arXiv:2602.01821v1 [math.CT] 2 Feb 2026

泛代数几何的范畴与函子。代数的自同构等价。

A. Tsurkov，数学系，巴西北里奥格兰德联邦大学，
arkadytsurkov.2021@gmail.com

2026年2月3日

摘要

泛代数几何使我们能够考察每个泛代数的几何性质。两个代数何时具有相同的代数几何？要回答这个问题，我们必须考察这些代数的代数闭集范畴。这些范畴完全一致，便引出了代数几何等价的概念。这些范畴的某种同构则引出了代数自同构等价的概念。自 B. Plotkin 于 2003年发表文章以来，这一概念便一直受到研究。我们将借助范畴论的语言，为这一概念给出一种更为优雅的定义，并回顾一些与之相关的定理。

Keywords: 泛代数、范畴论、泛代数几何、代数的自同构等价。

1 引言

我们可以在任意代数簇 Θ 上考虑泛代数几何。为简便起见，本文只考虑单排序代数簇。

取一个可数无限集 X_0。对于每个子集 $X \subset X_0$，我们的簇 Θ 中都存在以集合 X 为自由生成元集的自由代数 $F(X)$。我们只考虑由有限子集 $X \subset X_0$ 生成的自由代数 $F(X)$。这些代数是范畴 Θ^0 该簇的有限生成自由代数Θ中的对象；这些代数的同态将是该范畴中的态射。

对于每个 $F(X) \in \mathrm{Ob}\Theta^0$，一对 $(f_1,\ f_2) \in F(X)\times F(X)$ 可以视为我们所研究的簇 Θ 中的一个方程。子集 $T \subseteq F(X) \times F(X)$ 可以视为一个方程组。自由代数 $F(X)$ 的元素是我们语言中的词，它们由该簇的签名及其恒等式定义。因此，当我们考察方程及其方程组时，处理的就是我们语言的句法。

我们考虑一个任意的代数 $H \in \Theta$。同态$\varphi \in \mathrm{Hom}(F(X), H)$，其中 $F(X) \in \mathrm{Ob}\Theta^0$且 $(f_1, f_2) \in F(X) \times F(X)$，可以视为方程 (f_1, f_2) 的一个解，条件是 $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$；换句话说，$(f_1, f_2) \in \ker \varphi$。我们将代数 H 中方程组 $T \subseteq F \times F$ 的所有解组成的集合 $\{\varphi \in \mathrm{Hom}(F(X), H) \mid T \subseteq \ker \varphi\}$ 记为 $T'_H = \{\varphi \in \mathrm{Hom}(F(X), H) \mid T \subseteq \ker \varphi\}$。某个特定代数 H 中方程组的解取决于该代数的语义。

集合 $\mathrm{Hom}(F(X), H)$ 在此处发挥的作用，与仿射空间 k^n 在经典代数几何中的作用相同，其中k是一个域。每个 $\varphi \in \mathrm{Hom}(F(X), H)$ 都可以视为我们仿射空间中的一个点。对于点集 $R \subseteq \mathrm{Hom}(F(X), H)$ 中的每个集合，我们都可以考虑方程 $(f_1, f_2) \in F(X) \times F(X)$；该方程在代数 H 中的解是 R的所有点。显然，在这种情况下 $(f_1, f_2) \in \bigcap_{\varphi \in R} \ker \varphi$成立。因此 $\bigcap_{\varphi \in R} \ker \varphi \subseteq F(X) \times F(X)$，我们将$\bigcap_{\varphi \in R} \ker \varphi$记为 R'_H；它是最大的方程组，其在代数 H 中的解是 R 的所有点。显然， R'_H 是 $F(X)$ 中的一个同余。

最后，对于每个方程组 $T \subseteq F(X) \times F(X)$，我们都可以考虑该方程组的代数闭包：

$$(T'_H)'_H = T''_H = \bigcap_{\substack{\varphi \in \mathrm{Hom}(F(X), H), \\ T \subseteq \ker \varphi}} \ker \varphi \subseteq F(X) \times F(X). \tag{1.1}$$

这是极大的方程组，它在代数 H 中的解与方程组 T 的解相同。

定义 1.1 如果集合（方程组） $T \subseteq F(X) \times F(X)$ 在代数 H*(H-*闭*)* 中满足 $T = T''_H$，则称其在该代数中是代数闭的 。

每个代数闭集 $T \subseteq F(X) \times F(X)$ 都是 $F(X)$ 中的一个同余。我们用 $Cl_H(F(X))$ 表示 $F(X) \times F(X)$ 中所有 H-闭集构成的族。

2 集合论与泛代数中的辅助事实。记号说明。

本文将大量使用笛卡尔平方中的元素。因此，我们采用以下简略记号。设 A 和 B 是两个集合，且 $\varphi\colon A \to B$ 是一个映射，则对于 (a_1, a_2)，我们记 $\varphi(a_1, a_2) = (\varphi(a_1) \ \varphi(a_2)) \in B \times B$。若 $R \subseteq A \times A$，则记 $\varphi(R) = \{\varphi(r) \mid r \in R\}$。此外，对于每个集合 A，我们将子集 $\{(a, a) \mid a \in A\} \subset A \times A$ 记作 Δ_A。

我们用 $|A|$表示集合 A的基数。对于有限集的元素个数，我们也用同样的方式表示。

注 2.1 若 $\varphi_1, \varphi_2\colon B \to C$ 是两个映射，且 $\tau\colon A \to B$ 是一个满射，并且 $\varphi_1\tau = \varphi_2\tau$ 成立，则 $\varphi_1 = \varphi_2$。

这是集合论中一个众所周知且显而易见的事实。

定义 *2.1* 若函子 $\mathcal{F}: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 从范畴 $\mathfrak{A}$ 到范畴 $\mathfrak{B}$ 满足：对于每个 $B \in Ob\mathfrak{B}$，都存在 $A \in Ob\mathfrak{A}$，使得 $B = \mathcal{F}(A)$；并且对于每个 $\beta \in Mor_{\mathfrak{B}}(B_1, B_2)$，其中 $B_1, B_2 \in Ob\mathfrak{B}$，都存在 $\alpha \in Mor_{\mathfrak{A}}(A_1, A_2)$，使得 $B_1 = \mathcal{F}(A_1)$，$B_2 = \mathcal{F}(A_2)$，$\beta = \mathcal{F}(\alpha)$，则称其为满函子。

注 2.2 与注 *2.1* 一样，若 $\mathcal{F}_1$、$\mathcal{F}_2: \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ 是两个函子，且 $\mathcal{T}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是满函子，并且 $\mathcal{F}_1\mathcal{T} = \mathcal{F}_2\mathcal{T}$ 成立，则 $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$。

这个注通过考察对象与函子的相应映射得以证明。

此外，本文还将大量使用一种特定类型的交换图表。我们考虑同一簇 Θ 中的两个代数 A，$B \in \Theta$、两个同余 $T_A \subseteq A \times A$、$T_B \subseteq B \times B$ 以及图表

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{\tau_A}{\to} & A/T_A \\ \mu\downarrow & & \downarrow\varphi \\ B & \underset{\tau_B}{\to} & B/T_B \end{array}, \tag{2.1}$$

其中 τ_A、τ_B 是自然满同态。对于固定的同态 φ，使该图表左列交换的所有同态 μ 组成的集合记为 $\left((A,T_A)\ (B,T_B) \quad \varphi \right)$。对于固定的同态 μ，使该图表右列交换的所有同态 φ 组成的集合记为 $\left(\mu, (A,T_A)\ (B,T_B) \right)$。若集合 $\left((A,T_A)\ (B,T_B) \quad \varphi \right)$ 仅含一个元素 μ，则记为 $\mu = \left((A,T_A)\ (B,T_B) \quad \varphi \right)$。若集合 $\left(\mu, (A,T_A)\ (B,T_B) \right)$ 仅含一个元素 φ，则记为 $\varphi = \left(\mu, (A,T_A)\ (B,T_B) \right)$。

备注 2.3 如果 $\mu \in \left((A,T_A)\ (B,T_B) \quad \varphi \right)$，则 $\varphi \in \left(\mu, (A,T_A)\ (B,T_B) \right)$；反之，如果 $\varphi \in \left(\mu, (A,T_A)\ (B,T_B) \right)$，则 $\mu \in \left((A,T_A)\ (B,T_B) \quad \varphi \right)$。

注记 *2.4* 我们考虑三个代数 $A, B, C \in \Theta$ 和三个同余 $T_A \subseteq A \times A$，$T_B \subseteq B \times B$，$T_C \subseteq C \times C$。若 $\mu_A: A \to B$，$\mu_B: B \to C$ 是两个同态，且 $\varphi_A \in \left(\mu_A, (A,T_A)\ (B,T_B) \right)$，$\varphi_B \in \left(\mu_B, (B,T_B)\ (C,T_C) \right)$，则 $\varphi_B\varphi_A \in \left(\mu_B\mu_A, (A,T_A)\ (C,T_C) \right)$。若 $\varphi_A: A/T_A \to B/T_B$，$\varphi_B: B/T_B \to C/T_C$ 是两个同态，且 $\mu_A \in \left((A,T_A)\ (B,T_B) \quad \varphi_A \right)$，$\mu_B \in \left((B,T_B)\ (C,T_C) \quad \varphi_B \right)$，则 $\mu_B\mu_A \in \left((A,T_A)\ (C,T_C) \quad \varphi_B\varphi_A \right)$。

命题 2.1 我们再次考虑同一簇 Θ 中的两个代数 $A, B \in \Theta$ 和两个同余 $T_A \subseteq A \times A$, $T_B \subseteq B \times B$。

1) 如果存在同态 $\mu: A \to B$，使得 $\mu(T_A) \subseteq T_B$ 成立，那么就存在同态 $\varphi: A/T_A \to B/T_B$，使得图表 *(2.1)* 交换，即 $\varphi\tau_A = \tau_B\mu$。按我们的记号，在这种情况下可写作 $\left(\mu,\ (A, T_A)\,(B, T_B)\right) \neq \varnothing$.

2)反之，如果 $\varphi : A/T_A \to B/T_B$ 是一个同态，且 $\mu \in \left((A, T_A)\,(B, T_B)\ \varphi\right)$，那么 $\mu(T_A) \subseteq T_B$.3) 在第 *1)* 条的条件下 $\left|\left(\mu,\ (A, T_A)\,(B, T_B)\right)\right| = 1$.4) $\left(id_A,\ (A, T_A)\,(A, T_A)\right) = id_{A/T_A}$。

证明。 1）该命题的第一项是泛代数中的一个众所周知的事实。在模论中，它被称为两个短正合列引理。因此，我们只证明该命题的其他各项；这些证明也没有什么困难。

2）我们考虑图表 (2.1)。该图表是交换的，因为 $\mu \in \left((A,\ T_A)\,(B,\ T_B)\ \varphi\right)$。我们假设 $(a',\ a'') \in T_A$。$\tau_A(a') = \tau_A(a'')$ 成立。因此，

$$\tau_B\mu(a') = \varphi\tau_A(a') = \varphi\tau_A(a'') = \tau_B\mu(a'')$$

成立。因此 $(\mu(a')\ \ \mu(a'')) \in T_B$。

3）如果两个同态 $\varphi_i: A/T_A \to B/T_B$, $i = 1,\ 2$ 使图表 (2.1) 交换，那么根据注 2.1, $\varphi_1\tau_A = \tau_B\mu = \varphi_2\tau_A$和 $\varphi_1 = \varphi_2$。

4) 我们用 τ 表示自然满同态 $A \to A/T_A$。显然，$id_A(T_A) = T_A$。因此，根据 3)，$\left|\left(id_A,\ (A,\ T_A)\,(A,\ T_A)\right)\right| = 1$。此外，我们有 $id_A\tau = \tau = id_{A/T_A}\tau$。因此，$id_{A/T_A} \in \left(id_A,\ (A,\ T_A)\,(A,\ T_A)\right)$。

命题 *2.2* 若 $i = 1, 2$, $F(X_i) \in Ob\Theta^0$, T_i 是 $F(X_i)$ 中的同余，且 $\varphi: F(X_1)/T_1 \to F(X_2)/T_2$ 是一个同态，则 $\left((F(X_1)\ \ T_1)\,(F(X_2)\ \ T_2)\ \varphi\right) \neq \varnothing$。

这个命题是自由代数众所周知的投射性质的一个初等推论。

3 普适代数几何的范畴与函子

我们考虑代数簇 Θ。该簇的有限生成自由代数范畴 Θ^0 已在第 1 节中定义。

对于每个代数 $H \in \Theta$，考虑以下两个范畴也是很自然的。

3.1 H-闭同余范畴与代数 H的坐标代数范畴

第一个范畴 $\mathfrak{Cl}_H$ 是 H-闭同余所构成的范畴。该范畴的对象是所有形如$(F(X) \quad T)$的二元组，其中 $F(X) \in \mathrm{Ob}\Theta^0$, $T \in Cl_H(F(X))$。该范畴的态射定义如下：若

$$(F(X_1), T_1), (F(X_2), T_2) \in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_H$$

then

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_H}((F(X_1), T_1), (F(X_2), T_2)) = \{\varphi \in \mathrm{Hom}(F(X_1), F(X_2)) \mid \varphi(T_1) \subseteq T_2\}.$$

注3.1 换句话说，该范畴的每个对象都是某个代数系统 $F(X) \in \mathrm{Ob}\Theta^0$，它配备了我们所研究的簇$\Theta$ 的签名所对应的代数运算，以及某种关系 $T \in Cl_H(F(X))$。该范畴的态射是这些代数系统之间的同态（见 *[3, I, 2.2]*），这些态射的复合就是相应同态的复合。

第二个范畴 $\mathfrak{Cor}_H$ 是代数 H 的坐标代数范畴。该范畴的对象是所有商代数 $F(X)/T$，其中 $F(X) \in \mathrm{Ob}\Theta^0$、$T \in Cl_H(F(X))$，而该范畴的态射是这些代数的所有同态。这是代数范畴的一个例子。

3.2 分解函子

如果 $(F(X) \quad T) \in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_H$，那么 $F(X)/T \in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cor}_H$。如果

$$(F(X_1), T_1), (F(X_2), T_2) \in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_H$$

and

$$\mu \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_H}((F(X_1), T_1), (F(X_2), T_2))$$

那么 $\mu(T_1) \subseteq T_2$。因此，根据命题 2.1 的第 1) 和第 3) 项，我们有$\left|\left(\mu, \quad (F(X_1) \quad T_1)\,(F(X_2) \quad T_2)\right)\right| = 1$ 并且

$$\varphi = \left(\mu, \begin{matrix}(F(X_1), T_1)\\ (F(X_2), T_2)\end{matrix}\right) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cor}_H}(F(X_1)/T_1, F(X_2)/T_2).$$

因此，自然可以定义以下映射：

$$(\mathcal{FR}_H)_{\mathrm{Ob}} : \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_H \to \mathrm{Ob}\mathfrak{Cor}_H$$

by

$$(\mathcal{FR}_H)_{\mathrm{Ob}} (F(X), T) = F(X)/T, \tag{3.1}$$

其中 $(F(X) \quad T) \in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_H$，并且

$$(\mathcal{FR}_H)_{\mathrm{Mor}} : \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_H} ((F(X_1), T_1), (F(X_2), T_2)) \to$$
$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cor}_H} (\mathcal{FR}_{\mathrm{Ob}} (F(X_1), T_1), \mathcal{FR}_{\mathrm{Ob}} (F(X_2), T_2))$$

by

$$(\mathcal{FR}_H)_{\mathrm{Mor}} (\mu) = \varphi = \begin{pmatrix} \mu, & (F(X_1), T_1) \\ & (F(X_2), T_2) \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

其中 $\mu \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_H} ((F(X_1) \quad T_1), (F(X_2) \quad T_2))$。

命题 3.1 $\mathcal{FR}_H$ 是一个函子 $\mathfrak{Cl}_H \to \mathfrak{Cor}_H$。

证明。我们考虑 $(F(X) \quad T) \in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_H$。$id_{F(X)}$：$F(X) \to F(X)$ 是该对象的一个恒等态射。该

$$\mathcal{FR}_H \left(id_{F(X)}\right) = \begin{pmatrix} id_{F(X)}, & (F(X), T) \\ & (F(X_2), T) \end{pmatrix} = id_{F(X)/T}$$

由 (3.2) 和命题 2.1 第 4 项可得。

我们考虑

$$(F(X_1), T_1), (F(X_2), T_2), (F(X_3), T_3) \in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_H$$

and

$$\mu_1 \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_H} ((F(X_1), T_1), (F(X_2), T_2)),$$
$$\mu_2 \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_H} ((F(X_2), T_2), (F(X_3), T_3)).$$
$$\mu_2\mu_1 \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_H} ((F(X_1), T_1), (F(X_3), T_3))$$

成立。

$$(\mathcal{FR}_H)(\mu_i) = \begin{pmatrix} \mu_i, & (F(X_i), T_i) \\ & (F(X_{i+1}), T_{i+1}) \end{pmatrix},$$

其中 $i = 1, \ 2,$ 且

$$(\mathcal{FR}_H)(\mu_2\mu_1) = \begin{pmatrix} \mu_2\mu_1, & (F(X_1), T_1) \\ & (F(X_3), T_3) \end{pmatrix}$$

由 (3.2) 成立。我们有

$$(\mathcal{FR}_H)(\mu_2)(\mathcal{FR}_H)(\mu_1) \in \begin{pmatrix} \mu_2\mu_1, & (F(X_1), T_1) \\ & (F(X_3), T_3) \end{pmatrix}$$

根据注记 2.4。因此

$$(\mathcal{FR}_H)(\mu_2\mu_1) = (\mathcal{FR}_H)(\mu_2)(\mathcal{FR}_H)(\mu_1)$$

根据命题 2.1 第 3 项。这就完成了证明。 ■

命题 3。2 $\mathcal{FR}_H$ 是一个满函子。

证明。 若 $F(X)\ /T\in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cor}_H$，其中 $F(X)\in \mathrm{Ob}\Theta^0$, $T\in Cl_HF(X)$，则由 (3.1) 得 $(F(X)\quad T)\in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_H$ 且 $\mathcal{FR}_H(F(X)\quad T)=F(X)\ /T$。

若 $F(X_i)\in \mathrm{Ob}\Theta^0$, $T_i\in Cl_HF(X_i)$，$F(X_i)\ /T_i\in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cor}_H$, $i=1,2$，且 $\varphi\in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cor}_H}(F(X_1)\ /T_1,F(X_2)\ /T_2)$，其中 $F(X_i)\ /T_i=\mathcal{FR}_H(F(X_i)\quad T_i)$,$i=1,2$，则由命题 2.2，存在一个同态 $\mu:\ F(X_1)\to F(X_2)$，使得 $\mu\in\left((F(X_1)\quad T_1)(F(X_2)\quad T_2)\quad \varphi\right)$。由命题 2.1 第 2) 项可知，$\mu(T_1)\subseteq T_2$。因此，$\mu\in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_H}((F(X_1)\quad T_1),(F(X_2)\quad T_2))$。由备注 2.3，$\varphi\in\left(\mu,(F(X_1)\quad T_1)(F(X_2)\quad T_2)\right)$。由命题 2.1 第 3) 项，$\left|\left(\mu,(F(X_1)\quad T_1)(F(X_2)\quad T_2)\right)\right|=1$。因此，由 (3.2) 得 $\varphi=\left(\mu,(F(X_1)\quad T_1)(F(X_2)\quad T_2)\right)=(\mathcal{FR}_H)_{\mathrm{Mor}}(\mu)$。

■

此外，我们还可以定义以下映射：

$$(\mathcal{FG}_H)_{\mathrm{Ob}}:\mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_H\to\mathrm{Ob}\Theta^0$$

by

$$(\mathcal{FG}_H)_{\mathrm{Ob}}(F(X),T)=F(X)\in\mathrm{Ob}\Theta^0 \tag{3.3}$$

对每个 $(F,T)\in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_H$，以及

$$(\mathcal{FG}_H)_{\mathrm{Mor}}:\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_H}((F(X_1),T_1),(F(X_2),T_2))\to$$
$$\mathrm{Mor}_{\Theta^0}(\mathcal{FG}_{\mathrm{Ob}}(F(X_1),T_1),\mathcal{FG}_{\mathrm{Ob}}(F(X_2),T_2))$$

by

$$(\mathcal{FG}_H)_{\mathrm{Mor}}(\varphi)=\varphi\in\mathrm{Mor}_{\Theta^0}(F(X_1),F(X_2)). \tag{3.4}$$

对每个 $\varphi\in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_H}((F(X_1)\quad T_1),(F(X_2)\quad T_2))$。

若 $\varphi_i\in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_H}((F(X_i)\quad T_i),(F(X_{i+1})\quad T_{i+1}))$ 对 $i=1,2$ 成立，则

$$(\mathcal{FG}_H)_{\mathrm{Mor}}(\varphi_2\varphi_1)=\varphi_2\varphi_1=(\mathcal{FG}_H)_{\mathrm{Mor}}(\varphi_2)(\mathcal{FG}_H)_{\mathrm{Mor}}(\varphi_1).$$

映射 $(\mathcal{FG}_H)_{\mathrm{Mor}}$ 将对象 $(F(X)\quad T)\in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_H$ 的恒等态射 $id_{F(X)}$：$F(X)\to F(X)$ 映为对象 $(\mathcal{FG}_H)_{\mathrm{Ob}}(F(X)\quad T)=F(X)\in\mathrm{Ob}\Theta^0$ 的恒等态射 $id_{F(X)}$。因此，$\mathcal{FG}_H$ 是一个函子。

命题 3.3 若 $\varphi\in \mathrm{Mor}_{\Theta^0}(F(X_1)\quad F(X_2))$ 则

$$\varphi\in\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_H}((F(X_1),T_1),(F(X_2),T_2))$$

对于 $T_1=\left(\Delta_{F(X_1)}\right)''_H$ 以及每个 $T_2\in Cl_H(F(X_2))$。

证明。 $\Delta_{F(X_1)}\subseteq$核 μ 对每个 $\mu\in$同态集 $(F(X_1)\quad H)$ 都成立。因此

$$\left(\Delta_{F(X_1)}\right)''_H=\bigcap_{\substack{\mu\in\mathrm{Hom}(F(X_1),H)\\ \Delta_{F(X_1)}\subseteq\ker\mu}}\ker\mu=\bigcap_{\mu\in\mathrm{Hom}(F(X_1),H)}\ker\mu \tag{3.5}$$

根据（1.1）成立。

我们考虑一些 $(f', f'') \in \left(\Delta_{F(X_1)}\right)''_H$。这里 $f', f'' \in F(X_1)$。根据 (3.5)，对于每个 $\nu \in$同态集 $(F(X_2) \quad H)$，都有 $\nu\varphi(f') = \nu\varphi(f'')$ 成立，因为$\nu\varphi \in$同态集 $(F(X_1) \quad H)$。因此，

$$(\varphi(f'), \varphi(f'')) \in \bigcap_{\nu \in \mathrm{Hom}(F(X_2), H)} \ker \nu = \left(\Delta_{F(X_2)}\right)''_H,$$

这意味着

$$\varphi\left(\left(\Delta_{F(X_1)}\right)''_H\right) \subseteq \left(\Delta_{F(X_2)}\right)''_H \tag{3.6}$$

成立。而且，根据 (1.1)，我们有

$$\left(\Delta_{F(X_2)}\right)''_H = \bigcap_{\nu \in \mathrm{Hom}(F(X_2), H)} \ker \nu \subseteq \bigcap_{\substack{\nu \in \mathrm{Hom}(F(X_2), H) \\ T_2 \subseteq \ker \nu}} \ker \nu = (T_2)''_H = T_2 \tag{3.7}$$

对每个 $T_2 \in Cl_H(F(X_2))$ 都成立。因此，根据 (3.6) 和 (3.7)，$\varphi\left(\left(\Delta_{F(X_1)}\right)''_H\right) \subseteq T_2$。所以，对于 $T_1 = \left(\Delta_{F(X_1)}\right)''_H$ 以及每个 $T_2 \in Cl_H(F(X_2))$，都有 $\varphi \in \mathrm{Mor}\mathfrak{Cl}_H((F(X_1) \quad T_1)(F(X_2) \quad T_2))$。

命题 3.4 $\mathcal{FG}_H$ 是一个满函子。

证明。 </style}如果 () Ob，那么 () $\left(\Delta_{X)}\right)''_H\right) \in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_H$，并且 $F(X) = \mathcal{FG}_H\left(F(X) \ \left(\Delta_{F(X)}\right)''_H\right)$。

如果 $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\Theta^0}(F(X_1) \quad F(X_2))$，那么

$$\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_H}\left(\left(F(X_1), \left(\Delta_{F(X_1)}\right)''_H\right), (F(X_2), T_2)\right)$$

根据命题 3.3，对每个 $T_2 \in Cl_H F(X_2)$ 都成立。因此 $\mathcal{FG}_H(\varphi) = \varphi$，其中左边是 $\varphi \in \mathrm{Mor}\mathfrak{Cl}_H$，右边是 $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\Theta^0}$。 ■

4 何时代数具有相同的几何?

我们考虑两个代数 H_1，$H_2 \in \Theta$，并探讨它们何时具有相同的几何？这意味着，我们要探讨在这两个代数中，从我们语言的句法到这些代数的语义的过渡何时以相同的方式进行。或者，更具体、更简单地说，从方程组到其解的过渡何时以相同的方式进行。答案取决于我们所说的“以相同的方式”是什么意思。

对代数几何重合最狭义的理解，就是几何等价这一概念。

定义4。1 *[4]*我们称代数 H_1、$H_2 \in \Theta$ 是几何等价的，当且仅当对每个 $F(X) \in \mathrm{Ob}\Theta^0$，$Cl_{H_1}F(X) = Cl_{H_2}F(X)$ 成立。

命题4.1 两个代数 H_1、 $H_2 \in \Theta$ 几何等价，当且仅当 $\mathfrak{Cl}_{H_1} = \mathfrak{Cl}_{H_2}$。

证明。我们假设对于每个 $F(X) \in \mathrm{Ob}\Theta^0$， $Cl_{H_1}F(X) = Cl_{H_2}F(X)$ 都成立。若 $(F(X) \quad T) \in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_1}$，则 $T \in Cl_{H_1}F(X) = Cl_{H_2}F(X)$。因此 $(F(X) \quad T) \in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_2}$，且 $\mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_1} \subseteq \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_2}$。由对称性，$\mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_2} \subseteq \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_1}$ 且 $\mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_1} = \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_2}$。

If

$$(F(X_1), T_1), (F(X_2), T_2) \in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_1}$$

and

$$\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_{H_1}}((F(X_1), T_1), (F(X_2), T_2))$$

于是 $F(X_1) \quad F(X_2) \in \mathrm{Ob}\Theta^0$， $\varphi \in$ 同态集 $(F(X_1) \quad F(X_2))$，其中 $i = 1, \quad 2$，

$$T_i \in Cl_{H_1}F(X_i) = Cl_{H_2}F(X_i)$$

成立，且 $\varphi(T_1) \subseteq T_2$，因此

$$\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_{H_2}}((F(X_1), T_1), (F(X_2), T_2)).$$

So

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_{H_1}}((F(X_1), T_1), (F(X_2), T_2)) \subseteq \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_{H_2}}((F(X_1), T_1), (F(X_2), T_2)).$$

由对称性

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_{H_2}}((F(X_1), T_1), (F(X_2), T_2)) \subseteq \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_{H_1}}((F(X_1), T_1), (F(X_2), T_2))$$

and

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_{H_1}}((F(X_1), T_1), (F(X_2), T_2)) = \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_{H_2}}((F(X_1), T_1), (F(X_2), T_2)).$$

根据注3.1，范畴 $\mathfrak{Cl}_{H_1}$和范畴 $\mathfrak{Cl}_{H_2}$ 中的态射的复合，都是相应代数系统同态的复合；这些代数系统配备了我们所研究的簇Θ 的签名所对应的代数运算，也配备了某个二元关系。因此 $\mathfrak{Cl}_{H_1} = \mathfrak{Cl}_{H_2}$。

现在我们假设 $\mathfrak{Cl}_{H_1} = \mathfrak{Cl}_{H_2}$。如果 $F(X) \in \mathrm{Ob}\Theta^0$ 且 $T \in Cl_{H_1}F(X)$，那么 $(F(X) \quad T) \in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_1} = \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_2}$，因此 $T \in Cl_{H_2}F(X)$ 且 $Cl_{H_1}F(X) \subseteq Cl_{H_2}F(X)$。由对称性可得 $Cl_{H_2}F(X) \subseteq Cl_{H_1}F(X)$，因此 $Cl_{H_1}F(X) = Cl_{H_2}F(X)$。■

弱相似是代数几何等价概念的一种广泛推广。

定义4.2 如果存在范畴同构： Λ： $\mathfrak{Cl}_{H_1} \to \mathfrak{Cl}_{H_2}$，则称代数 $H_1, H_2 \in \Theta$ 是弱相似的。

这一概念的范围十分广泛，因此研究其性质似乎是一项颇具挑战的任务。我们认为，合理的第一步是研究代数的自同构等价的性质。这一概念正是本文的研究主题。

5 代数的自同构等价

从现在起，我们假设我们的簇 Θ 满足

条件 5。1 $\Phi(F(x_1)) \cong F(x_1)$ 对范畴Θ^0的每个自同构 Φ 都成立。

许多非常有趣的代数簇都满足这一条件。例如，全体半群的簇、全体群的簇的所有子簇、全体线性代数的簇的所有子簇等都满足这一条件。对我们而言，域 k 上的线性代数是一个向量空间k，同时也是一个环，它不一定是交换的或结合的，也不一定有单位元，并带有双线性乘法。

自同构等价的概念比几何等价的概念更宽泛，但比代数相似的概念更狭窄。

从 [6]开始讨论代数的自同构等价这一概念。此前对这一概念的所有定义都不太自然且繁琐。例如，在 [11,定义 4.3] 中，我们可以看到这一点

定义 5.1 我们称自同构 Φ: $\Theta^0 \to \Theta^0$ 给出了代数 $H_1, H_2 \in \Theta$ 的自同构等价关系 （或者称代数 H_1, H_2 通过自同构 Φ自同构等价），如果存在双射

$$\alpha(\Phi)_{F(X)} : Cl_{H_1}(F(X)) \to Cl_{H_2}(\Phi(F(X)))$$

对于每个 $F(X) \in$对象Θ^0，它们按以下意义协调：若 $F(X_1)$ $F(X_2) \in$对象Θ^0, μ_1, $\mu_2 \in$同态集 $(F(X_1)$ $F(X_2))$， $T \in Cl_{H_1}(F(X_2))$ 则

$$\tau\mu_1 = \tau\mu_2, \tag{5.1}$$

当且仅当

$$\widetilde{\tau}\Phi(\mu_1) = \widetilde{\tau}\Phi(\mu_2), \tag{5.2}$$

其中 τ: $F(X_2) \to F(X_2)$ /T, $\widetilde{\tau}$: $\Phi(F(X_2)) \to \Phi(F(X_2))$ /$\alpha(\Phi)_{F(X_2)}(T)$ 是自然满同态。

这个定义是对 [6] 中定义的一些澄清。不过，它看起来也不自然且冗长。

注 5.1 如果代数 H_1、$H_2 \in \Theta$ 是定义 *5.1* 中自同构 Φ： $\Theta^0 \to \Theta^0$ 的对象，那么代数 H_2、 H_1 就是定义 *5.1* 中自同构 Φ^{-1} 的对象。文献 *[11,* 中由定理 *4.1]* 推出了推论 *1*。

本文将给出另一种关于自同构等价的定义，在我们看来，这一定义更清晰、更自然。为此，我们采用范畴论的语言。

定义 5.2 如果存在三个同构：$\Lambda:\ \mathfrak{Cl}_{H_1}\to\mathfrak{Cl}_{H_2}$，$\Phi:\ \Theta^0\to\Theta^0$,$\Psi:\ \mathfrak{Cor}_{H_1}\to\mathfrak{Cor}_{H_2}$，使得这些图表

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{Cl}_{H_1} & \overrightarrow{\Lambda} & \mathfrak{Cl}_{H_2}\\ \downarrow\mathcal{FG}_{H_1} & & \mathcal{FG}_{H_2}\downarrow\\ \Theta^0 & \underrightarrow{\Phi} & \Theta^0\end{array},\quad \begin{array}{ccc}\mathfrak{Cl}_{H_1} & \overrightarrow{\Lambda} & \mathfrak{Cl}_{H_2}\\ \downarrow\mathcal{FR}_{H_1} & & \mathcal{FR}_{H_2}\downarrow\\ \mathfrak{Cor}_{H_1} & \underrightarrow{\Psi} & \mathfrak{Cor}_{H_2}\end{array}$$

是交换的。

我们的目标是证明定义 5.1 和定义 5.2 等价。

如果 Φ 是范畴 Θ^0 的自同构，那么存在一个双射系统

$$\left\{s^{\Phi}_{F(X)}:F(X)\to\Phi(F(X))\mid F(X)\in \mathrm{Ob}\Theta^0\right\}$$

使得

$$\Phi(\mu)=s^{\Phi}_{F(X_2)}\mu\left(s^{\Phi}_{F(X_1)}\right)^{-1} \tag{5.3}$$

对每个 $\mu\in \mathrm{Mor}_{\Theta^0}(F(X_1)\ \ F(X_2))$ 都成立（参见 [7], [11, 定理 2.1]）。(5.3) 等价于图表的交换性

$$\begin{array}{ccc}F(X_1) & \overrightarrow{s^{\Phi}_{F(X_1)}} & \Phi(F(X_1))\\ \downarrow\mu & & \Phi(\mu)\downarrow\\ F(X_2) & \underrightarrow{s^{\Phi}_{F(X_2)}} & \Phi(F(X_2))\end{array}.$$

如果 $\left\{s^{\Phi}_{F(X)}:\ F(X)\to\Phi(F(X))\mid F(X)\in \mathrm{Ob}\Theta^0\right\}$ 是满足自同构 Φ（范畴 Θ^0 的自同构）所对应的 (5.3) 的双射系统，那么双射系统 $\left\{s^{\Phi^{-1}}_{F\ X()}:\ F(X)\to\Phi^{-1}(F(X))\mid F(X)\in \mathrm{Ob}\Theta^0\right\}$，其中

$$s^{\Phi^{-1}}_{F(X)}=\left(s^{\Phi}_{\Phi^{-1}(F(X))}\right)^{-1} \tag{5.4}$$

满足自同构 Φ^{-1} 的 (5.3)。在 [11, 定理 4.1] 的推论 1 的证明中曾指出这一点。

命题 *5.1* 若 $F(X_1)\ \ F(X_2)\in \mathrm{Ob}\Theta^0$，$\mu\in$ 同态集 $(F(X_1)\ \ F(X_2))$，$T_i\subseteq F(X_i)\times F(X_i)$，$i=1,2$，$\mu(T_1)\subseteq T_2$，$\Phi$ 是满足 (5.3) 的范畴Θ^0 的自同构，则 $\Phi(\mu)\left(s^{\Phi}_{F(X_1)}(T_1)\right)\subseteq s^{\Phi}_{F(X_2)}(T_2)$。

证明。

$$\Phi(\mu)\left(s^{\Phi}_{F(X_1)}(T_1)\right)=s^{\Phi}_{F(X_2)}\mu\left(s^{\Phi}_{F(X_1)}\right)^{-1}s^{\Phi}_{F(X_1)}(T_1)=$$

$$s^{\Phi}_{F(X_2)}\mu(T_1)\subseteq s^{\Phi}_{F(X_2)}(T_2)$$

由 (5.3)。 ■

5.1 定义 5.1 的推论

在本小节中，我们假设两个代数 H_1，$H_2 \in \Theta$ 属于定义 5.1 的讨论对象。

$$\alpha(\Phi)_{F(X)}(T) = s^{\Phi}_{F(X)}(T), \tag{5.5}$$

根据 [11, 定理 4.1]，对每个 $T \in Cl_{H_1}(F(X))$ 均成立，其中

$$\left\{ s^{\Phi}_{F(X)} : F(X) \to \Phi(F(X)) \mid F(X) \in \mathrm{Ob}\Theta^0 \right\}$$

是一个满足自同构 Φ 的条件 (5.3) 的双射系统。

注 5.2 双射系统 $\left\{ s^{\Phi}_{F(X)} \mid F(X) \in \mathrm{Ob}\Theta^0 \right\}$ 并非由自同构 Φ 唯一确定，而是由 *[11,* 推论 *1* 根据命题 *4.1]* 中的双射

$$\left\{ \alpha(\Phi)_{F(X)} : Cl_{H_1}(F(X)) \to Cl_{H_2}(\Phi(F(X))) \mid F(X) \in \mathrm{Ob}\Theta^0 \right\}$$

由自同构 Φ 唯一确定。

5.1.1 函子 Λ

若 $(F(X)\ \ T) \in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_1}$，则 $F(X) \in \mathrm{Ob}\Theta^0$, $T \in Cl_{H_1}(F(X))$,

$$\alpha(\Phi)_{F(X)}(T) = s^{\Phi}_{F(X)}(T) \in Cl_{H_2}(\Phi(F(X))),$$

根据 (5.5)，因此 $\left(\Phi(F(X))\ s^{\Phi}_{F(X)}(T)\right) \in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_2}$。

我们定义

$$\Lambda_{\mathrm{Ob}} : \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_1} \to \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_2}$$

by

$$\Lambda_{\mathrm{Ob}}(F(X), T) = \left(\Phi(F(X)), s^{\Phi}_{F(X)}(T)\right). \tag{5.6}$$

现在我们将定义

$$\Lambda_{\mathrm{Mor}} : \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_{H_1}}((F(X_1), T_1), (F(X_2), T_2)) \to$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_{H_2}}(\Lambda_{\mathrm{Ob}}(F(X_1), T_1), \Lambda_{\mathrm{Ob}}(F(X_2), T_2))$$

对于每个 $(F(X_1)\ \ T_1)$,$(F(X_2)\ \ T_2) \in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_1}$。若

$$\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_{H_1}}((F(X_1), T_1), (F(X_2), T_2))$$

那么 $F(X_1)\ \ F(X_2) \in \mathrm{Ob}\Theta^0$, $T_1 \in Cl_{H_1}F(X_1)$, $T_2 \in Cl_{H_1}F(X_2)$, $\varphi(T_1) \subseteq T_2$ 由 $\mathfrak{Cl}_{H_1}$ 的定义成立。$\Lambda_{\mathrm{Ob}}(F(X_i)\ \ T_i) = \left(\Phi(F(X_i))\, s^{\Phi}_{F(X_i)}(T_i)\right)$, $i =$

根据 (5.6)，$1,2$。$s^{\Phi}_{F(X_i)}(T_i) \in Cl_{H_2}(\Phi(F(X_i)))$, 如上所述，$i=1,2$。因此，根据命题 5.1，$\Phi(\varphi)\left(s^{\Phi}_{F(X_1)}(T_1)\right) \subseteq s^{\Phi}_{F(X_2)}(T_2)$。因此，

$$\Phi(\varphi) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_{H_2}}\left(\Lambda_{\mathrm{Ob}}\left(F\left(X_1\right),T_1\right),\Lambda_{\mathrm{Ob}}\left(F\left(X_2\right),T_2\right)\right),$$

并定义

$$\Lambda_{\mathrm{Mor}}(\varphi)=\Phi(\varphi). \tag{5.7}$$

命题 5.2 Λ: $\mathfrak{Cl}_{H_1} \to \mathfrak{Cl}_{H_2}$ 是一个函子。

证明。 如果 $(F(X) \quad T) \in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_1}$ 且 $id_{F(X)}$: $F(X) \to F(X)$ 是该对象的恒等态射，那么 $\Lambda_{\mathrm{Mor}}\left(id_{F(X)}\right) = \Phi\left(id_{F(X)}\right) = id_{\Phi(F(X))}$ 是 $\Lambda_{\mathrm{Ob}}(F(X) \quad T) = \left(\Phi(F(X)) \ s^{\Phi}_{F(X)}(T)\right)$ 的恒等态射，由 (5.6) 和 (5.7) 可知。

现在我们考虑

$$\left(F\left(X_1\right),T_1\right),\left(F\left(X_2\right),T_2\right),\left(F\left(X_3\right),T_3\right) \in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_1}$$

and

$$\varphi_1 \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_{H_1}}\left(\left(F\left(X_1\right),T_1\right),\left(F\left(X_2\right),T_2\right)\right),$$
$$\varphi_2 \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_{H_1}}\left(\left(F\left(X_2\right),T_2\right),\left(F\left(X_3\right),T_3\right)\right).$$

由 (5.7) 可得

$$\Lambda(\varphi_1)\Lambda(\varphi_2)=\Phi(\varphi_1)\Phi(\varphi_2)=\Phi(\varphi_1\varphi_2)=\Lambda(\varphi_1\varphi_2).$$

这意味着 Λ 是一个函子。 ■

命题 5.3 函子 Λ 使定义 *5.2* 中的左侧图表可交换。

证明。 由 (5.6) 和 (3.3) 可知，对每个 $(F(X) \quad T) \in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_1}$，有

$$\mathcal{FG}_{H_2}\left(\Lambda\left(F\left(X\right),T\right)\right)=\mathcal{FG}_{H_2}\left(\Phi(F\left(X\right)),s^{\Phi}_{F(X)}\left(T\right)\right)=\Phi(F\left(X\right))$$

and

$$\Phi\left(\mathcal{FG}_{H_1}\left(F\left(X\right),T\right)\right)=\Phi(F\left(X\right)).$$

此外，由 (5.7) 和 (3.4) 可知，对每个

$$\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_{H_1}}\left(\left(F\left(X_1\right),T_1\right),\left(F\left(X_2\right),T_2\right)\right),$$

其中 $(F(X_1) \quad T_1)$，$(F(X_2) \quad T_2) \in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_1}$,

$$\mathcal{FG}_{H_2}\left(\Lambda\left(\varphi\right)\right)=\mathcal{FG}_{H_2}\left(\Phi\left(\varphi\right)\right)=\Phi\left(\varphi\right)$$

and

$$\Phi\left(\mathcal{FG}_{H_1}\left(\varphi\right)\right)=\Phi\left(\varphi\right).$$

■

命题 5.4 Λ 是范畴同构。

证明。 如果自同构 $\Phi:\Theta^0\to\Theta^0$ 给出了代数 H_1 和 H_2的自同构等价关系，那么根据注 5.1，自同构 $\Phi^{-1}:\Theta^0\to\Theta^0$ 给出了代数 H_2 和 H_1 的自同构等价关系。因此，存在一个函子 Λ'，它也由关于自同构 Φ^{-1}的 (5.6) 和 (5.7) 定义。由 (5.6) 和 (5.4)，我们有

$$\Lambda'\Lambda\left(F\left(X\right),T\right)=\Lambda'\left(\Phi(F\left(X\right)),s_{F(X)}^{\Phi}\left(T\right)\right)=$$

$$\left(\Phi^{-1}\Phi(F\left(X\right)),s_{\Phi(F(X))}^{\Phi^{-1}}\left(s_{F(X)}^{\Phi}\left(T\right)\right)\right)=$$

$$\left(F\left(X\right),\left(s_{\Phi^{-1}(\Phi(F(X)))}^{\Phi}\right)^{-1}\left(s_{F(X)}^{\Phi}\left(T\right)\right)\right)=\left(F\left(X\right),T\right)$$

对于每个 $(F(X)\ \ T)\in \mathrm{Ob}\mathfrak{C}\mathfrak{l}_{H_1}$。此外，对于每个

$$\varphi\in\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}\mathfrak{l}_{H_1}}\left(\left(F\left(X_1\right),T_1\right),\left(F\left(X_2\right),T_2\right)\right),$$

其中 $(F(X_1)\ \ T_1)$，$(F(X_2)\ \ T_2)\in \mathrm{Ob}\mathfrak{C}\mathfrak{l}_{H_1}$，满足

$$\Lambda'\Lambda\left(\varphi\right)=\Phi^{-1}\Phi\left(\varphi\right)=\varphi$$

由 (5.7) 得。因此

$$\Lambda'\Lambda=id_{\mathfrak{C}\mathfrak{l}_{H_1}}. \tag{5.8}$$

对称地推理可得

$$\Lambda\Lambda'=id_{\mathfrak{C}\mathfrak{l}_{H_2}}. \tag{5.9}$$

因此 Λ 是范畴同构。 ■

5.1.2 函子 Ψ

范畴 $\mathfrak{Cor}_{H_1}$ 的每个对象都具有形式 $F(X)\ /T$，其中 $F(X)\in \mathrm{Ob}\Theta^0$,$T\in Cl_{H_1}F\left(X\right)$。因此，正如小节5.1.1开头所注，

$$\alpha(\Phi)_{F(X)}\left(T\right)=s_{F(X)}\left(T\right)\in Cl_{H_2}\left(\Phi\left(F\left(X\right)\right)\right).$$

所以 $\Phi(F(X))\ /s_{F(X)}^{\Phi}(T)\in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cor}_{H_2}$。我们定义

$$\Psi_{\mathrm{Ob}}:\mathrm{Ob}\mathfrak{Cor}_{H_1}\to\mathrm{Ob}\mathfrak{Cor}_{H_2}$$

by

$$\Psi_{\mathrm{Ob}}\left(F\left(X\right)/T\right)=\Phi\left(F\left(X\right)\right)/s_{F(X)}^{\Phi}\left(T\right). \tag{5.10}$$

现在我们将定义

$$\Psi_{\mathrm{Mor}}:\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cor}_{H_1}}\left(F\left(X_1\right)/T_1,F\left(X_2\right)/T_2\right)\to$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cor}_{H_2}}\left(\Psi_{\mathrm{Ob}}\left(F\left(X_1\right)/T_1\right),\Psi_{\mathrm{Ob}}\left(F\left(X_2\right)/T_2\right)\right)$$

对每个 $F(X_1)/T_1$，$F(X_2)\ /T_2\in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cor}_{H_1}$。

为此，我们必须证明以下命题

命题 5.5 我们考虑 $F(X_1)/T_1, F(X_2)/T_2 \in$对象$\mathfrak{Cor}_{H_1}$以及一个同态 $\varphi\colon F(X_1)/T_1 \to F(X_2)/T_2$。只有一个同态

$$\nu = \left(\Phi(\mu), \begin{pmatrix}\Phi(F(X_1)), s^{\Phi}_{F(X_1)}(T_1)\end{pmatrix}\right) \text{ for every } \mu \in \begin{pmatrix}(F(X_1), T_1)\\ (F(X_2), T_2)\end{pmatrix}, \varphi\Big).$$

证明。若 $\mu \in \Big((F(X_1)\ \ T_1)(F(X_2)\ \ T_2)\ \ \varphi\Big)$，则根据命题 2.1 的第 2) 项，$\mu(T_1) \subseteq T_2$成立。因此，根据命题 5.1，$\Phi(\mu)\left(s^{\Phi}_{F(X_1)}(T_1)\right) \subseteq s^{\Phi}_{F(X_2)}(T_2)$成立。因此

$$\left(\Phi(\mu), \begin{pmatrix}\Phi(F(X_1)), s^{\Phi}_{F(X_1)}(T_1)\end{pmatrix}\right) = \nu_{\mu} \tag{5.11}$$

根据命题 2.1 的第 1) 项和第 3) 项。

我们将 $\tau_i\colon F(X_i) \to F(X_i)/T_i$和$\widetilde{\tau}_i\colon \Phi(F(X_i)) \to \Phi(F(X_i))/s^{\Phi}_{F(X_i)}(T_i)$记作自然满同态，其中$i = 1,2$。若 $\mu_i \in \Big((F(X_1)\ \ T_1)(F(X_2)\ \ T_2)\ \ \varphi\Big)$，其中 $i = 1,2$，则 $\tau_2\mu_i = \varphi\tau_1$。因此 $\tau_2\mu_1 = \tau_2\mu_2$。由定义 5.1，$\widetilde{\tau}_2\Phi(\mu_1) = \widetilde{\tau}_2\Phi(\mu_2)$ 成立。根据 5.11，$\nu_{\mu_i}\widetilde{\tau}_1 = \widetilde{\tau}_2\Phi(\mu_i)$，其中 $i = 1,2$，成立。因此 $\nu_{\mu_1}\widetilde{\tau}_1 = \nu_{\mu_2}\widetilde{\tau}_1$，故根据注 2.1，$\nu_{\mu_1} = \nu_{\mu_2}$。

$\Phi(F(X_i))/s^{\Phi}_{F(X_i)}(T_i) = \Psi_{\mathrm{Ob}}(F(X_i)/T_i)$，$i = 1,2$，根据 (5.10)。因此

$$\nu = \left(\Phi(\mu), \begin{pmatrix}\Phi(F(X_1)), s^{\Phi}_{F(X_1)}(T_1)\end{pmatrix}\right) \in$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cor}_{H_2}}\left(\Psi_{\mathrm{Ob}}(F(X_1)/T_1), \Psi_{\mathrm{Ob}}(F(X_2)/T_2)\right).$$

并定义

$$\Psi_{\mathrm{Mor}}(\varphi) = \left(\Phi(\mu), \begin{pmatrix}\Phi(F(X_1)), s^{\Phi}_{F(X_1)}(T_1)\end{pmatrix}\right) \tag{5.12}$$

对于每个 $\mu \in \Big((F(X_1)\ \ T_1)(F(X_2)\ \ T_2)\ \ \varphi\Big)$。特别地，这意味着

$$\widetilde{\tau}_2\Phi(\mu) = \Psi_{\mathrm{Mor}}(\varphi)\widetilde{\tau}_1, \tag{5.13}$$

其中 $\widetilde{\tau}_i\colon \Phi(F(X_i)) \to \Phi(F(X_i))/s^{\Phi}_{F(X_i)}(T_i)$，$i = 1,2$ 是自然满射。

命题 5.6 Ψ 是一个函子。

证明。 我们考虑对象 $F(X)/T \in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cor}_{H_1}$ 及其恒等态射$id_{F(X)/T}$。图表

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \overrightarrow{\tau} & F(X)/T \\ \downarrow id_{F(X)} & & id_{F(X)/T}\downarrow \\ F(X) & \underset{\tau}{\rightarrow} & F(X)/T \end{array},$$

其中 τ 是自然满同态，可以通过同态 $id_{F(X)}$使其成为交换图表，因为 $\tau id_{F(X)} = \tau = id_{F(X)/T}\tau$，所以$id_{F(X)} \in \begin{pmatrix} (F(X) & T) & (F(X) & T) \\ id_{F(X)/T} & & & \end{pmatrix}$。此外，该图表

$$\begin{array}{ccc} \Phi(F(X)) & \overrightarrow{\widetilde{\tau}} & \Phi(F(X))/s^{\Phi}_{F(X)}(T) \\ \Phi\left(id_{F(X)}\right)\downarrow & & \downarrow id_{\Phi(F(X))/s^{\Phi}_{F(X)}(T)} \\ \Phi(F(X)) & \overrightarrow{\widetilde{\tau}} & \Phi(F(X))/s^{\Phi}_{F(X)}(T) \end{array},$$

其中 $\widetilde{\tau}$ 是交换的自然满同态。因此

$$id_{\Psi_{\mathrm{Ob}}(F(X)/T)} = id_{\Phi(F(X))/s^{\Phi}_{F(X)}(T)} =$$

$$\left(\Phi\left(id_{F(X)}\right), \begin{pmatrix}\Phi(F(X)), s^{\Phi}_{F(X)}(T)\end{pmatrix} \right) = \Psi_{\mathrm{Mor}}\left(id_{F(X)/T}\right)$$

由 (5.10) 和 (5.12) 得出。

现在我们考虑 $F(X_i)/T_i \in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cor}_{H_1}$, $i = 1,2,3$，以及

$$\varphi_i \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cor}_{H_1}}(F(X_i)/T_i, F(X_{i+1})/T_{i+1}),$$

$i = 1,2$。由命题 2.2，存在 $\mu_i \in \begin{pmatrix} (F(X_i) & T_i) & (F(X_{i+1}) & T_{i+1}) \\ \varphi_i & & & \end{pmatrix}$，其中$i = 1,2$。因此，根据注记 2.4，$\mu_2\mu_1 \in \begin{pmatrix} (F(X_1) & T_1) & (F(X_3) & T_3) \\ \varphi_2\varphi_1 & & & \end{pmatrix}$。所以，

$$\Psi_{\mathrm{Mor}}(\varphi_2\varphi_1) = \left(\Phi(\mu_2\mu_1), \begin{pmatrix}\Phi(F(X_1)), s^{\Phi}_{F(X_1)}(T_1)\end{pmatrix} \right)$$

根据（5.12）。另外

$$\Psi_{\mathrm{Mor}}(\varphi_i) = \left(\Phi(\mu_i), \begin{pmatrix}\Phi(F(X_i)), s^{\Phi}_{F(X_i)}(T_i)\end{pmatrix} \right),$$

其中 $i = 1,2$，由 (5.12)。因此，

$$\Psi_{\mathrm{Mor}}(\varphi_2)\Psi_{\mathrm{Mor}}(\varphi_1) \in \left(\Phi(\mu_2)\Phi(\mu_1), \begin{pmatrix}\Phi(F(X_1)), s^{\Phi}_{F(X_1)}(T_1)\end{pmatrix} \right) =$$

$$\left(\Phi\left(\mu_2\mu_1\right),\ \begin{pmatrix}\left(\Phi\left(F\left(X_1\right)\right),s^{\Phi}_{F(X_1)}\left(T_1\right)\right)\\ \left(\Phi\left(F\left(X_3\right)\right),s^{\Phi}_{F(X_{i+1})}\left(T_3\right)\right)\end{pmatrix}\right)$$

同样由注记 2.4。故 $\Psi_{\mathrm{Mor}}\left(\varphi_2\varphi_1\right)=\Psi_{\mathrm{Mor}}\left(\varphi_2\right)\Psi_{\mathrm{Mor}}\left(\varphi_1\right)$。 ■

命题 5.7 函子 Ψ使定义 *5.2* 中的右侧图表交换。

证明。 我们考虑 $\left(F(X)\quad T\right)\in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_1}$。由 (5.6)、(3.1) 和 (5.10)，我们有

$$\mathcal{FR}_{H_2}\left(\Lambda\left(F\left(X\right),T\right)\right)=\mathcal{FR}_{H_2}\left(\Phi(F\left(X\right)),s^{\Phi}_{F(X)}\left(T\right)\right)=\Phi(F\left(X\right))/s^{\Phi}_{F(X)}\left(T\right)$$

and

$$\Psi\left(\mathcal{FR}_{H_1}\left(F\left(X\right),T\right)\right)=\Psi\left(F\left(X\right)/T\right)=\Phi(F\left(X\right))/s^{\Phi}_{F(X)}\left(T\right).$$

现在我们考虑 $\left(F(X_i)\quad T_i\right)\in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_1}$, $i=1,2$，以及

$$\mu\in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_{H_1}}\left(\left(F\left(X_1\right),T_1\right),\left(F\left(X_2\right),T_2\right)\right).$$

这意味着 $T_i\in Cl_{H_1}(F(X_i))$，$\mu\in$同态集$(F(X_1)\quad F(X_2))$ 以及 $\mu(T_1)\subseteq T_2$。由 (3.2)，我们有

$$\mathcal{FR}_{H_1}\left(\mu\right)=\left(\mu,\ \begin{pmatrix}\left(F\left(X_1\right),T_1\right)\\ \left(F\left(X_2\right),T_2\right)\end{pmatrix}\right).$$

由备注 2.3，我们有 $\mu\in\left(\left(F(X_1)\quad T_1\right)\left(F(X_2)\quad T_2\right)\ \mathcal{FR}_{H_1}(\mu)\right)$。因此，

$$\Psi\left(\mathcal{FR}_{H_1}\left(\mu\right)\right)=\left(\Phi\left(\mu\right),\ \begin{pmatrix}\left(\Phi\left(F\left(X_1\right)\right),s^{\Phi}_{F(X_1)}\left(T_1\right)\right)\\ \left(\Phi\left(F\left(X_2\right)\right),s^{\Phi}_{F(X_2)}\left(T_2\right)\right)\end{pmatrix}\right)$$

由 (5.12)。

此外，根据 (5.5)，我们有 $\Phi(\mu)\in$同态集 $\left(\Phi(F(X_1))\quad\Phi\left(F(X_2)\right)\right),s^{\Phi}_{F(X_i)}\left(T_i\right)\in Cl_{H_2}(\Phi(F(X_i)))$，其中 $i=1$、2，以及根据命题 5.1，$\Phi(\mu)\left(s^{\Phi}_{F}(X_1)\left(T_1\right)\right)\subseteq s^{\Phi}_{F(X_2)}\left(T_2\right)$。因此，$\left(\Phi(F(X_i))\ s^{\Phi}_{F}(X_i)\left(T_i\right)\right)\in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_2}$,$i=1$、2，且

$$\Phi\left(\mu\right)\in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_{H_2}}\left(\left(\Phi(F\left(X_1\right)),s^{\Phi}_{F(X_1)}\left(T_1\right)\right),\left(\Phi(F\left(X_2\right)),s^{\Phi}_{F(X_2)}\left(T_2\right)\right)\right).$$

$$\left(\mathcal{FR}_{H_2}\right)\left(\Lambda\left(\mu\right)\right)=\left(\mathcal{FR}_{H_2}\right)\left(\Phi\left(\mu\right)\right)=\left(\Phi\left(\mu\right),\ \begin{pmatrix}\left(\Phi(F\left(X_1\right)),s^{\Phi}_{F(X_1)}\left(T_1\right)\right)\\ \left(\Phi(F\left(X_2\right)),s^{\Phi}_{F(X_2)}\left(T_2\right)\right)\end{pmatrix}\right),$$

根据 (5.7) 和 (3.2)。因此，$\Psi(\mathcal{FR}_{H_1}(\mu))=(\mathcal{FR}_{H_2})(\Lambda(\mu))$。 ■

命题 5.8 Ψ 是范畴同构。

证明。 再次提醒，在我们的假设下，自同构 $\Phi^{-1}:\Theta^{0}\to\Theta^{0}$ 根据注 5.1 给出了代数 H_2 和 H_1 的自同构等价。因此，存在函子 Λ'，它也由关于自同构 Φ^{-1} 的 (5.6) 和 (5.7) 定义。根据命题 5.6 和命题 5.7，存在函子Ψ'，它也由关于自同构Φ^{-1}的 (5.10) 和 (5.12) 定义。这个函子使图表闭合

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{Cl}_{H_2} & \overrightarrow{\Lambda'} & \mathfrak{Cl}_{H_1}\\ \downarrow\mathcal{FR}_{H_2} & & \mathcal{FR}_{H_1}\downarrow\\ \mathfrak{Cor}_{H_2} & \underrightarrow{\Psi'} & \mathfrak{Cor}_{H_1}\end{array}\tag{5.14}$$

交换。因此，根据命题 5.7 和 (5.8)，我们有

$$\Psi'\Psi\mathcal{FR}_{H_1}=\Psi'\mathcal{FR}_{H_2}\Lambda=\mathcal{FR}_{H_1}\Lambda'\Lambda=\mathcal{FR}_{H_1}id_{\mathfrak{Cl}_{H_1}}=id_{\mathfrak{Cor}_{H_1}}\mathcal{FR}_{H_1},$$

so

$$\Psi'\Psi=id_{\mathfrak{Cor}_{H_1}}$$

根据命题 3.2 和注 2.2。类似地推理可得

$$\Psi\Psi'=id_{\mathfrak{Cor}_{H_2}}.$$

■

现在，我们可以由命题 5.2、5.3、5.4、5.6、5.7、5.8 得出

命题 5.9 如果两个代数 H_1、$H_2\in\Theta$ 满足定义 *5.1*，那么它们也满足定义 *5.2*。

5.2 定义 5.2 的推论

5.2.1 定义 5.2 中左侧图表交换性的推论

命题 5.10 若两个代数 $H_1,H_2\in\Theta$ 存在一个同构 Λ，使定义 *5.2* 的左侧图表交换，则

$$\Lambda\left(F\left(X\right),T\right)=\left(\Phi\left(F\left(X\right)\right),\alpha(\Phi)_{F(X)}\left(T\right)\right)\tag{5.15}$$

对每个 $(F(X)\quad T)\in\mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_1}$都成立，其中

$$\alpha(\Phi)_{F(X)}:Cl_{H_1}(F\left(X\right))\to Cl_{H_2}(\Phi(F\left(X\right)))\tag{5.16}$$

是一个双射。

证明。 根据 $\mathfrak{Cl}_{H_1}$ 的定义，我们有 $T\in Cl_{H_1}F(X)$。 $\Lambda\left(F(X)\quad T\right)=\left(F(Y)\quad\widetilde{T}\right)\in\mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_2}$。这意味着 $F(Y)\in\mathrm{Ob}\Theta^{0}$, $\widetilde{T}\in Cl_{H_2}F(Y)$。由我们的条件和 (3.3) 可得

$$\mathcal{FG}_{H_2}\left(\Lambda\left(F\left(X\right),T\right)\right)=\mathcal{FG}_{H_2}\left(F\left(Y\right),\widetilde{T}\right)=F\left(Y\right)=$$

$$\Phi\left(\mathcal{FG}_{H_1}\left(F\left(X\right),T\right)\right)=\Phi\left(F\left(X\right)\right).$$

我们将 $\alpha(\Phi)^{F(X)}(T)$ 记为 $=\widetilde{T}$。固定 $F(X)\in \mathrm{Ob}\Theta^0$。对于每个 $T\in Cl_{H_1}F(X)$，$(F(X)\quad T)\in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_1}$，因此 $\alpha(\Phi)^{F(X)}$：$Cl_{H_1}(F(X))\to Cl_{H_2}(\Phi(F(X)))$ 是一个映射。现在我们将证明 $\alpha(\Phi)^{F(X)}$ 是一个双射。根据我们的条件，我们有

$$\Phi^{-1}\mathcal{FG}_{H_2}=\Phi^{-1}\mathcal{FG}_{H_2}\Lambda\Lambda^{-1}=\Phi^{-1}\Phi\mathcal{FG}_{H_1}\Lambda^{-1}=\mathcal{FG}_{H_1}\Lambda^{-1}.$$

这意味着，对于代数 H_1,H_2，定义 5.2 中的左侧图表是闭合交换的，其同构为 Λ^{-1} 和 Φ^{-1}。因此，如上所述，对于每个 $F(Y)\in \mathrm{Ob}\Theta^0$，都存在一个映射 $\alpha(\Phi^{-1})_{F(Y)}$：$Cl_{H_2}(F(Y))\to Cl_{H_1}(\Phi^{-1}(F(Y)))$，使得 $\Lambda^{-1}(F(Y)\quad R)=\left(\Phi^{-1}(F(Y))\quad \alpha(\Phi^{-1})_{F(Y)}(R)\right)$ 对每个 $R\in Cl_{H_2}(F(Y))$ 都成立。我们考虑 $(F(X)\quad T)\in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_1}$，并记 $\Phi(F(X))=F(Y)$。因此

$$\left(F\left(X\right),T\right)=\Lambda^{-1}\Lambda\left(F\left(X\right),T\right)=\Lambda^{-1}\left(\Phi\left(F\left(X\right)\right),\alpha(\Phi)_{F(X)}\left(T\right)\right)=$$

$$\left(\Phi^{-1}\Phi\left(F\left(X\right)\right),\alpha(\Phi^{-1})_{F(Y)}\alpha(\Phi)_{F(X)}\left(T\right)\right).$$

因此，对于每个 $T\in Cl_{H_1}(F(X))$，都有 $\alpha(\Phi^{-1})_{F(Y)}\alpha(\Phi)^{F(X)}(T)=T$。另一方面，对于每个 $(F(Y)\quad R)\in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_2}$，我们有

$$\left(F\left(Y\right),R\right)=\Lambda\Lambda^{-1}\left(F\left(Y\right),R\right)=\Lambda\left(F\left(X\right),\alpha(\Phi^{-1})_{F(Y)}\left(R\right)\right)=$$

$$\Lambda\left(F\left(X\right),T\right)=\left(\Phi\left(F\left(X\right)\right),\alpha(\Phi)_{F(X)}\alpha(\Phi^{-1})_{F(Y)}\left(R\right)\right),$$

因为 $F(X)=\Phi^{-1}(F(Y))$。这意味着，对于每个 $R\in Cl_{H_2}(F(Y))$，$\alpha(\Phi)^{F(X)}\alpha(\Phi^{-1})_{F(Y)}(R)=R$。因此，映射 $Cl_{H_2}\ F\ Y\quad \alpha\ \Phi^{-1}\ _{F(Y}\quad Cl_{H_2}\ F\ Y\quad \to Cl_{H_1}\ F\ X\quad (\Phi)_{()}$：$Cl_{H_1}(F(X))$ (( )) 和 ( ))：(( )) (( )) 互为逆元。所以 $\alpha(\Phi)^{F(X)}$ 是一个双射。

■

命题 *5.11* 若两个代数 $H_1,H_2\in\Theta$ 之间存在一个同构 Λ，使定义 *5.2* 的左侧图表交换，则对每个 $\varphi\in Mor^{\mathfrak{Cl}_{H_1}}((F(X_1)\quad T_1),(F(X_2)\quad T_2))$，都有 $\Lambda(\varphi)=\Phi(\varphi)$，其中 $(F(X_1)\quad T_1),(F(X_2)\quad T_2)\in Ob\mathfrak{Cl}_{H_1}$。

证明。该

$$\mathcal{FG}_{H_2}\left(\Lambda\left(\varphi\right)\right)=\Lambda\left(\varphi\right)=\Phi\left(\mathcal{FG}_{H_1}\left(\varphi\right)\right)=\Phi\left(\varphi\right)\tag{5.17}$$

由 (3.4) 成立。 ■

5.2.2 定义 5.2 中两个图表的交换性的推论

命题 5.12 若两个代数 H_1、$H_2\in\Theta$ 是定义 *5.2* 的对象，则它们也是定义 *5.1* 的对象。

证明。 我们刚刚在命题 5.10 中证明了，在我们的条件下，对每一个 $F(X) \in \mathrm{Ob}\,\Theta^0$ 都存在一个双射

$$\alpha(\Phi)_{F(X)} : Cl_{H_1}(F(X)) \to Cl_{H_2}(\Phi(F(X))).$$

现在我们考虑 $F(X_1)$ $F(X_2) \in \mathrm{Ob}\Theta^0$, μ_1, $\mu_2 \in$同态集 $(F(X_1)$ $F(X_2))$, $T \in Cl_{H_1}(F(X_2))$。

$$\mu_1, \mu_2 \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_{H_1}}\left(\left(F(X_1), \left(\Delta_{F(X_1)}\right)''_{H_1}\right), \left(F(X_2), T\right)\right) \tag{5.18}$$

由命题 3.3 可知成立。因此,

$$\mathcal{FR}_{H_1}(\mu_i) = \begin{pmatrix} \mu_i, & \left(F(X_1), \left(\Delta_{F(X_1)}\right)''_{H_1}\right) \\ & \left(F(X_2), T\right) \end{pmatrix}, \tag{5.19}$$

其中 $i = 1$, 2 由 (3.2) 得出。此外，根据 (5.16)、(5.18)、(5.17) 以及命题 5.10、5.11，我们有

$$\Phi(\mu_i) = \Lambda(\mu_i) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_{H_2}}\left(\Lambda\left(F(X_1), \left(\Delta_{F(X_1)}\right)''_{H_1}\right), \Lambda\left(F(X_2), T\right)\right) =$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_{H_2}}\left(\left(\Phi(F(X_1)), \alpha(\Phi)_{F(X_1)}\left(\left(\Delta_{F(X_1)}\right)''_{H_1}\right)\right), \left(\Phi(F(X_2)), \alpha(\Phi)_{F(X_2)}(T)\right)\right)$$

for $i = 1, 2$. So, we have by (3.2)

$$\mathcal{FR}_{H_2}(\Phi(\mu_i)) = \begin{pmatrix} \Phi(\mu_i), & \left(\Phi(F(X_1)), \alpha(\Phi)_{F(X_1)}\left(\left(\Delta_{F(X_1)}\right)''_{H_1}\right)\right) \\ & \left(\Phi(F(X_2)), \alpha(\Phi)_{F(X_2)}(T)\right) \end{pmatrix}, \tag{5.20}$$

对于 $i = 1$, 2。定义 5.2 的右图表是交换的，因此由 (5.17) 可得,

$$\mathcal{FR}_{H_2}(\Phi(\mu_i)) = \mathcal{FR}_{H_2}(\Lambda(\mu_i)) = \Psi\mathcal{FR}_{H_1}(\mu_i) \tag{5.21}$$

对于 $i = 1$, 2 成立。

我们考虑以下自然满同态: δ: $F(X_1) \to F(X_1)/\left(\Delta_{F(X_1)}\right)''_{H_1}$,$\tau$: $F(X_2) \to F(X_2)$ $/T$, $\widetilde{\delta}$: $\Phi(F(X_1)) \to \Phi(F(X_1))$ $/\alpha(\Phi)_{F(X_1)}\left(\left(\Delta_{F(X_1)}\right)''_{H_1}\right)$,$\widetilde{\tau}$: $\Phi(F(X_2)) \to \Phi(F(X_2))$ $/\alpha(\Phi)_{F(X_2)}(T)$。

我们假设 (5.1) 成立。由 (5.19) 可得

$$\tau\mu_1 = \mathcal{FR}_{H_1}(\mu_1)\,\delta = \tau\mu_2 = \mathcal{FR}_{H_1}(\mu_2)\,\delta, \tag{5.22}$$

so

$$\mathcal{FR}_{H_1}(\mu_1) = \mathcal{FR}_{H_1}(\mu_2) \tag{5.23}$$

根据注 2.1，以及

$$\mathcal{FR}_{H_2}(\Phi(\mu_1)) = \mathcal{FR}_{H_2}(\Phi(\mu_2)) \tag{5.24}$$

根据 (5.21)。因此，由 (5.20) 可得

$$\widetilde{\tau}\Phi\left(\mu_1\right)=\mathcal{FR}_{H_2}\left(\Phi\left(\mu_1\right)\right)\widetilde{\delta}=\mathcal{FR}_{H_2}\left(\Phi\left(\mu_2\right)\right)\widetilde{\delta}=\widetilde{\tau}\Phi\left(\mu_2\right). \tag{5.25}$$

这意味着 (5.2) 成立。

现在我们假设 (5.2) 成立。由 (5.2) 和 (5.20) 可得 (5.25)。因此，根据注 2.1，我们有 (5.24)。由于 Ψ 是一个同构，由 (5.24) 和 (5.21) 可得 (5.23)。由 (5.23) 和 (5.19) 可得 (5.22)。这意味着 (5.1) 成立。证明至此完成。■

现在我们可以由命题 5.9 和命题 5.12 得出

定理 5.1 两个代数 $H_1, H_2 \in \Theta$ 满足定义 *5.2*，当且仅当它们满足定义 *5.1*。

6 首批推论

由定理 5.1，我们有

推论 6.1 如果两个代数 H_1、$H_2 \in \Theta$ 满足定义 *5.2*，那么同构 Λ 和 Ψ 由自同构 Φ唯一确定。

证明。如果两个代数 $H_1, H_2 \in \Theta$ 满足定义 5.2，那么，根据 (5.15)，$\Lambda\left(F(X)\ T\right)=\left(\Phi\left(F(X)\right)\ \alpha(\Phi)^{F(X)}(T)\right)$ 对每个 $\left(F(X)\ T\right)\in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_1}$ 都成立。根据定理 5.1，代数 $H_1, H_2 \in \Theta$ 也满足定义 5.1。因此，双射

$$\alpha(\Phi)_{F(X)}: Cl_{H_1}(F\left(X\right))\to Cl_{H_2}(\Phi(F\left(X\right)))$$

对每个 $F(X)\in \mathrm{Ob}\Theta^0$，根据注 5.2，双射由自同构 Φ 唯一确定。因此，$\Lambda\left(F(X)\ T\right)$ 由自同构 Φ唯一确定。此外，根据 (5.17)，$\Lambda(\varphi)$由自同构 Φ 唯一确定，对每个

$$\left(F\left(X_1\right),T_1\right),\left(F\left(X_2\right),T_2\right)\in \mathrm{Ob}\mathfrak{Cl}_{H_1}$$

并且每一个

$$\varphi\in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Cl}_{H_1}}\left(\left(F\left(X_1\right),T_1\right),\left(F\left(X_2\right),T_2\right)\right).$$

因此，同构 Λ 由自同构 Φ唯一确定。

我们假设 Ψ_1,Ψ_2： $\mathfrak{Cor}_{H_1}\to\mathfrak{Cor}_{H_2}$ 是使定义 5.2 的右图表交换闭合的两个同构。这意味着

$$\Psi_1\mathcal{FR}_{H_1}=\mathcal{FR}_{H_2}\Lambda=\Psi_2\mathcal{FR}_{H_1} \tag{6.1}$$

因此，$\Psi_1=\Psi_2$ 由命题 3.2 与注 2.2。所以，使定义 5.2 的右图表交换闭合的同构 Ψ由同构 Λ唯一确定，而该同构又由自同构 Φ唯一确定。■

本推论为这一名称提供了依据：自同构等价。并且它说明，当我们谈论作为定义 5.2 之对象的两个代数 $H_1, H_2 \in \Theta$时，这些代数的自同构等价由范畴 Θ^0 的自同构 Φ 给出。

新定义使我们能够更容易地证明以下内容

命题 6.1 范畴 Θ^0 的恒等自同构为每个代数 $H \in \Theta$ 提供了与其自身的自同构等价。若簇 Θ中的两个代数 H_1 和 H_2 的自同构等价由范畴 Θ^0的自同构Φ 提供，则自同构 Φ^{-1} 为两个代数 H_2 和 H_1提供了自同构等价。若范畴Θ^0 的自同构 Φ、Ψ 分别为代数 H_1 和 H_2 以及代数H_2 和 H_3 提供了自同构等价，则自同构 $\Psi\Phi$ 为代数 H_1 和 H_3提供了自同构等价。

为证明这一命题，只需考虑定义 5.2 中的交换图。

由此命题可得

推论 6.2 簇 Θ中所有代数的自同构等价在 Θ 中是一个等价关系。

定义 6.1 任意范畴 $\mathfrak{K}$的自同构 Υ称为内的，如果它作为函子同构于该范畴 $\mathfrak{K}$的恒等自同构。

这意味着存在一个同构系统

$$\left\{\sigma^{\Upsilon}_{F(X)} : F(X) \to \Upsilon(F(X)) \mid F(X) \in \mathrm{Ob}\mathfrak{K}\right\}$$

使得对于每个 $\mu \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{K}}(F(X_1) \quad F(X_2)\}$，图表

$$\begin{array}{ccc} F(X_1) & \xrightarrow{\sigma^{\Upsilon}_{F(X_1)}} & \Upsilon(F(X_1)) \\ \downarrow \mu & & \Upsilon(\mu) \downarrow \\ F(X_2) & \xrightarrow{\sigma^{\Upsilon}_{F(X_2)}} & \Upsilon(F(X_2)) \end{array}$$

可交换。若我们取 $\mathfrak{K} = \Theta^0$，并将内自同构的定义与条件 (5.3) 进行比较——该条件对范畴 Θ^0的每个自同构都成立——便会发现，对于内自同构，同构系统可以发挥双射系统的作用。容易证明，任意范畴 $\mathfrak{K}$的所有内自同构构成该范畴所有自同构组成的群的一个正规子群。

我们知道（[6, 命题 9], [11, 定理 4.2]），若范畴 Θ^0 的一个内自同构 Υ（其中 Θ 是某个代数簇）使代数 H_1 与 H_2 自同构等价，其中 H_1，$H_2 \in \Theta$，那么 H_1 与 H_2 几何等价。因此，在簇 Θ 中，几何等价与自同构等价之间的差异只有在商群 $\mathfrak{A}/\mathfrak{Y}$ 非平凡时才会存在；其中，$\mathfrak{A}$ 是范畴 Θ^0 的所有自同构组成的群，而 $\mathfrak{Y}$ 是该范畴的所有内自同构组成的群。正因如此，对这个商群的研究在泛代数几何中十分重要。

7 用语运算方法计算群 $\mathfrak{A}/\mathfrak{Y}$及若干结论。

这一方法在 [7] 中得到阐述，并在 [11] 中得到了完善。本节中我们给出的所有定义和结果，除非特别注明出处，均已发表于上述两篇文章中。

定义 7.1 范畴 Θ^0 的自同构 Φ 称为强稳定，如果

1. $\Phi\left(F\left(X\right)\right)=F\left(X\right)$ *for every* $F\left(X\right)\in \mathrm{Ob}\Theta^0$ *and*
2. 存在一个双射系统

$$\left\{s_{F(X)}^{\Phi}:F\left(X\right)\to\Phi\left(F\left(X\right)\right)\mid F\left(X\right)\in \mathrm{Ob}\Theta^0\right\}$$

使得对于每个 $\mu\in$同态集 $\left(F(X_1)\quad F(X_2)\right)$，式 *(5.3)* 成立，并且

$$s_{F(X)}^{\Phi}\mid_X=id_X,$$

对于每个 $F\left(X\right)\in$对象Θ^0.

范畴 Θ^0 的所有强稳定自同构构成一个群。我们将该群记作 $\mathfrak{S}$。

定理 7.1 该 $\mathfrak{A}=\mathfrak{Y}\mathfrak{S}$ 成立。

因此 $\mathfrak{A}/\mathfrak{Y}\cong\mathfrak{S}/\mathfrak{S}\cap\mathfrak{Y}$。所以，研究群 $\mathfrak{A}/\mathfrak{Y}$ 最重要的事情是计算群 $\mathfrak{S}$。

对于每个词 $w=w(x_1,\ .....,\ x_n)\in F(x_1,\ .....,\ x_n)\in \mathrm{Ob}\Theta^0$ 以及每个$H\in\Theta$，我们都可以定义一个元数为 $\rho(w_H^*)=n$的运算 w_H^*：如果 $h_1,\ .....,\ h_n\in H$，那么 $w_H^*(h_1,\ .....,\ h_n)=w(h_1,\ .....,\ h_n)$。

我们用 Ω 表示簇 Θ 的签名，并将每个$\omega\in\Omega$ 运算的元数记为 $\rho(\omega)=n_\omega$。我们可以考虑词系 $W=\{w_\omega\mid\omega\in\Omega\}$。如果 $w_\omega\in F(x_1,\ .....,\ x_{n_\omega})=F_{n_\omega}\in \mathrm{Ob}\Theta^0$ 对于每个$\omega\in\Omega$都成立，那么对于每个 $H\in\Theta$，我们可以考虑签名$\omega_H^*(h_1,\ .....,\ h_{n_\omega})=(w_\omega)_H^*(h_1,\ .....,\ h_{n_\omega})$ 的新实现，其中 $\omega\in\Omega,\ h_1,\ .....,\ h_{n_\omega}\in H$。我们将具有这一签名新实现的集合$H$ 记为 H_W^*。

定义 7.2 我们称词系 $W=\{w_\omega\mid\omega\in\Omega\}$ 是可应用的，如果

1. 对于每个 $\omega\in\Omega\ \ w_\omega\in F_{n_\omega}$ 均成立，并且
2. 存在一个双射系统

$$\left\{s_{F(X)}:F\left(X\right)\to F\left(X\right)\mid F\left(X\right)\in \mathrm{Ob}\Theta^0\right\}$$

使得

$$\left(s_{F(X)}\right)_{\mid X}=id_X$$

and

$$s_{F(X)}:F\left(X\right)\rightarrow\left(F\left(X\right)\right)_{W}^{*}$$

是同构。

下面的命题是文字运算方法的核心。

命题 7.1 群 $\mathfrak{S}$ 与所有适用词系构成的族之间存在一个双射。若 $\Phi=\Phi_{W}$ 是Θ^{0}的强稳定自同构，对应于适用词系 W，则（*5.3*）对定义 *7.2* 中第 *2* 项所涉及的双射成立。反过来，对应于 Θ^{0}的强稳定自同构 Φ的适用词系 W_{Φ}定义如下：

$$w_{\omega}\left(x_{1},\ldots,x_{n_{\omega}}\right)=s_{F_{n_{\omega}}}\left(\omega\left(x_{1},\ldots,x_{n_{\omega}}\right)\right)\in F_{n_{\omega}}$$

对每个 $\omega\in\Omega$，其中 $s_{F_{\omega}}$ 是定义 *7.1* 中第 *2* 项所涉及的对象。

此外，由 [2, 命题 2.1] 还可以得出以下用于计算群 $\mathfrak{S}\cap\mathfrak{Y}$的判据。

判据 *7.1* 设我们考虑范畴 Θ^{0} 的强稳定自同构 Φ，并记 $W_{\Phi}=W$。该自同构是内自同构，当且仅当存在 $c(x_{1})\in F(x_{1})$，使得对每个 $F(X)\in Ob\Theta^{0}$，映射$c_{F(X)}:F(X)\rightarrow(F(X))_{W}^{*}$是一个同构，其中对每个 $f\in F(X)$，均满足 $c_{F(X)}(f)=c(f)$。

定理 7。2 *[8,* 定理 *5。1]*自同构 Φ^{-1}（其中 $\Phi\in\mathfrak{S}$）给出了代数 H和 H_{W}^{*}的自同构等价关系，其中 $H\in\Theta$和 $W_{\Phi}=W$。

定理 7。3 *[8,* 定理 *6。1]*设代数 H_{1} 和 H_{2} 属于簇Θ。当且仅当代数 H_{1} 与代数 $(H_{2})_{W}^{*}$几何等价时，它们在 Θ 中自同构等价，其中 W 是一个可应用的词系。

8 例子、猜想及进一步研究的方向。

以下例子已在 [10, 第 5]节中讨论。

例 8。1 Θ 是一个 k-线性代数簇，其中 k 是一个特征为 0 的域。该簇的签名为 $\Omega=\{0,+,\cdot,\lambda\cdot(\lambda\in k)\}$，其中 0 是常元，加法和乘法 $+$ 和 $\cdot$ 的元数为 2，而 $\lambda\cdot$ 是一个一元固定标量 λ 乘法运算，对每个 $\lambda\in k$均如此。在这个簇中，我们有 $\mathfrak{A}/\mathfrak{Y}\cong k^{*}\diagdown\mathrm{Aut}k$，其中 $k^{*}=k\setminus\{0\}$，Aut$k$是域 k的所有自同构构成的群。已证明

$$W=\{w_{0}=0,w_{+}\left(x_{1},x_{2}\right)=x_{1}+x_{2},$$

$$w_{\cdot}(x_1, x_2) = x_2 \cdot x_1, w_{\lambda\cdot}(x_1) = \lambda x_1 \, (\lambda \in k)\}$$

是这个簇中的一个适用词系。 H 是由恒等式 $(x_1 x_1) x_2 = 0$定义的 Θ 子簇中的二元生成自由代数。根据定理 7.2，代数 H和 H_W^* 自同构等价。但是，已证明这些代数并非几何等价。

更多关于自同构等价但不几何等价的代数的例子，见 [11, 第 5.3 节和第 5.4]节，以及 [12,第 6]节。

此外，还有许多簇的例子，其群是平凡群 $\mathfrak{A}/\mathfrak{Y}$。在这些簇中，自同构等价与几何等价一致。其中一些簇见 [9] 和 [11, 第 5.1 节及第 5.2]节。

也可能出现这样的情况：在某个簇 Θ中，群 $\mathfrak{A}/\mathfrak{Y}$ 不是平凡群，但自同构等价与几何等价一致。

例 8。2 Θ 是固定域 k 上所有特征为 0 的向量空间构成的簇。$\Omega = \{0, +, \lambda \cdot (\lambda \in k)\}$。容易证明 $\mathfrak{A}/\mathfrak{Y} \cong \mathrm{Aut}k$。在这个簇中

$$W_\mu = \{w_0 = 0, w_+(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$
$$w_{\lambda\cdot}(x_1) = (\mu(\lambda)) x_1 \, (\lambda \in k)\},$$

其中 $\mu \in \mathrm{Aut}k$是一个适用词系，它对应于 $\mu \neq id_k$时 Θ^0 的非内自同构。但是，任意两个非零向量空间都是几何等价的。利用 [5, 定理3]，很容易证明这一事实，因为所有非零向量空间都是若干个一维向量空间的直积。

我们还有一个

猜想8.1 如果 Θ 是固定域 k 上所有特征为0的交换结合线性代数所构成的簇，那么，尽管 $\mathfrak{A}/\mathfrak{Y} \cong \mathrm{Aut}k$，在这个簇中，自同构等价与几何等价关系相一致。

如果 Θ 是全体群的簇 [1]，，或是全体阿贝尔群的簇，或对于每个 $n \in \mathbb{N}$ [9] 都是全体 n 类幂零群的簇，那么群 $\mathfrak{A}/\mathfrak{Y}$ 是平凡的。2007 年，B. Plotkin 提出了这样一个问题：全体群的簇中是否存在某个子簇，使得群 $\mathfrak{A}/\mathfrak{Y}$ 不是平凡的? 文献 [2] 研究了所有幂零类为 4 且指数不超过 4 的亚阿贝尔群所组成的簇。这个簇具有签名 $\Omega = \{1, -1, \cdot, \}$，其中 1 是一个常元，$\cdot$是乘法，而 -1 是一个一元运算，它为群中的每个元素给出其逆元。已证明群 $\mathfrak{A}/\mathfrak{Y}$ 有两个元素，因为

$$W = \left\{w_1 = 1, w_{-1}(x_1) = x_1^{-1},\right.$$
$$\left. w_{\cdot}(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \cdot (x_2, x_1)^2\right\}$$

这是一个适用词系，它对应于 Θ^0 的非内自同构。但我们无法举出该簇中两个自同构等价但不几何等价的群的例子。我们有一个

猜想 8.2 在所有群簇的子簇中，自同构等价与几何等价一致。

进一步研究的一个有趣方向，是考察自同构等价与弱相似之间的差距。目前，我们不知道有任何一对代数彼此弱相似却不自同构等价。

进一步研究的另一个方向，是考察多类代数。我们可以考察特定类上的方程组闭包，并改变代数闭集的概念。这是否需要改变我们研究自同构等价的方法?

9 致谢

我感谢 G. Zhitomirski 教授，他对 H-闭同余的范畴所作的定义（见第3.1小节）对本研究很有帮助。我也感谢 E. Aladova 博士、E. Plotkin 教授和 G. Zhitomirski 教授，他们进行了多次讨论，帮助我完成本文。

参考文献

[1] E. Aladova，《自由代数范畴的文字运算方法与自同构》，《代数与逻辑》，**61:2** (2022)，第 87–103 页。[2]R. Barbosa Fernandes，A. Tsurkov，《全体群簇的某个子簇中有限生成自由群范畴的自同构》。arXiv: 1909.05955V1 [math.GR]。[3] A. I. Mal'cev，《代数系统》，（施普林格出版社，柏林、海德堡、纽约，1973）。[4] B. Plotkin，《代数簇与代数几何簇。代数几何簇的范畴》。《西伯利亚高等数学》，阿勒顿出版社，**7:2** (1997)，第 64–97 页。[5] B. Plotkin，E. Plotkin，A. Tsurkov，《群的几何等价》。《代数通讯》。**27:8** (1999)，第 4015–4025 页。[6]B. Plotkin，《具有相同（代数）几何的代数》。《斯捷克洛夫数学研究所学报》。**242** (2003年)，17–207。数字对象唯一标识符：10.1134/S0081543812070048。[7] B. Plotkin，G. Zhitomirski，《某些簇的自由代数范畴的自同构》。《代数杂志》**306**(2)，344–367（2006）。

[8] A. Tsurkov, 《代数的自同构等价》, 《代数与计算国际期刊》 **17:5/6**, (2007), 第 1263–1271 页。[9] A. Tsurkov, 《固定幂零类自由幂零群范畴的自同构》。《代数与计算国际期刊》。**17:5/6**, (2007), 第 1273–1281 页。[10] A. Tsurkov, 《线性代数的自同构等价》, 《代数及其应用期刊》, **13:7**, (2014), 数字对象唯一标识符：10.1142/S0219498814500261。[11]A. Tsurkov, 《多类代数的自同构等价》。《应用范畴结构》。**24:3** (2016), 209–240。数字对象唯一标识符：10.1007/s10485-015-9394-y。[12] A. Tsurkov, 《线性代数经典簇中的自同构等价》, 《代数与计算国际期刊》, **27:8**(2017), 第 973–999 页。数字对象唯一标识符：10.1142/S021819671750045X