epsilon \|\beta\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)}.$$

那么，对于任意 $\epsilon > 0$，我们可以定义一个线性算子

$$\Psi_{C_1,\mathrm{loc};\epsilon} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathscr{Z}^1_{C;K}(C)$$

by

$$\Psi_{C_1,\mathrm{loc};\epsilon}(\beta) = \begin{cases} 0, & \text{on } C \setminus \left(C_1 \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^m \mathscr{C}(\gamma_j) \right) \right); \\ d\Big(\eta_{j,\epsilon}(|z_j|)\mathrm{Re}(u_{\beta,j})\Big), & \text{on } \mathscr{C}(\gamma_j); \\ \beta, & \text{on } C_1 \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m \mathscr{C}(\gamma_j) \right). \end{cases}$$

根据构造，很容易看出，对于任意 $\epsilon > 0$, $\Psi_{C_1,\text{局部};\epsilon}$ 满足 (1) 和 (2)。现在我们考虑估计 (3)。根据上述论证，我们可以得出，存在一个很小的常数$0 < \epsilon \leq e^{-\sum_{j=1}^m \frac{100\pi^2}{\ell \gamma_j}()}$，使得对于任意 $\beta \in \mathbf{X}$,

$$\begin{aligned}
\|\Psi_{C_1,\mathrm{loc};\epsilon}(\beta)\|_{L^2;C} &= \frac{1}{2}\int_{C_1\setminus(\bigcup_{j=1}^m \mathscr{C}(\gamma_j))} \beta\wedge\star\beta + \sum_{j=1}^m \|d\left(\eta_{j,\epsilon}(|z_j|)\mathrm{Re}(u_{\beta,j})\right)\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)} \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{C_1\setminus(\bigcup_{j=1}^m \mathscr{C}(\gamma_j))} \beta\wedge\star\beta \\
&\quad + \sum_{j=1}^m \left(\|d\left(\eta_{j,0}(|z_j|)\mathrm{Re}(u_{\beta,j})\right)\|_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)} + e^{-\frac{50\pi^2}{\ell(\gamma_j)}}\|\beta\|_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)}\right)^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{C_1\setminus(\bigcup_{j=1}^m \mathscr{C}(\gamma_j))} \beta\wedge\star\beta + \sum_{j=1}^m \left(\|\beta\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)\cap C_1} + 200e^{-\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}}\|\beta\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)}\right) \\
&\leq \|\beta\|^2_{L^2;C_1} + 200e^{-\frac{\pi^2}{\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j)}}\|\beta\|^2_{L^2;C}.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

结合上述引理与Tian的峰截面方法，我们得到以下引理。它可视为针对某些全纯 1-形式的几何局部化原理的一个版本。关于几何局部化原理的相关结果，参见 [MM07、Zho24]。

引理 9.9。设 C 是亏格为 $g \geq 2$的紧黎曼曲面，且 $\{\gamma_j\}_{j=1}^m$ 是 C 上的极小分离多重曲线，使得$\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j) \leq \frac{1}{4}$。设 C_1、 C_2 是 $C \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m \gamma_j\right)$的两个连通分支，且分别以 g_1 和 g_2 表示 C_1 和 C_2的亏格。令 $g_1' = \max\{g_1 - (m-1)\ 0\}$ 和$g_2' = \max\{g_2 - (m-1)\ 0\}$。那么存在 $\Gamma(C,\omega_C)$的一个 L^2 正交归一基$\{\alpha_j\}_{j=1}^g$，使得:

(1). $\|\alpha_j\|^2_{L^2;\ C_2} \leq 200e^{-\frac{\pi^2}{\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j)}}$，$1 \leq j \leq g_1'$。

(2). $\|\alpha_j\|^2_{L^2;\ C_1} \leq 2000e^{-\frac{\pi^2}{\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j)}}$，$g_1' + 1 \leq j \leq g_1' + g_2'$。

证明。设 $\{\mathbf{c}_j\}^{2(g_1+g_2)}\ _{j=1}$ 为引理 9.7 中构造的光滑环路系统。对于每个 j，令 $\beta_j \in \mathscr{H}^1_{C,\ \mathbb{R}}(C)$ 为其上同调类是 $[\mathbf{c}_j] \in H_1(C;\ \mathbb{R})$ 的庞加莱对偶的唯一调和 1-形式，并令 $\beta_{\gamma_j} \in \mathscr{H}^1_{C,\ \mathbb{R}}(C)$ 为其上同调类是 γ_j 的庞加莱对偶的唯一调和 1-形式。定义以下 $\mathbb{R}$-子空间：$\mathscr{H}^1_{C,\ \mathbb{R}}(C)$:

$$\mathbf{X}_1 = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\beta_j\}_{j=1}^{g_1},\quad \mathbf{X}_2 = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\beta_j\}_{j=2g_1+1}^{2g_1+g_2},\quad \mathbf{X}_3 = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\beta_{\gamma_j}\}_{j=1}^{m-1}.$$

接下来，考虑这些子空间

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_1' &= (\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_3)\bigcap\left(\bigcap_{k=1}^m \star\ker\mathbf{T}_{\gamma_k}\right) \subset \mathscr{H}^1_{C,\mathbb{R}}(C), \\
\mathbf{X}_2' &= (\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_3)\bigcap\left(\bigcap_{k=1}^m \star\ker\mathbf{T}_{\gamma_k}\right) \subset \mathscr{H}^1_{C,\mathbb{R}}(C),
\end{aligned}$$

其中 $\star$ 是霍奇 $\star$-算子，而$\mathbf{T}_{\mathbf{c}}$ 是定义在$\mathscr{Z}^1_{C,\mathbb{C}}(C)$上的线性泛函，由$\beta \mapsto \int_{\mathbf{c}}\beta$定义。注意，庞加莱对偶性意味着 $\mathbf{X}_3\bigcap\left(\bigcap_{k=1}^m \star\ker\mathbf{T}_{\gamma_k}\right) = 0$，因此$\mathbf{X}_1' \cap \mathbf{X}_2' = 0$。由于

$H_1(C;\mathbb{R})$由同调类 $\{[\gamma_j]\}_{j=1}^m$ 生成的空间同构于 $\mathbb{R}^{m-1}$，因此 $\dim_{\mathbb{R}}\mathbf{X}_1' \geq g_1$且 $\dim_{\mathbb{R}}\mathbf{X}_2' \geq g_2$。令 $\Psi_{C_1,\text{局部}}:\mathbf{X}_1' \longrightarrow \mathscr{Z}^1_{C;\mathbb{R}}(C)$ 为引理 9.8 中构造的线性算子。由于$\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_3 \subset \left(\bigcap_{k=1}^m \ker\mathbf{T}_{\gamma_k}\right)\bigcap\left(\bigcap_{j=2g_1+1}^{2(g_1+g_2)}\ker\mathbf{T}_{\mathbf{c}_j}\right)$，我们有

$$\left(\Psi_{C_1,\text{loc}}-\text{id}_{\mathbf{X}_1'}\right)(\mathbf{X}_1') \subset \left(\bigcap_{k=1}^m \ker\mathbf{T}_{\gamma_k}\right)\bigcap\left(\bigcap_{j=1}^{2(g_1+g_2)}\ker\mathbf{T}_{\mathbf{c}_j}\right),$$

其中，$\text{id}_{\mathbf{X}_1'}$ 是$\mathbf{X}_1'$上的恒等映射。因此

$$\begin{aligned}&\frac{\left(\Psi_{C_1,\text{loc}}-\text{id}_{\mathbf{X}_1}\right)(\mathbf{X}_1')}{\left(\Psi_{C_1,\text{loc}}-\text{id}_{\mathbf{X}_1'}\right)(\mathbf{X}_1')\cap d\mathscr{A}^0_{C,\mathbb{R}}(C)}\\ \subset\ &\frac{\left(\bigcap_{k=1}^m \ker\mathbf{T}_{\gamma_k}\right)\bigcap\left(\bigcap_{j=1}^{2(g_1+g_2)}\ker\mathbf{T}_{\mathbf{c}_j}\right)}{\left(\bigcap_{k=1}^m \ker\mathbf{T}_{\gamma_k}\right)\bigcap\left(\bigcap_{j=1}^{2(g_1+g_2)}\ker\mathbf{T}_{\mathbf{c}_j}\right)\bigcap d\mathscr{A}^0_{C,\mathbb{R}}(C)} \cong \mathbb{R}^{m-1},\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\left(\Psi_{C_1,\text{loc}}-\text{id}_{\mathbf{X}_1'}\right)^{-1}\left(d\mathscr{A}^0_{C,\mathbb{R}}(C)\right) &\geq \max\{\dim_{\mathbb{R}}\mathbf{X}_1'-(m-1),0\}\\ &\geq \max\{g_1-(m-1),0\}=g_1'.\end{aligned}$$

令$\mathbf{X}_1''=\left(\Psi_{C_1,\text{loc}}-\text{id}_{\mathbf{X}_1}\right)^{-1}\left(d\mathscr{A}^0_{C,\mathbb{R}}(C)\right)$。那么对于任意 $\beta\in\mathbf{X}_1''$，我们有

$$\|\beta\|^2_{L^2;C}=\|\Psi_{C_1,\text{loc}}(\beta)\|^2_{L^2;C}\leq\|\beta\|^2_{L^2;C_1}+200e^{-\frac{\pi^2}{\sum_{j=1}^m\ell(\gamma_j)}}\|\beta\|^2_{L^2;C},$$

因此$\|\beta\|^2_{L^2;C_2}\leq 200e^{-\frac{\pi^2}{\sum_{j=1}^m\ell_{(\gamma_j)}}}\|\beta\|^2_{L^2;C}$。此外，对于任意一对 1-形式 $\beta,\beta'\in\mathbf{X}_1''$，我们有 $\int_C\beta\wedge\beta'=0$。令 $\beta_1',\cdots,\beta'_{\dim\mathbf{X}_1''}$为$\mathbf{X}_1''$的一组 L^2-正交规范基，且 $\alpha_j=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\beta_j'+\underline{i}\star\beta_j'\right)$。那么我们有

$$\langle\alpha_j,\alpha_k\rangle_{L^2;C}=\left\langle\beta_j',\beta_k'\right\rangle_{L^2;C}+\frac{i}{2}\int_C\beta_j'\wedge\beta_k'=\left\langle\beta_j',\beta_k'\right\rangle_{L^2;C},$$

因此 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{\dim\mathbf{X}_1''}$构成 $\Gamma(C,\omega_C)$的一个 L^2-正交规范子集。此外，

$$\|\alpha_j\|^2_{L^2;C_2}=\left\langle\beta_j',\beta_j'\right\rangle_{L^2;C_2}+\frac{i}{2}\int_{C_2}\beta_j'\wedge\beta_j'=\left\langle\beta_j',\beta_j'\right\rangle_{L^2;C_2}\leq 200e^{-\frac{\pi^2}{\sum_{j=1}^m\ell(\gamma_j)}}.$$

同样，考虑线性算子 $\Psi_{C_2,\text{loc}}:\mathbf{X}_2'\longrightarrow\mathscr{Z}^1_{C;\mathbb{R}}(C)$ 及空间

$$\mathbf{X}_2''=\left(\Psi_{C_2,\text{loc}}-\text{id}_{\mathbf{X}_2}\right)^{-1}\left(d\mathscr{A}^0_{C,\mathbb{R}}(C)\right),$$

我们可以得出 $\dim\mathbf{X}_2''\geq g_2'$，并且对任意 $\beta\in\mathbf{X}_2''$, $\|\beta\|^2_{L^2;C_1}\leq 200e^{-\frac{\pi^2}{\sum_{j=1}^m\ell(\gamma_j)}}\|\beta\|^2_{L^2;C}$.

设 $\mathbf{X}''=\mathbf{X}_1''+\mathbf{X}_2''$，并令 $(\mathbf{X}_1'')^\perp$ 为 $\mathbf{X}_1''$ 在 $\mathbf{X}''$ 中的 L^2-正交完备化。则投影$\mathbf{X}''\to(\mathbf{X}_1'')^\perp$诱导出一个向量空间同构 $\mathbf{X}_2''\to(\mathbf{X}_1'')^\perp$。

现在，令 $\beta''\in(\mathbf{X}_1'')^\perp\subset\mathbf{X}''$。则存在唯一的 1-形式 $\beta_1''\in\mathbf{X}_1''$，使得 $\beta''+\beta_1''\in\mathbf{X}_2''$。我们进行如下估计：

$$\begin{aligned}\|\beta_1''\|^2_{L^2;C} &= \langle\beta''+\beta_1'',\beta_1''\rangle_{L^2;C_1}+\langle\beta''+\beta_1'',\beta_1''\rangle_{L^2;C_2}\\ &\leq 20\sqrt{2}e^{-\frac{\pi^2}{2\sum_{j=1}^m\ell(\gamma_j)}}\|\beta''+\beta_1''\|_{L^2;C}\|\beta_1''\|_{L^2;C}\\ &\leq 20\sqrt{2}e^{-\frac{\pi^2}{2\sum_{j=1}^m\ell(\gamma_j)}}\left(\|\beta''\|_{L^2;C}+\|\beta_1''\|_{L^2;C}\right)\|\beta_1''\|_{L^2;C},\end{aligned}$$

$_{\pi^2}$这意味着 $\|\beta_1''\|_{L^2;\,C} \le \frac{20\sqrt{2}e^{-\frac{\pi^2}{2\sum_{j=1}^m \ell}(\gamma_j)}}{1-20\sqrt{2}e^{-\frac{\pi^2}{2\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j)}}\|\beta''\|_{L^2;\,C_\circ}}$

鉴于 $\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j) \le \frac{1}{4}$，我们进一步得到：

$$\begin{aligned}
\|\beta''\|_{L^2;C_1} &\le \|\beta'' + \beta_1''\|_{L^2;C_1} + \|\beta_1''\|_{L^2;C_1} \\
&\le 10\sqrt{2}e^{-\frac{\pi^2}{2\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j)}}\|\beta''\|_{L^2;C} + \left(1 + 10\sqrt{2}e^{-\frac{\pi^2}{2\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j)}}\right)\|\beta_1''\|_{L^2;C} \\
&\le \frac{30\sqrt{2}e^{-\frac{\pi^2}{2\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j)}}}{\left(1 - 20\sqrt{2}e^{-\frac{\pi^2}{2\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j)}}\right)^2}\|\beta''\|_{L^2;C} \\
&\le \frac{30\sqrt{2}e^{-\frac{\pi^2}{2\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j)}}}{\left(1 - 20\sqrt{2}e^{-2\pi^2}\right)^2}\|\beta''\|_{L^2;C} \le 20\sqrt{5}e^{-\frac{\pi^2}{2\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j)}}\|\beta''\|_{L^2;C}.
\end{aligned}$$

设 β_1'''，$\cdots$，$\beta_{\dim \mathbf{X}_2''}'''$ 是 $(\mathbf{X}_1'')^\perp$ 的 L^2-正交归一基。通过对 $(\mathbf{X}_1'')^\perp$ 进行复化，并按照与 α_j 类似的构造，我们得到一个 L^2-正交归一系 $\{\alpha_1', \cdots, \alpha'_{\dim \mathbf{X}_2''}\} \subset \Gamma(C,\ \omega_C)$，满足

$$\|\alpha_j'\|_{L^2;C_1}^2 \le 2000e^{-\frac{\pi^2}{\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j)}},$$

这就完成了该引理的证明。 □

现在我们可以估计 φ-不变量。

命题9.10。设 C 是亏格为 $g \ge 2$ 的紧黎曼曲面，配备常曲率为 -1 的双曲度量 μ_{KE}。假设 $\{\gamma_k\}_{k=1}^m$ 是 C 上满足 $\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k) \le \frac{1}{6}$ 对数 g 的极小分离多重曲线。令 C_1、C_2 表示 $C \setminus (\bigcup_{k=1}^m \gamma_k)$ 的两个连通分支，并令 g_1 和 g_2 分别表示 C_1 和 C_2 的亏格。设 $g_1' = \text{最大值}\{g_1 - (m-1)\ 0\}$、$g_2' = \text{最大值}\{g_2 - (m-1)\ 0\}$ 以及 $g' = g_1' + g_2'$。则 φ-不变量的下界为

$$\varphi(C) \ge \frac{\pi^2 \cdot g_1' g_2'}{\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k)}\left(\frac{g'}{g^2} - \frac{2}{g} \cdot e^{15 - \frac{\pi^2}{\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k)}}\right).$$

证明。根据引理 9.9，可以选取一个 L^2-正交规范基 $\{\alpha_j\}_{j=1}^g$，其属于 $\Gamma(C, \omega_C \quad)$

- $\int_{\gamma_k} \alpha_j = 0$ for $j = 1, \cdots, g'$ and $k = 1, \cdots, m$.
- $\|\alpha_j\|_{L^2;C_2}^2 \le 200e^{-\frac{\pi^2}{\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k)}}$ for $1 \le j \le g_1'$.
- $\|\alpha_j\|_{L^2;C_1}^2 \le 2000e^{-\frac{\pi^2}{\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k)}}$ for $g_1' + 1 \le j \le g'$.

令 $\mathfrak{u}_j \in \mathscr{A}^0_{C,\ \mathbb{R}}(C)$ 为方程的唯一解

$$dd^c\mathfrak{u}_j = i\alpha_j \wedge \bar{\alpha}_j - 2\mu_{\mathrm{Ar}}, \quad \int_C \mathfrak{u}_j \mu_{\mathrm{Ar}} = 0.$$

对于每个 j，令 η_j 为一个 $\mathbb{R}$值光滑函数，稍后再具体说明。于是，命题 9.2 推出

$$\begin{aligned}
\varphi(C) &\ge \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^g \|d\mathfrak{u}_j\|_{L^2;C}^2 \ge \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^g \frac{\left|\langle d\mathfrak{u}_j, d\eta_j\rangle_{L^2;C}\right|^2}{\|d\eta_j\|_{L^2;C}^2} \\
&= \frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^g \frac{1}{\|d\eta_j\|_{L^2;C}^2}\left|\int_C \eta_j\left(i\alpha_j \wedge \bar{\alpha}_j - 2\mu_{\mathrm{Ar}}\right)\right|^2.
\end{aligned}$$

下一步是构造函数 η_j 并估计 φ不变量。如引理9.8的证明中所示，标准的磨光论证表明，对于当前的估计，只需构造 $C^{0,\,1}$ 函数 $\eta_{j,\,0}$ 即可。

我们利用 Kähler 领圈的局部结构¨ $\mathscr{C}(\gamma_k)$ 来构造函数 η_j。根据引理7.10，存在全纯坐标

$$z_k : \mathscr{C}(\gamma_k) \to \overline{\mathbb{D}_{e^{-\nu(\gamma_k)}}(0)} \setminus \mathbb{D}_{e^{\nu(\gamma_k)-\frac{2\pi^2}{\ell(\gamma_k)}}}(0)$$

使得 $z_k(\mathscr{C}(\gamma_k) \cap C_1) = \mathbb{D}_{e^{-\nu(\gamma_k)}}(0) \setminus \mathbb{D}_{e^{-\ell^{\pi^2}_{\gamma_k}()}}(0)$，其中 $\nu(\gamma_k) \in (0,\ 2\ell^{\pi}_{-(\gamma_k)})$ 由 $\nu(\gamma_k)\ell(\gamma_k) = 2\pi$ 反正弦 $\left($双曲正切 $^{\ell}_{(\gamma_k}{}_{2}\right))$ 确定。令 $\eta_{\mathrm{cut}} \in C^{0,\,1}(\mathbb{R};\,[0,1])$ 为如下定义的截断函数：

$$\eta_{\mathrm{cut}} = \begin{cases} 0, & \text{on } C \setminus \left(C_1 \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{m} \mathscr{C}(\gamma_k) \right) \right); \\ \eta_{[0,1]}\left(2 + \dfrac{2\ell(\gamma_k)}{\pi^2} \log |z_k| \right), & \text{on } \mathscr{C}(\gamma_k); \\ 1, & \text{on } C_1 \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{m} \mathscr{C}(\gamma_k) \right), \end{cases}$$

其中 $\eta_{[0,1]}(t) = \max\{0, \min\{t, 1\}\}$ 表示裁剪函数。显然，$\eta_{\mathrm{cut}} = 0$ 在 $C \setminus C_1$上。对于 $1 \le j \le g_1'$，令 $\eta_j = \eta_{\mathrm{cut}}$。对于这样的 j，我们计算

$$\begin{aligned} \|d\eta_j\|^2_{L^2;C} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \int_{\mathscr{C}(\gamma_k)} d\eta_j \wedge \star d\eta_j = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \int_{e^{-\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_k)}}}^{e^{-\frac{\pi^2}{2\ell(\gamma_k)}}} 2\pi \cdot \frac{4\ell^2(\gamma_k)}{\pi^4} \frac{d\varsigma_k}{\varsigma_k} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{4\ell^2(\gamma_k)}{\pi^3} \left(\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_k)} - \frac{\pi^2}{2\ell(\gamma_k)} \right) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{m} \ell(\gamma_k), \end{aligned}$$

其中 $z_k = \varsigma_k e^{i\theta_k}$ 表示极坐标。此外，对于 $1 \le j \le g_1'$，由命题7.16 和引理9.9 可得

$$\begin{aligned} i\int_C \eta_j \alpha_j \wedge \bar{\alpha}_j &\ge 2\|\alpha_j\|^2_{L^2;C_1} - \sum_{k=1}^{m} \|\alpha_j\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_k)} \int_{\left\{-1 \le \frac{\ell(\gamma_k)\log|z_k|}{\pi^2} \le -\frac{1}{2}\right\}} \frac{4e^{2\pi}}{\pi} \mu_{\mathrm{Euc}} \\ &\ge 2\|\alpha_j\|^2_{L^2;C_1} - 4e^{2\pi} e^{-\frac{\pi^2}{\sum_{k=1}^{m}\ell(\gamma_k)}} \|\alpha_j\|^2_{L^2;C} \\ &\ge 2 - \left(400 + 4e^{2\pi}\right) e^{-\frac{\pi^2}{\sum_{k=1}^{m}\ell(\gamma_k)}} \ge 2 - e^{10-\frac{\pi^2}{\sum_{k=1}^{m}\ell(\gamma_k)}}. \end{aligned}$$

设 $\mu'_{\mathrm{Ar}} = \frac{i}{2g}\sum_{j=1}^{g'} \alpha_j \wedge \bar{\alpha}_j$。则 $0 \le \mu'_{\mathrm{Ar}} \le \mu_{\mathrm{Ar}}$，由标准正交性可得 $\mu'_{\mathrm{Ar}}(C) = \frac{g'}{g}$。由引理9.9，

$$\begin{aligned} \left| \mu'_{\mathrm{Ar}}(C_1) - \frac{g_1'}{g} \right| &\le \frac{1}{g}\sum_{j=1}^{g_1'} \left| \|\alpha_j\|^2_{L^2;C_1} - 1 \right| + \frac{1}{g}\sum_{j=g_1'+1}^{g'} \|\alpha_j\|^2_{L^2;C_1} \\ &\le \frac{2000g'}{g} e^{-\frac{\pi^2}{\sum_{k=1}^{m}\ell(\gamma_k)}}, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \left| \mu'_{\mathrm{Ar}}(C_2) - \frac{g_2'}{g} \right| &= \left| \frac{g'}{g} - \mu'_{\mathrm{Ar}}(C_1) - \frac{g' - g_1'}{g} \right| \\ &= \left| \mu'_{\mathrm{Ar}}(C_1) - \frac{g_1'}{g} \right| \le \frac{2000g'}{g} e^{-\frac{\pi^2}{\sum_{k=1}^{m}\ell(\gamma_k)}}. \end{aligned}$$

假设 $g_2' \geq 1$。对于任意 $1 \leq j \leq g_1'$，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\|d\eta_j\|_{L^2;C}^2}\left|\int_C \eta_j\left(i\alpha_j \wedge \bar{\alpha}_j - 2\mu_{\mathrm{Ar}}\right)\right|^2 \\
\geq\ & \frac{\pi}{2\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k)} \cdot \left(\left|\int_C \eta_j \alpha_j \wedge \bar{\alpha}_j\right| - 2\left|\int_{C_1} 1\mu_{\mathrm{Ar}}\right|\right)^2 \\
\geq\ & \frac{\pi}{2\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k)} \cdot \left(2 - e^{10-\frac{\pi^2}{\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k)}} - 2(\mu_{\mathrm{Ar}}(C) - \mu'_{\mathrm{Ar}}(C)) - 2\mu'_{\mathrm{Ar}}(C_1)\right)^2 \\
=\ & \frac{\pi}{2\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k)} \cdot \left(2\mu'_{\mathrm{Ar}}(C_2) - e^{10-\frac{\pi^2}{\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k)}}\right)^2 \\
\geq\ & \frac{\pi}{2\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k)} \cdot \left(\frac{2g_2'}{g} - e^{10-\frac{\pi^2}{\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k)}} - \frac{4000g'}{g} e^{-\frac{\pi^2}{\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k)}}\right)^2.
\end{aligned}$$

由于 $e^{30-\frac{\pi^2}{\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k)}} \leq e^{30} g^{-6\pi^2} < \frac{1}{100g}$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\|d\eta_j\|_{L^2;C}^2}\left|\int_C \eta_j\left(i\alpha_j \wedge \bar{\alpha}_j - 2\mu_{\mathrm{Ar}}\right)\right|^2 \\
\geq\ & \frac{\pi}{2\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k)} \cdot \left(\frac{2g_2'}{g} - e^{10-\frac{\pi^2}{\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k)}} - \frac{4000g'}{g} e^{-\frac{\pi^2}{\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k)}}\right)^2 \\
\geq\ & \frac{2\pi}{\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k)} \cdot \left(\frac{g_2'^2}{g^2} - \frac{(e^{10}+4000)g_2'}{g} e^{-\frac{\pi^2}{\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k)}} - e^{25-\frac{2\pi^2}{\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k)}}\right) \\
\geq\ & \frac{2\pi}{\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k)} \cdot \left(\frac{g_2'^2}{g^2} - \frac{g_2'}{g} \cdot e^{15-\frac{\pi^2}{\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k)}}\right).
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{g_1'} \|d\mathfrak{u}_j\|_{L^2;C}^2 &\geq \frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{g_1'} \frac{1}{\|d\eta_j\|_{L^2;C}^2}\left|\int_C \eta_j\left(i\alpha_j \wedge \bar{\alpha}_j - 2\mu_{\mathrm{Ar}}\right)\right|^2 \\
&\geq \frac{\pi^2 \cdot g_1'}{\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k)} \cdot \left(\frac{g_2'^2}{g^2} - \frac{g_2'}{g} \cdot e^{15-\frac{\pi^2}{\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k)}}\right).
\end{aligned}$$

反之，若 $g_2' = 0$，则右侧为零，该不等式是平凡的。

对于任意 $g_1' + 1 \leq j \leq g'$，令 $\eta_j = 1 - \eta_{\mathrm{cut}}$。根据 7.16，对于任意 $g_1' + 1 \leq j \leq g'$，我们得到

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_1} \eta_j \mu'_{\mathrm{Ar}}\right| &\leq \frac{1}{2g}\sum_{j=1}^{g'}\sum_{k=1}^{m}\left|\int_{\mathscr{C}(\gamma_k)\cap C_1} (1-\eta_{\mathrm{cut}})\alpha_j \wedge \bar{\alpha}_j\right| \\
&\leq \frac{1}{2g}\sum_{j=1}^{g'}\sum_{k=1}^{m} \|\alpha_j\|_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_k)}^2 \int_{\left\{-1 \leq \frac{\ell(\gamma_k)\log|z_k|}{\pi^2} \leq -\frac{1}{2}\right\}} \frac{4e^{2\pi}}{\pi}\mu_{\mathrm{Euc}} \\
&\leq \frac{1}{2g}\sum_{j=1}^{g'}\sum_{k=1}^{m} \|\alpha_j\|_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_k)}^2 \cdot 4e^{2\pi} \cdot e^{-\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_k)}} \\
&\leq \frac{g'}{g} \cdot 2e^{2\pi} e^{-\frac{\pi^2}{\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k)}} \leq \frac{g'}{g} \cdot e^{8-\frac{\pi^2}{\sum_{k=1}^m \ell(\gamma_k)}}.
\end{aligned}$$

仿照上述论证，对于 $g_1'+1\le j\le g'$ 我们可推得

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=g_1'+1}^{g'}\|du_j\|^2_{L^2;C}\quad\ge\quad\frac{\pi^2\cdot g_2'}{\sum_{k=1}^m\ell(\gamma_k)}\cdot\left(\frac{g_1'^2}{g^2}-\frac{g_1'}{g}\cdot e^{15-\frac{\pi^2}{\sum_{k=1}^m\ell(\gamma_k)}}\right).$$

因此，

$$\begin{aligned}\varphi(C)\quad&\ge\quad\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{g'}\|du_j\|^2_{L^2;C}\ge\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{g'}\frac{\left|\langle du_j,d\eta_j\rangle_{L^2;C}\right|^2}{\|d\eta_j\|^2_{L^2;C}}\\&\ge\quad\frac{\pi^2}{\sum_{k=1}^m\ell(\gamma_k)}\left(\frac{g_1'g_2'g'}{g^2}-\frac{2g_1'g_2'}{g}\cdot e^{15-\frac{\pi^2}{\sum_{k=1}^m\ell(\gamma_k)}}\right).\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

9.4 非分离情形

如上所述，设 C 是 $\mathbb{C}$ 上亏格为 $g\ge2$ 的曲线，并令 ω_C 表示其典范丛。设 μ_{KE} 为 C 上曲率为 -1 的唯一 K¨ 度量。

本小节的目标是估计 φ-不变量，其情形为 C 含有一条短的非分离闭测地线。若环路的同调类非零，则称其为 C 上的非分离环路。我们的方法结合了 Tian的峰截面方法，以及 Buser–Sarnak 提出的环路与调和1-形式之间的基本 [BS94]关系。

接下来，我们考察 φ-不变量与沿短闭测地线的峰截面之间的关系。

引理 9.11. 设 C 是亏格为 $g\ge2$的紧黎曼曲面，配备常曲率为 -1的双曲度量μ_{KE} 。设 γ 是（C,μ_{KE}）上的一条非分离闭测地线，其长度为 ℓ（γ） $=\ell<2$反双曲正弦 1，并设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_g$是 L^2-正交归一基，属于 Γ（C,ω_C），其中 α_1是沿着处于 Γ C ω_C γ $|\int_\gamma\alpha_1|=2\pi$ γ $\mathrm{u}_j\in\mathscr{A}^0_{C\,\mathbb{R}}$ C $\int_C\mathrm{u}_j\mu_{\mathrm{Ar}}=0$ $dd^c\mathrm{u}_j=$（,） $i\alpha_j\wedge\bar\alpha_j-2\mu_{\mathrm{Ar}}$ 中的峰截面。假设$\mathbf{t}$。设,（）满足和。则

$$\sum_{j=1}^g\int_{\mathscr{C}(\gamma)}du_j\wedge\star du_j\ge\frac{32\pi^2(g-1)\mathbf{t}_\gamma^2}{g}\left(\frac{\pi^2}{\ell}-\nu\right)\left(\frac{2\pi\mathbf{t}_\gamma^2}{3}\left(\frac{\pi^2}{\ell}-\nu\right)^2-1\right),$$

其中 $\mathscr{C}$（γ）表示 γ 的领圈，如定理7.4中所述。

证明。 由引理 7.10，可得

$$(\mathscr{C}(\gamma),\mu_{\mathrm{KE}}|_{\mathscr{C}(\gamma)})\cong\left(\overline{\mathbb{D}_{e^{-\nu}}(0)}\setminus\mathbb{D}_{e^{\nu-\frac{2\pi^2}{\ell}}}(0),\frac{\ell^2\mu_{\mathrm{Euc}}}{4\pi^2|z|^2\sin^2(\frac{\ell}{2\pi}\log|z|)}\right),$$

其中 $\mu_{\mathrm{Euc}}=\frac{idz\wedge d\bar z}{2}$表示 $\mathbb{C}$上的标准欧氏度量，且 $\nu\in(0,\frac{\pi}{2\ell})$满足 $\nu\ell=2\pi\arcsin$（双曲正切 $\frac{\ell}{2}$）。

定义 $\mathrm{u}_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{u}_1(ze^{i\theta})d\theta$， $\forall z\in\overline{\mathbb{D}_{e^{-\nu}}(0)}\setminus\mathbb{D}_{e^{\nu-\frac{2\pi^2}{\ell}}}(0)$。通过类似于引理的证明9.3，我们得到

$$\int_{\mathscr{C}(\gamma)}du_1\wedge\star du_1\ge\int_{\mathscr{C}(\gamma)}du_\gamma\wedge\star du_\gamma.$$

写作 $\alpha_j=\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_k\mathbf{t}_{j,k}z^kdz$，其中 $a_k\in\mathbb{C}$ 满足

$$|a_k|^2=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{\pi^2}{\ell}-\nu\right)^{-1},&k=-1;\\[2ex]\dfrac{k+1}{\pi}\left(e^{-2(k+1)\nu}-e^{2(k+1)(\nu-\frac{2\pi^2}{\ell})}\right)^{-1},&k\ne-1.\end{cases}$$

由引理 7.15，集合 $\{a_k z^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 在 $\mathscr{C}(\gamma)$ 上构成局部 L^2-正交归一基。因此，我们有 $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\mathbf{t}_{j,k}|^2\le 1$, $j=1,\cdots,g$。由于 $|\int_\gamma \alpha_1|=2\pi\mathbf{t}_\gamma$，可得 $a_{-1}|\mathbf{t}_{1,-1}|=\mathbf{t}_\gamma$。

根据定义，在 $\mathscr{C}(\gamma)\cong \mathbb{D}_{e^{-\nu}}\setminus\overline{\mathbb{D}}_{e^{\nu-2\pi^2/\ell}}(0)$ 上，我们有

$$dd^c\mathfrak{u}_1 = i\alpha_1\wedge\bar\alpha_1 - 2\mu_{\mathrm{Ar}} = \frac{(g-1)i}{g}\alpha_1\wedge\bar\alpha_1 - \frac{i}{g}\sum_{j=2}^{g}\alpha_j\wedge\bar\alpha_j.$$

因此

$$dd^c\mathfrak{u}_\gamma = \left(\frac{(g-1)i}{g}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|a_k|^2|\mathbf{t}_{1,k}|^2|z|^{2k} - \frac{i}{g}\sum_{j=2}^{g}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|a_k|^2|\mathbf{t}_{j,k}|^2|z|^{2k}\right)dz\wedge d\bar z.$$

我们令 $z=\varsigma e^{i\theta}$，以极坐标表示 z，其中 $\varsigma=|z|$ 和 $\theta\in[0,2\pi)$。于是 $\star d\varsigma=\varsigma d\theta$，且 $\star d\theta=-\frac{1}{\varsigma}d\varsigma$。因此

$$dd^c\mathfrak{u}_\gamma = \frac{i}{4\pi}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{u}_\gamma}{\partial\varsigma^2}+\frac{1}{\varsigma}\frac{\partial\mathfrak{u}_\gamma}{\partial\varsigma}\right)dz\wedge d\bar z.$$

注意到，对于 $j\ge 2$，$\mathbf{t}_{j,-1}=0$，我们得到

$$\frac{1}{4\pi\varsigma}\frac{\partial}{\partial\varsigma}\left(\varsigma\frac{\partial\mathfrak{u}_\gamma}{\partial\varsigma}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{u}_\gamma}{\partial\varsigma^2}+\frac{1}{\varsigma}\frac{\partial\mathfrak{u}_\gamma}{\partial\varsigma}\right) = \frac{g-1}{g}\mathbf{t}_\gamma^2\varsigma^{-2}+\Psi_0(\varsigma),$$

其中 $\Psi_0(\varsigma)=\sum_{k\ne -1}|a_k|^2\left(\frac{g-1}{g}|\mathbf{t}_{1,k}|^2-\frac{1}{g}\sum_{j=2}^{g}|\mathbf{t}_{j,k}|^2\right)\varsigma^{2k}$。积分可得

$$\begin{aligned}\frac{\varsigma}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{u}_\gamma}{\partial\varsigma} &= \int_{e^{-\pi^2/\ell}}^{\varsigma}\left(\frac{g-1}{g}\mathbf{t}_\gamma^2\varsigma^{-1}+\varsigma\Psi_0(\varsigma)\right)d\varsigma + \frac{e^{-\frac{\pi^2}{\ell}}}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{u}_\gamma}{\partial\varsigma}(e^{-\frac{\pi^2}{\ell}})\\ &= \frac{g-1}{g}\mathbf{t}_\gamma^2\left(\log\varsigma+\frac{\pi^2}{\ell}\right)+\Psi_1(\varsigma)-\Psi_1(e^{\frac{-\pi^2}{\ell}})+\frac{e^{-\frac{\pi^2}{\ell}}}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{u}_\gamma}{\partial\varsigma}(e^{-\frac{\pi^2}{\ell}}),\end{aligned}$$

其中

$$\Psi_1(\varsigma)=\sum_{k\ne -1}\frac{|a_k|^2}{2k+2}\left(\frac{g-1}{g}|\mathbf{t}_{1,k}|^2-\frac{1}{g}\sum_{j=2}^{g}|\mathbf{t}_{j,k}|^2\right)\varsigma^{2k+2}.$$

设 $\vartheta_0=\frac{e^{-\frac{\pi^2}{\ell}}}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{u}_\gamma}{\partial\varsigma}(e^{-\frac{\pi^2}{\ell}})-\Psi_1(e^{-\frac{\pi^2}{\ell}})$。那么

$$\frac{\varsigma}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{u}_\gamma}{\partial\varsigma} = \frac{g-1}{g}\mathbf{t}_\gamma^2\left(\log\varsigma+\frac{\pi^2}{\ell}\right)+\Psi_1(\varsigma)+\vartheta_0,$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{C}(\gamma)}d\mathfrak{u}_\gamma\wedge\star d\mathfrak{u}_\gamma &= \int_{\mathscr{C}(\gamma)}\frac{16\pi^2(g-1)^2\mathbf{t}_\gamma^4}{g^2\varsigma^2}\left(\log\varsigma+\frac{\pi^2}{\ell}\right)^2\mu_{\mathrm{Euc}}\\ &\quad+\int_{\mathscr{C}(\gamma)}\frac{16\pi^2}{\varsigma^2}\left(\Psi_1(\varsigma)+\vartheta_0\right)^2\mu_{\mathrm{Euc}}\\ &\quad+\int_{\mathscr{C}(\gamma)}\frac{32\pi^2(g-1)}{g\varsigma^2}\mathbf{t}_\gamma^2\left(\log\varsigma+\frac{\pi^2}{\ell}\right)\left(\Psi_1(\varsigma)+\vartheta_0\right)\mu_{\mathrm{Euc}}.\end{aligned}$$

通过直接计算，我们得到

$$\int_{e^{\nu-\frac{2\pi^2}{\ell}}}^{e^{-\nu}} \frac{1}{\varsigma}\left(\log\varsigma+\frac{\pi^2}{\ell}\right)d\varsigma=0,\ \int_{e^{\nu-\frac{2\pi^2}{\ell}}}^{e^{-\nu}} \frac{1}{\varsigma}\left(\log\varsigma+\frac{\pi^2}{\ell}\right)^2 d\varsigma=\frac{2}{3}\left(-\nu+\frac{\pi^2}{\ell}\right)^3.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{C}(\gamma)} d\mathfrak{u}_\gamma\wedge\star d\mathfrak{u}_\gamma &\geq \frac{32\pi^3(g-1)^2\mathbf{t}_\gamma^4}{g^2}\int_{e^{\nu-\frac{2\pi^2}{\ell}}}^{e^{-\nu}}\frac{1}{\varsigma}\left(\log\varsigma+\frac{\pi^2}{\ell}\right)^2 d\varsigma\\ &\quad+\frac{64\pi^3(g-1)\mathbf{t}_\gamma^2}{g}\int_{e^{\nu-\frac{2\pi^2}{\ell}}}^{e^{-\nu}}\frac{\Psi_1(\varsigma)+\vartheta_0}{\varsigma}\left(\log\varsigma+\frac{\pi^2}{\ell}\right)d\varsigma\\ &\geq \frac{64\pi^3(g-1)^2\mathbf{t}_\gamma^4}{3g^2}\left(-\nu+\frac{\pi^2}{\ell}\right)^3\\ &\quad+\frac{64\pi^3(g-1)\mathbf{t}_\gamma^2}{g}\int_{e^{\nu-\frac{2\pi^2}{\ell}}}^{e^{-\nu}}\frac{\Psi_1(\varsigma)}{\varsigma}\left(\log\varsigma+\frac{\pi^2}{\ell}\right)d\varsigma.\end{aligned}$$

由于 $\Psi_1(\varsigma)=\sum_{k\neq-1}\frac{|a_k|^2}{2k+2}\left(\frac{g-1}{g}|\mathbf{t}_{1,\ k}|^2-\frac{1}{g}\sum_{j=2}^{g}|\mathbf{t}_{j,\ k}|^2\right)\varsigma^{2k+2}$，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{e^{\nu-\frac{2\pi^2}{\ell}}}^{e^{-\nu}}\frac{\Psi_1(\varsigma)}{\varsigma}\left(\log\varsigma+\frac{\pi^2}{\ell}\right)d\varsigma\\ =\ &\sum_{k\neq-1}\frac{|a_k|^2}{2k+2}\left(\frac{g-1}{g}|\mathbf{t}_{1,k}|^2-\frac{1}{g}\sum_{j=2}^{g}|\mathbf{t}_{j,k}|^2\right)\int_{e^{\nu-\frac{2\pi^2}{\ell}}}^{e^{-\nu}}\varsigma^{2k+1}\left(\log\varsigma+\frac{\pi^2}{\ell}\right)d\varsigma\\ =\ &\sum_{k\neq-1}\frac{\frac{\pi^2}{\ell}-\nu}{4\pi(k+1)}\left(\frac{g-1}{g}|\mathbf{t}_{1,k}|^2-\frac{1}{g}\sum_{j=2}^{g}|\mathbf{t}_{j,k}|^2\right)\frac{1+e^{4(k+1)(\nu-\frac{\pi^2}{\ell})}}{1-e^{4(k+1)(\nu-\frac{\pi^2}{\ell})}}\\ &-\sum_{k\neq-1}\frac{1}{8\pi(k+1)^2}\left(\frac{g-1}{g}|\mathbf{t}_{1,k}|^2-\frac{1}{g}\sum_{j=2}^{g}|\mathbf{t}_{j,k}|^2\right).\end{aligned}$$

由于$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\mathbf{t}_{j,k}|^2\leq 1$, $j=1,\cdots,g$，我们有

$$\sum_{k\neq-1}\left|\frac{g-1}{g}|\mathbf{t}_{1,k}|^2-\frac{1}{g}\sum_{j=2}^{g}|\mathbf{t}_{j,k}|^2\right|\leq\frac{g-1}{g}+\frac{1}{g}\sum_{j=2}^{g}1=\frac{2(g-1)}{g}.$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{e^{\nu-\frac{2\pi^2}{\ell}}}^{e^{-\nu}} \frac{\Psi_1(\varsigma)}{\varsigma}\left(\log\varsigma+\frac{\pi^2}{\ell}\right)d\varsigma\right| \\
=\;&\left|\sum_{k\neq -1}\frac{\frac{\pi^2}{\ell}-\nu}{4\pi(k+1)}\left(\frac{g-1}{g}|\mathbf{t}_{1,k}|^2-\frac{1}{g}\sum_{j=2}^{g}|\mathbf{t}_{j,k}|^2\right)\frac{1+e^{4(k+1)(\nu-\frac{\pi^2}{\ell})}}{1-e^{4(k+1)(\nu-\frac{\pi^2}{\ell})}}\right. \\
&\left.-\sum_{k\neq -1}\frac{1}{8\pi(k+1)^2}\left(\frac{g-1}{g}|\mathbf{t}_{1,k}|^2-\frac{1}{g}\sum_{j=2}^{g}|\mathbf{t}_{j,k}|^2\right)\right| \\
\leq\;&\frac{(g-1)\left(\frac{\pi^2}{\ell}-\nu\right)}{2\pi g}\cdot\sup_{k\neq -1}\left|\frac{1+e^{4(k+1)(\nu-\frac{\pi^2}{\ell})}}{(k+1)\left(1-e^{4(k+1)(\nu-\frac{\pi^2}{\ell})}\right)}-\frac{1}{2(k+1)^2\left(\frac{\pi^2}{\ell}-\nu\right)}\right| \\
=\;&\frac{(g-1)\left(\frac{\pi^2}{\ell}-\nu\right)}{2\pi g}\cdot\sup_{k\geq 0}\left(\left|\frac{1}{k+1}\right|\left|1+\frac{2}{e^{4(k+1)(\frac{\pi^2}{\ell}-\nu)}-1}-\frac{1}{2(k+1)\left(\frac{\pi^2}{\ell}-\nu\right)}\right|\right) \\
\leq\;&\frac{(g-1)\left(\frac{\pi^2}{\ell}-\nu\right)}{2\pi g}.
\end{aligned}
$$

因此，我们得到下界

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathscr{C}(\gamma)} d\mathfrak{u}_\gamma\wedge\star d\mathfrak{u}_\gamma \;&\geq\; \frac{64\pi^3(g-1)^2\mathbf{t}_\gamma^4}{3g^2}\left(-\nu+\frac{\pi^2}{\ell}\right)^3 \\
&\quad+\frac{64\pi^3(g-1)\mathbf{t}_\gamma^2}{g}\int_{e^{\nu-\frac{2\pi^2}{\ell}}}^{e^{-\nu}}\frac{\Psi_1(\varsigma)}{\varsigma}\left(\log\varsigma+\frac{\pi^2}{\ell}\right)d\varsigma \\
&\geq\; \frac{32\pi^2(g-1)^2\mathbf{t}_\gamma^2}{g^2}\left(\frac{\pi^2}{\ell}-\nu\right)\left(\frac{2\pi\mathbf{t}_\gamma^2}{3}\left(\frac{\pi^2}{\ell}-\nu\right)^2-1\right).
\end{aligned}
$$

根据定义，$\sum_{j=1}^{g}\mathfrak{u}_j=0$，并使用与引理 9.4中类似的论证，我们得出

$$
\sum_{j=1}^{g}\int_{\mathscr{C}(\gamma)} d\mathfrak{u}_j\wedge\star d\mathfrak{u}_j \;\geq\; \frac{g}{g-1}\int_{\mathscr{C}(\gamma)} d\mathfrak{u}_1\wedge\star d\mathfrak{u}_1.
$$

证明至此完成。 □

现在我们考察最短非分离简单闭测地线 γ_0，以及自由环空间中同调类与 $[\gamma_0]$ 的交数非零的最短环。

引理 9.12。 设 C 是亏格为 $g\geq 2$ 的紧黎曼曲面，配备常曲率为 -1 的双曲度量 μ_{KE}。设 γ_0 是(C,μ_{KE})上的最短非分离简单闭测地线，并定义

$$
\mathcal{S}_{\gamma_0}=\left\{\mathbf{c}:\mathbb{S}^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to C\;\middle|\;\mathbf{c}\ \textit{piecewise smooth, and}\ \mathbf{c}_*(e_{\mathbb{S}^1})\cap[\gamma_0]\neq 0\right\},
$$

其中 $e_{\mathbb{S}^1}$ 表示 $H_1(\mathbb{S}^1;\ \mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$ 的生成元。假设 $\ell(\gamma_0)\leq 2$反双曲正弦 **1**。那么存在一条闭测地线 $\mathbf{c}_0\in\mathcal{S}_{\gamma_0}$，满足以下性质：

(1) $\ell(\mathbf{c}_0)\leq\ell(\mathbf{c})$ 对所有$\mathbf{c}\in\mathcal{S}_{\gamma_0}$均成立。

(2) 对任意 $t_0\in(0,1)$ 以及 $t\in\mathbb{R}$，我们有

$$
\mathrm{dist}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(\mathbf{c}_0(t),\mathbf{c}_0(t+t_0))=\min\{\ell(\mathbf{c}_0)t_0,\ell(\mathbf{c}_0)(1-t_0)\}.
$$

(3) F 对于 C 上满足 $\ell(\gamma') \le 2$反双曲正弦 1 的任意简单闭测地线 γ'，我们有 $\#(\gamma' \cap \mathbf{c}_0) \le 1$。

证明。 该论证是标准的。由于任意紧曲面的单射半径严格为正，每一条充分短的环路必为同伦平凡的。因此， $\mathcal{S}_{\gamma_0}$中环路长度的下确界严格为正。考虑 $\mathcal{S}_{\gamma_0}$ 中的一个极小化序列，其长度收敛于该下确界。由有界长度环路空间的紧致性，存在子序列收敛于一条实现该最小值的闭测地环路。该极限环路即为所求的$\mathbf{c}_0$, ，引理得证。 □

为了在给定测地环附近构造一条合适的曲线，我们援引 Cheeger–Colding 线段不等式，并将其特化到双曲曲面的情形。

定理 9.13 （Cheeger–Colding 线段不等式（双曲曲面版本））. 设 C 为配备完备双曲度量 μ_{KE}、常曲率 -1的黎曼曲面。设 A、B、$W \subset C$为博雷尔可测子集，并设 $u\colon C \to [0,\infty)$ 为非负博雷尔可测函数。对任意一对$(x,y) \in A \times B$，选取一条连接 x 与 y的极短测地线$\mathbf{c}_{x,y}\colon [0,1] \to C$。假设这些测地线完全落在 W内，即$\mathbf{c}_{x,y} \subset W$。设 $d_W = \mathrm{diam}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(W)$ 表示 W的直径。则

$$\begin{aligned}\int_{A\times B}\int_0^1 u(\mathbf{c}_{x,y}(t))dt\,\mu_{\mathrm{KE}}(x)\wedge\mu_{\mathrm{KE}}(y) &\le \cosh\left(\frac{d_W}{2}\right)\Bigg(\mu_{\mathrm{KE}}(A)\cdot\sup_{x\in A,t\in[\frac12,1]}\int_{\mathbf{c}_{x,B}(t)}u\mu_{\mathrm{KE}}\\ &\qquad +\mu_{\mathrm{KE}}(B)\cdot\sup_{y\in B,t\in[0,\frac12]}\int_{\mathbf{c}_{A,y}(t)}u\mu_{\mathrm{KE}}\Bigg)\\ &\le \cosh\left(\frac{d_W}{2}\right)(\mu_{\mathrm{KE}}(A)+\mu_{\mathrm{KE}}(B))\int_W u\mu_{\mathrm{KE}},\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{c}_{x,B}(t) = \{\mathbf{c}_{x,y}(t)\colon\ y\in B$ 且从 x 到 y 的极短测地线是唯一的$\}$，并且 $\mathbf{c}_{A,y}(t)$ 类似地定义。

注 9.14。 对任意点 $x \in C$， C 中通过多于一条极短测地线与 x 相连的点的集合包含在 x的“割迹”中，因而为零测集 [Heb94，IT98]。因此，若将积分限制于由唯一极短测地线相连的点对，则 Cheeger–Colding 线段不等式中出现的积分保持不变。

证明。 由里奇比较（见 [Pet06，引理 7.1.2]），对任意 $x \in A$ 与 $t \in (0,1)$,

$$\int_B u(\mathbf{c}_{x,y}(t))\mu_{\mathrm{KE}}(y) = \int_{\mathbf{c}_{x,B}(1)} u(\mathbf{c}_{x,y}(t))\mu_{\mathrm{KE}}(y) \le \frac{\sinh d_W}{\sinh(td_W)}\int_{\mathbf{c}_{x,B}(t)} u\mu_{\mathrm{KE}}.$$

注意，测度 $\mu_{\mathrm{KE}}(B\setminus\mathbf{c}_{x,B}(1)) = 0$。由此可得

$$\int_A\int_B\int_{\frac12}^1 u(\mathbf{c}_{x,y}(t))dt\wedge\mu_{\mathrm{KE}}(y)\wedge\mu_{\mathrm{KE}}(x) \le \frac{\sinh d_W}{2\sinh\frac{d_W}{2}}\mu_{\mathrm{KE}}(A)\cdot\sup_{x\in A,t\in[\frac12,1]}\int_{\mathbf{c}_{x,B}(t)}u\mu_{\mathrm{KE}}.$$

类似地，

$$\int_B\int_A\int_0^{\frac12} u(\mathbf{c}_{x,y}(t))dt\wedge\mu_{\mathrm{KE}}(x)\wedge\mu_{\mathrm{KE}}(y) \le \frac{\sinh d_W}{2\sinh\frac{d_W}{2}}\mu_{\mathrm{KE}}(B)\cdot\sup_{y\in B,t\in[0,\frac12]}\int_{\mathbf{c}_{A,y}(t)}u\mu_{\mathrm{KE}}.$$

将这两个估计结合起来，即得所述不等式。更多细节见 [CC96，定理 2.11] 或[Pet06，定理 7.1.10]。 □

接下来，我们考察与短测地线相关联、且与回路相交的峰截面$\mathbf{c}_0$，该回路是在引理 9.12 中构造的。特别地，我们应用 Cheeger–Colding 线段不等式，推导出这些峰截面沿相应测地线的周期下界。

引理 9.15。 设 C 是一个亏格为 $g \geq 2$ 的紧黎曼曲面，配备常曲率为 -1 的双曲度量 μ_{KE}。设 γ_0 是 (C, μ_{KE}) 上最短的非分离简单闭测地线，并设$\mathbf{c}_0$是引理 *9.12* 中定义的闭测地线。假设 $\ell(\gamma_0) \leq 2$反双曲正弦 1 8。

令 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_m$ 为满足 $\ell(\gamma_j) \leq 2$反双曲正弦 1 2且与$\mathbf{c}_0$相交的简单闭测地线。对于每个$l = 1, \ldots, m$, 令 α_{γ_l} 表示沿着 γ_l 的 $\Gamma(C, \omega_C)$ 中的峰截面。令 $J_0 \subset \{0, \ldots, m\}$ 表示指标集合 j，其中 γ_j 是非分离的。

那么，对于任意满足 $\ell(\gamma_l) \leq 2$反双曲正弦 1 3的 γ_l，有

$$\left| \int_{\gamma_l} \alpha_{\gamma_l} \right| \geq \frac{\sqrt{\pi}}{240\sqrt{g-1} + \left(\sum_{j \in J_0} \left| \frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)} - \nu(\gamma_j) \right| \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

证明。 令 β_{γ_l} 为表示 γ_l的庞加莱对偶的调和形式。则沿着 γ_l 的 $\Gamma(C, \omega_C)$ 中的峰截面由 $\alpha_{\gamma_l} = \frac{-\sqrt{2}}{2\|\beta_{\gamma_l}\|_{L^2;C}} (\star\beta_{\gamma_l} - i\beta_{\gamma_l})$ 给出，因此

$$\int_{\gamma_l} \alpha_{\gamma_l} = \int_C \alpha_{\gamma_l} \wedge \beta_{\gamma_l} = \int_C \frac{-\sqrt{2}}{2\|\beta_{\gamma_l}\|_{L^2;C}} (\star\beta_{\gamma_l} - i\beta_{\gamma_l}) \wedge \beta_{\gamma_l} = \sqrt{2}\|\beta_{\gamma_l}\|_{L^2;C}.$$

现在我们来估计 $\|\beta_{\gamma_l}\|_{L^2;C}$。

令 $\rho_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to C$ 为万有覆盖映射，令 $\tilde{\mathbf{c}}_1 : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ 为提升 $\mathbf{c}_0$,的单位速度参数化，并设 $\mathbf{c}_1 = \rho_{\mathcal{H}} \circ \tilde{\mathbf{c}}_1$。为方便起见，我们记作 $\gamma_{j+m+1} = \gamma_j$。对 $\tilde{\mathbf{c}}_1$, 重新参数化后，我们可以选取常数 $\{\mathbf{r}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$，使得 $\mathbf{r}_0 = 0$, $\mathbf{r}_{2j} < \mathbf{r}_{2j+1}$，$\mathbf{r}_{2j-1} \leq \mathbf{r}_{2j}$，$\mathbf{r}_{2m+2+j} = \ell(\mathbf{c}_0) + \mathbf{r}_j$，且 $\mathbf{c}_1([\mathbf{r}_{2j}, \mathbf{r}_{2j+1}])$ 是 $\mathbf{c}_0 \cap \mathscr{C}(\gamma_j)$ 中包含 $\mathbf{c}_0 \cap \gamma_j$的连通分支，其中 $\mathscr{C}(\gamma_j)$ 是 γ_j的领圈。由引理 7.10，存在全纯坐标

$$z_j : \mathscr{C}(\gamma_j) \to \overline{\mathbb{D}_{e^{-\nu(\gamma_j)}}(0)} \setminus \mathbb{D}_{e^{\nu(\gamma_j) - \frac{2\pi^2}{\ell(\gamma_j)}}}(0)$$

使得 $|z_j(\mathbf{c}_1(\mathbf{r}))|$ 在 $[\mathbf{r}_{2j}, \mathbf{r}_{2j+1}]$上严格递增，其中 $\nu(\gamma_j) \in (0, 2\ell^{\pi}(\gamma_j))$ 满足 $\nu(\gamma_j)\ell(\gamma_j) = 2\pi$ 反双曲正弦 $\left(\text{双曲正切 } \ell\left(\frac{\gamma_j}{2}\right)\right)$。另见推论 7.6。

现在，我们选取点 $\mathbf{r}'_{2j}$、$\mathbf{r}'_{2j+1} \in (\mathbf{r}_{2j}$、$\mathbf{r}_{2j+1})$，使得 $|z_j(\mathbf{r}'_{2j})| = e^{2\nu(\gamma_j) - \frac{2\pi^2}{\ell}(\gamma_j)}$, 且 $|z_j(\mathbf{r}'_{2j+1})| = e^{-2\nu(\gamma_j)}$。令 $\mathbf{r} \in \mathbb{R}$。根据上述构造和推论 7.6，我们得出：若对所有 $j \in \mathbb{Z}$，$\mathbf{r} \notin (\mathbf{r}'_{2j}, \mathbf{r}'_{2j+1})$，则 $\mathrm{inj}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(\mathbf{c}_1(\mathbf{r}))$ $\geq$ 反双曲正弦 1 2。

对于任意 $j \in \mathbb{Z}$，选取 $N_j + 1$ 个点 $\mathbf{r}'_{2j-1} = \mathbf{r}''_{j,0} < \mathbf{r}''_{j,1} < \cdots < \mathbf{r}''_{j,N_j} = \mathbf{r}'_{2j}$，使区间 $[\mathbf{r}'_{2j-1}, \mathbf{r}'_{2j}]$ 被等分为 N_j 段，且满足 $\mathbf{c}_1(\mathbf{r}''_{j,k}) = \mathbf{c}_1(\mathbf{r}''_{j+m+1,k})$，以及 $\mathbf{r}''_{j,k+1} - \mathbf{r}''_{j,k} \in [1, \frac{3}{2}]$反双曲正弦。这是可行的，因为命题 7.11 表明 $|\mathbf{r}'_{2j} - \mathbf{r}'_{2j-1}| \geq 2$对数 $2 > 2$反双曲正弦 1 2。

设$\mathbf{r}'''_{j,k} = \frac{\mathbf{r}''_{j,k} + \mathbf{r}''_{j,k+1}}{2}$ 为 $[\mathbf{r}''_{j,k}, \mathbf{r}''_{j,k+1}]$的中点。令

$$\widetilde{B}_{j,k} = \left\{ \tau \in \mathcal{H} : \mathrm{dist}_{\mu_{\mathcal{H}}}(\tau, \tilde{\mathbf{c}}_1(\mathbf{r}''_{j,k})) < \operatorname{arcsinh} \frac{1}{2} \right\},$$

and

$$\widetilde{W}_{j,k} = \left\{ \tau \in \mathcal{H} : \mathrm{dist}_{\mu_{\mathcal{H}}} \left(\tau, \tilde{\mathbf{c}}_1 \left(\mathbf{r}'''_{j,k} \right) \right) < \operatorname{arcsinh} \frac{1}{2} + \frac{\mathbf{r}''_{j,k+1} - \mathbf{r}''_{j,k}}{2} \right\},$$

其中 $\mu_{\mathcal{H}} = \rho_{\mathcal{H}}^* \mu_{\mathrm{KE}}$ 是 μ_{KE}的拉回。记 $B_{j,k} = \rho_{\mathcal{H}}(\widetilde{B}_{j,k})$ 和 $W_{j,k} = \rho_{\mathcal{H}}(\widetilde{W}_{j,k})$。由于 $\mathrm{inj}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(\mathbf{c}_1(\mathbf{r}''_{j,k}))$ $\geq$反双曲正弦 1 2，$\rho_{\mathcal{H}}|_{\widetilde{B}_{j,k}} : \widetilde{B}_{j,k} \to B_{j,k}$是一个微分同胚。通过直接计算，

$$\mu_{\mathrm{KE}}(B_{j,k}) = \mu_{\mathcal{H}}(\widetilde{B}_{j,k}) = 2\pi \int_0^{\operatorname{arcsinh} \frac{1}{2}} \sinh t dt = \pi(\sqrt{5} - 2),$$

and

$$\operatorname{diam}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(W_{j,k}) = \operatorname{diam}_{\mu_{\mathcal{H}}}(\widetilde{W}_{j,k}) = 2\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2} + \mathbf{r}''_{j,k+1} - \mathbf{r}''_{j,k} \le \frac{7}{2}\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}.$$

对于每个 $0 \le k < N_j$ 以及任意一组 $(\tilde{x}_{j,k}, \tilde{x}_{j,k+1}) \in B_{j,k} \times B_{j,k+1}$，都存在唯一的测地线段 $\tilde{\mathbf{c}}_{\tilde{x}_{j,k},\tilde{x}_{j,k+1}} : [0,1] \to \mathcal{H}$，连接 $\tilde{x}_{j,k}$ 和 $\tilde{x}_{j,k+1}$，且完全位于 $W_{j,k}$ 内。此外，根据双曲三角形公式（参见 [Bus92，定理 2.2.2]），对于任意 $t \in (0,1)$，

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}_{\mu_{\mathcal{H}}}(\tilde{\mathbf{c}}_{\tilde{x}_{j,k},\tilde{x}_{j,k+1}}(t), \tilde{\mathbf{c}}_{\tilde{\mathbf{c}}_1(\mathbf{r}''_{j,k}),\tilde{x}_{j,k+1}}(t)) &< \operatorname{arcsinh}\frac{1}{2},\\
\operatorname{dist}_{\mu_{\mathcal{H}}}(\tilde{\mathbf{c}}_{\tilde{x}_{j,k},\tilde{x}_{j,k+1}}(t), \tilde{\mathbf{c}}_{\tilde{x}_{j,k},\tilde{\mathbf{c}}_1(\mathbf{r}''_{j,k+1})}(t)) &< \operatorname{arcsinh}\frac{1}{2},\\
\operatorname{dist}_{\mu_{\mathcal{H}}}(\tilde{\mathbf{c}}_1(t\mathbf{r}''_{j,k+1} + (1-t)\mathbf{r}''_{j,k}), \tilde{\mathbf{c}}_{\tilde{\mathbf{c}}_1(\mathbf{r}''_{j,k}),\tilde{x}_{j,k+1}}(t)) &< \operatorname{arcsinh}\frac{1}{2},\\
\operatorname{dist}_{\mu_{\mathcal{H}}}(\tilde{\mathbf{c}}_1(t\mathbf{r}''_{j,k+1} + (1-t)\mathbf{r}''_{j,k}), \tilde{\mathbf{c}}_{\tilde{x}_{j,k},\tilde{\mathbf{c}}_1(\mathbf{r}''_{j,k+1})}(t)) &< \operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

现在，我们将 Cheeger–Colding 线段不等式应用于球 $B_{j,k}$。
记 $x_{j,k} = \rho_{\mathcal{H}}(\tilde{x}_{j,k})$ 和 $\mathbf{c}_{x_{j,k},x_{j,k+1}} = \rho_{\mathcal{H}} \circ \tilde{\mathbf{c}}_{\tilde{x}_{j,k},\tilde{x}_{j,k+1}}$。根据定义，我们有

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbf{c}_{x_{j,k},x_{j,k+1}}} \beta_{\gamma_l}\right| &\le \frac{\sqrt{2}}{2}\ell(\mathbf{c}_{x_{j,k},x_{j,k+1}})\int_0^1 \|\beta_{\gamma_l}\|_{\mathrm{hyp}}(\mathbf{c}_{x_{j,k},x_{j,k+1}}(t))dt\\
&\le \frac{7\sqrt{2}\cdot\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}}{4}\int_0^1 \|\beta_{\gamma_l}\|_{\mathrm{hyp}}(\mathbf{c}_{x_{j,k},x_{j,k+1}}(t))dt,
\end{aligned}$$

其中范数 $\|\cdot\|_{\mathrm{hyp}}$ 定义为 $\beta \wedge \star\beta = \frac{\|\beta\|^2}{\text{双曲空间 } 2}\ \mu_{\mathrm{KE}}$。由上述论证可知，对于任意 $t \in [0,1]$, $\operatorname{inj}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(\mathbf{c}_1(t\mathbf{r}''_{j,k+1} + (1-t)\mathbf{r}''_{j,k})) \ge$ 反双曲正弦 $1\,2$。因此，结合推论 7.6 与定理 9.13，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{j,k}\times B_{j,k+1}}\int_0^1 \|\beta_{\gamma_l}\|_{\mathrm{hyp}}(\mathbf{c}_{x_{j,k},x_{j,k+1}}(t))dt \wedge \mu_{\mathrm{KE}}(x_{j,k}) \wedge \mu_{\mathrm{KE}}(x_{j,k+1})\\
=\ &\int_{\widetilde{B}_{j,k}\times\widetilde{B}_{j,k+1}}\int_0^1 \|\beta_{\gamma_l}\|_{\mathrm{hyp}}(\rho_{\mathcal{H}}(\tilde{\mathbf{c}}_{\tilde{x}_{j,k},\tilde{x}_{j,k+1}}(t)))dt \wedge \mu_{\mathcal{H}}(\tilde{x}_{j,k}) \wedge \mu_{\mathcal{H}}(\tilde{x}_{j,k+1})\\
\le\ &\cosh\left(\frac{7}{4}\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}\right)\left(\mu_{\mathcal{H}}(\widetilde{B}_{j,k})\cdot\sup_{\tilde{x}_{j,k}\in\widetilde{B}_{j,k},t\in[\frac{1}{2},1]}\int_{\tilde{\mathbf{c}}_{\tilde{x}_{j,k},\widetilde{B}_{j,k+1}}(t)}(\|\beta_{\gamma_l}\|_{\mathrm{hyp}}\circ\rho_{\mathcal{H}})\mu_{\mathcal{H}}\right.\\
&\qquad\left.+\mu_{\mathcal{H}}(\widetilde{B}_{j,k+1})\cdot\sup_{\tilde{x}_{j,k+1}\in\widetilde{B}_{j,k+1},t\in[0,\frac{1}{2}]}\int_{\tilde{\mathbf{c}}_{\widetilde{B}_{j,k},\tilde{x}_{j,k+1}}(t)}(\|\beta_{\gamma_l}\|_{\mathrm{hyp}}\circ\rho_{\mathcal{H}})\mu_{\mathcal{H}}\right)\\
\le\ &2\pi(\sqrt{5}-2)\cosh\left(\frac{7}{4}\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}\right)\left(\sup_{\tilde{x}_{j,k}\in\widetilde{B}_{j,k},t\in[\frac{1}{2},1]}\int_{\rho_{\mathcal{H}}(\tilde{\mathbf{c}}_{\tilde{x}_{j,k},\widetilde{B}_{j,k+1}}(t))}\|\beta_{\gamma_l}\|_{\mathrm{hyp}}\mu_{\mathrm{KE}}\right.\\
&\qquad\left.+\sup_{\tilde{x}_{j,k+1}\in\widetilde{B}_{j,k+1},t\in[0,\frac{1}{2}]}\int_{\rho_{\mathcal{H}}(\tilde{\mathbf{c}}_{\widetilde{B}_{j,k},\tilde{x}_{j,k+1}})(t)}\|\beta_{\gamma_l}\|_{\mathrm{hyp}}\mu_{\mathrm{KE}}\right)\\
\le\ &4\pi(\sqrt{5}-2)\cosh\left(\frac{7}{4}\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}\right)\int_{W_{j,k}}\|\beta_{\gamma_l}\|_{\mathrm{hyp}}\,\mu_{\mathrm{KE}},
\end{aligned}$$

其中 $\tilde{\mathbf{c}}_{\widetilde{B}_{j,k},\tilde{x}_{j,k+1}}(t)$ 和 $\tilde{\mathbf{c}}_{\tilde{x}_{j,k},\widetilde{B}_{j,k+1}}(t)$ 的定义同定理 9.13。

由此可得

$$\begin{aligned}
&⨍_{\prod_{k=0}^{N_j} B_{j,k}} \left| \sum_{k=0}^{N_j-1} \int_{\mathbf{c}_{x_{j,k},x_{j,k+1}}} \beta_{\gamma_l} \right| \bigwedge_{k=0}^{N_j} \mu_{\mathrm{KE}}(x_{j,k}) \\
\leq\ & \frac{7\sqrt{2}\cdot \operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}}{4} ⨍_{\prod_{k=0}^{N_j} B_{j,k}} \sum_{k=0}^{N_j-1} \int_0^1 \|\beta_{\gamma_l}\|_{\mathrm{hyp}}(\mathbf{c}_{x_{j,k},x_{j,k+1}}(t))dt \wedge \bigwedge_{k=0}^{N_j} \mu_{\mathrm{KE}}(x_{j,k}) \\
=\ & \sum_{k=0}^{N_j-1} \frac{7\sqrt{2}\cdot \operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}}{4\pi^2(\sqrt{5}-2)^2} \cdot \int_{B_{j,k}\times B_{j,k+1}} \int_0^1 \|\beta_{\gamma_l}\|_{\mathrm{hyp}}(\mathbf{c}_{x_{j,k},x_{j,k+1}}(t))dt \wedge \mu_{\mathrm{KE}}(x_{j,k}) \wedge \mu_{\mathrm{KE}}(x_{j,k+1}) \\
\leq\ & \frac{7\sqrt{2}\cdot \operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}\cosh\left(\frac{7}{4}\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}\right)}{\pi(\sqrt{5}-2)} \cdot \sum_{k=0}^{N_j-1} \int_{W_{j,k}} \|\beta_{\gamma_l}\|_{\mathrm{hyp}}\, \mu_{\mathrm{KE}},
\end{aligned}$$

其中 ffl 表示积分平均值。因此，对于任意 $\epsilon > 0$，都存在一组点 $x_{j,\,k} \in B_{j,\,k}$，使得

$$\left| \sum_{k=0}^{N_j-1} \int_{\mathbf{c}_{x_{j,k},x_{j,k+1}}} \beta_{\gamma_l} \right| \leq \epsilon + \frac{7\sqrt{2}\cdot \operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}\cosh\left(\frac{7}{4}\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}\right)}{\pi(\sqrt{5}-2)} \cdot \sum_{k=0}^{N_j-1} \int_{W_{j,k}} \|\beta_{\gamma_l}\|_{\mathrm{hyp}}\, d\mu_{\mathrm{KE}}.$$

由于 $|z_j(\mathbf{r}'_{2j+1})| = e^{-2\nu(\gamma_j)}$，由命题 7.11 可得

$$\operatorname{dist}_{\mu_{\mathrm{KE}}}\left(\mathbf{c}_1(\mathbf{r}''_{j+1,0}), \left\{x \in \mathscr{C}(\gamma_j) : \left|\frac{\log|z_j(x)|}{\nu(\gamma_j)} + \sqrt{5}\right| = 1\right\}\right) > \operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}.$$

因此，

$$B_{j+1,0} \subset \left\{x \in \mathscr{C}(\gamma_j) : \left|\frac{\log|z_j(x)|}{\nu(\gamma_j)} + \sqrt{5}\right| < 1\right\}.$$

同理，

$$B_{j,N_j} \subset \left\{x \in \mathscr{C}(\gamma_j) : \left|\frac{\log|z_j(x)| + \frac{2\pi^2}{\ell(\gamma_j)}}{\nu(\gamma_j)} - \sqrt{5}\right| < 1\right\}.$$

由定理 7.4，$\gamma_j \cap \gamma_l = \varnothing$，因此 $\int_{\gamma_j} \beta_{\gamma_l} = 0$。由此可得

$$\alpha'_{\gamma_l} = \beta_{\gamma_l} + i \star \beta_{\gamma_l} - \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_j} \star\beta_{\gamma_l}\right)\frac{dz_j}{z_j}$$

在 $\mathscr{C}(\gamma_j)$ 上定义了一个满足 $\int_{\gamma_j} \alpha'_{\gamma_l} = 0$ 的全纯 1-形式。应用命题 7.16，我们看到，对于任意一对 $(x_{j,\,N_j}, x_{j+1,\,0}) \in B_{j,\,N_j} \times B_{j+1,\,0}$，存在一条分段光滑曲线 $\mathbf{c}_{x_{j,\,N_j},\,x_{j+1,\,0}}$ 连接 $x_{j,\,N_j}$ 和 $x_{j+1,\,0}$，使得

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbf{c}_{x_{j,N_j},x_{j+1,0}}} \beta_{\gamma_l}\right| &= \left|\int_{\mathbf{c}_{x_{j,N_j},x_{j+1,0}}} \mathrm{Re}(\beta_{\gamma_l} + i\star\beta_{\gamma_l})\right| \\
&\leq \left(\frac{-4\log\left(1 - e^{-2(\sqrt{5}-2)\nu(\gamma_j)}\right)}{\pi(1-e^{-3\pi})\left(1 + e^{-\frac{2\pi^2}{\ell(\gamma_j)}+2(\sqrt{5}+1)\nu(\gamma_j)}\right)^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}} \|\beta_{\gamma_l} + i\star\beta_{\gamma_l}\|_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)} \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma_j}\star\beta_{\gamma_l}\right| \left|\frac{2\pi^2}{\ell(\gamma_j)} - 2(\sqrt{5}-1)\nu(\gamma_j)\right|,
\end{aligned}$$

其中 $\nu(\gamma_j) \in (0, \frac{\pi}{2\ell(\gamma_j)})$ 满足 $\nu(\gamma_j)\ell(\gamma_j) = 2\pi$ 反正弦 $\left(\text{双曲正切} \frac{\ell(\gamma_j)}{2}\right)$。此外，命题 7.11 意味着 $\nu(\gamma_j) \geq \pi$ 反正弦 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 反双曲正弦 $\frac{1}{2} \approx 2.83\cdots > \frac{5}{2}$。因此，

$$\begin{aligned} & \frac{-2\log\left(1-e^{-2(\sqrt{5}-2)\nu(\gamma_j)}\right)}{\pi(1-e^{-3\pi})\left(1+e^{-\frac{2\pi^2}{\ell(\gamma_j)}+2(\sqrt{5}+1)\nu(\gamma_j)}\right)^{-2}} \\ < & \frac{-2\log\left(1-e^{-5(\sqrt{5}-2)}\right)}{\pi(1-e^{-3\pi})\left(1+e^{-\frac{\pi^2}{\operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{2}\right)}+2(\sqrt{5}+1)\pi}\right)^{-2}} \approx 0.789\cdots < 1. \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbf{c}_{x_{j,N_j},x_{j+1,0}}} \beta_{\gamma_l}\right| &< \|\beta_{\gamma_l} + i\star\beta_{\gamma_l}\|_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)} + \frac{1}{\pi}\left|\int_{\gamma_j}\star\beta_{\gamma_l}\right|\left|\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)} - \nu(\gamma_j)\right| \\ &\leq 2\|\beta_{\gamma_l}\|_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)} + \frac{1}{\pi}\left|\int_{\gamma_j}\star\beta_{\gamma_l}\right|\left|\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)} - \nu(\gamma_j)\right|. \end{aligned}$$

令$\mathbf{c}_{\gamma_l}$ 为 C 上的分段光滑环，定义为

$$\mathbf{c}_{\gamma_l} = \left(\bigcup_{j=0}^{m}\bigcup_{k=0}^{N_j-1}\mathbf{c}_{x_{j,k},x_{j,k+1}}\right)\bigcup\left(\bigcup_{j=0}^{m}\mathbf{c}_{x_{j,N_j},x_{j+1,0}}\right).$$

下一步我们要证明 $|[\mathbf{c}_{\gamma_l}]\cap[\gamma_l]| \geq 1$。根据构造，同调类之差满足

$$[\mathbf{c}_{\gamma_l}] - [\mathbf{c}_0] \in \sum_{j=0}^{m}\mathbb{Z}[\gamma_j] \subset H_1(C;\mathbb{Z}),$$

其中 $[\gamma_j] \in H_1(C;\mathbb{Z})$ 表示由 γ_j 所代表的同调类。根据定理 7.4，短闭测地线 γ_j 两两不相交，因此

$$[\mathbf{c}_{\gamma_l}]\cap[\gamma_l] = [\mathbf{c}_0]\cap[\gamma_l] \neq 0.$$

由于 $[\mathbf{c}_{\gamma_l}]\cap[\gamma_l] \in \mathbb{Z}$，可得 $|[\mathbf{c}_{\gamma_l}]\cap[\gamma_l]| \geq 1$。因此，$\left|\int_{\mathbf{c}_{\gamma_l}}\beta_{\gamma_l}\right| = |[\mathbf{c}_{\gamma_l}]\cap[\gamma_l]| \geq 1$。另见[BT82b, (6.31)]。

于是，对于任意 $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} 1 &\leq \sum_{j=0}^{m}\left|\sum_{k=0}^{N_j-1}\int_{\mathbf{c}_{x_{j,k},x_{j,k+1}}}\beta_{\gamma_l}\right| + \sum_{j=0}^{m}\left|\int_{\mathbf{c}_{x_{j,N_j},x_{j+1,0}}}\beta_{\gamma_l}\right| \\ &\leq \epsilon + \frac{7\sqrt{2}\cdot\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}\cosh\left(\frac{7}{4}\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}\right)}{\pi(\sqrt{5}-2)}\cdot\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{N_j-1}\int_{W_{j,k}}\|\beta_{\gamma_l}\|_{\mathrm{hyp}}\mu_{\mathrm{KE}} \\ &\quad + 2\sum_{j=0}^{m}\|\beta_{\gamma_l}\|_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)} + \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{m}\left|\int_{\gamma_j}\star\beta_{\gamma_l}\right|\left|\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)} - \nu(\gamma_j)\right|. \end{aligned}$$

令 $\epsilon \to 0$，第一项便消失。接下来我们估计其余三项。

令 $y \in C$。现在我们估计 $\#\{W_{j,k} : y \in W_{j,k}\}$。若 $y \in W_{j,k} \cap W_{j',k'}$，则

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(\mathbf{c}_1(\mathbf{r}'''_{j,k}), \mathbf{c}_1(\mathbf{r}'''_{j',k'})) &\leq \operatorname{dist}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(y, \mathbf{c}_1(\mathbf{r}'''_{j,k})) + \operatorname{dist}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(y, \mathbf{c}_1(\mathbf{r}'''_{j',k'})) \\ &< \frac{|\mathbf{r}''_{j,0} - \mathbf{r}''_{j,1}| + |\mathbf{r}''_{j',0} - \mathbf{r}''_{j',1}|}{2} + 2\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

根据构造，我们有 $\frac{|\mathbf{r}''_{j,0}-\mathbf{r}''_{j,1}|+|\mathbf{r}''_{j',0}-\mathbf{r}''_{j',1}|}{2} \leq \frac{3}{2}$，反双曲正弦 $\frac{1}{2}$ 以及

$$\ell(\mathbf{c}_0) \geq 2\operatorname{arcsinh} 8 \approx 5.55294\cdots > \frac{21}{2}\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2} \approx 5.05272\cdots.$$

那么引理 9.12 推出存在一个整数 n 使得

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}'''_{j,k} - \mathbf{r}'''_{j',k'} - n\ell(\mathbf{c}_0)| &= \operatorname{dist}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(\mathbf{c}_1(\mathbf{r}'''_{j,k}), \mathbf{c}_1(\mathbf{r}'''_{j',k'})) \\ &< \frac{|\mathbf{r}''_{j,0} - \mathbf{r}''_{j,1}| + |\mathbf{r}''_{j',0} - \mathbf{r}''_{j',1}|}{2} + 2\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2} \\ &\leq \frac{7}{2}\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

不失一般性，假设存在 W_{j_0,k_0} 包含 y，使得对于任意包含y的 $W_{j,k}$，我们有

$$|\mathbf{r}'''_{j,k} - \mathbf{r}'''_{j_0,k_0}| < \frac{|\mathbf{r}''_{j,0} - \mathbf{r}''_{j,1}| + |\mathbf{r}''_{j_0,0} - \mathbf{r}''_{j_0,1}|}{2} + 2\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}.$$

对于任意一对 W_{j_0,k_1}，$W_{j_0,k_2} \in \{W_{j,k} : y \in W_{j,k}\}$，我们有

$$|\mathbf{r}'''_{j_0,k_1} - \mathbf{r}'''_{j_0,k_2}| = |k_1 - k_2||\mathbf{r}''_{j_0,1} - \mathbf{r}''_{j_0,0}| \leq 2\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2} + |\mathbf{r}''_{j_0,0} - \mathbf{r}''_{j_0,1}|,$$

因此 $|k_1 - k_2| \leq 2$。由此可得 $\#\{W_{j_0,k} : y \in W_{j_0,k}\} \leq 3$。

假设存在 W_{j_0,k_1}，$W_{j_1,k_2} \in \{W_{j,k} : y \in W_{j,k}\}$ 且 $m+1 \nmid j_1 - j_0$。不失一般性，我们可以假设 $j_0 + m \geq j_1 \geq j_0 + 1$。由命题 7.11 可得

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}'''_{j_0,k_1} - \mathbf{r}'''_{j_1,k_2}| &\geq |\mathbf{r}''_{j_0,N_{j_0}} - \mathbf{r}''_{j_0+1,0}| + \frac{|\mathbf{r}''_{j_0+1,0} - \mathbf{r}''_{j_0+1,1}| + |\mathbf{r}''_{j_0,N_{j_0}} - \mathbf{r}''_{j_0,N_{j_0}-1}|}{2} \\ &\geq 2\operatorname{arcsinh} 2 - \log\left(\frac{\tan(\frac{\ell(\gamma_{j_0})\nu(\gamma_{j_0})}{2\pi})}{\tan(\frac{\ell(\gamma_{j_0})\nu(\gamma_{j_0})}{4\pi})}\right) - \log\left(\frac{\tan(\frac{\ell(\gamma_{j_0+1})\nu(\gamma_{j_0+1})}{2\pi})}{\tan(\frac{\ell(\gamma_{j_0+1})\nu(\gamma_{j_0+1})}{4\pi})}\right) + \operatorname{arcsinh}\frac{1}{2} \\ &\geq 2\log(\sqrt{5}+2) - 2\log\left(\frac{\tan(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5})}{\tan(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5})}\right) + \operatorname{arcsinh}\frac{1}{2} \\ &= 2\log 2 + \operatorname{arcsinh}\frac{1}{2} > \frac{7}{2}\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2},\end{aligned}$$

矛盾。因此 $\#\{W_{j,k} : y \in W_{j,k}\} \leq 3$, $\forall y \in C$。然后

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{N_j-1}\int_{W_{j,k}} \|\beta_{\gamma_l}\|_{\mathrm{hyp}}\mu_{\mathrm{KE}} &\leq 3\int_C \|\beta_{\gamma_l}\|_{\mathrm{hyp}}\mu_{\mathrm{KE}} \\ &\leq 3\left(\int_C \|\beta_{\gamma_l}\|^2_{\mathrm{hyp}} d\mu_{\mathrm{KE}}\right)^{\frac{1}{2}} (\mu_{\mathrm{KE}}(C))^{\frac{1}{2}} \\ &= 12\sqrt{\pi(g-1)}\|\beta_{\gamma_l}\|_{L^2;C}.\end{aligned}$$

由于这些领圈 $\mathscr{C}(\gamma_j)$ 两两不相交，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m}\|\beta_{\gamma_l}\|_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)} &\leq \left((m+1)\sum_{j=0}^{m}\|\beta_{\gamma_l}\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \left((m+1)\|\beta_{\gamma_l}\|^2_{L^2;C}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{3(g-1)}\|\beta_{\gamma_l}\|_{L^2;C},\end{aligned}$$

其中最后一个不等式用到了定理 7.4，这意味着 $m+1\leq 3(g-1)$。

现在考虑 K¨ahler 领圈 $\mathscr{C}(\gamma_j)$。记 $z_j=\varsigma_j e^{i\theta_j}$ 为 $\mathscr{C}(\gamma_j)$ 上的极坐标。在 $\mathscr{C}(\gamma_j)$ 上，我们观察到分解

$$\star\beta_{\gamma_l}=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_j}\star\beta_{\gamma_l}\right)d\theta_j+\left(\star\beta_{\gamma_l}-\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_j}\star\beta_{\gamma_l}\right)d\theta_j\right)$$

是 L^2-正交的。因此

$$\begin{aligned}2\|\beta_{\gamma_l}\|^2_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)} &= \int_{\mathscr{C}(\gamma_j)}\beta_{\gamma_l}\wedge\star\beta_{\gamma_l}\geq\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_j}\star\beta_{\gamma_l}\right|^2\int_{\mathscr{C}(\gamma_j)}d\theta_j\wedge\star d\theta_j\\ &= \frac{1}{\pi}\left|\int_{\gamma_j}\star\beta_{\gamma_l}\right|^2\left(\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}-\nu(\gamma_j)\right).\end{aligned}$$

应用柯西–施瓦茨不等式，我们得到

$$\left(\sum_{j=0}^{m}\left|\int_{\gamma_j}\star\beta_{\gamma_l}\right|\left|\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}-\nu(\gamma_j)\right|\right)^2\leq 2\pi\|\beta_{\gamma_l}\|^2_{L^2;C}\left(\sum_{j\in J_0}\left|\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}-\nu(\gamma_j)\right|\right).$$

注意，当且仅当 $j\leq J_0\in\{0,\cdots,m\}$ 时，γ_j 是非分离的。

结合上述估计，直接计算可得

$$\begin{aligned}1 &\leq \frac{7\sqrt{2}\cdot\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}\cosh\left(\frac{7}{4}\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}\right)}{\pi(\sqrt{5}-2)}\cdot\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{N_j-1}\int_{W_{j,k}}\|\beta_{\gamma_l}\|_{\mathrm{hyp}}\mu_{\mathrm{KE}}\\ &\quad+2\sum_{j=0}^{m}\|\beta_{\gamma_l}\|_{L^2;\mathscr{C}(\gamma_j)}+\frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{m}\left|\int_{\gamma_j}\star\beta_{\gamma_l}\right|\left|\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}-\nu(\gamma_j)\right|\\ &\leq \frac{84\sqrt{2\pi}\cdot\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}\cosh\left(\frac{7}{4}\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}\right)\sqrt{g-1}}{\pi(\sqrt{5}-2)}\cdot\|\beta_{\gamma_l}\|_{L^2;C}\\ &\quad+2\sqrt{3(g-1)}\|\beta_{\gamma_l}\|_{L^2;C}+\frac{\sqrt{2\pi}}{\pi}\left(\sum_{j\in J_0}\left|\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}-\nu(\gamma_j)\right|\right)^{\frac{1}{2}}\|\beta_{\gamma_l}\|_{L^2;C}\\ &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(240\sqrt{g-1}+\left(\sum_{j\in J_0}\left|\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}-\nu(\gamma_j)\right|\right)^{\frac{1}{2}}\right)\|\beta_{\gamma_l}\|_{L^2;C}.\end{aligned}$$

注意，

$$\frac{84\cdot\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}\cosh\left(\frac{7}{4}\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{5}-2}+\sqrt{6\pi}\approx 239.960239024\cdots.$$

因此

$$\left|\int_{\gamma_l}\alpha_{\gamma_l}\right| \;=\; \sqrt{2}\|\beta_{\gamma_l}\|_{L^2;C} \geq \frac{\sqrt{\pi}}{240\sqrt{g-1}+\left(\sum_{j\in J_0}\left|\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}-\nu(\gamma_j)\right|\right)^{\frac{1}{2}}},$$

证明完毕。 □

在估计 φ-不变量之前，我们需要先介绍微积分中的以下初等引理。

引理 9.16. 令 $u(k,t)=\frac{1+kt^3}{(1+kt)^2}$，$k\in\mathbb{N}$，$t\in[0,1]$。则有以下结论：

(1) 对于任意给定的 $t\in[0,1]$，$u(k,t)\geq u(k+1,t)$，$\forall k\in\mathbb{N}$。

(2) 我们有 $u(3k-2,t)>\mathbf{I}_6(k)$，其中 $\mathbf{I}_6(k)$ 定义如下：

k	2	3	4	≥ 5
$\mathbf{I}_6(k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{7}{20}\cdot k^{-\frac{4}{3}}$

证明。我们首先证明 (1)。

将 $u(k,t)$ 延拓为实变量 $x\geq 1$ 的函数，方法是令 $u(x,t)=\frac{1+xt^3}{(1+xt)^2}$，$\forall x\in[1,\infty)$，$t\in[0,1]$。直接计算给出

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\frac{t(t^2-2-xt^3)}{(1+xt)^3}\leq 0,$$

从而 $u(k+1,t)\leq u(k,t)$，$\forall k\in\mathbb{N}$。这就证明了 (1)。

现在我们转向估计 (2)。

对任意 $k\in\mathbb{N}$，设 t_k 是 $(0,1)$ 中满足 $kt_k^3+3t_k^2=2$ 的唯一数。显然，$t_{k+1}<t_k,\forall k\in\mathbb{N}$。于是 $\frac{\partial u}{\partial t}(k,t)=\frac{kt^3+3t^2-2}{(1+kt)^3}$ 表明 $u(k,t)\geq u(k,t_k)$。此外，$kt_k^3+3t_k^2=2$ 蕴含 $u(k,t_k)=\frac{3t_k^4}{4}(1-t_k^2)$。

现在我们考虑 $k\in\{2,3,4\}$ 的情形。

由于 $2\cdot\left(\frac{67}{100}\right)^3+3\cdot\left(\frac{67}{100}\right)^2-2=-\frac{25887}{500000}<0$，我们有 $t_2>\frac{67}{100}$，因此

$$u(2,t_2)=\frac{3t_2^4}{4(1-t_2^2)}>\frac{3}{4}\cdot\frac{\left(\frac{67}{100}\right)^4}{1-\left(\frac{67}{100}\right)^2}>\frac{1}{4}.$$

同理可得 $t_5>\frac{29}{50}$ 和 $t_8>\frac{13}{25}$，从而得到 $u(5,t_5)>\frac{1}{8}$ 和 $u(8,t_8)>\frac{3}{40}$。由于 $kt_k^3+3t_k^2=2$，我们有

$$(k+1)^{\frac{4}{3}}u(k,t_k)=\frac{3}{4}\cdot(1-t_k)^{\frac{1}{3}}(1+t_k)^{-1}(2+2t_k-t_k^2)^{\frac{4}{3}}.$$

令 $u_1(t)=(1-t)(1+t)^{-3}(2+2t-t^2)^4$，$\forall t\in(0,1)$。于是 $(k+1)^{\frac{4}{3}}u(k,t)\geq\frac{3}{4}u_1(t_k)^{\frac{1}{3}}$。由于

$$\frac{du_1(t)}{dt}=\frac{6t(t^2-2)\cdot u_1(t)}{(1-t^2)(2+2t-t^2)}<0,$$

函数 $u_1(t)$ 在 t 上递减。此外，由于 $\frac{11}{8}+\frac{3}{4}=\frac{17}{8}>2$，我们有 $t_{11}<\frac{1}{2}$。因此，对于所有 $k\geq 11$，

$$(k+1)^{\frac{4}{3}}u(k,t)\geq\frac{3}{4}u_1(t_k)^{\frac{1}{3}}\geq\frac{3}{4}u_1\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{(11)^{\frac{4}{3}}}{16}>\frac{7\cdot 3^{\frac{4}{3}}}{20}.$$

引理得证。 □

结合引理 9.11、引理 9.15 和引理 9.16，我们得到 Zhang 的以下估计φ-不变量。

引理 9.17。 设 C 是一个亏格为 $g \geq 2$、配备常曲率为 $\mu_{\mathrm{KE}} -1$ 的双曲度量 的紧黎曼曲面。设 γ_0 是 (C, μ_{KE})上的最短非分离简单闭测地线，并设$\mathbf{c}_0$ 是引理 *9.12*中定义的测地环。

设 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_m$ 是与$\mathbf{c}_0$ 相交且满足 $\ell(\gamma_j) \leq 2$ 反双曲正弦 12的简单闭测地线。假设 $\ell(\gamma_0) \leq 2$ 反双曲正弦 18。令 $J_0 \subset \{0, \ldots, m\}$ 表示满足 γ_j 为非分离条件的指标集合 j。定义$\varkappa_j = \ell^{\pi^2}(\gamma_j) - \nu(\gamma_j)$ 以及 $\varkappa_\Sigma = \sum_{j \in J_0} \varkappa_j$。那么对于任意 $\epsilon \in (0, 12)$，若

$$\varkappa_0 \geq \max\left\{240(1+\epsilon) \cdot \sqrt{7(g-1)},\ \frac{7 \cdot (1+\epsilon)^2}{\mathbf{I}_6(g) \cdot \epsilon^2}\right\},$$

我们有

$$\varphi(C) \geq \min\left\{\frac{\varkappa_0}{3 \cdot (240)^2 (1+\epsilon)^2 g},\ \frac{\epsilon^4 (g-1) \mathbf{I}_6(g) \cdot \varkappa_0}{21(1+\epsilon)^4 g}\right\},$$

其中 $\mathbf{I}_6$ 是引理*9.16*中定义的常数。

证明。 令 α_j 表示沿着 γ_j的 $\Gamma(C, \omega_C)$中的峰截面，并令$\mathbf{t}_j = \left|\int_{\gamma_j} \alpha_j\right|$。根据引理9.15，若$\ell(\gamma_j) \leq 2$反双曲正弦13，则$\mathbf{t}_j \geq \frac{\sqrt{\pi}}{240\sqrt{g-1+\sqrt{\varkappa_\Sigma}}}$。设 $J_0' = \{j \in J_0 : \ \ell(\gamma_j) \leq 2$反双曲正弦 $\frac{1}{3}\}$。

结合命题9.2 与引理9.11，我们可得

$$\varphi(C) \geq \sum_{j=0}^{m} \max\left\{0, \frac{2(g-1)\mathbf{t}_j^2 \varkappa_j}{\pi g}\left(\frac{\mathbf{t}_j^2 \varkappa_j^2}{6\pi} - 1\right)\right\}.$$

令 $\epsilon \in (0, 12)$。

若 $\sqrt{\varkappa_\Sigma} \leq 240\epsilon\sqrt{g-1}$，则$\mathbf{t}_0 \geq \frac{\sqrt{\pi}}{240(1+\epsilon)\sqrt{g-1}}$，这意味着

$$\begin{aligned}\varphi(C) &\geq \frac{2\varkappa_0}{(240)^2(1+\epsilon)^2 g}\left(\frac{\varkappa_0^2}{6 \cdot (240)^2(1+\epsilon)^2(g-1)} - 1\right) \\ &\geq \frac{2\varkappa_0}{(240)^2(1+\epsilon)^2 g}\left(\frac{7}{6} - 1\right) = \frac{\varkappa_0}{3 \cdot (240)^2(1+\epsilon)^2 g}.\end{aligned}$$

若改为 $\sqrt{\varkappa_\Sigma} \geq 240\epsilon\sqrt{g-1}$，则对于任意 $j \in J_0'$，$\mathbf{t}_j \geq \frac{\epsilon\sqrt{\pi}}{(1+\epsilon)\sqrt{\varkappa_\Sigma}}$。利用这个界，并将求和范围从 J_0' 扩大到 J_0，我们得到

$$\varphi(C) \geq \frac{2\epsilon^2(g-1)}{(1+\epsilon)^2 g}\left(\frac{\epsilon^2 \sum_{j \in J_0'} \varkappa_j^3}{6(1+\epsilon)^2 \varkappa_\Sigma^2} - \frac{\sum_{j \in J_0'} \varkappa_j}{\varkappa_\Sigma}\right) \geq \frac{2\epsilon^2(g-1)}{(1+\epsilon)^2 g}\left(\frac{\epsilon^2 \sum_{j \in J_0} \varkappa_j^3}{6(1+\epsilon)^2 \varkappa_\Sigma^2} - 1\right),$$

这里我们利用了 $\ell(\gamma_j) \geq 2$ 反双曲正弦 13 蕴含 $\varkappa_j^2 < 6(1+\frac{1}{\epsilon})^2 \varkappa_\Sigma$。由引理 9.16 以及我们对$\kappa_0$的假设，可以得出

$$\varphi(C) \geq \frac{2\epsilon^2(g-1)}{(1+\epsilon)^2 g}\left(\frac{\epsilon^2 \mathbf{I}_6(g) \cdot \varkappa_0}{6(1+\epsilon)^2} - \frac{\epsilon^2 \mathbf{I}_6(g) \cdot \varkappa_0}{7(1+\epsilon)^2}\right) = \frac{\epsilon^4 (g-1) \mathbf{I}_6(g) \cdot \varkappa_0}{21(1+\epsilon)^4 g}.$$

证明至此完成。 □

现在，我们可以估计存在短非分离测地线的双曲黎曼曲面的 φ 不变量。

命题 9.18。 设 C 是亏格为 $g \geq 2$ 的紧黎曼曲面，并配备常曲率为 -1 的双曲度量μ_{KE} 。设 γ_0 是（C, μ_{KE}） 上最短的非分离简单闭测地线。假设 ℓ（γ_0） ≤ 2 反双曲正弦 1 8。

若 $\ell(\gamma_0) \leq \mathbf{I}_7(g)$，则 $\varphi(C) \geq \mathbf{I}_8(g)\,\ell(\gamma_0)$，其中常数 $\mathbf{I}_7(g)$、$\mathbf{I}_8(g)$ 列于下表：

g	2	3	4	≥ 5
$\mathbf{I}_7(g)$	$\frac{1}{80}$	$\frac{17}{2000}$	$\frac{4}{625}$	$\frac{1}{22}\cdot g^{-\frac{4}{3}}$
$\mathbf{I}_8(g)$	$\frac{1}{100000}$	$\frac{1}{120000}$	$\frac{1}{140000}$	$\frac{1}{30000}\cdot g^{-\frac{4}{3}}$

证明。令 $\mathfrak{c}_0$ 为引理 9.12 中定义的测地环。令 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_m$ 为满足 $\ell(\gamma_j) \leq 2$ 反双曲正弦 $\left(\frac{1}{2}\right)$ 且 $\gamma_j \cap \mathfrak{c}_0 \neq \varnothing$ 的短简单闭测地线。对于 $j = 0, \cdots, m$，令 α_{γ_j} 为沿着 γ_j、位于 $\Gamma(C, \omega_C)$ 中的峰截面，并令 $\mathscr{C}(\gamma_j)$ 为 γ_j 的领圈。将 $\ell^{\pi^2}(\gamma_j) - \nu(\gamma_j)$ 和 $\left|\int_{\gamma_j} \alpha_j\right|$ 分别记为 $\varkappa_j$ 和 $\mathfrak{t}_j$。令 $J_0 \subset \{0, \ldots, m\}$ 为满足 γ_j 是非分离的指标 j 的集合，并设 $\varkappa_\Sigma = \sum_{j \in J_0} \varkappa_j$。

对于任意 $g \geq 2$，通过下式定义 $\epsilon_1(g)$

g	2	3	4	≥ 5
$\epsilon_1(g)$	$\frac{47}{200}$	$\frac{113}{400}$	$\frac{42}{125}$	$\frac{11}{25}$

应用引理 9.17 并取 $\epsilon = \epsilon_1(g)$ 后，我们得出：如果 $\varkappa_0 \geq \vartheta_1(g)$，那么 $\varphi(C) \geq \epsilon_2(g)\varkappa_0$，其中 $\vartheta_1(g)$ 和 $\epsilon_2(g)$ 是由下式定义的常数：

g	2	3	4	≥ 5
$\vartheta_1(g)$	785	1155	1476	$\frac{429}{2}\cdot g^{\frac{4}{3}}$
$\epsilon_2(g)$	$\frac{1}{600000}$	$\frac{1}{1000000}$	$\frac{1}{1250000}$	$\frac{1}{250000}\cdot g^{-\frac{4}{3}}$

由于 $\varkappa_0 = \ell^{\pi^2}(\gamma_0) - \nu(\gamma_0)$ 且 $\nu(\gamma_0) < \pi$，我们可以得出：如果 $\ell(\gamma_0) \leq \vartheta_1\frac{\pi^2}{g}(\,)+\pi$，那么 $\varphi(C) \geq \epsilon_2(g)(\pi^2 - \nu(\gamma_0)\ell(\gamma_0))\,\ell(\gamma_0)$。因此，如果 $\ell(\gamma_0) \leq \mathbf{I}_7(g)$，那么 $\varphi(C) \geq \mathbf{I}_8(g)\,\ell(\gamma_0)$，其中常数 $\mathbf{I}_7(g)$、$\mathbf{I}_8(g)$ 如上表所示。证明完毕。 □

结合命题 9.6、命题9.10 和命题 9.18，我们得到 Zhang 的以下全局估计 φ-不变量。

定理 9.19。 设 C 是亏格为 $g \geq 2$的紧黎曼曲面，配备常曲率为 -1的双曲度量μ_{KE} 。记 $\mathrm{sys}(C)$ 为(C, μ_{KE}) 的最短闭测地线长度，并记 $\varphi(C)$ 为 C的 φ-不变量。那么

$$\varphi(C) \geq \max\left\{\xi_1(g), \frac{\xi_2(g)}{\mathrm{sys}(C)}\right\},$$

其中常数 $\xi_1(g)$、 $\xi_2(g)$ 由下表给出：

g	2	3	4	≥ 5
$\xi_1(g)$	$\frac{1}{6400}$	$\frac{1}{10900}$	$\frac{1}{15500}$	$\frac{1}{15625}\cdot g^{-\frac{1}{3}}$
$\xi_2(g)$	$\frac{1}{512000}$	$\frac{17}{21800000}$	$\frac{1}{2421875}$	$\frac{1}{343750}\cdot g^{-\frac{5}{3}}$

证明。 设 γ_0 是 (C, μ_{KE}) 上的最短闭测地线。那么 $\ell(\gamma_0) = \mathrm{sys}(C)$。令 $\mathbf{I}_7(g)$ 为命题 9.18中定义的常数。

如果 $\mathrm{sys}(C) \geq \mathbf{I}_7(g)$，则命题 9.6 给出

$$\varphi(C) \geq \frac{\mathbf{I}_5(g)\cdot \mathbf{I}_7(g)}{\mathbf{I}_7(g) + 2\,\mathrm{arcsinh}\,1},$$

其中 $\mathbf{I}_5(g)$ 是命题 9.6 中定义的常数。直接计算可得，当 $g=2$、3、4 时，我们得到 $\mathbf{I}_5(g)\cdot\mathbf{I}_7(g)\,\mathbf{I}_7(g)+2$ 反双曲正弦 $1\geq\xi_1(g)$。现在假设 $g\geq 5$。根据定义，可以验证 $\mathbf{I}_5(g)\geq \frac{g}{400}$，因此对于任意 $g\geq 5$，

$$\varphi(C)\geq \frac{\mathbf{I}_5(g)\cdot\mathbf{I}_7(g)}{\mathbf{I}_7(g)+2\operatorname{arcsinh}1}\geq \frac{g}{400}\cdot\frac{g^{-\frac{4}{3}}}{22}\cdot\frac{1}{2\operatorname{arcsinh}1+\frac{g^{-\frac{4}{3}}}{22}}\geq \frac{g^{-\frac{1}{3}}}{15625}=\xi_1(g).$$

此外，根据定义，我们有 $\xi_2(g)=\mathbf{I}_7(g)\cdot\xi_1(g)$。因此，

$$\varphi(C)\geq \max\left\{\xi_1(g),\frac{\xi_2(g)}{\operatorname{sys}(C)}\right\},\quad \text{if } \operatorname{sys}(C)\geq \mathbf{I}_7(g).$$

接下来，考虑 $\operatorname{sys}(C)\leq\mathbf{I}_7(g)$ 的情形。在这种情况下，$\max\left\{\xi_1(g),\frac{\xi_2(g)}{\operatorname{sys}(C)}\right\}=\frac{\xi_2}{(g)\operatorname{sys}(C)}$。

首先假设 γ_0 是不分离的。记 C_1, C_2 为 $C\setminus\left(\bigcup_{j=1}^m\gamma_j\right)$的两个连通分支，并记 g_1 和 g_2 分别为 C_1 和 C_2 的亏格。由于 $e^{15-\frac{\pi^2}{7}g}\mathbf{I}()\leq\frac{1}{4}$，命题 9.10 给出

$$\varphi(C)\geq\frac{\pi^2\cdot g_1g_2}{\operatorname{sys}(C)}\left(\frac{1}{g}-\frac{2}{g}\cdot e^{15-\frac{\pi^2}{\operatorname{sys}(C)}}\right)\geq\frac{\pi^2\cdot g_1(g-g_1)}{\operatorname{sys}(C)\cdot g}\left(1-\frac{1}{2}\right)\geq\frac{\pi^2}{4\operatorname{sys}(C)}>\frac{\xi_2(g)}{\operatorname{sys}(C)}.$$

若 γ_0 不分离，则将 $\mathbf{I}_8(g)\geq\xi_2(g)$ 与命题 9.18 结合，可得 $\varphi(C)\geq\frac{\xi_2}{(g)\operatorname{sys}(C)}$。这就证明了该定理。

□

10 法尔廷斯–埃尔基斯不变量的下界

设 C 是定义在 $\mathbb{C}$ 上、亏格为 $g\geq 2$ 的曲线，并令 ω_C 表示其典范丛。令 μ_{hyp} 为 C 上唯一的 K¨ahler 度量，其常曲率为 $4\pi(1-g)$，且归一化为体积 1。于是，$\mu_{\mathrm{KE}}=4\pi(g-1)\,\mu_{\mathrm{hyp}}$ 是 C 上唯一的 K¨ahler 度量，其常曲率为 -1。由于 $\dim C=1$，我们将 K¨ahler 度量 μ_{hyp} 与它诱导的测度等同。令 $\{\alpha_j\}_{j=1}^g$ 为 $\Gamma(C,\omega_C)$ 的一组 L^2-正交基。阿拉克洛夫 K¨ahler 度量定义为

$$\mu_{\mathrm{Ar}}=\frac{i}{2g}\sum_{k=1}^{g}\alpha_k\wedge\bar{\alpha}_k.$$

这个定义与基的选取无关。

令 G_{Ar} 和 G_{hyp} 分别表示与 μ_{Ar} 和 μ_{hyp} 相关联的格林函数。本节的目标是推导 Faltings–Elkies 不变量的显式下界

$$\mathrm{FE}_v(n,C)=\inf_{x_1,\dots,x_n\in C}\sum_{1\leq j<k\leq n}G_{\mathrm{Ar}}(x_j,x_k),$$

其中最重要的是一个以 Zhang 的 φ-不变量表示的显式界。

关键思路是将关于 Arakelov Green 函数的估计转化为涉及双曲几何数据的估计。第一步是注意到，两个 Green 函数之差可以用一个单变量函数表示。

定理 10.1。存在唯一的取值于 $\mathbb{R}$ 的光滑函数 ψ_{Ar}，定义在 C 上，使得

$$G_{\mathrm{Ar}}(x,y)-G_{\mathrm{hyp}}(x,y)=\psi_{\mathrm{Ar}}(x)+\psi_{\mathrm{Ar}}(y).$$

特别地，$dd^c\psi_{\mathrm{Ar}}=\mu_{\mathrm{Ar}}-\mu_{\mathrm{hyp}}$ 和 $\int_C\psi_{\mathrm{Ar}}\mu_{\mathrm{Ar}}+\int_C\psi_{\mathrm{Ar}}\mu_{\mathrm{hyp}}=0$。

证明。只需验证以下求和 $G_{\mathrm{hyp}}(x,y)+\psi_{\mathrm{Ar}}(x)+\psi_{\mathrm{Ar}}(y)$ 满足$G_{\mathrm{Ar}}(x,y)$ 的定义性质，然后利用格林函数的唯一性。更多细节见 [JK06，定理 3。8]。

□

作为建立显式下界估计的准备步骤，我们证明以下引理。证明基于与 [Aut01，命题 3.2 类似的论证。5], 该论证推广了 Faltings 和 Elkies 的原始估计 [Lan88，定理 5。1]。

引理 10.2. 设 x_1、$\cdots$、x_n 是 C 上两两不同的点。那么对于任意 $t>0$ ，

$$\sum_{1\leq j<k\leq n} G_{\mathrm{Ar}}(x_j,x_k)\geq -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} G_{\mathrm{hyp}}(x_j,x_j;t)-\frac{n(n-1)t}{2}\left(1+\sup_C\left|\frac{\mu_{\mathrm{Ar}}}{\mu_{\mathrm{hyp}}}-1\right|\right).$$

证明。 设 ψ_{Ar} 是定理 10.1中定义的函数，且 $\psi_t(x)$ 是双曲热方程 $\frac{du}{dt}=\Delta_{\mathrm{hyp},x}u$ 在初始数据 $u(x;0)=\psi_{\mathrm{Ar}}(x)$ 下的解。令 $a_l=\int_C(\psi_{\mathrm{Ar}}\phi_{\mathrm{hyp},l})\mu_{\mathrm{hyp}}$, $\forall l\geq 0$。那么$\psi_t(x)=\sum_{l=0}^{\infty}a_l e^{-t\lambda_{\mathrm{hyp},l}}\phi_{\mathrm{hyp},l}(x)$。由于 $\frac{d\psi_{t(x)}}{dt}=\Delta_{\mathrm{hyp},x}\psi_t(x)$ 也满足热方程，我们可以应用最大值原理证明

$$\begin{aligned}|\psi_t(x)-\psi_{\mathrm{Ar}}(x)| &= \left|\int_0^t\frac{d}{d\varsigma}\psi_\varsigma(x)d\varsigma\right|=\left|\int_0^t\Delta_{\mathrm{hyp},x}\psi_\varsigma(x)d\varsigma\right|\\ &\leq t\sup_C|\Delta_{\mathrm{hyp},x}\psi_{\mathrm{Ar}}(x)|=t\sup_C\left|\frac{\mu_{\mathrm{Ar}}-\mu_{\mathrm{hyp}}}{\mu_{\mathrm{hyp}}}\right|.\end{aligned}$$

根据热方程的最大值原理，我们有 $G_{\mathrm{hyp}}(x,y;\,t)\leq t+G_{\mathrm{hyp}}(x,y)$, $\forall x\neq y$。另见[Lan88，引理 5。2]。于是我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq j<k\leq n}G_{\mathrm{Ar}}(x_j,x_k) &= \sum_{1\leq j<k\leq n}(G_{\mathrm{hyp}}(x_j,x_k)+\psi_{\mathrm{Ar}}(x_j)+\psi_{\mathrm{Ar}}(x_k))\\ &\geq \sum_{1\leq j<k\leq n}G_{\mathrm{hyp}}(x_j,x_k;t)-\frac{n(n-1)t}{2}\\ &\quad+(n-1)\sum_{j=1}^{n}\psi_{\frac{t}{2}}(x_j)-\frac{n(n-1)t}{2}\sup_C\left|\frac{\mu_{\mathrm{Ar}}}{\mu_{\mathrm{hyp}}}-1\right|.\end{aligned}$$

对任意 $l\geq 1$，设 $\Phi_l(t)=\sum_{j=1}^{n}e^{-\frac{t\lambda_{\mathrm{hyp}}}{2}{}^{l}}\phi_{\mathrm{hyp},\,l}(x_j)$。因此我们有

$$\sum_{j=1}^{n}\psi_{\frac{t}{2}}(x_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{\infty}e^{-\frac{t\lambda_{\mathrm{hyp},l}}{2}}a_l\phi_{\mathrm{hyp},l}(x_j)=na_0+\sum_{l=1}^{\infty}a_l\Phi_l(t),$$

and

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq j<k\leq n}G_{\mathrm{hyp}}(x_j,x_k;t) &= \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{1\leq j<k\leq n}\frac{e^{-t\lambda_{\mathrm{hyp},l}}}{\lambda_{\mathrm{hyp},l}}\phi_{\mathrm{hyp},l}(x_j)\phi_{\mathrm{hyp},l}(x_k)\\ &= \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\Phi_l^2(t)}{2\lambda_{\mathrm{hyp},l}}-\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{e^{-t\lambda_{\mathrm{hyp},l}}}{2\lambda_{\mathrm{hyp},l}}(\phi_{\mathrm{hyp},l}(x_j))^2\\ &= \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\Phi_l^2(t)}{2\lambda_{\mathrm{hyp},l}}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}G_{\mathrm{hyp};t}(x_j,x_j).\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\sum_{1\le j<k\le n} G_{\mathrm{Ar}}(x_j,x_k) &\ge \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\Phi_l^2(t)}{2\lambda_{\mathrm{hyp},l}}+(n-1)\sum_{l=1}^{\infty}a_l\Phi_l(t)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}G_{\mathrm{hyp};t}(x_j,x_j)\\ &\quad +n(n-1)a_0-\frac{n(n-1)t}{2}\left(1+\|\mathbf{b}_0-1\|_{\sup}\right)\\ &\ge -\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2a_l^2\lambda_{\mathrm{hyp},l}}{2}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}G_{\mathrm{hyp};t}(x_j,x_j)\\ &\quad +n(n-1)a_0-\frac{n(n-1)t}{2}\left(1+\sup_C\left|\frac{\mu_{\mathrm{Ar}}}{\mu_{\mathrm{hyp}}}-1\right|\right).\end{aligned}$$

根据定义，我们有 $a_0=\int_C\psi_{\mathrm{Ar}}d\mu_{\mathrm{hyp}}$ 并且

$$\sum_{l=1}^{\infty}a_l^2\lambda_{\mathrm{hyp},l}=-\int_C\psi_{\mathrm{Ar}}dd^c\psi_{\mathrm{Ar}}=\int_C\psi_{\mathrm{Ar}}(\mu_{\mathrm{hyp}}-\mu_{\mathrm{Ar}})=2\int_C\psi_{\mathrm{Ar}}\mu_{\mathrm{hyp}}=2a_0.$$

因此 $a_0>0$，并且

$$\begin{aligned}n(n-1)a_0-\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2a_l^2\lambda_{\mathrm{hyp},l}}{2} &= n(n-1)a_0-(n-1)^2a_0\\ &= (n-1)a_0\ge 0.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

应用引理 10.2 和 $t=\frac{1}{40n(g-1)}$，~~我们得~~到以下估计。

引理 10.3。 设 x_1、$\cdots$、x_n 是 C 上两两不同的点。则

$$\begin{aligned}\sum_{1\le j<k\le n} G_{\mathrm{Ar}}(x_j,x_k) &\ge -\frac{n-1}{80(g-1)}\left(1+\sup_C\left|\frac{\mathbf{b}_0}{g}-1\right|\right)\\ &\quad -\frac{5n}{2(g-1)}\sup_{x\in C}\left|K_{\mathrm{hyp}}\left(x,x;\frac{1}{40(g-1)}\right)\right|\\ &\quad -\frac{n}{2}\int_{\frac{1}{40n(g-1)}}^{\frac{1}{40(g-1)}}\sup_{x\in C}K_{\mathrm{hyp}}(x,x;\varsigma)d\varsigma\\ &\quad -\frac{n}{2}\sum_{0<\lambda_{\mathrm{KE},l}\le\frac{1}{20\pi}}\frac{\sup_C|\phi_{\mathrm{KE},l}|^2}{\lambda_{\mathrm{KE},l}},\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{b}_0(x)$ 是与 $(\Gamma(C,\omega_C)\ \mu_{\mathrm{hyp}})$相关联的伯格曼核函数。

证明。 由引理10.2 结合 $t=\frac{1}{40n(g-1)}$，~~可~~得

$$\frac{n(n-1)t}{2}\left(1+\sup_C\left|\frac{\mu_{\mathrm{Ar}}}{\mu_{\mathrm{hyp}}}-1\right|\right)=\frac{n-1}{80(g-1)}\left(1+\frac{1}{g}\sup_{x\in C}|\mathbf{b}_0(x)-g|\right).$$

因此，我们只需证明，对于每个 $j=1,..,n$,

$$\begin{aligned}G_{\mathrm{hyp}}\left(x_j,x_j;\frac{1}{40n(g-1)}\right) &\le \sum_{\lambda_{\mathrm{KE},l}\le\frac{1}{20\pi}}\frac{\sup_C|\phi_{\mathrm{KE},l}|^2}{\lambda_{\mathrm{KE},l}}+\int_{\frac{1}{40n(g-1)}}^{\frac{1}{40(g-1)}}\sup_{x\in C}|K_{\mathrm{hyp}}(x,x;\varsigma)|\,d\varsigma\\ &\quad +\frac{5}{g-1}\sup_{x\in C}\left|K_{\mathrm{hyp}}\left(x,x;\frac{1}{40(g-1)}\right)\right|.\end{aligned}$$

根据定义，我们有

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{hyp}}\left(x_j, x_j; \frac{1}{40n(g-1)}\right) &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda_{\mathrm{hyp},l}}{40n(g-1)}}}{\lambda_{\mathrm{hyp},l}} |\phi_{\mathrm{hyp},l}(x_j)|^2 \\ &\leq \sum_{\lambda_{\mathrm{hyp},l} \geq \frac{g-1}{5}} \frac{e^{-\frac{\lambda_{\mathrm{hyp},l}}{40n(g-1)}}}{\lambda_{\mathrm{hyp},l}} |\phi_{\mathrm{hyp},l}(x_j)|^2 \\ &\quad + \sum_{0<\lambda_{\mathrm{hyp},l} \leq \frac{g-1}{5}} \frac{|\phi_{\mathrm{hyp},l}(x_j)|^2}{\lambda_{\mathrm{hyp},l}}. \end{aligned}$$

只需证明

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_{\mathrm{hyp},l} \geq \frac{g-1}{5}} \frac{e^{-\frac{\lambda_{\mathrm{hyp},l}}{40n(g-1)}}}{\lambda_{\mathrm{hyp},l}} |\phi_{\mathrm{hyp},l}(x_j)|^2 &\leq \int_{\frac{1}{40n(g-1)}}^{\frac{1}{40(g-1)}} \sup_{x \in C} K_{\mathrm{hyp}}(x, x; \varsigma) d\varsigma \\ &\quad + \frac{5}{g-1} \sup_{x \in C} \left| K_{\mathrm{hyp}}\left(x, x; \frac{1}{40(g-1)}\right)\right|. \end{aligned}$$

事实上，根据热核的定义，

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{40n(g-1)}}^{\frac{1}{40(g-1)}} K_{\mathrm{hyp}}(x, x; \varsigma) d\varsigma &= \int_{\frac{1}{40n(g-1)}}^{\frac{1}{40(g-1)}} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\varsigma \lambda_{\mathrm{hyp},l}} |\phi_{\mathrm{hyp},l}(x)|^2 d\varsigma \\ &\geq \sum_{\lambda_{\mathrm{hyp},l} \geq \frac{g-1}{5}} \frac{e^{-\frac{\lambda_{\mathrm{hyp},l}}{40n(g-1)}}}{\lambda_{\mathrm{hyp},l}} |\phi_{\mathrm{hyp},l}(x)|^2 - \sum_{\lambda_{\mathrm{hyp},l} \geq \frac{g-1}{5}} \frac{e^{-\frac{\lambda_{\mathrm{hyp},l}}{40(g-1)}}}{\lambda_{\mathrm{hyp},l}} |\phi_{\mathrm{hyp},l}(x)|^2 \\ &\geq \sum_{\lambda_{\mathrm{hyp},l} \geq \frac{g-1}{5}} \frac{e^{-\frac{\lambda_{\mathrm{hyp},l}}{40n(g-1)}}}{\lambda_{\mathrm{hyp},l}} |\phi_{\mathrm{hyp},l}(x)|^2 - \frac{5}{g-1} \sum_{\lambda_{\mathrm{hyp},l} \geq \frac{g-1}{5}} e^{-\frac{\lambda_{\mathrm{hyp},l}}{40(g-1)}} |\phi_{\mathrm{hyp},l}(x)|^2 \\ &\geq \sum_{\lambda_{\mathrm{hyp},l} \geq \frac{g-1}{5}} \frac{e^{-\frac{\lambda_{\mathrm{hyp},l}}{40n(g-1)}}}{\lambda_{\mathrm{hyp},l}} |\phi_{\mathrm{hyp},l}(x)|^2 - \frac{5}{g-1} \sup_{x \in C} \left| K_{\mathrm{hyp}}\left(x, x; \frac{1}{40(g-1)}\right)\right|, \end{aligned}$$

引理得证。 □

现在我们估计引理 10.3 右侧的三个部分。第一项涉及伯格曼核，对此我们有如下界。

引理 10.4。令 $\varphi(C)$ 表示 C 的 *Zhang* φ-不变量，并令 $\mathbf{b}_0$ 为与 $(\Gamma(C, \omega_C)\ \mu_{\mathrm{hyp}})$关联的伯格曼核函数。以下不等式链成立：

$$\frac{n-1}{80(g-1)} \left(1 + \sup_C \left|\frac{\mathbf{b}_0}{g} - 1\right|\right) < \frac{n}{8g} \cdot \left(1 + \frac{2}{\mathrm{sys}(C)}\right) \leq \frac{n}{8g} \cdot \left(\frac{1}{\xi_1} + \frac{2}{\xi_2}\right) \cdot \varphi(C),$$

其中 $\mathrm{sys}(C)$ 表示 (C, μ_{KE}) 的最短闭测地线长度，而 $\xi_1(g)$、$\xi_2(g)$ 是定理*9.19*中定义的正常数。

注记 10.5. 引理 10.4 中的第一个不等式改进了 Jorgensen–Kramer [JK14，命题 4。4]。更准确地说，他们证明了对于任意无分歧覆盖 $C \to C_0$,

$$\sup_C \frac{\mu_{\mathrm{Ar}}}{\mu_{\mathrm{hyp}}} \leq \frac{1.2 \cdot 10^3 e^{\mathrm{sys}(C_0)/2}}{(1 - e^{-\mathrm{sys}(C_0)/4})^{5/2}}.$$

虽然我们的引理仅在 $C_0 = C$的情形下陈述，但 [JK14] 中考虑的一般情形可以立即推出。事实上，将该引理与不等式 $\mathrm{sys}(C) \geq \mathrm{sys}(C_0)$ 一起应用即可。特别地，我们的估计将分母中的指数从 5 2 改进为 1。

证明。令 $\mathbf{b}0,\mu_{\mathrm{KE}}$ 为与 $(\Gamma(C,\omega_C)\ \mu_{\mathrm{KE}})$ 相关联的伯格曼核函数。由于 $\mu_{\mathrm{KE}} = 4\pi(g-1)\mu_{\mathrm{hyp}}$，可得 $\mathbf{b}_0 = 4\pi(g-1)\mathbf{b}0,\mu_{\mathrm{KE}}$。由于 C 是紧的，存在一点 $x \in C$，使得 $\mathbf{b}0,\mu_{\mathrm{KE}}(x) = \sup_C |\mathbf{b}0,\mu_{\mathrm{KE}}|$。为估计该量，我们考虑从庞加莱圆盘出发的覆盖映射 $\rho_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \to C$，使得 $\rho_{\mathbb{D}}(0) = x$。令 $\alpha \in \Gamma(C,\omega_C)$ 为 x处的峰截面。于是 $\frac{i}{2}\int_C \alpha\wedge\bar{\alpha} = 1$。记作$\rho_{\mathbb{D}}^*\alpha = \mathbf{f}(z)dz$。由于 $\rho_{\mathbb{D}}^*\mu_{\mathrm{KE}}(0) = 2idz\wedge d\bar{z}$，我们得到 $\mathbf{b}0,\mu_{\mathrm{KE}}(x) = \frac{1}{4}|\mathbf{f}(0)|^2$。

由引理 7.8，可得

$$\#\left(\rho_{\mathbb{D}}^{-1}(y)\cap\mathbb{D}_{\sqrt{2}-1}(0)\right) < 1 + \frac{2\,\mathrm{arcsinh}\,1}{\mathrm{sys}(C)},\quad \forall y\in C,$$

其中，$\mathrm{sys}(C)$ 表示 $(C,\ \mu_{\mathrm{KE}})$ 的最短闭测地线长度，即 $(C,\ \mu_{\mathrm{KE}})$ 上最短闭测地线的长度。因此

$$\begin{aligned}\pi\left(\sqrt{2}-1\right)^2|\mathbf{f}(0)|^2 &\leq \int_{\mathbb{D}_{\sqrt{2}-1}(0)}|\mathbf{f}(z)|^2\mu_{\mathrm{Euc}}\\ &= \frac{i}{2}\int_{\mathbb{D}_{\sqrt{2}-1}(0)}\rho_{\mathbb{D}}^*\alpha\wedge\rho_{\mathbb{D}}^*\bar{\alpha}\\ &\leq 1+\frac{2\,\mathrm{arcsinh}\,1}{\mathrm{sys}(C)}.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\sup_{x\in C}|\mathbf{b}_0(x)| &= 4\pi(g-1)\mathbf{b}_{0,\mu_{\mathrm{KE}}}(x) = \pi(g-1)|\mathbf{f}(0)|^2\\ &\leq \left(\sqrt{2}+1\right)^2(g-1)\left(1+\tfrac{2\,\mathrm{arcsinh}\,1}{\mathrm{sys}(C)}\right),\end{aligned}$$

从而

$$1+\sup_{x\in C}\left|\frac{\mathbf{b}_0(x)}{g}-1\right| \leq \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2(g-1)}{g}\left(1+\frac{2\,\mathrm{arcsinh}\,1}{\mathrm{sys}(C)}\right).$$

由定理 9.19，可得

$$\begin{aligned}\frac{n-1}{80(g-1)}\left(1+\sup_{x\in C}\left|\frac{\mathbf{b}_0(x)}{g}-1\right|\right) &\leq \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2(n-1)}{80g}\left(1+\frac{2\,\mathrm{arcsinh}\,1}{\mathrm{sys}(C)}\right)\\ &< \frac{9n}{80g}\left(1+\frac{2}{\mathrm{sys}(C)}\right)\\ &< \frac{n}{8g}\cdot\left(\frac{1}{\xi_1(g)}+\frac{2}{\xi_2(g)}\right)\cdot\varphi(C).\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

接下来，我们要估计双曲热核的上确界范数。

引理 10.6. 设 $x\in C$，且 $n\geq 2$。则有

$$\begin{aligned}\frac{5n}{2(g-1)}\sup_{x\in C}\left|K_{\mathrm{hyp}}\left(x,x;\frac{1}{40(g-1)}\right)\right| &< \left(51+\frac{100}{\mathrm{sys}(C)}\right)n\\ &\leq \left(\frac{51}{\xi_1(g)}+\frac{100}{\xi_2(g)}\right)n\varphi(C),\end{aligned}$$

其中 $\xi_1(g)$、$\xi_2(g)$ 是定理 *9.19*中定义的正常数。

证明。 根据引理 8.3，有

$$\begin{aligned}\sup_{x\in C}\left|K_{\mathrm{hyp}}\left(x,x;\frac{1}{40(g-1)}\right)\right| &< \frac{40(g-1)}{2}+\frac{6\sqrt{g-1}}{\mathrm{sys}(C)}\cdot\sqrt{40(g-1)}+\frac{g-1}{100}\cdot\left(1+\frac{4\,\mathrm{arcsinh}\,1}{\mathrm{sys}(C)}\right)\\ &= \frac{2001(g-1)}{100}+\left(6\sqrt{40}+\frac{\mathrm{arcsinh}\,1}{25}\right)\cdot\frac{g-1}{\mathrm{sys}(C)}\\ &< \frac{2001(g-1)}{100}+\frac{40(g-1)}{\mathrm{sys}(C)}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{5n}{2(g-1)}\sup_{x\in C}\left|K_{\mathrm{hyp}}\left(x,x;\frac{1}{40(g-1)}\right)\right| &< 51n+\frac{100n}{\mathrm{sys}(C)}\\ &\le \left(\frac{51}{\xi_1(g)}+\frac{100}{\xi_2(g)}\right)n\varphi(C),\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

接下来我们考虑涉及双曲热核的积分。

引理 10.7。 设 $x\in C$，且 $n\ge 2$。则有

$$\begin{aligned}\frac{n}{2}\int_{\frac{1}{40n(g-1)}}^{\frac{1}{40(g-1)}}K_{\mathrm{hyp}}(x,x;t)dt &< \frac{n\log n}{4}+\left(\frac{1}{8000}+\frac{1}{\mathrm{sys}(C)}\right)n\\ &\le \frac{n\log n}{4\xi_1(g)}\varphi(C)+\left(\frac{1}{8000\xi_1(g)}+\frac{1}{\xi_2(g)}\right)n\varphi(C),\end{aligned}$$

其中 $\xi_1(g)$， $\xi_2(g)$ 是定理9.19中定义的正常数。

证明。 应用引理8.3，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{40n(g-1)}}^{\frac{1}{40(g-1)}}K_{\mathrm{hyp}}(x,x;t)dt &< \int_{\frac{1}{40n(g-1)}}^{\frac{1}{40(g-1)}}\frac{1}{2t}+\frac{6\sqrt{g-1}}{\sqrt{t}\cdot\mathrm{sys}(C)}+\frac{g-1}{100}\cdot\left(1+\frac{4\,\mathrm{arcsinh}\,1}{\mathrm{sys}(C)}\right)dt\\ &= \frac{\log n}{2}+\frac{12\sqrt{g-1}}{\mathrm{sys}(C)}\left(\sqrt{\frac{1}{40(g-1)}}-\sqrt{\frac{1}{40n(g-1)}}\right)\\ &\quad+\frac{g-1}{100}\cdot\left(1+\frac{4\,\mathrm{arcsinh}\,1}{\mathrm{sys}(C)}\right)\cdot\left(\frac{1}{40(g-1)}-\frac{1}{40n(g-1)}\right)\\ &< \frac{\log n}{2}+\frac{1}{4000}+\left(\frac{3\sqrt{10}}{5}+\frac{\mathrm{arcsinh}\,1}{1000}\right)\frac{1}{\mathrm{sys}(C)}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\frac{n}{2}\int_{\frac{1}{40n(g-1)}}^{\frac{1}{40(g-1)}}K_{\mathrm{hyp}}(x,x;t)dt &< \frac{n}{2}\left(\frac{\log n}{2}+\frac{1}{4000}+\left(\frac{3\sqrt{10}}{5}+\frac{\mathrm{arcsinh}\,1}{1000}\right)\frac{1}{\mathrm{sys}(C)}\right)\\ &< \frac{n\log n}{4}+\left(\frac{1}{8000}+\frac{1}{\mathrm{sys}(C)}\right)n.\end{aligned}$$

根据定理9.19，我们得出

$$\frac{n}{2}\int_{\frac{1}{40n(g-1)}}^{\frac{1}{40(g-1)}}K_{\mathrm{hyp}}(x,x;t)dt < \frac{n\log n}{4\xi_1(g)}\varphi(C)+\left(\frac{1}{8000\xi_1(g)}+\frac{1}{\xi_2(g)}\right)n\varphi(C),$$

其中， $\xi_1(g)$、 $\xi_2(g)$ 是定理 9.19 中定义的正常数。至此，证明完成。 □

剩余项来自小特征值。为处理这一部分，我们首先根据 Zhang 的 φ-不变量，建立第一个非零特征值的定量下界。以下引理给出了这一结果。

引理 10.8. 设 C 是亏格为 $g \geq 2$的连通光滑复曲线， μ_{KE} 是 C 上曲率为 -1的唯一 *Kähler* 度量，且 $\varphi(C)$ 是 C的 φ-不变量。那么有以下估计：

$$\frac{1}{\lambda_{\mathrm{KE},1}} < \min\left\{\frac{98\pi^3(g-1)^2}{\mathrm{sys}(C)}, \frac{385\pi^3(g-1)\cdot\varphi(C)}{\xi_2(g)}\right\},$$

其中 $\mathrm{sys}(C)$ 表示 (C,μ_{KE})的最短闭测地线长度，而常数 $\xi_2(g)$ 是定理 *9.19*中定义的正实常数。

证明。 第一个不等式 $\frac{1}{\lambda_{\mathrm{KE},1}} \leq \frac{98\pi^3}{(g-1)^2\,\mathrm{sys}(C)}$ 直接由命题 8.10得出。另请参见该命题后的评注。现在我们转向第二个不等式。

根据命题 8.10，其陈述中的备选情况 (1)–(3) 必有一种成立。我们先考虑 (1) 或 (2) 适用的情形。在这种情况下，我们得到

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathrm{KE},1} &\geq \min\left\{\frac{1}{8\pi}, \frac{1}{32\pi^3(g-1)^2}, \frac{\ell_\Sigma(C,\mu_{\mathrm{KE}})}{2\pi^3}, \frac{1}{52\pi^3(g-1)^2}\right\}\\ &\geq \min\left\{\frac{\ell_\Sigma(C,\mu_{\mathrm{KE}})}{2\pi^3}, \frac{1}{52\pi^3(g-1)^2}\right\} \geq \min\left\{\frac{\mathrm{sys}(C)}{2\pi^3}, \frac{1}{52\pi^3(g-1)^2}\right\},\end{aligned}$$

其中 $\ell_\Sigma(C,\mu)$ 表示分离多重曲线中所有测地线总长度的下确界，而 $\mathrm{sys}(C)$ 表示 (C,μ_{KE}) 的最短闭测地线长度。由定理 9.19，我们得出

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_{\mathrm{KE},1}} &\leq \max\left\{\frac{2\pi^3}{\mathrm{sys}(C)}, 52\pi^3(g-1)^2\right\}\\ &\leq \max\left\{\frac{2\pi^3}{\xi_2(g)}, \frac{52\pi^3(g-1)^2}{\xi_1(g)}\right\}\cdot\varphi(C) < \frac{385\pi^3(g-1)\cdot\varphi(C)}{\xi_2(g)}.\end{aligned}$$

这里 $\xi_1(g)$， $\xi_2(g)$ 是定理 9.19中定义的正常数，我们用到了以下事实： $\xi_1(g) > 20g^{\frac{4}{3}}\,\xi_2(g)$。

现在假设命题 8.10 中的 (iii) 成立。那么存在一条极小分离多重曲线$\{\gamma_j\}_{j=1}^m$ ，将 C 分成两部分 C_1, C_2，使得

$$\lambda_{\mathrm{KE},1} \geq \frac{\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j)}{8\pi^3}\cdot\frac{1}{\min\left\{7(g_1-1)+5m, 7(g_2-1)+5m, \frac{7(g-1)}{2}\right\}^2},$$

其中 g_1、 g_2 分别是 C_1 和 C_2的亏格。

现在我们考虑三种子情形。如果 $\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j) > 6^{\,1}$对数$g$，那么

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_{\mathrm{KE},1}} &\leq \frac{8\pi^3}{\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j)}\cdot\min\left\{7(g_1-1)+5m, 7(g_2-1)+5m, \frac{7(g-1)}{2}\right\}^2\\ &\leq 8\pi^3\cdot(6\log g)\cdot\frac{49(g-1)^2}{4} = 588\pi^3(g-1)^2\log g\\ &\leq \frac{588\pi^3(g-1)^2\log g}{\xi_1(g)}\cdot\varphi(C) < \frac{90\pi^3(g-1)}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C).\end{aligned}$$

另一方面 并且，若 $\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j) \leq \frac{1}{6}$对数$g$且 $m \leq \frac{4}{5}\cdot$最小值$\{g_1,g_2\}$，则 $g_1+g_2+m-1=g$蕴含 s

$m \le \frac{2g+2}{7}$。在这种情况下，命题 9.10 给出

$$\begin{aligned}
\varphi(C) &\ge \frac{\pi^2\cdot(g_1-m+1)(g_2-m+1)}{\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j)}\cdot\left(\frac{g-3(m-1)}{g^2}-\frac{2}{g}\cdot e^{15-\frac{\pi^2}{\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j)}}\right)\\
&\ge \frac{\pi^2\cdot g_1g_2}{25\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j)}\cdot\left(\frac{g+15}{7g^2}-\frac{2}{g}\cdot e^{15-59\log g}\right)\\
&> \frac{\pi^2\cdot(g_1+g_2-1)}{25\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j)}\cdot\frac{1}{7g}=\frac{\pi^2\cdot(g-m)}{25\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j)}\cdot\frac{1}{7g}\\
&> \frac{\pi^2}{25\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j)}\cdot\frac{5g-2}{7}\cdot\frac{1}{7g}>\frac{\pi^2}{400}\cdot\frac{1}{\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j)}.
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_{\mathrm{KE},1}} &\le \frac{8\pi^3}{\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j)}\cdot\min\left\{7(g_1-1)+5m, 7(g_2-1)+5m, \frac{7(g-1)}{2}\right\}^2\\
&\le 98\pi^3(g-1)^2\cdot\frac{1}{\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j)}<98\pi^3(g-1)^2\cdot\frac{400}{\pi^2}\varphi(C)\\
&= 39200\pi\cdot(g-1)^2\cdot\varphi(C)<\frac{g-1}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C).
\end{aligned}$$

m最后，在剩下的情形中，若 $\sum_{j=1} \ell(\gamma_j) \le \frac{1}{6}$ 对数 g 且 $m \ge \frac{4}{5}\min\{g_1, g_2\}$，不妨设 $g_1 \le g_2$。于是 $7g_1+5m \le \frac{55}{4}m$，因此

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_{\mathrm{KE},1}} &\le \frac{8\pi^3}{\sum_{j=1}^m \ell(\gamma_j)}\cdot\min\left\{7(g_1-1)+5m, 7(g_2-1)+5m, \frac{7(g-1)}{2}\right\}^2\\
&\le \frac{8\pi^3\cdot\min\left\{\frac{55}{4}m, \frac{7(g-1)}{2}\right\}^2}{m\cdot\mathrm{sys}(C)}=\frac{8\pi^3}{\mathrm{sys}(C)}\cdot\min\left\{\frac{55}{4}\sqrt{m}, \frac{7(g-1)}{2\sqrt{m}}\right\}^2\\
&\le \frac{8\pi^3}{\mathrm{sys}(C)}\cdot\frac{55}{4}\cdot\frac{7(g-1)}{2}=\frac{385\pi^3\cdot(g-1)}{\mathrm{sys}(C)}\le\frac{385\pi^3(g-1)\cdot\varphi(C)}{\xi_2(g)}.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

现在我们可以估计小特征值的贡献。

引理 10.9. 设 C 是亏格为 $g \ge 2$的连通光滑复曲线， μ_{KE} 是 C 上常曲率为 -1的唯一 *K¨ähler* 度量，且 $\varphi(C)$ 是 C的 φ-不变量。则下述估计成立：

$$\frac{n}{2}\sum_{0<\lambda_{\mathrm{KE},l}\le\frac{1}{20\pi}}\frac{\sup_C|\phi_{\mathrm{KE},l}|^2}{\lambda_{\mathrm{KE},l}}<616\pi^3(g-1)(2g-3)n\cdot\min\left\{\frac{\varphi(C)}{\xi_2(g)}, \frac{14(g-1)\cdot\max\{1,\mathrm{sys}(C)\}}{55\cdot\mathrm{sys}(C)}\right\},$$

其中 $\mathrm{sys}(C)$ 表示 (C,μ_{KE})的最短闭测地线长度，常数 $\xi_2(g)$ 是定理 *9.19*中定义的正实常数。

证明。 由于 $\Delta_{\mathrm{KE}}=\frac{1}{2\pi}\star_{\mathrm{KE}}d\star_{\mathrm{KE}}d$，可得 $\lambda_{\mathrm{KE},\ l}\le\frac{1}{20\pi}$ 当且仅当 $\lambda^{\mathrm{Rm}}_{\mathrm{KE},\ l}\le\frac{1}{10}$。回顾 [OR09 中的定理 ´eor` eme 2]：若 $\lambda^{\mathrm{Rm}}_{\mathrm{KE},\ l}\le\frac{1}{4}$，则$-l\le 2g-3$。因此，只需证明对于 $0<\lambda_{\mathrm{KE},\ l}\le\frac{1}{20\pi}$，

$$\frac{\sup_C|\phi_{\mathrm{KE},l}|^2}{\lambda_{\mathrm{KE},l}}<1232\pi^3(g-1)\cdot\min\left\{\frac{\varphi(C)}{\xi_2(g)}, \frac{14(g-1)\cdot\max\{1,\mathrm{sys}(C)\}}{55\cdot\mathrm{sys}(C)}\right\}.$$

根据命题 8.16，在这种情况下我们得到

$$\sup_C |\phi_{\mathrm{KE},l}|^2 \le \max\left\{2\cdot \mathrm{sys}(C)^{-8\pi\lambda_{\mathrm{KE},l}}+1, \frac{16}{5}\right\}.$$

若 $\sup_C |\phi_{\mathrm{KE},l}|^2 \le \frac{16}{5}$，则由引理 10.8，可得

$$\frac{\sup_C |\phi_{\mathrm{KE},l}|^2}{\lambda_{\mathrm{KE},l}} \le \frac{16}{5}\cdot\frac{1}{\lambda_{\mathrm{KE},1}} < 1232\pi^3(g-1)\cdot\min\left\{\frac{\varphi(C)}{\xi_2(g)}, \frac{14(g-1)\cdot\max\{1,\mathrm{sys}(C)\}}{55\cdot\mathrm{sys}(C)}\right\}.$$

否则，设 $\sup_C |\phi_{\mathrm{KE},l}|^2 \le 2\cdot\mathrm{sys}(C)^{-8\pi\lambda_{\mathrm{KE},l}}+1$。由定理 9.19，可得 $\frac{1}{\mathrm{sys}(C)} \le \frac{\varphi}{(C)\xi_2(g)}$。因此

$$\frac{\sup_C |\phi_{\mathrm{KE},l}|^2}{\lambda_{\mathrm{KE},l}} \le \frac{2\cdot\mathrm{sys}(C)^{-8\pi\lambda_{\mathrm{KE},l}}+1}{\lambda_{\mathrm{KE},l}} < \frac{2}{\lambda_{\mathrm{KE},l}}\cdot\left(\frac{\varphi(C)}{\xi_2(g)}\right)^{8\pi\lambda_{\mathrm{KE},l}} + \frac{1}{\lambda_{\mathrm{KE},l}}.$$

令 $\lambda_{\min} = \frac{\xi_2(g)}{385\pi^3(g-1)\cdot\varphi(C)}$ 以及 $\lambda_{\max} = \frac{1}{20\pi}$ 由凸性可得，

$$\frac{1}{\lambda_{\mathrm{KE},l}}\cdot\left(\frac{\varphi(C)}{\xi_2(g)}\right)^{8\pi\lambda_{\mathrm{KE},l}} < \max\left\{\frac{1}{\lambda_{\max}}\cdot\left(\frac{\varphi(C)}{\xi_2(g)}\right)^{8\pi\lambda_{\max}}, \frac{1}{\lambda_{\min}}\cdot\left(\frac{\varphi(C)}{\xi_2(g)}\right)^{8\pi\lambda_{\min}}\right\}.$$

在 $\lambda_{\max}$ 和 $\lambda_{\min}$ 处求值，得到

$$\frac{1}{\lambda_{\max}}\cdot\left(\frac{\varphi(C)}{\xi_2(g)}\right)^{8\pi\lambda_{\max}} = 20\pi\cdot\left(\frac{\varphi(C)}{\xi_2(g)}\right)^{\frac{2}{5}} \le \frac{20\pi}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C),$$

and

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_{\min}}\cdot\left(\frac{\varphi(C)}{\xi_2(g)}\right)^{8\pi\lambda_{\min}} &= \frac{385\pi^3(g-1)\cdot\varphi(C)}{\xi_2(g)}\cdot\left(\frac{\varphi(C)}{\xi_2(g)}\right)^{\frac{8\xi_2(g)}{385\pi^2(g-1)\cdot\varphi(C)}}\\ &\le \frac{385\pi^3(g-1)\cdot\varphi(C)}{\xi_2(g)}\cdot\sup_{t>0} e^{\frac{8\log t}{385\pi^2(g-1)\cdot t}}\\ &\le \frac{385\pi^3(g-1)\cdot\varphi(C)}{\xi_2(g)}\cdot e^{\frac{8}{385e\pi^2}}.\end{aligned}$$

由此可知

$$\frac{\sup_C |\phi_{\mathrm{KE},l}|^2}{\lambda_{\mathrm{KE},l}} < \frac{385\pi^3(g-1)\cdot\varphi(C)}{\xi_2(g)}\cdot\left(2e^{\frac{8}{385e\pi^2}}+1\right) < \frac{1232\pi^3(g-1)}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C).$$

设 $\lambda'_{\min} = \frac{\mathrm{sys}(C)}{98\pi^3(g-1)^2}$。与上文类似，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{sys}(C)^{-8\pi\lambda_{\mathrm{KE},l}}}{\lambda_{\mathrm{KE},l}} &< \max\left\{\frac{\mathrm{sys}(C)^{-8\pi\lambda_{\max}}}{\lambda_{\max}}, \frac{\mathrm{sys}(C)^{-8\pi\lambda'_{\min}}}{\lambda'_{\min}}\right\}\\ &\le \max\left\{20\pi\cdot\mathrm{sys}(C)^{-\frac{2}{5}}, \frac{98\pi^3(g-1)^2\mathrm{sys}(C)^{-\frac{4\cdot\mathrm{sys}(C)}{49\pi^2}}}{\mathrm{sys}(C)}\right\}\\ &\le 98\pi^3 e^{\frac{4}{49e\pi^2}}(g-1)^2\cdot\frac{\max\{1,\mathrm{sys}(C)\}}{\mathrm{sys}(C)}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\sup\limits_{C}|\phi_{\mathrm{KE},l}|^2}{\lambda_{\mathrm{KE},l}} &\leq \frac{2\cdot \mathrm{sys}(C)^{-8\pi\lambda_{\mathrm{KE},l}}+1}{\lambda_{\mathrm{KE},l}} \leq 98\pi^3(2e^{\frac{4}{49e\pi^2}}+1)(g-1)^2\cdot\frac{\max\{1,\mathrm{sys}(C)\}}{\mathrm{sys}(C)}\\ &< \frac{1568\pi^3(g-1)^2\cdot\max\{1,\mathrm{sys}(C)\}}{5\cdot\mathrm{sys}(C)},\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

结合引理 10.3、引理 10.4、引理 10.6、引理 10.7和引理10.9，我们首先得到如下关于最短闭测地线长度的法尔廷斯—埃尔基斯型估计。

命题 10.10. 设 x_1、$\cdots$、x_n 是 C 上两两不同的点。那么我们有 e

$$\sum_{1\leq j<k\leq n} G_{\mathrm{Ar}}(x_j,x_k)\geq -\frac{1}{4}n\log n-\frac{400\pi^3(g-1)^3\max\{1,\mathrm{sys}(C)\}}{\mathrm{sys}(C)}n,$$

其中 $\mathrm{sys}(C)$ 是$(C$、$\mu_{\mathrm{KE}})$的最短闭测地线长度。

证明。 通过结合 引理10.3、引理 10.4、引理 10.6、引理10.7 和引理10.9，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq j<k\leq n} G_{\mathrm{Ar}}(x_j,x_k) &\geq -\frac{n}{8g}\cdot\left(1+\frac{2}{\mathrm{sys}(C)}\right)-\left(51+\frac{100}{\mathrm{sys}(C)}\right)n\\ &\quad -\frac{n\log n}{4}-\left(\frac{1}{8000}+\frac{1}{\mathrm{sys}(C)}\right)n\\ &\quad -\frac{784\pi^3(g-1)^2(2g-3)n}{5}\cdot\max\left\{1,\frac{1}{\mathrm{sys}(C)}\right\}\\ &> -\frac{n\log n}{4}-400\pi^3(g-1)^3n\cdot\max\left\{1,\frac{1}{\mathrm{sys}(C)}\right\},\end{aligned}$$

其中，$\mathrm{sys}(C)$ 是 $(C,\ \mu_{\mathrm{KE}})$ 的最短闭测地线长度。证明至此完成。 □

上述结果给出了基于最短闭测地线长度的下界。相比之下，下一个定理将以 Zhang 的 φ-不变量给出类似的估计；这一不变量对于我们后续的论证至关重要。

定理 m 10.11（定理 3.5）。设 x_1、$\cdots$、x_n 是 C 上两两不同的点。那么我们有 e

$$\sum_{1\leq j<k\leq n} G_{\mathrm{Ar}}(x_j,x_k)\geq -\left(\xi_3(g)n\log n+\xi_4(g)n\right)\cdot\varphi(C)\geq -\left(4\cdot 10^3 g^{\frac{1}{3}}n\log n+1.32\cdot 10^{10}g^{\frac{11}{3}}n\right)\cdot\varphi(C),$$

其中常数 $\xi_3(g)$、$\xi_4(g)$ 列于下表：

g	$\xi_3(g)$	$\xi_4(g)$
2	1600	19558263230
3	2725	195942159193
4	3875	832634802404
≥ 5	$4000\cdot g^{\frac{1}{3}}$	$13131158175\cdot g^{\frac{11}{3}}$

.

证明。 再次结合这五个引理，得到

$$\begin{aligned}\sum_{1\le j<k\le n} G_{\mathrm{Ar}}(x_j,x_k) &\ge -\frac{n}{8g}\cdot\left(\frac{1}{\xi_1}+\frac{2}{\xi_2}\right)\cdot\varphi(C)-n\cdot\left(\frac{51}{\xi_1}+\frac{100}{\xi_2}\right)\cdot\varphi(C)\\ &\quad -\frac{n\log n}{4\xi_1(g)}\cdot\varphi(C)-\left(\frac{1}{8000\xi_1(g)}+\frac{1}{\xi_2(g)}\right)n\varphi(C)\\ &\quad -\frac{616\pi^3(g-1)(2g-3)n}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C)\\ &\ge -\frac{n\log n}{4\xi_1(g)}\cdot\varphi(C)-\frac{1232\pi^3(g-1)^2n}{\xi_2(g)}\varphi(C),\end{aligned}$$

其中常数 $\xi_1(g)$、 $\xi_2(g$是定理9.19中定义的正常数 .

最后，容易验证

$$\frac{1}{4\xi_1(g)}\le\xi_3(g)\qquad\text{and}\qquad\frac{1232\pi^3(g-1)^2}{\xi_2(g)}\le\xi_4(g),$$

由此得证。 □

11 阿拉克洛夫度量与双曲度量

设 C 是 $\mathbb{C}$上的亏格为 $g\ge 2$ 的曲线，并令 ω_C 表示其典范丛。令 μ_{hyp} 表示 C 上曲率为 $4\pi(1-g)$且体积为 1 的唯一 K¨ahler 度量，并令 $\mu_{\mathrm{KE}}=4\pi(g-1)\mu_{\mathrm{hyp}}$ 表示 C 上曲率为 -1的唯一 K¨ahler 度量。由于 dim $C=1$，我们将 K¨ahler 度量 μ与其对应的体积形式和测度等同。令$\{\alpha_j\}_{j=1}^g$ 为 $\Gamma(C,\omega_C)$的一组 L^2-正交基。阿拉克洛夫 K¨ahler 度量可定义为

$$\mu_{\mathrm{Ar}}=\frac{i}{2g}\sum_{k=1}^{g}\alpha_k\wedge\bar{\alpha}_k.$$

令 G_{Ar} 为与 μ_{Ar}相关联的格林函数。回顾一下，典范丛 ω_C 上的阿拉克洛夫厄米度量 $\|\cdot\|_{\mathrm{Ar}}$ 定义如下。

对于任意点 $x\in C$ 和任意 $\alpha\in\omega_C|_x$，选取一个局部坐标 z：以 x 为中心的 $U_x\to\mathbb{C}$ （即 $z(x)=0$），使得 α 在 x处与 dz 重合。然后，范数 $\|\alpha\|_{\mathrm{Ar}}(x)$ 可由下式确定:

$$\log\|\alpha\|_{\mathrm{Ar}}(x)=\lim_{y\to x}\left(G_{\mathrm{Ar}}(x,y)+\log|z(y)|\right).$$

等价地，可以通过对角嵌入 $C\hookrightarrow C^2$来描述这一构造。事实上，典范丛 ω_C 是 $\mathcal{O}(-\Delta)$ 在对角线 $\Delta\subset C^2$上的限制。在 C^2上，令 $\mathbf{1}_\Delta\in\Gamma(C^2,\mathcal{O}(\Delta))$ 为 $\mathcal{O}(\Delta)$ 的典范截面。规定其厄米范数满足 $-$对数 $\|\mathbf{1}_\Delta\|_\Delta(x,y)=G_{\mathrm{Ar}}(x,y)$，即可得到 $\mathcal{O}(\Delta)$ 上的厄米度量 $\|\cdot\|_\Delta$。随后，通过典范留数同构 $\omega_C\cong\mathcal{O}(-\Delta)|_\Delta$，将 $(\mathcal{O}(\Delta)\ \|\cdot\|_\Delta)$ 的对偶度量恢复为 ω_C 上的阿拉克洛夫度量。

ω_C 上的另一个重要厄米度量是双曲厄米度量 $\|\alpha\|_{\mathrm{hyp}}$，它由关系 $i\alpha\wedge\bar{\alpha}=\frac{\|\alpha\|^2}{\text{双曲}2}\ \mu_{\mathrm{KE}}$定义。

本节中，我们比较阿拉克洛夫厄米度量 $\|\cdot\|_{\mathrm{Ar}}$ 与双曲厄米度量$\|\cdot\|_{\mathrm{hyp}}$。值得注意的是，我们的论证也适用于非对角情形（$\mathcal{O}(\Delta)\ \|\cdot\|_\Delta$）

为了比较阿拉克洛夫厄米度量 $\|\cdot\|_{\mathrm{Ar}}$ 与双曲厄米度量 $\|\cdot\|_{\mathrm{hyp}}$，需要进行某些辅助构造，以将局部数据与全局几何联系起来。根据厚薄分解（定理 7.4），分析自然分为两种情形：位于短测地线周围领圈内的点，以及位于厚部的点。下面先讨论厚部。

引理 11.1。 设 $x \in C$为一点，使得单射半径 $\mathrm{inj}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(x) \geq \epsilon$对某个 $\epsilon \in (0,$ 反双曲正弦 $\frac{1}{2}]$成立。设 $z_{x,\epsilon} : B_\epsilon(x) \to \mathbb{D}$ 为万有覆盖映射 $\rho_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \to C$的逆给出的局部坐标，其中 $\rho_{\mathbb{D}}(0) = x$，且 $B_r(x) = \{y \in C : \mathrm{dist}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(y, x) < r\}$。则有以下结论：

(1) 映射$z_{x,\,\epsilon}$ 限制后是一个双全纯映射

$$B_\epsilon(x) \longrightarrow \mathbb{D}_{\tanh\frac{\epsilon}{2}}(0) = \left\{z \in \mathbb{D} : |z| < \tanh\frac{\epsilon}{2}\right\}.$$

(2) $z_{x,\,\epsilon}(x) = 0$，且范数 |对数 ($\|dz_{x,\,\epsilon}\|_{\mathrm{hyp}}$)| ≤ 1。

此外，存在一个光滑函数$F_{x,\,\epsilon}$： $C \setminus \{x\} \to \mathbb{R}$，定义在 $C \setminus \{x\}$ 上，使得

(3) 对所有 $y \in C \setminus B_\epsilon(x)$，都有$F_{x,\,\epsilon}(y) = 0$。

(4) 函数$F_{x,\,\epsilon}(y)$ + 对数$|z_{x,\,\epsilon}(y)|$ 可延拓为定义在 $B_\epsilon(x)$ 上的光滑函数，一个 d

$$|F_{x,\epsilon}(y) + \log|z_{x,\epsilon}(y)|| \leq \log\left(\frac{3}{\tanh\frac{\epsilon}{2}}\right).$$

(5) 积分满足$\left|\int_C F_{x,\,\epsilon}(y)\mu_{\mathrm{KE}}(y)\right| \leq 4$。

(6) 在流的意义下，

$$-\frac{135}{32\pi|\tanh\frac{\epsilon}{2}|^2}\cdot\log\left(\frac{3}{\tanh\frac{\epsilon}{2}}\right)\cdot\mu_{\mathrm{KE}} \leq dd^c F_{x,\epsilon} + \delta_x \leq \frac{135}{32\pi|\tanh\frac{\epsilon}{2}|^2}\cdot\log\left(\frac{3}{\tanh\frac{\epsilon}{2}}\right)\cdot\mu_{\mathrm{KE}},$$

其中 δ_x 是位于 x 处的狄拉克测度。

证明。 在庞加莱圆盘（$\mathbb{D}$，$\mu_{\mathbb{D}}$）（见定理 7.2），我们有 $\mathrm{dist}_{\mu_{\mathbb{D}}}(z,\ 0) = 2\mathrm{arctanh}(|z|)$， $\forall z \in \mathbb{D}$由此立即得到（1）。

对于（2），注意到 $\epsilon \leq$反双曲正弦$\frac{1}{2}$意味着双曲正切 $\frac{\epsilon}{2} \leq \sqrt{5} - 2$。因此

$$|\log\|dz_{x,\epsilon}\|_{\mathrm{hyp}}| = \left|\log\left(1 - |z_{x,\epsilon}|^2\right)\right| < \log\frac{4}{3} < 1,$$

从而证明（2）。

现在我们转而构造（3）–（6）中所需的函数$F_{x,\,\epsilon}$。

令 $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为一个光滑截断函数，使得

$$\eta(\varsigma) = 1 \ \text{ for } \varsigma \leq \frac{\tanh\frac{\epsilon}{2}}{3}, \qquad \eta(\varsigma) = 0 \ \text{ for } \varsigma \geq \tanh\frac{\epsilon}{2},$$

and

$$|\eta'| \leq \frac{9}{2\tanh\frac{\epsilon}{2}}, \qquad |\eta''| \leq \frac{81}{4(\tanh\frac{\epsilon}{2})^2}.$$

令$F_{x,\,\epsilon}(y) = -\eta(|z_{x,\,\epsilon}(y)|)\cdot$对数$|z_{x,\,\epsilon}(y)|$ 定义在 $B_\epsilon(x)$ 上，并令$F_{x,\,\epsilon} = 0$定义在 $C \setminus B_\epsilon(x)$ 上。于是$F_{x,\,\epsilon}$: $C \setminus \{x\} \to \mathbb{R}$是 $C \setminus \{x\}$ 上的光滑函数，且（3）得证。

此外，$F_{x,\,\epsilon}(y)$ + 对数$|z_{x,\,\epsilon}(y)|$ 可光滑延拓至 $B_\epsilon(x)$。由于当 $\varsigma \leq$双曲正切$_3$ $\frac{\epsilon}{2}$时， $\eta(\varsigma) = 1$，~~我们~~得到

$$|F_{x,\epsilon}(y) + \log|z_{x,\epsilon}(y)|| = |1 - \eta(|z_{x,\epsilon}(y)|)|\cdot|\log|z_{x,\epsilon}(y)|| \leq \log\left(\frac{3}{\tanh\frac{\epsilon}{2}}\right),$$

从而得证 (4)。

对于 (5)，注意到 $|F_{x,\epsilon}(y)| \le |\text{对数}|z_{x,\epsilon}(y)||$。根据定理 7.2,

$$\begin{aligned}\left|\int_C F_{x,\epsilon}(y)\mu_{\mathrm{KE}}(y)\right| &\le \int_{\mathbb{D}_{\tanh(\frac{\epsilon}{2})}(0)} |\log|z||\,\mu_{\mathbb{D}}(z) \le \int_{\mathbb{D}_{\sqrt{5}-2}(0)} \frac{4\,|\log|z||\,\mu_{\mathrm{Euc}}}{(1-|z|^2)^2}\\ &< \frac{8\pi}{(1-(\sqrt{5}-2)^2)^2}\int_0^{\sqrt{5}-2} |\varsigma\log\varsigma|d\varsigma\\ &< \frac{8\pi\left(\sqrt{5}-2\right)^2\left(1-\log(\sqrt{5}-2)\right)}{(1-(\sqrt{5}-2)^2)^2} \approx 3.838\cdots < 4,\end{aligned}$$

这就证明了（5）。

最后，我们证明（6）。在 $B_\epsilon(x)$上直接计算可得

$$\begin{aligned}dd^cF_{x,\epsilon}+\delta_x &= -\log|z_{x,\epsilon}|\cdot dd^c\eta(|z_{x,\epsilon}|) - d\eta(|z_{x,\epsilon}|)\wedge d^c\log|z_{x,\epsilon}| - d\log|z_{x,\epsilon}|\wedge d^c\eta(|z_{x,\epsilon}|)\\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\left(-\log|z_{x,\epsilon}|\cdot\eta''(|z_{x,\epsilon}|) - \frac{2+\log|z_{x,\epsilon}|}{|z_{x,\epsilon}|}\eta'(|z_{x,\epsilon}|)\right)\cdot\frac{(1-|z_{x,\epsilon}|^2)^2}{4}\cdot\mu_{\mathrm{KE}}\\ &\le \frac{1}{8\pi}\cdot\left(-\log|z_{x,\epsilon}|\cdot\eta''(|z_{x,\epsilon}|) - \frac{2+\log|z_{x,\epsilon}|}{|z_{x,\epsilon}|}\eta'(|z_{x,\epsilon}|)\right)\cdot\mu_{\mathrm{KE}}.\end{aligned}$$

根据 η' 和 η''的界，

$$|\log|z_{x,\epsilon}|\cdot\eta''(|z_{x,\epsilon}|)| \le \frac{81}{4(\tanh\frac{\epsilon}{2})^2}\cdot\log\left(\frac{3}{\tanh\frac{\epsilon}{2}}\right),$$

and

$$\begin{aligned}\left|\frac{2+\log|z_{x,\epsilon}|}{|z_{x,\epsilon}|}\eta'(|z_{x,\epsilon}|)\right| &\le \sup_{\frac{\tanh\frac{\epsilon}{2}}{3}\le|\varsigma|\le\tanh\frac{\epsilon}{2}} |2+\log\varsigma|\cdot\frac{3}{\tanh\frac{\epsilon}{2}}\cdot\frac{9}{2\tanh\frac{\epsilon}{2}}\\ &\le \frac{27}{2(\tanh\frac{\epsilon}{2})^2}\cdot\log\left(\frac{3}{\tanh\frac{\epsilon}{2}}\right).\end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned}\left|\log|z_{x,\epsilon}|\cdot\eta''(|z_{x,\epsilon}|) + \frac{2+\log|z_{x,\epsilon}|}{|z_{x,\epsilon}|}\eta'(|z_{x,\epsilon}|)\right| &\le \left(\frac{81}{4}+\frac{27}{2}\right)\cdot\frac{1}{(\tanh\frac{\epsilon}{2})^2}\cdot\log\left(\frac{3}{\tanh\frac{\epsilon}{2}}\right)\\ &= \frac{135}{4}\cdot\frac{1}{(\tanh\frac{\epsilon}{2})^2}\cdot\log\left(\frac{3}{\tanh\frac{\epsilon}{2}}\right),\end{aligned}$$

由此证明了（6），并完成了证明。 □

现在转向薄部。在这种情况下，我们在一条短测地线 $\mathscr{C}$（γ）周围的领圈 γ中工作，并赋予其引理 7.10中的坐标。下面的引理给出了这一情形下引理 11.1 的对应结果。

引理 11.2。设 γ是 C上的一条简单闭测地线，其长度为 $\ell \le 2$反双曲正弦 1 2。设 $\mathscr{C}(\gamma)$和 $\nu(\gamma)$如引理 7.10中所述，并设

$$z_\gamma : \mathscr{C}(\gamma) \to \overline{\mathbb{D}_{e^{-\nu(\gamma)}}(0)} \setminus \mathbb{D}_{e^{\nu(\gamma)-\frac{2\pi^2}{\ell}}}(0)$$

是那里给出的全纯坐标。然后 $\left|\frac{\pi^2}{\ell} + \text{对数}\,(\|dz_\gamma\|_{\text{hyp}})\right| < \frac{\pi^2}{\ell}$。 —

此外，对于任意满足 $|\text{对数}\,|z_\gamma(x)| + \frac{\pi^2}{\ell}| \le \frac{\pi^2}{\ell} - 2\nu(\gamma)$ 的 $x \in \mathscr{C}(\gamma)$，存在一个光滑函数$F_{x,\,\gamma}$：$C\setminus\{x\}\to\mathbb{R}$，定义在 $C\setminus\{x\}$上，使得

(1) $F_{x,\gamma}(y)=0$ 对于所有 $y\in C\setminus\mathscr{C}(\gamma)$。

(2) 函数 $F_{x,\gamma}(y)+$ 对数 $|z_\gamma(y)-z_\gamma(x)|$ 可光滑延拓至 $\mathscr{C}(\gamma)$，并且

$$|F_{x,\gamma}(y)+\log|z_\gamma(y)-z_\gamma(x)||\le\frac{3\pi^2}{\ell}.$$

(3) 积分满足 $\left|\int_C F_{x,\gamma}(y)\mu_{\mathrm{KE}}(y)\right|\le\frac{8\pi^2}{\ell}$。

(4) 在流的意义下，

$$-600\cdot\mu_{\mathrm{KE}}\le dd^cF_{x,\gamma}+\delta_x\le 600\cdot\mu_{\mathrm{KE}},$$

其中 δ_x 是位于 x处的狄拉克测度。

证明。我们首先利用领圈 $\|\cdot\|_{\mathrm{hyp}}$ 中度量 μ_{KE} 的显式表达式估计范数 $\mathscr{C}(\gamma)$。由引理 7.10，我们有

$$\mu_{\mathrm{KE}}=\frac{\ell^2z_\gamma^*(\mu_{\mathrm{Euc}})}{4\pi^2|z_\gamma|^2\sin^2(\frac{\ell}{2\pi}\log|z_\gamma|)},$$

其中 $\mu_{\mathrm{Euc}}=\frac{idz\wedge d\bar z}{2}$ 是 $\mathbb{C}$上的标准欧氏度量。

Set $\varsigma=\frac{\pi^2}{\ell}+$ 对数 $|z_\gamma|$。然后 $|\varsigma|\le\frac{\pi^2}{\ell}-\nu(\gamma)$，而 dz_γ 与 μ_{KE} 之间的关系给出

$$\frac{\pi^2}{\ell}+\log(\|dz_\gamma\|_{\mathrm{hyp}})=\log\frac{4\pi}{\ell}+\varsigma+\log\left(\cos\frac{\ell\varsigma}{2\pi}\right).$$

直接计算可得

$$\frac{d}{d\varsigma}\left(\varsigma+\log\left(\cos\frac{\ell\varsigma}{2\pi}\right)\right)=1-\frac{\ell}{2\pi}\tan\frac{\ell\varsigma}{2\pi}\ge1-\frac{\ell}{2\pi}\cot\frac{\ell\nu(\gamma)}{2\pi}=1-\frac{\ell}{2\pi\sinh\frac{\ell}{2}}>0.$$

因此，该函数在 ς 的可容许范围内严格递增。

由于 $\ell\le2$ 反双曲正弦 $\frac{1}{2}<1$，$\frac{2}{\ell}$ 双曲正切 $\frac{\ell}{2}>2$ 双曲正切 $\frac{1}{2}\approx0.924\cdots>\frac{9}{10}$。由命题 7.11 以及上述计算可得

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{\ell}+\log(\|dz_\gamma\|_{\mathrm{hyp}})&\le\log\frac{4\pi}{\ell}+\frac{\pi^2}{\ell}-\nu(\gamma)+\log\left(\sin\frac{\ell\nu(\gamma)}{2\pi}\right)\\&<\log2\pi-\nu(\gamma)+\frac{\pi^2}{\ell}<\frac{\pi^2}{\ell},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{\ell}+\log(\|dz_\gamma\|_{\mathrm{hyp}})&\ge\log\frac{4\pi}{\ell}-\frac{\pi^2}{\ell}+\nu(\gamma)+\log\left(\sin\frac{\ell\nu(\gamma)}{2\pi}\right)\\&>\log\frac{9\pi}{5}+\nu(\gamma)-\frac{\pi^2}{\ell}>-\frac{\pi^2}{\ell}.\end{aligned}$$

因此 $\left|\frac{\pi^2}{\ell}+\text{对数}(\|dz_\gamma\|_{\mathrm{hyp}})\right|<\frac{\pi^2}{\ell}$，这就得到了关于 $\|\cdot\|_{\mathrm{hyp}}$ 的所需界。

现在我们来构造函数 $F_{x,\gamma}$。对于任意满足 $|$对数 $|z_\gamma(x)|+\frac{\pi^2}{\ell}|\le\frac{\pi^2}{\ell}-2\nu(\gamma)$ 的 $x\in\mathscr{C}(\gamma)$，令 $F_{x,\mathrm{loc}}(y)=$ 对数 $|z_\gamma(y)-z_\gamma(x)|+\frac{\ell}{2\pi^2}$ 对数 $|z_\gamma(x)|()$ 对数 $|z_\gamma(y)|$ 在 $\mathscr{C}(\gamma)\setminus\{x\}$ 上。为了将 $F_{x,\mathrm{loc}}$ 全局延拓，我们选取一个支集包含于 $\mathscr{C}(\gamma)$ 上的截断函数 η，如下所示。令 $\eta_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\ge0}$ 为一个光滑函数，满足

$$\eta_1(\varsigma)=1\quad\text{for }\varsigma\le e^{-\frac{3\nu(\gamma)}{2}},\qquad\eta_1(\varsigma)=0\quad\text{for }\varsigma\ge e^{-\nu(\gamma)},$$

且导数受 $|\eta_1'|\le3e^{\nu(\gamma)}$、$|\eta_1''|\le15e^{2\nu(\gamma_j)}$ 的限制。注意，$e^{\frac{\nu(\gamma)}{2}}>e^{\frac{\pi^2}{8}}$ 反双曲正弦 $1\approx4.05\cdots>4$。

令 $\eta(y) = \eta_1(|z_\gamma(y)|) \cdot \eta_1\left(e^{-\frac{2\pi^2}{\ell}}|z_\gamma(y)|^{-1}\right)$，并定义

$$F_{x,\gamma}(y) \quad = \quad \begin{cases} -\eta(y)\cdot F_{x,\mathrm{loc}}(y), & y \in \mathscr{C}(\gamma)\setminus\{x\}; \\ 0, & y \in C\setminus\mathscr{C}(\gamma). \end{cases}$$

显然， $d\eta$ 的支集包含于

$$\left\{ y \in \mathscr{C}(\gamma) : \frac{\pi^2}{\ell} - \frac{3\nu(\gamma)}{2} \le \left| \frac{\pi^2}{\ell} + \log|z_\gamma(y)| \right| \le \frac{\pi^2}{\ell} - \nu(\gamma) \right\}.$$

性质 (1) 直接由 η 的支集得出。对于 (2)，注意到根据构造，函数 $F_{x,\gamma}(y)$ + 对数 $|z_\gamma(y) - z_\gamma(x)|$ 可光滑延拓至 $\mathscr{C}(\gamma)$。此外，直接估计可得

$$\begin{aligned} |F_{x,\gamma}(y) + \log|z_\gamma(y) - z_\gamma(x)|| &\le |F_{x,\mathrm{loc}}(y) + \log|z_\gamma(y) - z_\gamma(x)|| + |\eta(y)-1|\,|F_{x,\mathrm{loc}}(y)| \\ &< \frac{2\pi^2}{\ell} + |\eta(y)-1|\,|F_{x,\mathrm{loc}}(y)|. \end{aligned}$$

当 $y \in \mathscr{C}(\gamma)$ 且 $-\frac{3\nu(\gamma)}{2} \le$ 对数 $|z_\gamma(y)| \le -\nu(\gamma)$ 时，我们有

$$\begin{aligned} |F_{x,\mathrm{loc}}(y)| &\le |\log|z_\gamma(y)|| + \left|\log\left|1 - \frac{z_\gamma(x)}{z_\gamma(y)}\right|\right| + \left|\frac{\ell\log|z_\gamma(x)|}{2\pi^2}\log|z_\gamma(y)|\right| \\ &\le \frac{3\nu(\gamma)}{2} - \log\left(1 - e^{-\frac{\nu(\gamma)}{2}}\right) + \frac{3\nu(\gamma)}{2} < 3\pi + \log\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

利用对合 ($x\ y \mapsto x'\ y'$ $z_\gamma\ x'\ z_\gamma\ x = z_\gamma\ y'\ z_\gamma\ y$ — $F_{x'}\ y' =$,) (,) with ( ) ( ) ( ) ( ) $F_{x\ \mathrm{loc}}\ y$ $|\eta\ y - 1||F_{x\ \mathrm{loc}}\ y| \le 3\pi + \frac{4}{3}$ $= e^{-\frac{2\pi^2}{\ell}}$，我们进一步得到 . loc( ) . ( )，从而 ( ) . ( ) 对数。因此

$$|F_{x,\gamma}(y) + \log|z_\gamma(y) - z_\gamma(x)|| < \frac{2\pi^2}{\ell} + 3\pi + \log\frac{4}{3} < \frac{3\pi^2}{\ell},$$

这就证明了性质（2）。

现在我们继续估计（3）中的积分。由于 $|F_{x,\gamma}(y)| \le |F_{x,\mathrm{loc}}(y)|$，只需对 $F_{x,\mathrm{loc}}(y)$ 进行同类型的估计。根据定义，我们可以将该积分分解为

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathscr{C}(\gamma)} F_{x,\gamma}(y)\,d\mu_{\mathrm{KE}}(y)\right| &\le \left|\int_{\mathscr{C}(\gamma)} \frac{\ell\log|z_\gamma(x)|}{2\pi^2}\log|z_\gamma(y)|\,d\mu_{\mathrm{KE}}(y)\right| \\ &\quad + \left|\int_{\left\{|z_\gamma(y)-z_\gamma(x)|\le\frac{|z_\gamma(x)|}{10}\right\}} \log|z_\gamma(y)-z_\gamma(x)|\,d\mu_{\mathrm{KE}}(y)\right| \\ &\quad + \left|\int_{\left\{|z_\gamma(y)-z_\gamma(x)|\ge\frac{|z_\gamma(x)|}{10}\right\}} \log|z_\gamma(y)-z_\gamma(x)|\,d\mu_{\mathrm{KE}}(y)\right|. \end{aligned}$$

根据对称性，我们 可假设 log $|z_\gamma(x)| \ge -\frac{\pi^2}{\ell}$。对于第一项，直接计算可得

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathscr{C}(\gamma)} \frac{\ell\log|z_\gamma(x)|}{2\pi^2}\log|z_\gamma(y)|\,d\mu_{\mathrm{KE}}(y)\right| &\le \left|\int_{e^{\nu(\gamma)-\frac{2\pi^2}{\ell}}}^{e^{-\nu(\gamma)}} \frac{\pi\varsigma\cdot\ell^2\log\varsigma\,d\varsigma}{4\pi^2\varsigma^2\sin^2(\frac{\ell}{2\pi}\log\varsigma)}\right| \\ &= \frac{\pi^2}{\sinh\frac{\ell}{2}} < \frac{2\pi^2}{\ell}. \end{aligned}$$

若 $|z_\gamma(y)-z_\gamma(x)|\le\frac{|z_\gamma(x)|}{10}$，则 $|z_\gamma(y)|\ge\frac{9}{10}e^{-\frac{\pi^2}{\ell}}$，从而 $|\sin(\frac{\ell}{2\pi}\log|z_\gamma(y)|)|\ge|\frac{\ell}{8\pi}\log|z_\gamma(x)||$。于是通过直接估计可得

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\left\{|z_\gamma(y)-z_\gamma(x)|\le\frac{|z_\gamma(x)|}{10}\right\}}\log|z_\gamma(y)-z_\gamma(x)|d\mu_{\mathrm{KE}}(y)\right|\\ \le\ & 16\cdot\frac{100}{81}\left|\int_{\left\{|z_\gamma(y)-z_\gamma(x)|\le\frac{|z_\gamma(x)|}{10}\right\}}\frac{\log|z_\gamma(y)-z_\gamma(x)|z_\gamma^*(\mu_{\mathrm{Euc}})(y)}{|z_\gamma(x)|^2|\log|z_\gamma(x)||^2}\right|\\ <\ & \frac{-20}{|z_\gamma(x)|^2|\log|z_\gamma(x)||^2}\int_0^{\frac{|z_\gamma(x)|}{10}}2\pi\varsigma\log\varsigma d\varsigma<1.\end{aligned}$$

对于最后一项，由于 $\mu_{\mathrm{KE}}(\mathscr{C}(\gamma))=\frac{2\ell}{\text{双曲正弦}\frac{\ell}{2}}<4$，因此有

$$\begin{aligned}\left|\int_{\left\{|z_\gamma(y)-z_\gamma(x)|\ge\frac{|z_\gamma(x)|}{10}\right\}}\log|z_\gamma(y)-z_\gamma(x)|d\mu_{\mathrm{KE}}(y)\right| &< \left|\log\frac{|z_\gamma(x)|}{10}\right|\cdot\mu_{\mathrm{KE}}(\mathscr{C}(\gamma))\\ &< 4\left(\frac{\pi^2}{\ell}+\log 10\right).\end{aligned}$$

结合这些估计，我们得到

$$\left|\int_{\mathscr{C}(\gamma)}F_{x,\gamma}(y)d\mu_{\mathrm{KE}}(y)\right|<\frac{2\pi^2}{\ell}+1+4\left(\frac{\pi^2}{\ell}+\log 10\right)<\frac{8\pi^2}{\ell},$$

这就证明了（3）。

最后，我们证明 $F_{x,\gamma}$ 的性质（4）。回忆一下，

$$\mu_{\mathrm{KE}}=\frac{\ell^2 z_\gamma^*(\mu_{\mathrm{Euc}})}{4\pi^2|z_\gamma|^2\sin^2(\frac{\ell}{2\pi}\log|z_\gamma|)}\ge\frac{z_\gamma^*(\mu_{\mathrm{Euc}})}{|z_\gamma|^2|\log|z_\gamma||^2}.$$

直接计算可得，在 $\mathrm{supp}\,(d(\eta_1(|z_\gamma|)))$ 上，

$$\begin{aligned}&dF_{x,\mathrm{loc}}(y)\wedge d^cF_{x,\mathrm{loc}}(y)\\ =\ &\frac{i}{\pi}\left|\frac{1}{2(z_\gamma(y)-z_\gamma(x))}+\frac{\ell\log|z_\gamma(x)|}{4\pi^2 z_\gamma(y)}\right|^2dz_\gamma(y)\wedge d\bar z_\gamma(y)\\ \le\ &\frac{2}{\pi}\cdot\left|\frac{1}{2\left(1-e^{-\frac{\nu(\gamma)}{2}}\right)|z_\gamma(y)|}+\frac{1}{2|z_\gamma(y)|}\right|^2z_\gamma^*(\mu_{\mathrm{Euc}})\\ \le\ &\frac{49}{18\pi\cdot|z_\gamma(y)|^2}\cdot z_\gamma^*(\mu_{\mathrm{Euc}})\le\frac{49}{18\pi}\cdot\frac{9\nu^2(\gamma)}{4}\cdot\mu_{\mathrm{KE}}<\frac{49\pi}{8}\cdot\mu_{\mathrm{KE}}.\end{aligned}$$

接下来，我们估计 $d\eta$ 和 $dd^c\eta$。由对称性，只需考虑 $\eta_1(|z_\gamma|)$。由于 $|\eta_1'|\le 3e^{\nu(\gamma)}$ 和 $|\eta_1''|\le 15e^{2\nu(\gamma)}$，我们得到

$$\begin{aligned}d\eta_1(|z_j(y)|)\wedge d^c\eta_1(|z_j(y)|) &= |\eta_1'(|z_j(y)|)|^2\frac{idz_j(y)\wedge d\bar z_j(y)}{4\pi}\\ &< 9e^{2\nu(\gamma_j)}\cdot\frac{|z_\gamma|^2|\log|z_\gamma||^2}{2\pi}\cdot\mu_{\mathrm{KE}}<\frac{9\pi}{2}\cdot\mu_{\mathrm{KE}},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} dd^c\eta_{1,1}(|z_j(y)|) &= \left(\eta''_{1,1}(|z_j(y)|)+\frac{\eta'_{1,1}(|z_j(y)|)}{|z_j(y)|}\right)\frac{idz_j(y)\wedge d\bar{z}_j(y)}{4\pi} \\ &\le \left(15e^{2\nu(\gamma_j)}+\frac{3e^{\nu(\gamma_j)}}{|z_j(y)|}\right)\cdot\frac{z^*_\gamma(\mu_{\mathrm{Euc}})}{2\pi} \\ &< \frac{1}{2\pi}\cdot\left(15\pi^2+3\cdot\frac{9\pi^2}{4}\right)\cdot\mu_{\mathrm{KE}}=\frac{87\pi}{8}\cdot\mu_{\mathrm{KE}}. \end{aligned}$$

综合 $dF_{x,\ \mathrm{loc}}$、 $d\eta_1$ 和 $dd^c\eta_1$ 的这些估计，我们得到

$$\begin{aligned} dd^cF_{x,\gamma}+\delta_x &= -F_{x,\mathrm{loc}}\cdot dd^c\eta_1-d\eta_1\wedge d^cF_{x,\mathrm{loc}}-dF_{x,\mathrm{loc}}\wedge d^c\eta_1 \\ &\le \left(3\pi+\log\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{87\pi}{8}\cdot\mu_{\mathrm{KE}}+2\cdot\sqrt{\frac{49\pi}{8}\cdot\frac{9\pi}{2}}\cdot\mu_{\mathrm{KE}}<600\cdot\mu_{\mathrm{KE}}. \end{aligned}$$

由同样的推理，下界也成立：$dd^cF_{x,\ \gamma}+\delta_x>-600\cdot\mu_{\mathrm{KE}}$。证明至此完成。 □

结合引理11.1 和引理11.2 可在 $C\times C$上得到一个全局构造。

引理 11.3。设 C 是亏格为 $g\ge 2$ 、定义在 $\mathbb{C}$上的一条曲线，并令 μ_{KE} 表示 C上的唯一 *Kähler* 度量，其常曲率为 -1。令$\mathrm{sys}(C)$ 表示(C,μ_{KE})的最短闭测地线长度。则存在一个取值于$\mathbb{R}$的博雷尔可测函数 F ，定义在 $C\times C$上，使得对每个 $x\in C$ ，我们都可以选取一个局部坐标

$$z_x:U_x\to\mathbb{C},\qquad U_x=B_{\frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}}(x)=\left\{y\in C:\mathrm{dist}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(x,y)<\frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}\right\},$$

具有以下性质：

(1) For any $x\in C$, $\left|\int_C F_x(y)\mu_{\mathrm{KE}}(y)\right|\le\frac{8\pi^2\cdot\max\{1,\mathrm{sys}(C)\}}{\mathrm{sys}(C)}$, *where* $F_x(y)=F(x,y)$.

(2) 对任意 $x\in C$，在流的意义下，

$$-600\cdot\mu_{\mathrm{KE}}\le dd^cF_x+\delta_x\le 600\cdot\mu_{\mathrm{KE}},$$

其中 δ_x 是位于 x处的狄拉克测度。

(3) 对任意 $x\in C$，函数 $F_x(y)$ +对数$|z_x(y)-z_x(x)|$ 可光滑延拓至 U_x。

(4) 若 距离$\mu_{KE}(x,y)\ge\frac{1}{100}$，则 $|F(x,y)|\le 6\pi^2\cdot$最大{1,系统(C)}系统(C)。

(5) For any $x\in C$ *and* $(y_1,y_2)\in U_x\times U_x$, $|F(y_1,y_2)+\log|z_x(y_1)-z_x(y_2)||\le\frac{8\pi^2\cdot\max\{1,\mathrm{sys}(C)\}}{\mathrm{sys}(C)}$.

证明。 令 $\{\gamma_j\}_{j=1}^m$为 (C,μ_{KE}) 上所有长度为 ≤ 2反双曲正弦 1 2的简单闭测地线的集合。根据引理7.10，存在全纯坐标

$$z_j:\mathscr{C}(\gamma_j)\to\overline{\mathbb{D}_{e^{-\nu(\gamma_j)}}(0)}\setminus\mathbb{D}_{e^{\nu(\gamma_j)-\frac{2\pi^2}{\ell(\gamma_j)}}}(0)$$

使得

$$\mu_{\mathrm{KE}}=\frac{\ell^2(\gamma_j)z_j^*(\mu_{\mathrm{Euc}})}{4\pi^2|z_j|^2\sin^2(\frac{\ell(\gamma_j)}{2\pi}\log|z_j|)},$$

其中， $\mu_{\mathrm{Euc}}=\frac{idz\wedge d\bar{z}}{2}$ 是 $\mathbb{C}$上的标准欧氏度量，而 $\nu(\gamma_j)\in(0,\ \frac{\pi^2}{2\ell\ (\gamma_j)})$的选取满足$\nu(\gamma_j)\ell(\gamma_j)=2\pi$ 反正弦 $\left(\text{双曲正切}\ \frac{\ell_{(\gamma_j}}{2}\right)$。

对于任意 $x \in C$ 满足 $\mathrm{inj}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(x) \leq$ 反双曲正弦 $1\,2$，命题 7.11 表明，对某个 γ_j，有 $x \in \mathscr{C}(\gamma_j)$，且 $\left|\ell^{\pi^2}_{\gamma_j}() +$ 对数 $|z_j(x)|\right| \leq \ell^{\pi^2}_{\gamma_j}() - 2\nu(\gamma_j)$。注意，领圈 $\mathscr{C}(\gamma_j)$ 彼此不相交，因此当 $x \in \bigcup_{j=1}^m \mathscr{C}(\gamma_j)$ 时，指标 j 是唯一的。接下来我们定义

$$F(x,y) = \begin{cases} F_{x,\gamma_j}(y), & \text{if } x \in \mathscr{C}(\gamma_j) \text{ and } \left|\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)} + \log|z_j(x)|\right| \leq \frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)} - 2\nu(\gamma_j), \\ F_{x,\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}}(y), & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 $F_{x,\epsilon}$ 以及 $F_{x,\gamma}$ 分别如引理 11.1 和引理 11.2 所述。局部坐标 z_x 的定义方式相同：第一种情形取 z_γ，第二种情形取 $z_{x,\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}}$，其中 $z_{x,\epsilon}$ 和 z_γ 分别是引理 11.1 和引理 11.2 中的坐标。

根据构造，（1）—（3）由引理 11.1 和引理 11.2 得出。

现在来看（4）。证明（4）的论证分为两种情形。首先，设 $F_x(y) = F_{x,\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}}(y)$。由引理 11.1 可知，对于任意 $y \in B_{\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}}(x)$，有

$$\left|F_x(y) + \log|z_{x,\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}}(y)|\right| \leq \log\left(\frac{3}{\tanh\frac{\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}}{2}}\right),$$

且 $F_x(y) = 0$ 否则。因此，若 $\mathrm{dist}_{\mu_{KE}}(x, y) \geq \frac{1}{100}$，则

$$\begin{aligned} |F_x(y)| &\leq \left|\log|z_{x,\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}}(y)|\right| + \log\left(\frac{3}{\tanh\frac{\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}}{2}}\right) \\ &\leq \log\left(\frac{1}{\tanh\frac{1}{200}}\right) + \log\left(\frac{3}{\tanh\frac{\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}}{2}}\right) < 10. \end{aligned}$$

接下来，假设 $F_x(y) = F_{x,\gamma_j}(y)$ 对某个 j 成立。由引理 11.2，对任意 $y \in \mathscr{C}(\gamma_j)$，

$$\left|F_x(y) + \log|z_{\gamma_j}(y) - z_{\gamma_j}(x)|\right| \leq \frac{3\pi^2}{\ell(\gamma_j)},$$

并且 $F_x(y) = 0$ 否则。回顾一下，在 $\mathscr{C}(\gamma_j)$ 上，

$$\mu_{\mathrm{KE}} = \frac{\ell^2(\gamma_j) z^*_{\gamma_j}(\mu_{\mathrm{Euc}})}{4\pi^2|z_{\gamma_j}|^2 \sin^2(\frac{\ell(\gamma_j)}{2\pi}\log|z_{\gamma_j}|)} \leq \frac{\ell^2(\gamma_j) z^*_{\gamma_j}(\mu_{\mathrm{Euc}})}{4\pi^2|z_{\gamma_j}|^2 \tanh^2(\frac{\ell(\gamma_j)}{2})} \leq e^{\frac{4\pi^2}{\ell(\gamma_j)}} z^*_{\gamma_j}(\mu_{\mathrm{Euc}}).$$

因此，$\mathrm{dist}_{\mu_{KE}}(x, y) \geq \frac{1}{100}$ 意味着 $|z_{\gamma_j}(y) - z_{\gamma_j}(x)| \geq \frac{1}{100} e^{-\frac{2\pi^2}{\ell^{\gamma_j}}()}$，从而

$$|F_x(y)| \leq \left|\log|z_{\gamma_j}(y) - z_{\gamma_j}(x)|\right| + \frac{3\pi^2}{\ell(\gamma_j)} \leq \log 100 + \frac{2\pi^2}{\ell(\gamma_j)} + \frac{3\pi^2}{\ell(\gamma_j)} < \frac{6\pi^2}{\ell(\gamma_j)}.$$

综合这两种情况，我们得出：只要 $\mathrm{dist}_{\mu_{KE}}(x, y) \geq \frac{1}{100}$，就有 $|F(x,y)| \leq 6\pi^2 \cdot \max\{1, \mathrm{sys}(C)\}$ sys(C)。因此，性质（4）成立。

还需证明（5）。与（4）中的论证类似，对任意 $x \in C$ and $(y_1, y_2) \in U_x \times U_x$，有

$$|F(y_1,y_2) + \log|z_{y_1}(y_1) - z_{y_1}(y_2)|| \leq \frac{3\pi^2 \cdot \max\{1, \mathrm{sys}(C)\}}{\mathrm{sys}(C)},$$

这直接由引理 11.1 和引理 11.2 可得。接下来要证明的是

$$|\log|z_x(y_1) - z_x(y_2)| - \log|z_{y_1}(y_1) - z_{y_1}(y_2)|| \leq \frac{5\pi^2 \cdot \max\{1, \mathrm{sys}(C)\}}{\mathrm{sys}(C)}.$$

首先考虑 $z_x = z_{x,\ \mathrm{arcsinh}\,1}$ 的情形。此时连接 y_1, y_2 的测地线段位于 U_x 中。由定理 7.2，在 $z_x(U_x)$ 上，我们有 $4\mu_{\mathrm{Euc}} \le \mu_{\mathbb{D}} \le 8\mu_{\mathrm{Euc}}$。因此

$$\frac{\mathrm{dist}_{\mu_{KE}}(y_1,y_2)}{2\sqrt{2}} = \frac{\mathrm{dist}_{\mu_{\mathbb{D}}}(z_x(y_1),z_x(y_2))}{2\sqrt{2}} \le |z_x(y_1)-z_x(y_2)| \le \frac{\mathrm{dist}_{\mu_{KE}}(y_1,y_2)}{2},$$

由此可得

$$|\log|z_x(y_1)-z_x(y_2)| - \log \mathrm{dist}_{\mu_{KE}}(y_1,y_2)| \le \frac{3}{2}\log 2.$$

另一方面，若对于某个 j, $z_x = z_{\gamma_j}$ 成立，则连接 y_1, y_2 的测地线段位于 $\mathscr{C}(\gamma_j)$ 中。直接计算可得

$$e^{\frac{4\pi^2}{\ell(\gamma_j)}} z^*_{\gamma_j}(\mu_{\mathrm{Euc}}) \ge \mu_{\mathrm{KE}} = \frac{\ell^2(\gamma_j) z^*_{\gamma_j}(\mu_{\mathrm{Euc}})}{4\pi^2|z_{\gamma_j}|^2 \sin^2(\frac{\ell(\gamma_j)}{2\pi}\log|z_{\gamma_j}|)} \ge \frac{\ell^2(\gamma_j) z^*_{\gamma_j}(\mu_{\mathrm{Euc}})}{4\pi^2 e^{-2\nu(\gamma_j)}} \ge e^{-\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}} z^*_{\gamma_j}(\mu_{\mathrm{Euc}}),$$

因此

$$e^{-\frac{\pi^2}{\ell(\gamma_j)}} \cdot \mathrm{dist}_{\mu_{KE}}(y_1,y_2) \le |z_x(y_1)-z_x(y_2)| \le e^{\frac{2\pi^2}{\ell(\gamma_j)}} \cdot \mathrm{dist}_{\mu_{KE}}(y_1,y_2).$$

由此可知

$$|\log|z_x(y_1)-z_x(y_2)| - \log \mathrm{dist}_{\mu_{KE}}(y_1,y_2)| \le \frac{2\pi^2}{\ell(\gamma_j)}.$$

现在我们回到 (5)。

若两个坐标图都是薄部坐标图，即对于某个 j_1, j_2, $z_x = z_{\gamma_{j_1}}$ 且 $z_{y_1} = z_{\gamma_{j_2}}$，则假设 $\mathrm{inj}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(x) \le$ 反双曲正弦 1 2，结合 $y_1 \in U_x$ 可推出 $j_1 = j_2$，因此

$$|\log|z_x(y_1)-z_x(y_2)| - \log|z_{y_1}(y_1)-z_{y_1}(y_2)|| = 0.$$

否则，坐标图 z_x 或 z_{y_1} 中至少有一个来自厚部，即 $z_x = z_{x,\ \mathrm{arcsinh}\,1}$ 或 $z_{y_1} = z_{y_1,\ \text{反双曲正弦}\,1}$（也可能两者都来自厚部）。结合上述两个估计，我们得到

$$\begin{aligned}
|\log|z_x(y_1)-z_x(y_2)| - \log|z_{y_1}(y_1)-z_{y_1}(y_2)|| &\le |\log|z_x(y_1)-z_x(y_2)| - \log \mathrm{dist}_{\mu_{KE}}(y_1,y_2)| \\
&\quad + |\log|z_{y_1}(y_1)-z_{y_1}(y_2)| - \log \mathrm{dist}_{\mu_{KE}}(y_1,y_2)| \\
&\le \max\left\{\frac{2\pi^2}{\mathrm{sys}(C)} + \frac{3}{2}\log 2, 3\log 2\right\} \\
&< \frac{5\pi^2 \cdot \max\{1,\mathrm{sys}(C)\}}{\mathrm{sys}(C)}.
\end{aligned}$$

因此，性质（5）得到验证，从而引理得证。 □

在比较阿拉克洛夫厄米度量 $\|\cdot\|_{\mathrm{Ar}}$ 与双曲厄米度量 $\|\cdot\|_{\mathrm{hyp}}$ 之前，我们需要以下估计。

引理 11.4. 设 $u: C \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数，使得 $\Delta_{\mathrm{hyp}} u \ge -v_1$ 和 $|\Delta_{\mathrm{hyp}} u| \le v_2$，其中 v_1、$v_2 > 0$为某些常数。则以下不等式成立：

$$\begin{aligned}
\int_C du \wedge d^c u &\le 5v_1 \cdot v_2 + v_1^2 \cdot 1232\pi^3(g-1)(2g-3) \cdot \min\left\{\frac{\varphi(C)}{\xi_2(g)}, \frac{14(g-1)\cdot\max\{1,\mathrm{sys}(C)\}}{55\cdot\mathrm{sys}(C)}\right\} \\
&\le v_1 \cdot \left(\frac{1232\pi^3(g-1)(2g-3)}{\xi_2(g)} \cdot v_1\varphi(C) + 5\cdot v_2\right),
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\sup_C \left| u - \int_C u\mu_{\mathrm{hyp}} \right| &\leq \sqrt{v_1 v_2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{sys}(C)}\right) \cdot \frac{2000}{g-1}} \\ &\quad + v_1 \cdot 1232\pi^3 (g-1)(2g-3) \cdot \min\left\{ \frac{\varphi(C)}{\xi_2(g)}, \frac{14(g-1)\cdot \max\{1, \mathrm{sys}(C)\}}{55 \cdot \mathrm{sys}(C)} \right\} \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{1000}{\xi_1(g)} + \frac{2000}{\xi_2(g)}\right) \cdot \frac{v_1 v_2 \varphi(C)}{g-1}} + \frac{1232\pi^3 (g-1)(2g-3)}{\xi_2(g)} \cdot v_1 \varphi(C),\end{aligned}$$

其中 $\xi_1(g)$、 $\xi_2(g)$ 是定理 *9.19*中定义的正常数。

证明。 我们将 u展开为其 L^2-正交特征函数分解:

$$u = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \phi_{\mathrm{hyp},j},$$

其中 a_j 为常数，而 $\phi_{\mathrm{hyp},j}$ 是双曲拉普拉斯算子的特征函数，对应的特征值为 $\lambda_{\mathrm{hyp},j}$。 根据定义，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 \lambda_{\mathrm{hyp},j}^2 &= \int_C |\Delta_{\mathrm{hyp}} u|^2 d\mu_{\mathrm{hyp}} = \int_C \Delta_{\mathrm{hyp}} u \left(dd^c u + v_1 \mu_{\mathrm{hyp}}\right) \\ &\leq \sup_C |\Delta_{\mathrm{hyp}} u| \int_C \left(dd^c u + v_1 \mu_{\mathrm{hyp}}\right) \leq v_1 \cdot v_2.\end{aligned}$$

类似地，对于每个 j，我们有

$$|a_j| \lambda_{\mathrm{hyp},j} = \left| \int_C \phi_{\mathrm{hyp},j} dd^c u \right| \leq v_1 \sup_C |\phi_{\mathrm{hyp},j}|.$$

根据引理 10.9，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{0<\lambda_{\mathrm{hyp},l} \leq \frac{g-1}{5}} \frac{\sup_C |\phi_{\mathrm{hyp},j}|^2}{\lambda_{\mathrm{hyp},j}} &= \sum_{0<\lambda_{\mathrm{KE},l} \leq \frac{1}{20\pi}} \frac{\sup_C |\phi_{\mathrm{KE},l}|^2}{\lambda_{\mathrm{KE},l}} \\ &< 1232\pi^3 (g-1)(2g-3) \cdot \min\left\{ \frac{\varphi(C)}{\xi_2(g)}, \frac{14(g-1)\cdot \max\{1, \mathrm{sys}(C)\}}{55 \cdot \mathrm{sys}(C)} \right\}.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\int_C du \wedge d^c u &\leq \frac{5}{g-1} \sum_{\lambda_{\mathrm{hyp},l} \geq \frac{g-1}{5}} |a_j|^2 \lambda_{\mathrm{hyp},j}^2 + \sum_{0<\lambda_{\mathrm{hyp},l} \leq \frac{g-1}{5}} |a_j|^2 \lambda_{\mathrm{hyp},j} \\ &\leq 5 v_1 \cdot v_2 + v_1^2 \cdot \sum_{0<\lambda_{\mathrm{hyp},l} \leq \frac{g-1}{5}} \frac{\sup_C |\phi_{\mathrm{hyp},j}|^2}{\lambda_{\mathrm{hyp},j}} \\ &\leq 5 v_1 \cdot v_2 + v_1^2 \cdot 1232\pi^3 (g-1)(2g-3) \cdot \min\left\{ \frac{\varphi(C)}{\xi_2(g)}, \frac{14(g-1)\cdot \max\{1, \mathrm{sys}(C)\}}{55 \cdot \mathrm{sys}(C)} \right\}.\end{aligned}$$

对于 u 的上确界范数，我们有

$$\begin{aligned}\sup_C\left|u-\int_C u\mu_{\mathrm{hyp}}\right| &\le \left|\sum_{\lambda_{\mathrm{hyp},l}\ge\frac{g-1}{5}} a_j\phi_{\mathrm{hyp},j}\right| + \sum_{0<\lambda_{\mathrm{hyp},l}\le\frac{g-1}{5}} |a_j\phi_{\mathrm{hyp},j}| \\ &\le \sqrt{\left(\sum_{\lambda_{\mathrm{hyp},l}\ge\frac{g-1}{5}} |a_j|^2\lambda_{\mathrm{hyp},j}^2\right)\left(\sum_{\lambda_{\mathrm{hyp},l}\ge\frac{g-1}{5}} \lambda_{\mathrm{hyp},j}^{-2}\phi_{\mathrm{hyp},j}^2\right)} \\ &\quad +\upsilon_1\cdot\sum_{0<\lambda_{\mathrm{hyp},l}\le\frac{g-1}{5}}\frac{\sup_C|\phi_{\mathrm{hyp},j}|^2}{\lambda_{\mathrm{hyp},j}} \\ &\le \sqrt{\upsilon_1\upsilon_2\cdot\left(\sum_{\lambda_{\mathrm{hyp},l}\ge\frac{g-1}{5}}\lambda_{\mathrm{hyp},j}^{-2}\phi_{\mathrm{hyp},j}^2\right)} \\ &\quad \sum \quad +\upsilon_1\cdot\frac{1232\pi^3(g-1)(2g-3)}{\lambda^{-2}}\cdot\min\left\{\frac{\varphi(C)}{\xi_2(g)},\frac{14(g-1)\cdot\max\{1,\mathrm{sys}(C)\}}{55\cdot\mathrm{sys}(C)}\right\}.\end{aligned}$$

剩下需要估计总和 λ_{hyp} $_{,\ l\ge\frac{g-1}{5}}$ 双曲 $_j\phi^2_{\mathrm{hyp},\ j}$。通过直接计算，

—

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda_{\mathrm{hyp},l}\ge\frac{g-1}{5}}\frac{|\phi_{\mathrm{hyp},l}(x)|^2}{\lambda_{\mathrm{hyp},l}^2} &= \int_0^{\frac{1}{80(g-1)}}\sum_{\lambda_{\mathrm{hyp},l}\ge\frac{g-1}{5}}\frac{e^{-t\lambda_{\mathrm{hyp},l}}}{\lambda_{\mathrm{hyp},l}\left(1-e^{-\frac{\lambda_{\mathrm{hyp},l}}{80(g-1)}}\right)}|\phi_{\mathrm{hyp},l}(x)|^2\,dt \\ &\le \frac{1}{1-e^{-\frac{1}{400}}}\int_0^{\frac{1}{80(g-1)}}\sum_{\lambda_{\mathrm{hyp},l}\ge\frac{g-1}{5}}\frac{e^{-t\lambda_{\mathrm{hyp},l}}}{\lambda_{\mathrm{hyp},l}}|\phi_{\mathrm{hyp},l}(x)|^2\,dt.\end{aligned}$$

与引理 10.3、引理 10.6 和引理 10.7的证明相同，对于任意 $t\in\left(0,\ _{80}{}^{1}{}_{(g-1)}\right]$，我们有

$$\sum_{\lambda_{\mathrm{hyp},l}\ge\frac{g-1}{5}}\frac{e^{-t\lambda_{\mathrm{hyp},l}}}{\lambda_{\mathrm{hyp},l}}|\phi_{\mathrm{hyp},l}(x)|^2 \le -\frac{\log\left(40(g-1)t\right)}{2}+101+\frac{200}{\mathrm{sys}(C)}.$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda_{\mathrm{hyp},l}\ge\frac{g-1}{5}}\frac{|\phi_{\mathrm{hyp},l}(x)|^2}{\lambda_{\mathrm{hyp},l}^2} &\le \frac{1}{(g-1)\left(1-e^{-\frac{1}{400}}\right)}\left(\frac{\log 2+1}{160}+\frac{101}{80}+\frac{5}{2\cdot\mathrm{sys}(C)}\right) \\ &\le \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\mathrm{sys}(C)}\right)\cdot\frac{2000}{g-1}.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

因此，我们可以估计阿拉克洛夫格林函数与 F_x 之间的差。

推论 11.5. 设 G_{Ar} 是定义在 C上的阿拉克洛夫格林函数。设 F_x 是引理 *11.3*中构造的函数。则有

$$\sup_{y\in C}|G_{\mathrm{Ar}}(x,y)-F_x(y)|\le\frac{(2958032\pi^4+3696\pi^3)(g-1)^2(2g-\frac{5}{2})}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C),$$

其中 $\xi_2(g)$ 是定理 *9.19*中的常数。

证明。 由引理 11.3,

$$-2400\pi\cdot(g-1)\cdot\mu_{\mathrm{hyp}}<dd^c F_x+\delta_x(y)<2400\pi\cdot(g-1)\cdot\mu_{\mathrm{hyp}}.$$

注意， $\mu_{\mathrm{KE}}=4\pi(g-1)\mu_{\mathrm{hyp}}$。

令 $\mathbf{F}_x(y)=G_{\mathrm{hyp}}(x,y)-F_x(y)$。根据构造， $\mathbf{F}_x(y)$ 是光滑的，并满足

$$-2401\pi\cdot(g-1)\cdot\mu_{\mathrm{hyp}}<dd^c\mathbf{F}_x(y)<2401\pi\cdot(g-1)\cdot\mu_{\mathrm{hyp}}.$$

应用11.4和定理 9.19，我们得到

$$\begin{aligned}\sup_C|\mathbf{F}_x| &\le \sup_C\left|\mathbf{F}_x-\int_C\mathbf{F}_x d\mu_{\mathrm{hyp}}\right|+\left|\int_C G_{\mathrm{hyp}}(x,y)d\mu_{\mathrm{hyp}}(y)\right|+\left|\int_C F_x d\mu_{\mathrm{hyp}}\right|\\ &\le 2401\pi\cdot\varphi(C)\cdot\sqrt{\left(\frac{1000}{\xi_1(g)}+\frac{2000}{\xi_2(g)}\right)\cdot\frac{g-1}{\xi_1(g)}}\\ &\quad+\frac{2958032\pi^4(g-1)^2(2g-3)}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C)+8\pi^2\left(\frac{1}{\xi_1(g)}+\frac{1}{\xi_2(g)}\right)\cdot\varphi(C)\\ &< \frac{2958032\pi^4(g-1)^2(2g-3)+30000\pi}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C),\end{aligned}$$

其中 $\xi_1(g)$ 和 $\xi_2(g)$ 是定理 9.19中的常数，并且我们用到了不等式 $\varphi(C)\,\xi_1(g)\ge 1$ 以及$\xi_1\ge 20g\cdot\xi_2$。

接下来，令 ψ_{Ar}为定理 10.1中定义的函数，因此 $G_{\mathrm{Ar}}(x,y)-G_{\mathrm{hyp}}(x,y)=\psi_{\mathrm{Ar}}(x)+\psi_{\mathrm{Ar}}(y)$. 由引理 10.4,

$$\frac{\mu_{\mathrm{Ar}}}{\mu_{\mathrm{hyp}}}\le(\sqrt{2}+1)^2\left(1+\frac{2\,\mathrm{arcsinh}\,1}{\mathrm{sys}(C)}\right)<11\left(1+\frac{1}{\mathrm{sys}(C)}\right),$$

其中 $\mathrm{sys}(C)$ 是 (C,μ_{KE}) 的最短闭测地线长度。由于 $-\mu_{\mathrm{hyp}}<dd^c\psi_{\mathrm{Ar}}<\mu_{Ar}$ and $2\int_C\psi_{\mathrm{Ar}}\mu_{\mathrm{hyp}}=\int_C d\psi_{\mathrm{Ar}}\wedge d^c\psi_{\mathrm{Ar}}$，可得

$$\begin{aligned}&\sup_C|\psi_{\mathrm{Ar}}|\le\sup_C\left|\psi_{\mathrm{Ar}}-\int_C\psi_{\mathrm{Ar}}d\mu_{\mathrm{hyp}}\right|+\frac{1}{2}\left|\int_C d\psi_{\mathrm{Ar}}\wedge d^c\psi_{\mathrm{Ar}}\right|\\ \le\ &\sqrt{\left(\frac{1000}{\xi_1(g)}+\frac{2000}{\xi_2(g)}\right)\cdot\frac{11+11\mathrm{sys}(C)}{(g-1)\mathrm{sys}(C)}\cdot\varphi(C)}\\ &+\frac{1232\pi^3(g-1)^2(2g-3)}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C)+\frac{616\pi^3(g-1)^2(2g-3)}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C)\\ \le\ &\frac{1848\pi^3(g-1)^2(2g-3)+200}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C),\end{aligned}$$

其中我们使用了 $1\le\varphi(C)\,\xi_1(g)$, $\frac{1}{\mathrm{sys}(C)}\le\varphi(C)\,\xi_2(g)$ 以及 $\xi_1\ge 20g\cdot\xi_2$。

最后，结合$\mathbf{F}_x$ 和 ψ_{Ar}的界，我们推得

$$\begin{aligned}|G_{\mathrm{Ar}}(x,y)-F_x(y)| &\le |\psi_{\mathrm{Ar}}(x)|+|\psi_{\mathrm{Ar}}(y)|+|\mathbf{F}_x(y)|\\ &\le \frac{3696\pi^3(g-1)^2(2g-3)+400}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C)\\ &\quad+\frac{2958032\pi^4(g-1)^2(2g-3)+30000\pi}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C)\\ &\le \frac{(2958032\pi^4+3696\pi^3)(g-1)^2(2g-\frac{5}{2})}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C).\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

除了前面的推论之外，引理 11.4 还给出了 Zhang 的 φ-不变量的一个上界，它提供了一个与定理 9.19所述方向相反的不等式。尽管后文不会用到这一结果，但它从另一个角度补充了先前建立的不等式。

推论 11.6。 设 C 是亏格为 $g \geq 2$ 的紧黎曼曲面，配备常曲率为 -1 的双曲度量μ_{KE} 。记 $\mathrm{sys}(C)$ 为 (C, μ_{KE}) 的最短闭测地线长度，并记 $\varphi(C)$ 为 C 的 φ-不变量。那么

$$\varphi(C) \leq 10^6 g^5 \cdot \max\left\{1, \frac{1}{\mathrm{sys}(C)}\right\},$$

证明。 对于任意 $\alpha \in \Gamma(C, \omega_C)$，设 $\mathfrak{u}_\alpha \in \mathscr{A}^0_{C,\mathbb{R}}(C)$ 是满足 $\int_C \mathfrak{u}_\alpha \mu_{\mathrm{hyp}} = 0$ 且.....的唯一函数

$$dd^c \mathfrak{u}_\alpha = i\alpha \wedge \bar{\alpha} - \left(\int_C i\alpha \wedge \bar{\alpha}\right) \mu_{\mathrm{hyp}}.$$

根据引理 10.4 的证明中所用的论证，我们有

$$\frac{i}{2}\alpha \wedge \bar{\alpha} \leq (\sqrt{2}+1)^2(g-1)\left(1 + \frac{2\,\mathrm{arcsinh}\,1}{\mathrm{sys}(C)}\right)\|\alpha\|^2_{L^2;C} \cdot \mu_{\mathrm{hyp}},$$

其中 $\|\alpha\|^2_{L^2;\,C} = \frac{i}{2}\int_C \alpha \wedge \bar{\alpha}$。因此

$$-2\|\alpha\|^2_{L^2;C} \leq dd^c \mathfrak{u}_\alpha \leq 2(\sqrt{2}+1)^2(g-1)\left(1 + \frac{2\,\mathrm{arcsinh}\,1}{\mathrm{sys}(C)}\right)\|\alpha\|^2_{L^2;C}.$$

引理11.4 于是给出

$$\begin{aligned}
\int_C d\mathfrak{u}_\alpha \wedge d^c \mathfrak{u}_\alpha &\leq 20(\sqrt{2}+1)^2(g-1)\left(1 + \frac{2\,\mathrm{arcsinh}\,1}{\mathrm{sys}(C)}\right)\|\alpha\|^4_{L^2;C} \\
&\quad + \frac{6272\pi^3}{5} \cdot (g-1)^2(2g-3) \cdot \frac{\max\{1, \mathrm{sys}(C)\}}{\mathrm{sys}(C)} \cdot \|\alpha\|^4_{L^2;C} \\
&\leq \frac{12544\pi^3}{5} \cdot (g-1)^3 \cdot \frac{\max\{1, \mathrm{sys}(C)\}}{\mathrm{sys}(C)} \cdot \|\alpha\|^4_{L^2;C}.
\end{aligned}$$

接下来，设 $\{\alpha_j\}_{j=1}^g \subset \Gamma(C, \omega_C)$ 是一个 L^2 标准正交基。对于每一对 j, k，设 $\mathfrak{u}_{j,k} \in \mathscr{A}^0_{C,\mathbb{C}}(C)$ 是满足 $\int_C \mathfrak{u}_{j,k}\mu_{\mathrm{Ar}} = 0$ 且.....的唯一函数

$$dd^c \mathfrak{u}_{j,k} = i\alpha_j \wedge \bar{\alpha}_k - \left(\int_C i\alpha_j \wedge \bar{\alpha}_k\right)\mu_{\mathrm{Ar}}.$$

根据命题 9.2， φ-不变量满足 C 如下条件

$$\varphi(C) = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^g \int_C d\mathfrak{u}_{j,k} \wedge d^c \bar{\mathfrak{u}}_{j,k} = \frac{1}{2\pi}\sum_{j,k=1}^g \|d\mathfrak{u}_{j,k}\|^2_{L^2;C}.$$

我们根据 $j = k$ 或 $j \neq k$ 将总和分成两部分。
我们首先考虑情形 $j = k$。由于

$$dd^c \mathfrak{u}_{j,j} = i\alpha_j \wedge \bar{\alpha}_j - 2\mu_{\mathrm{Ar}} = \frac{g-1}{g} dd^c \mathfrak{u}_{\alpha_j} - \frac{1}{g}\sum_{m \neq j} dd^c \mathfrak{u}_{\alpha_m},$$

函数 $\mathfrak{u}_{j,j}-\frac{g-1}{g}\mathfrak{u}_{\alpha_j}+\frac{1}{g}\sum_{m\neq j}\mathfrak{u}_{\alpha_m}$ 是常数。由此可得

$$\begin{aligned}\int_C d\mathfrak{u}_{j,j}\wedge d^c\mathfrak{u}_{j,j} &= \frac{1}{\pi}\|d\mathfrak{u}_{j,j}\|^2_{L^2;C}=\frac{1}{\pi}\left\|d\left(\frac{g-1}{g}\mathfrak{u}_{\alpha_j}-\frac{1}{g}\sum_{m\neq j}\mathfrak{u}_{\alpha_m}\right)\right\|^2_{L^2;C}\\ &\leq \frac{1}{\pi}\left(\frac{g-1}{g}\left\|d\mathfrak{u}_{\alpha_j}\right\|_{L^2;C}+\frac{1}{g}\sum_{m\neq j}\|d\mathfrak{u}_{\alpha_m}\|_{L^2;C}\right)^2\\ &\leq \frac{4(g-1)^2}{g^2}\cdot\frac{12544\pi^3}{5}\cdot(g-1)^3\cdot\frac{\max\{1,\mathrm{sys}(C)\}}{\mathrm{sys}(C)}.\end{aligned}$$

接下来，假设 $j\neq k$。直接计算可得

$$\begin{aligned}dd^c\mathfrak{u}_{j,k} &= \frac{i}{2}(\alpha_j+\alpha_k)\wedge(\bar\alpha_j+\bar\alpha_k)-\frac{i}{2}(\alpha_j-\alpha_k)\wedge(\bar\alpha_j-\bar\alpha_k)\\ &\quad+\frac{1}{2}(\alpha_j-i\alpha_k)\wedge(\bar\alpha_j+i\bar\alpha_k)-\frac{1}{2}(\alpha_j+i\alpha_k)\wedge(\bar\alpha_j-i\bar\alpha_k)\\ &= \frac{1}{2}dd^c(\mathfrak{u}_{\alpha_j+\alpha_k}-\mathfrak{u}_{\alpha_j-\alpha_k}+i\mathfrak{u}_{\alpha_j+i\alpha_k}-i\mathfrak{u}_{\alpha_j-i\alpha_k}).\end{aligned}$$

Appl将前面的 L^2 估计应用于每一项，并利用三角不等式，可得

$$\begin{aligned}\int_C d\mathfrak{u}_{j,k}\wedge d^c\bar{\mathfrak{u}}_{j,k} &\leq \frac{1}{4\pi}\left(\left\|d\mathfrak{u}_{\alpha_j+\alpha_k}\right\|_{L^2;C}+\left\|d\mathfrak{u}_{\alpha_j-\alpha_k}\right\|_{L^2;C}+\left\|d\mathfrak{u}_{\alpha_j+i\alpha_k}\right\|_{L^2;C}+\left\|d\mathfrak{u}_{\alpha_j-i\alpha_k}\right\|_{L^2;C}\right)^2\\ &\leq 16\cdot\frac{12544\pi^3}{5}\cdot(g-1)^3\cdot\frac{\max\{1,\mathrm{sys}(C)\}}{\mathrm{sys}(C)}.\end{aligned}$$

综合这两种情形，

$$\begin{aligned}\varphi(C) &\leq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{g}\int_C d\mathfrak{u}_{j,j}\wedge d^c\mathfrak{u}_{j,j}+\frac{1}{2}\sum_{j\neq k}\int_C d\mathfrak{u}_{j,k}\wedge d^c\bar{\mathfrak{u}}_{j,k}\\ &\leq \frac{g}{2}\cdot\frac{4(g-1)^2}{g^2}\cdot\frac{12544\pi^3}{5}\cdot(g-1)^3\cdot\frac{\max\{1,\mathrm{sys}(C)\}}{\mathrm{sys}(C)}\\ &\quad+\frac{g(g-1)}{2}\cdot16\cdot\frac{12544\pi^3}{5}\cdot(g-1)^3\cdot\frac{\max\{1,\mathrm{sys}(C)\}}{\mathrm{sys}(C)}\\ &\leq 10^6\cdot g^5\cdot\frac{\max\{1,\mathrm{sys}(C)\}}{\mathrm{sys}(C)},\end{aligned}$$

如所声称的那样。 □

现在，我们为厄米线丛 $(\mathcal{O}(\Delta)\ \|\cdot\|_\Delta)$ 建立一个估计，并推导阿拉克洛夫厄米度量 $\|\cdot\|_{\mathrm{Ar}}$ 与双曲厄米度量 $\|\cdot\|_{\mathrm{hyp}}$ 在 ω_C 上的定量比较。

定理 11.7（定理 3.9）。令 $\|\cdot\|_\Delta$ 表示 $\mathcal{O}(\Delta)\to C\times C$ 上的阿拉克洛夫厄米度量，并令 $\varphi(C)$ 为 C 的 φ-不变量。对于任意 $(x_1,x_2)\in C\times C$，令 $\rho=(\rho_1,\rho_2):\mathbb{D}\times\mathbb{D}\to C\times C$ 为一个满足 $\rho_1(0)=x_1$ 且 $\rho_2(0)=x_2$ 的万有覆盖映射。则存在 $(\rho^*\mathcal{O}(\Delta)\ \rho^*\|\cdot\|_\Delta)$ 在 $\mathbb{D}_{\frac{1}{20}}(0)\times\mathbb{D}_{\frac{1}{20}}(0)$ 上的一个局部全纯截面 s，使得

$$\left|\log\|s\|\right|\leq\frac{(5916064\pi^4+7392\pi^3)(g-1)^3}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C)<2\cdot10^{14}g^{\frac{14}{3}}\cdot\varphi(C),$$

其中 $\xi_2(g)$ 是定理 9.19中的常数。

特别地，阿拉克洛夫厄米度量 $\|\cdot\|_{\mathrm{Ar}}$ 和$\omega_C \cong \mathcal{O}(-\Delta)|_\Delta$ 上的双曲厄米度量 $\|\cdot\|_{\mathrm{hyp}}$ 满足

$$\left|\log \frac{\|\cdot\|_{\mathrm{Ar}}}{\|\cdot\|_{\mathrm{hyp}}}\right| \leq \frac{(5916064\pi^4+7392\pi^3)(g-1)^3}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C) < 2\cdot 10^{14} g^{\frac{14}{3}}\cdot\varphi(C).$$

证明。第一个结论的证明自然分为两种情况，具体取决于相对于具有常曲率 -1 的唯一 K¨ahler 度量 μ_{KE}，x_1 与 x_2 之间的距离。

如果 $\mathrm{dist}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(x_1,x_2) \prec \frac{1}{2}$反双曲正弦 1 2，则存在一个点 $x' \in B_{\frac{1}{4}}$反双曲正弦 1 2 $(x_1) \cap B_{\frac{1}{4}}$反双曲正弦 1 2 (x_2)。令 $U_{x'}$、$z_{x'}$ 和 F 如引理 11.3 所述。于是 $U_{x'}$ 同时包含 $B_{\frac{1}{4}}$ 反双曲正弦 1 2 (x_1) 和 $B_{\frac{1}{4}}$ 反双曲正弦 1 2 (x_2), 因此对于任意 $(y_1,y_2) \in B_{\frac{1}{4}}$反双曲正弦 1 2 $(x_1) \times B_{\frac{1}{4}}$反双曲正弦 1 2 (x_2)，我们有

$$|G_{\mathrm{Ar}}(y_1,\ y_2) - \log|z_{x'}(y_1)-z_{x'}(y_2)|| \leq |G_{\mathrm{Ar}}(y_1,y_2)-F_{y_1}(y_2)| + |F_{y_1}(y_2) - \log|z_{x'}(y_1)-z_{x'}(y_2)||.$$

应用定理 9.19、引理11.3 和推论11.5，我们推得

$$\begin{aligned}
|G_{\mathrm{Ar}}(y_1,y_2) - \log|z_{x'}(y_1)-z_{x'}(y_2)|| &\leq \frac{(2958032\pi^4+3696\pi^3)(g-1)^2(2g-\frac{5}{2})}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C)\\
&\quad + \frac{8\pi^2\cdot\max\{1,\mathrm{sys}(C)\}}{\mathrm{sys}(C)}\\
&\leq \frac{(2958032\pi^4+3696\pi^3)(g-1)^2(2g-\frac{5}{2})}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C)\\
&\quad + 8\pi^2\cdot\max\left\{\frac{1}{\xi_1(g)},\frac{1}{\xi_2(g)}\right\}\cdot\varphi(C)\\
&< \frac{2\cdot(2958032\pi^4+3696\pi^3)(g-1)^3}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C),
\end{aligned}$$

其中 $\xi_1(g)$ 是定理 9.19 中的常数，且我们利用了 $1 \leq {}^{\varphi}(C)\,\xi_1(g)$、${}^{1}\mathrm{sys}(C) \leq {}^{\varphi}(C)\,\xi_2(g)$，以及 $\xi_1 \geq 20g\cdot\xi_2$。令 $\mathbf{1}_\Delta$表示 $\mathcal{O}(\Delta)$ 的典范截面，并设 $s'(y_1,y_2) = {}_{z_{x'}\ y_1}{}^{1}(\,)_{-z_{x'}(y_2)}\,\mathbf{1}_\Delta$在 $B_{\frac{1}{4}}$反双曲正弦 1 2 (x_1) $\times B_{\frac{1}{4}}$反双曲正弦 1 2 (x_2) 上。其阿拉克洛夫范数满足

$$|\log\|s'\|_\Delta| \leq \frac{(5916064\pi^4+7392\pi^3)(g-1)^3}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C) < 2\cdot 10^{14} g^{\frac{14}{3}}\cdot\varphi(C).$$

由于双曲正切 反双曲正弦 $_8{}^{\frac{1}{2}} \approx 0.06\cdots > \frac{1}{20}$，$\rho^{-1}(B_{\frac{1}{4}}$反双曲正弦 $_{1\,2}(x_1) \times B_{\frac{1}{4}}$反双曲正弦 $_{1\,2}(x_2))$ 包含 $\mathbb{D}_{\frac{1}{20}}(0) \times \mathbb{D}_{\frac{1}{20}}(0)$。我们定义 $s = \rho^* s'$，它随后便作为所需的局部全纯截面，定义在 $\mathbb{D}_{\frac{1}{20}}(0) \times \mathbb{D}_{\frac{1}{20}}(0)$ 上。

另一方面，如果 $\mathrm{dist}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(x_1,x_2) \geq \frac{1}{2}$反双曲正弦 $_{1\,2}$，那么对于任意 $(y_1,y_2) \in B_{\frac{2}{9}}$反双曲正弦 $_{1\,2}(x_1) \times B_{\frac{2}{9}}$反双曲正弦 $_{1\,2}(x_2)$，我们有

$$\mathrm{dist}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(y_1,y_2) \geq \mathrm{dist}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(x_1,x_2) - \mathrm{dist}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(x_1,y_1) - \mathrm{dist}_{\mu_{\mathrm{KE}}}(x_2,y_2) > \frac{\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}}{18} > \frac{1}{100}.$$

引理 11.3 随后给出 $|F(y_1,\ y_2)| \leq {}^{6\pi^2\cdot}{}_{\text{最大值}\{1,\text{系统}(C)\}\ \text{系统}(C)}$，因此

$$\begin{aligned}
|G_{\mathrm{Ar}}(y_1,y_2)| &\leq |G_{\mathrm{Ar}}(y_1,y_2)-F(y_1,y_2)| + |F(y_1,y_2)|\\
&\leq \frac{(2958032\pi^4+3696\pi^3)(g-1)^2(2g-\frac{5}{2})+6\pi^2}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C)\\
&< \frac{2\cdot(2958032\pi^4+3696\pi^3)(g-1)^3}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C).
\end{aligned}$$

然后在 $B_{\frac{2}{9}\text{反双曲正弦}\,\frac{1}{2}}(x_1)\times B_{\frac{2}{9}\text{反双曲正弦}\,\frac{1}{2}}(x_2)$,

$$|\log\|\mathbf{1}_\Delta\|_\Delta|\le\frac{(5916064\pi^4+7392\pi^3)(g-1)^3}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C)<2\cdot10^{14}g^{\frac{14}{3}}\cdot\varphi(C).$$

由于双曲正切$_{\text{反双曲正弦}_9^{\frac{1}{2}}}\approx0.053\cdots>\frac{1}{20}$, $\rho^{-1}(B_{\frac{2}{9}\text{反双曲正弦}\,\frac{1}{2}}(x_1)\times B_{\frac{2}{9}\text{反双曲正弦}\,\frac{1}{2}}(x_2))$ 包含 $\mathbb{D}_{\frac{1}{20}}(0)\times\mathbb{D}_{\frac{1}{20}}(0)$。我们将典范截面 $\mathbf{1}_\Delta$ 拉回到 $\mathbb{D}_{\frac{1}{20}}(0)\times\mathbb{D}_{\frac{1}{20}}(0)$, 记为 s; 它正是所需的局部全纯截面。

对于第二个陈述，对于任意 x，令 z_x 和 $F_x\colon\ C\setminus\{x\}\to\mathbb{R}$ 如引理 11.3 中所述。根据阿拉克洛夫厄米度量的定义,

$$\begin{aligned}\left|\log\frac{\|\cdot\|_{\mathrm{Ar}}}{\|\cdot\|_{\mathrm{hyp}}}(x)\right| &= \left|\log\frac{\|dz_x\|_{\mathrm{Ar}}}{\|dz_x\|_{\mathrm{hyp}}}(x)\right|\\ &\le \left|\lim_{y\to x}\left(F_x(y)+\log|z_x(x)-z_x(y)|\right)\right|+|\log\|dz_x\|_{\mathrm{hyp}}(x)|\\ &\quad+\left|\lim_{y\to x}\left(G_{\mathrm{Ar}}(x,y)-F_x(y)\right)\right|.\end{aligned}$$

利用 $F_x(y)+$对数$|z_x(x)-z_x(y)|$ 以及 $\|dz_x\|_{\mathrm{hyp}}$关于最短闭测地线长度 sys(C) 的局部估计和定理9.19中的全局界，我们得到

$$\left|\log\frac{\|\cdot\|_{\mathrm{Ar}}}{\|\cdot\|_{\mathrm{hyp}}}(x)\right|\ \le\ \frac{12\pi^2\cdot\max\{1,\mathrm{sys}(C)\}}{\mathrm{sys}(C)}+\frac{(2958032\pi^4+3696\pi^3)(g-1)^2(2g-\frac{5}{2})}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C),$$

再次利用 $1\le{}^{\varphi}{}_{(C)}\,\xi_1(g)$、$\frac{1}{\mathrm{sys}(C)}\le{}^{\varphi}{}_{(C)}\,\xi_2(g)$ 以及 $\xi_1\ge20g\cdot\xi_2$，我们可得

$$\begin{aligned}\left|\log\frac{\|\cdot\|_{\mathrm{Ar}}}{\|\cdot\|_{\mathrm{hyp}}}(x)\right| &\le \frac{(2958032\pi^4+3696\pi^3)(g-1)^2(2g-\frac{5}{2})+12\pi^2}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C)\\ &< \frac{2\cdot(2958032\pi^4+3696\pi^3)(g-1)^3}{\xi_2(g)}\cdot\varphi(C)<2\cdot10^{14}g^{\frac{14}{3}}\cdot\varphi(C),\end{aligned}$$

由此证明得以完成。 □

参考文献

[AMM21] Hugues Auvray、Xiaonan Ma 和 George Marinescu。带 puncture 的黎曼曲面上的伯格曼核。《数学年刊》，379(3-4):951–1002，2021年。doi:10.1007/s00208-020-01957-y.[AMM22] Hugues Auvray、Xiaonan Ma 和 George Marinescu。带 puncture 的黎曼曲面上伯格曼核的商空间。《数学杂志》，301(3):2339–2367，2022年。doi:10.1007/s00209-022-02977-x.[Ara74] Suren Yurievich Arakelov。算术曲面上除子的交理论。《苏联数学：消息》，8(6):1167–1180，1974年。[AS60] Lars V. Ahlfors 和 Leo Sario。《黎曼曲面》，普林斯顿数学丛书第26卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1960年。[Aut01] Pascal Autissier。算术曲面上的整点。《纯粹与应用数学杂志》，531:201–235，2001年。doi:10.1515/crll.2001.015.[Ber90] Vladimir Berkovich。非阿基米德域上的谱理论与解析几何。美国数学会，1990年。

[BG06] 恩里科·邦别里和瓦尔特·古布勒。《丢番图几何中的高度》。新数学专著丛书。剑桥大学出版社，2006年。[BG13] 曼朱尔·巴尔加瓦和本尼迪克特·H·格罗斯。具有有理魏尔斯特拉斯点的超椭圆曲线的雅可比簇的2-塞尔默群的平均大小。载于《自守表示与L-函数》，Tata 基础研究所数学研究丛书第22卷，第23–91页。Tata 基础研究所，孟买，2013年。[BSTTTZ20] M. Bhargava、A. Shankar、T. Taniguchi、F. Thorne、J. Tsimerman 和 Y. Zhao。数域类群中2-扭子的界及椭圆曲线上的整点，《美国数学会杂志》33（2020年），第4期，1087–1099。[Bom90] 恩里科·邦别里。重新探讨莫德尔猜想。《比萨高等师范学校科学 კლას》，第4辑，17(4):615–640，1990年。[BR07] M. Baker、R. Rumely，度量图上的调和分析。《加拿大数学杂志》59（2007年），第2期，225–275。[BS94] P. Buser 和 P. Sarnak。大亏格黎曼曲面的周期矩阵。《数学发明》，117(1):27–56，1994年。附录作者：J. H. Conway 和 N. J. A. Sloane。doi: 10.1007/BF01232233.[BT82a] Eric Bedford 和 B. A. Taylor。多重次调和函数的一种新容量。《数学学报》，149(1-2):1–40，1982年。doi:10.1007/BF02392348.[BT82b] 拉乌尔·博特和 Loring W. Tu。《代数拓扑中的微分形式》，数学研究生教材第82卷。施普林格出版社，纽约—柏林，1982年。[Bus92] 彼得·布塞尔。《紧黎曼曲面的几何与谱》，数学进展第106卷。Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1992年。[CC96] 杰夫·切格和 Tobias H. Colding。里奇曲率下界与扭曲积的几乎刚性。《数学年刊》（第2辑），144(1):189–237，1996年。doi:10.2307/2118589.[Che08] 陈华一。正次数与算术大性。arXiv: 0803.2583v3，2008年。[Cin11] Zubeyir Cinkir。函数域上的张氏猜想与有效博戈莫洛夫猜想。《数学创刊》，183(3):517–562，2011年。[Cin15] Zubeyir Cinkir。亏格3曲线的容许不变量，《数学手稿》148第3–4期（2015年），317–339。[CL06] Antoine Chambert-Loir。Berkovich 空间上的测度与等分布。《纯粹与应用数学杂志》，595:215–235，2006年。doi:10.1515/CRELLE.2006.049.[CLT09] Antoine Chambert-Loir 和 Amaury Thuillier。Mahler 测度与对数等分布。《傅里叶研究所年刊》，59(3):977–1014，2009年。doi:10.5802/aif.2454.[Col85] Robert F. Coleman。有效 Chabauty。《杜克数学杂志》，52(3):765–770，1985年。doi:10.1215/ S0012-7094-85-05240-8.[Con06] Brian Conrad。Chow 的 K/k-像与 K/k-迹，以及 Lang-Néron 定理。《数学教学》（第2辑），52(1-2):37–108，2006年。[CZ03] P. Corvaja 和 U. M. Zannier，代数曲线上整点的数量，《纯粹与应用数学杂志》565（2003年），27–42。

[Del87] P. Deligne. 上同调的行列式。载于《算术代数几何当前趋势》（加利福尼亚州阿卡塔，1985年），《当代数学》第67卷，第93–177页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1987年。doi:10.1090/conm/067/902592.[DGH21] Vesselin Dimitrov、Ziyang Gao 和 Philipp Habegger. 曲线的 Mordell–Lang 一致性。《数学年刊》，194(1):237–298，2021年。[DGH22] Vesselin Dimitrov、Ziyang Gao 和 Philipp Habegger. 相对 Bogomolov 猜想的一个推论。《数论杂志》，230:146–160，2022年。doi:10.1016/j.jnt.2021.03.028.[dJ18] Robin de Jong. 雅可比簇上圈的 N´eron-Tate 高度。《代数几何杂志》，27(2):339–381，2018年。doi:10.1090/jag/700.[DKY20] L. DeMarco、H. Krieger、H. Ye，属为 2 的曲线族的一致 Manin–Mumford 定理。《数学年刊》(3) 191 (2020)，949–1001。[DR86] Jozef Dodziuk 和 Burton Randol. 有限体积双曲流形上 λ_1 的下界。《微分几何杂志》，24(1):133–139，1986年。URL: http://projecteuclid.org/euclid. jdg/1214440261.[Fal83] Gerd Faltings. 阿贝尔簇在数域上的有限性定理。《数学发明》，73(3):349–366，1983年。[Fal84] Gerd Faltings. 算术曲面上的微积分。《数学年刊》(2)，119(2):387–424，1984年。doi: 10.2307/2007043.[Ful98] William Fulton. 交叉理论。Springer New York，纽约州纽约市，1998年。doi:10.1007/ 978-1-4612-1700-8.[GLN24] Renan Gross、Guy Lachman 和 Asaf Nachmias. 曲面小特征值的尖锐下界，2024年。arXiv:2407.21780.[GS90] Henri Gillet 和 Christophe Soul´e. 算术交叉理论。《高等科学研究院数学出版物》，(72):93–174，1990年。URL: http://www.numdam.org/item?id=PMIHES[GS92] H. Gillet 和 C. Soul´e，算术黎曼–罗赫定理，《数学发明》，110(3):473–543，1992年，https://doi.org/10.1007/BF01231343。[GZ24] Z. Gao 和 S. Zhang. Ceresa 圈与 Gross–Schoen 圈的高度。arXiv: 2407.01304，2024年。[Hab23] Philipp Habegger. 属至少为 2 的曲线上有理点的数量。载于《2022年国际数学家大会》，赫尔辛基，芬兰，线上会议，2022年7月6日至14日。第3卷，第1–4节，第1838–1869页。柏林：欧洲数学会（EMS），2023年。doi: 10.4171/ICM2022/79.[Heb94] James J. Hebda. 曲面上割迹的度量结构与 Ambrose 问题。《微分几何杂志》，40(3):621–642，1994年。URL: http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214455780.[HW25] Yuxin He 和 Yunhui Wu. 大亏格闭双曲曲面的第二特征值。《微分几何杂志》，130(2):403–441，2025年。[HM98] Joe Harris 和 Ian Morrison. 曲线模空间，《数学研究生教材》第187卷。纽约州纽约市：Springer，1998年。[Hri85] Paul Hriljac. 高度与 Arakelov 交叉理论。《美国数学杂志》，107(1):23–38，1985年。doi:10.2307/2374455.

[HS00] Marc Hindry 和 Joseph H. Silverman. 丢番图几何：导论。Springer New York，纽约州纽约市，2000年。doi:10.1007/978-1-4612-1210-2.[Huy05] Daniel Huybrechts. 复几何。Universitext。施普林格出版社，柏林，2005年。导论。[IT98] Jin-ichi Itoh 和 Minoru Tanaka. 光滑黎曼流形上割迹的维数。《东北数学杂志》(2)，50(4):571–575，1998年。doi:10.2748/tmj/1178224899.[JK06] Jay Jorgenson 和 J¨urg Kramer. 典范格林函数的界。《组合数学》，142(3):679–700，2006年。doi:10.1112/S0010437X06001990.[JK14] Jay Jorgenson 和 J¨urg Kramer. Faltings 的 δ 函数的有效界。《图卢兹数学科学学院年刊》(6)，23(3):665–698，2014年。doi:10.5802/afst.1420.[Kuh21] Lars K¨uhne. 阿贝尔簇族中的等分布与一致性，2021年。arXiv:2101. 10272.[KL78] G. A. Kabatjanskiĭ 和 V. I. Levenˇsteˇin. 球面及空间中堆积的界。《信息传输问题》，14(1):3–25，1978年。[Lan88] Serge Lang. 阿拉克洛夫理论导论。施普林格出版社，纽约，1988年。doi:10.1007/ 978-1-4612-1031-3.[Li12] Peter Li. 几何分析，《剑桥高等数学研究丛书》第134卷。剑桥大学出版社，剑桥，2012年。doi:10.1017/CBO9781139105798.[Liu02] Qing Liu. 代数几何与算术曲线。牛津大学出版社，2002年5月。doi: 10.1093/oso/9780198502845.001.0001.[Lev79] V. I. Levenˇsteˇin. n 维欧几里得空间中堆积的界。《苏联科学院通报》，245(6):1299–1303，1979年。[LSW25] Nicole Looper、Joseph Silverman 和 Robert Wilms. 函数域上曲线的一致定量 Manin–Mumford 定理。《纯粹与应用数学杂志》（Crelles Journal），2025年。URL: https://doi.org/10.1515/crelle-2025-0055 [引自 2025-09-05], doi: doi:10.1515/crelle-2025-0055.[LV20] Brian Lawrence 和 Akshay Venkatesh. 丢番图问题与 p-进周期映射。《数学发明》，221(3):893–999，2020年。doi:10.1007/s00222-020-00966-7.[Mas89] David William Masser. 阿贝尔簇有限生成子群的特化。《美国数学会汇刊》，311(1):413–424，1989年。doi:10.2307/2001034.[Maz86] Barry Mazur. 曲线上的算术。《美国数学会通报》(新系列)，14(2):207–259，1986年。doi: 10.1090/S0273-0979-1986-15430-3.[MM07] Xiaonan Ma 和 George Marinescu. 全纯莫尔斯不等式与伯格曼核，《数学进展》第254卷。巴塞尔：Birkh¨auser Verlag，2007年。doi:10.1007/ 978-3-7643-8115-8.[Mor22] L. J. Mordell，关于三次与四次不定方程的有理解，《剑桥哲学学会数学会报》21 (1922)，第17–192页。[Mum65] D. Mumford. 关于 Mordell 猜想的一则评注。《美国数学杂志》87 (1965)，1007–1016。[NSW08] Neukirch, J., Schmidt, A. 和 Wingberg, K.《数域的上同调》。Springer Berlin Heidelberg，2008年，https://doi.org/10.1007/978-3-540-37889-1。

[OR09] Jean-Pierre Otal 和 Eulalio Rosas。对于任意亏格为 g 的双曲曲面， $\lambda_{2g-2} > 1/4$。《杜克数学杂志》，150(1):101–115，2009年。doi:10.1215/00127094-2009-048.[OT89] T. Ooe 和 J. Top，数域上阿贝尔簇的 Mordell-Weil 秩，《纯粹与应用代数杂志》58 (1989)，第3期，261–265页。[Pet06] Peter Petersen。《黎曼几何》，《数学研究生教材》第171卷。Springer，纽约，第二版，2006年。[Ran55] R. A. Rankin。 n 维空间中球冠的最密堆积。《格拉斯哥数学学会会刊》，2:139–144，1955年。[Ray83a] Michel Raynaud。阿贝尔簇上的曲线与挠点。《数学发明》，71(1):207–233，1983年。[Ray83b] Michel Raynaud。阿贝尔簇的子簇与挠点。载于《算术与几何》，《数学进展》第I卷，327–352页。Birkhäuser Boston，马萨诸塞州波士顿，1983年。[Rem00b] G. Rémond，高维情形下的 Vojta 不等式，《比萨高等师范学校科学 კლას》(4)，29 (2000)，101–151页，https://doi.org/10.1016/S0764-4442(00)88135-5。[Rem10] G. Rémond，曲线的有理点数，《伦敦数学学会会刊》(3) 101 (2010)，第3期，759–794页；MR2734960。[Ser97] Jean-Pierre Serre。《Mordell-Weil 定理讲义》。Vieweg+Teubner 出版社，威斯巴登，1997年。doi:10.1007/978-3-663-10632-6.[Sto01] M. Stoll，为超椭圆曲线的雅可比簇实现二重下降，《算术学报》98 (2001)，第3期，245–277页；MR1829626[SUZ97] L. Szpiro、E. Ullmo 和 S. Zhang，小点的等分布，《数学发明》，127 (1997)，337–347页，https://doi.org/10.1007/s002220050123。[SW18] Arul Shankar 和 Xiaoheng Wang。具有标记非魏尔斯特拉斯点的超椭圆曲线上的有理点。《组合数学》，154(1):188–222，2018年。doi:10.1112/S0010437X17007515.[SWY80] Richard Schoen、Scott Wolpert 和丘成桐。紧曲面低特征值的几何界。载于《拉普拉斯算子的几何》（《纯数学专题讨论会》，夏威夷大学，檀香山，夏威夷，1979），《纯数学专题讨论会》第XXXVI卷，279–285页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1980年。[SZ24] Naser Talebizadeh Sardari 和 Masoud Zargar。球码与球堆积的新上界。《数学年刊》，389(4):3653–3703，2024年。doi:10.1007/s00208-023-02738-z.[Tia90a] Gang Tian。代数流形上一组极化 Kähler 度量。《微分几何杂志》，32(1):99–130，1990年。URL: http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214445039.[Tia90b] Gang Tian。关于第一陈类为正的复曲面上的 Calabi 猜想。《数学发明》，101(1):101–172，1990年。doi:10.1007/BF01231499.[Tia00] Gang Tian。Kähler 几何中的典范度量。《苏黎世联邦理工学院数学讲义》。Birkhäuser 出版社，巴塞尔，2000年。讲义由 Meike Akveld 整理。doi:10.1007/ 978-3-0348-8389-4.[Tia13] Gang Tian。Kähler-Einstein 度量的部分 C^0-估计。《数学与统计通讯》，1(2):105–113，2013年。doi:10.1007/s40304-013-0011-9。

[Tia15] Gang Tian。K-稳定性与 Kähler-Einstein 度量。《纯粹与应用数学通讯》，68(7):1085–1156，2015年。doi:10.1002/cpa.21578.[Ull98] E. Ullmo。曲线上代数点的正性与离散性。《数学年刊》(2)，147:167–179，1998年。[Voj89] Paul Vojta。任意亏格的两条曲线乘积的 Dyson 引理。《数学发明》，98(1):107–113，1989年。doi:10.1007/BF01388846.[Voj91] Paul Vojta。紧情形下的 Siegel定理。《数学年刊》，133(3):509–548，1991年。[War83] Frank W. Warner。《可微流形与李群基础》，《数学研究生教材》第94卷。施普林格出版社，纽约—柏林，1983年。1971年版的修订重印本。[Wen48] J. G. Wendel，关于伽马函数的注记，《美国数学月刊》55 (9) (1948) 563–564。[Wil17] Robert Wilms。Faltings δ不变量的新显式公式，《数学发明》209 第2期 (2017)，481–539。[Wil22] Robert Wilms。曲线自乘积上的算术交数。代数几何杂志，31:397–424，2022年。[WX22a] Yunhui Wu 和 Yuhao Xue。大亏格黎曼曲线第一特征值的最优下界。《美国数学杂志》，144(4):1087–1114，2022年。[WX22b] Yunhui Wu 和 Yuhao Xue。大亏格闭黎曼曲面的小特征值。《美国数学会汇刊》，375(5):3641–3663，2022年。doi:10.1090/tran/8608.[Yu25] Jiawei Yu。零特征函数域上的显式一致莫德尔猜想。即将在代数几何杂志发表，2025年。[Yua08] Xinyi Yuan。算术簇上的大线丛。《数学发明》，173(3):603–649，2008年。doi:10.1007/s00222-008-0127-9.[Yua09] Xinyi Yuan。算术线丛的体积。《组合数学》，145(6):1447–1464，2009年。[Yua24] Xinyi Yuan。算术大性与一致 Bogomolov型结果。即将在数学年刊发表，2024年。[Yua25] Xinyi Yuan。关于 Vojta的证明与莫德尔猜想，2025年。URL: https://arxiv.org/abs/ 2508.11888，arXiv:2508.11888。[YZ24] Xinyi Yuan 和张寿武。准射影簇上的阿代尔线丛。即将收入《数学年刊研究丛书》，2024年。[Zha93] 张寿武。曲线上的容许配对。《数学创刊》，112:171–193，1993年。[Zha95] 张寿武。小点与阿代尔度量。代数几何杂志，4:281–300，1995年。[Zha10] 张寿武。Gross-Schoen循环与对偶化层。《数学发明》，179(1):1–73，2010年。doi:10.1007/s00222-009-0209-3.[Zho24] Shengxuan Zhou。具有复双曲尖点的 Kähler 流形上的峰截面与伯格曼核。《数学年刊》，390(2):1973–2041，2024年。doi:10.1007/s00208-024-02798-9。

Jiawei Yu
地址： *School of Mathematical Sciences, Peking University, Haidian District, Beijing 100871, China*
电子邮件： *yujiawei@pku.edu.cn*

袁新意 地址： *BICMR, Peking University, Haidian District, Beijing 100871, China*电子邮件： *yxy@bicmr.pku.edu.cn*

Shengxuan Zhou 地址： *Institut de Mathématiques de Toulouse, 118 route de Narbonne, F-31062 Toulouse Cedex 9, France*电子邮件： *zhoushx98@outlook.com*