arXiv:2602.01823v1 [math.AP] 2 Feb 2026

通过 $\mathbb{R}^2$上的库埃特流抑制向列型液晶流的爆破

YUBO CHEN、WENDONG WANG、JUNCHENG WEI 和 GUOXU YANG

摘要。众所周知，对于二维调和热流或液晶流，当初始能量大于 8π时，解可能发生爆破。受 Lai–Lin–Wang–Wei–Zhou（CPAM，2022）的研究启发——该研究在存在小尺度速度场的情况下构造了奇异解——一个自然的问题是：大尺度速度能否发挥稳定作用，防止爆破集中？本文证明，在对初始数据的各向异性范数作出较弱假设的条件下，振幅足够大的库埃特流可以抑制爆破现象。特别地，我们构造了初始能量超过 8π 且满足本文假设的例子。

Key词语：爆破抑制；向列型液晶流；稳定性；库埃特流 ow

目录

1. 引言 2
1.1. 主要结果 4
1.2. 稳定机制 8
1.3. 证明的关键思路 9
1.4. 符号与概要 12
2. 预备知识与主定理的证明 13
2.1. 时空估计 13
2.2. L^∞嵌入 14
2.3. 不同频率区域中的不等式 16
2.4. 在命题 2.8 的条件下证明主定理 16
3. $|D_x|^{1/3}d$ 17
3.1. 弹性非线性项的估计 18
3.2. 非线性能量估计 21
4. 高阶导数项的能量估计 $\left(\partial_x^2, \partial_y^2\right)|D_x|^{1/3}d$ 24
5. 涡量的能量估计 ω 36
6. 命题 2.8 的证明 39
声明 40
参考文献 40

1. 引言

液晶是一种物质状态，其性质介于普通液体与固体晶体之间。在各种液晶中间相中，向列相最为突出，其特点是棒状分子具有长程取向有序，但缺乏位置有序。向列型液晶的理论描述通常分为三个层次的模型：微观的 Doi–Onsager 动力学理论 [Ons49，DEE88],宏观的 Landau–de Gennes Q 张量理论 [dG74], 以及 Ericksen–Leslie 向量理论 [Eri62，Les68]。第一种模型提供分子动力学描述，而后两种则提供宏观连续介质描述。

本文研究 Ericksen–Leslie 系统的一个简化版本，该系统描述整个平面上向列液晶的流动:

$$\begin{cases} \partial_t v + v\cdot\nabla v - \nu\Delta v + \nabla P = -\lambda\nabla\cdot(\nabla n\odot\nabla n) & \text{in } \mathbb{R}^2\times(0,+\infty), \\ \nabla\cdot v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2\times(0,+\infty), \\ \partial_t n + v\cdot\nabla n = \gamma\left(\Delta n + |\nabla n|^2 n\right) & \text{in } \mathbb{R}^2\times(0,+\infty), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，$v(x,y,t)$：$\mathbb{R}^2\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}^2$ 表示流动的速度场，$n(x,y,t)$：$\mathbb{R}^2\times(0,+\infty)\to S^2$是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面，表示液晶材料宏观分子取向的单位向量场，而 $P(x,y,t)$：$\mathbb{R}^2\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 表示压强函数。常数 ν、λ 和 γ 均为正定常数，分别表示黏度、动能与势能之间的竞争，以及分子取向场的微观弹性弛豫时间。$\nabla n\odot\nabla n$ 表示 2×2 矩阵，其第（i，j）个元素为 $\nabla_i n\cdot\nabla_j n$，其中 $1\le i$、$j\le 2$。

上述系统是 Ericksen–Leslie 模型的一个简化版本，该模型最初于 1958 年至 1968 [Eri62, Les68] 期间发展而来。在静态情形下，该模型简化为 Oseen–Frank 模型。它对材料的演化提供了一种宏观连续介质描述，其演化由流体速度场 $v(x,y,t)$ 与宏观指向矢场$n(x,y,t)$之间的相互作用所支配，后者代表棒状液晶的微观取向。从结构上看，系统 (1.1) 描述了非齐次纳维–斯托克斯方程与调和映射输运流之间的耦合。Lin–Liu[LL95, LL96] 在 20 世纪 90 年代的一系列论文中开启了对 (1.1) 的数学分析。在二维空间中，Lin–Lin–Wang 在 [LLW10] 、Hong 在 [Hon11], 分别得到了 (1.1) 弱解的整体存在性，且允许有限时刻出现奇点。Lin–Wang 在 [LW10]、Xu–Zhang 在 [XZ12]证明了弱解的唯一性。对于具有 Oseen–Frank 能量的 (1.1) 一般形式，Hong–Xin 在[HX12] 证明了整体存在性。对于具有 Oseen–Frank 能量和 Leslie 应力的 (1.1) 一般形式，Huang-Lin-Wang 建立了弱解的整体适定性结果

[HLW14] 与 Wang–Wang [WW14] 独立地得出了该结果，随后 Wang–Wang–Zhang 在 [WWZ16] 得到了唯一性结果。此外，Lei–Li–Zhang [LLZ14] 为能量空间中一类满足自然几何角条件的大初值对应的光滑解整体适定性给出了新的证明。最近，Lai–Lin–Wang–Wei–Zhou [LLW+22]发展了一种新的内外区域拼接方法，构造出在 k 点恰好发生爆破的解，其中 t 趋于有限时间 T。对于三维的系统 (1.1)，该系统属于超临界情形；关于局部适定性结果，参见 [WZZ13]；关于一些爆破准则，参见 [HLX14] ；关于有限时间奇异性，参见 [HLLW16] ；关于在某些条件下全局弱解的存在性，参见 [LW16] 和 [KW25] ，以及其中的参考文献。

受 [LLW+22] 的启发，其中构造了小速度下的奇异解，我们研究系统 (1.1) 在一类速度大初值下的整体适定性。为简单起见，假设系统 (1.1) 中有 $\nu = \lambda = \gamma = 1$。容易验证，$(\tilde{v}, \tilde{n}) = (U, e_1)$ 与库埃特流 $U = (Ay, 0)$ 是系统 (1.1) 的一个定常解，其中 A 是库埃特流的振幅。记扰动为 $u(t,x,y) = v(t,x,y) - U(y)$ 和 $d(t,x,y) = n(t,x,y) - e_1$，则 (u,d) 满足

$$\begin{cases} \partial_t u + Ay\partial_x u + \begin{pmatrix} Au^2 \\ 0 \end{pmatrix} + u\cdot\nabla u - \Delta u + \nabla p = -\nabla\cdot(\nabla d \odot \nabla d), \\ \nabla\cdot u = 0, \\ \partial_t d + Ay\partial_x d + u\cdot\nabla d - \Delta d = |\nabla d|^2(d+e_1), \\ u|_{t=0} = u_{\text{in}}, \quad d|_{t=0} = d_{\text{in}}. \end{cases} \tag{1.2}$$

直接计算可得

$$\nabla\cdot(\nabla d \odot \nabla d) = \nabla\frac{|\nabla d|^2}{2} + \begin{pmatrix} \partial_x d\cdot\Delta d \\ \partial_y d\cdot\Delta d \end{pmatrix}.$$

定义

$$\omega = \partial_y u^1 - \partial_x u^2, \quad u = \nabla^\perp\Phi = (\partial_y\Phi, -\partial_x\Phi)^T,$$

则 $\Delta\Phi = \omega$ 和 ω 满足

$$\partial_t\omega + Ay\partial_x\omega - \Delta\omega + u\cdot\nabla\omega = -\partial_y(\partial_x d\cdot\Delta d) + \partial_x(\partial_y d\cdot\Delta d).$$

经过时间重标度 $t \mapsto A^{-1}t$后，可将系统（1.2）改写为

$$\begin{cases} \partial_t\omega + y\partial_x\omega - \frac{1}{A}\Delta\omega = -\frac{1}{A}\left[u\cdot\nabla\omega - \partial_x(\partial_y d\cdot\Delta d) + \partial_y(\partial_x d\cdot\Delta d)\right], \\ u = \nabla^\perp\Delta^{-1}\omega, \\ \partial_t d + y\partial_x d - \frac{1}{A}\Delta d = -\frac{1}{A}\left[u\cdot\nabla d - |\nabla d|^2(d+e_1)\right]. \end{cases} \tag{1.3}$$

1.1. 主要结果。 为陈述主定理，我们先引入一些符号。记 $D_x := -i\partial_x$，其理解为一个傅里叶乘子算子。所有涉及 D_x 的范数均定义在傅里叶侧，而 $\langle\cdot\rangle := \sqrt{1+(\cdot)^2}$。对于 $m, \epsilon \geq 0$ 以及足够光滑的 f，定义 $\|(\cdot\ *)\|^2 := \|\cdot\|^2 + \|*\|^2$，即各向异性范数

$$\|f\|_{Y_{m,\epsilon}} := \left\| \langle D_x\rangle^m \langle \frac{1}{D_x}\rangle^\epsilon f \right\|_{L^2}, \tag{1.4}$$

以及时空范数

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{X_{a,m,\epsilon}} := &\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^m \langle \frac{1}{D_x}\rangle^\epsilon f\right\|^2_{L^\infty L^2} + \frac{1}{A}\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^m \langle \frac{1}{D_x}\rangle^\epsilon \nabla f\right\|^2_{L^2L^2}\\ &+ \frac{1}{A^{\frac{1}{3}}}\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^m \langle \frac{1}{D_x}\rangle^\epsilon |D_x|^{\frac{1}{3}} f\right\|^2_{L^2L^2} + \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^m \langle \frac{1}{D_x}\rangle^\epsilon \partial_x\nabla\Delta^{-1} f\right\|^2_{L^2L^2}.\end{aligned} \tag{1.5}$$

我们的主要结果陈述如下。

定理 1.1. 设 $\frac{1}{3} < \epsilon < \frac{1}{2} < m$, $0 < a < \frac{1}{16(1+2\pi)}$ 且 $\delta > 1$。假设初始数据 $u_{\text{in}} \in H^1(\mathbb{R}^2)$ 和 d_{in} 满足

$$\left\|\nabla^\perp \cdot u_{\text{in}}\right\|_{Y_{m,\epsilon}} + \left\||D_x|^{\frac{1}{3}} d_{\text{in}}\right\|_{Y_{m,\epsilon}} + \left\|\left(\partial_x^2, \partial_y^2\right)|D_x|^{\frac{1}{3}} d_{\text{in}}\right\|_{Y_{m,\epsilon}} < \infty.$$

存在一个正定常数 A_1 满足

$$\bar{A}_1 = C(m,\epsilon,\delta)\left(\left\|\left(\partial_x^2, \partial_y^2\right)|D_x|^{\frac{1}{3}} d_{\text{in}}\right\|_{Y_{m,\epsilon}} + \left\|\nabla^\perp \cdot u_{\text{in}}\right\|_{Y_{m,\epsilon}} + 1\right)^{\max\{\frac{2}{\delta-1}, 24\}}$$

使得若 $A > A_1$ 且

$$A^\delta \left\||D_x|^{\frac{1}{3}} d_{\text{in}}\right\|_{Y_{m,\epsilon}} \leq 1, \tag{1.6}$$

方程 (1.3)的解在时间上是全局的，并满足

$$\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t} u\right\|_{L^\infty L^\infty} + \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla d\right\|_{L^\infty L^\infty} \leq C,$$

对所有 $t \geq 0$ 均成立。

注意，当忽略速度方程（纳维–斯托克斯方程）时，上述扰动系统便简化为一个描述库埃特流附近调和映射热流的更简单方程，即

$$\partial_t d + y\partial_x d - \frac{1}{A}\Delta d = \frac{1}{A}|\nabla d|^2(d + e_1). \tag{1.7}$$

推论 1.2。 设 $\frac{1}{6} < \epsilon < \frac{1}{2} < m$、 $0 < a < \frac{1}{16^{(1+2\pi)}}$ 和 $\delta > 1$。假设初始数据 d_{in} 满足

$$\left\| |D_x|^{\frac{1}{3}} d_{\text{in}} \right\|_{Y_{m,\epsilon}} + \left\| |D_x|^{\frac{1}{3}} \nabla^2 d_{\text{in}} \right\|_{Y_{m,\epsilon}} < \infty.$$

存在一个正定常数 $\bar{A}_2$，它依赖于 ϵ、 m、 δ 和 $\left\| |D_x|^{\frac{1}{3}} \nabla^2 d_{\text{in}} \right\|_{Y_{m,\epsilon}}$，使得若 $A > \bar{A}_2$ 且

$$A^{\delta} \left\| |D_x|^{\frac{1}{3}} d_{\text{in}} \right\|_{Y_{m,\epsilon}} \leq 1,$$

方程(1.7)的解是整体时间存在的，并满足

$$\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}} |D_x|^{\frac{2}{3}} t} \nabla d \right\|_{L^\infty L^\infty} \leq C,$$

对所有 $t \geq 0$ 均成立。

注1.3。当系统（1.2）未与纳维–斯托克斯方程耦合时，初始能量为 $\|d_{\text{in}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} > 8\pi$ 的解可能会爆破（参见 Chang–Ding–Ye 在圆盘上的 1-等变类中的反例 [CDY92]）。Davila–del Pino–Wei [DdPW20] 也构造了二维调和映射流的有限时间爆破解，且爆破恰好发生在给定点处。对于二维向列型液晶流，Lai–Lin–Wang–Wei–Zhou [LLW+22] 通过内外匹配方法构造了解，这些解恰好在给定的 k 点处爆破。定理 1.1和推论1.2 表明，对于一大类初始数据，二维向列型液晶流或调和映射流的解在库埃特流附近不会爆破。据我们所知，这似乎是关于高维液晶中爆破行为抑制的首个结果。值得注意的是，Chen–Huang–Liu [CHL20]最近研究了向列型液晶完整 Ericksen–Leslie 模型的泊肃叶流柯西问题，其中液晶方程化简为一个一维系统

$$\partial_t u = \partial_x(\partial_x u + \partial_t \theta), \quad \partial_{tt}\theta + 2\partial_t \theta = c(\theta)\partial_x \left(c(\theta)\partial_x \theta\right) - \partial_x u.$$

（另请参见近期类似结果，见 [CHXZ26]。）

注 1.4（爆破抑制的物理机制）. 直观而言，库埃特流抑制向列型液晶指向矢场潜在爆破的机制，可以理解为非线性聚焦效应 与剪切诱导混合之间的竞争。在没有背景剪切流的情况下，调和映射热流可能因能量集中而在有限时间内形成奇点。然而，大剪切流 $U = (Ay,0)$作为一种输运机制，会迅速混合流体与指向矢场。这种剪切效应在流向（x方向）上拉伸指向矢场的空间尺度，从而有效地将能量从低频转移到高频（大 k）。由于耗散项

$-\Delta d$ 在高频处的效率显著更高，这种能量向更小尺度的级联所导致的衰减速率——即所谓的增强耗散——远快于单纯扩散所能提供的速率。若剪切振幅 A足够大，这种增强耗散便会足够迅速地发生，从而在奇点形成之前驱散能量集中。

注1.5（关于 $|D_x|^{1/3}$ 指标的动机）。分数阶导数指标 $1/3$ 在范数（例如 $\||D_x|^{1/3}d\|$）中的取值，源于库埃特流的增强耗散性质。乘子方法（见下文（1.16）使我们能够恢复一个分数阶耗散项，其系数按 $A^{-1/3}$的尺度变化：

$$\int_{\mathbb{R}^2} k\partial_\xi \mathcal{M}(k,\xi)|\hat{f}|^2 d\xi dk \gtrsim \frac{1}{A^{1/3}}\||D_x|^{1/3}f\|_{L^2}^2.$$

因此， $|D_x|^{1/3}$ 范数表示剪切流在 x方向上所能提供的最大正则性增益，这对于在应对潜在爆破时闭合非线性能量估计至关重要。

注1.6（各向异性范数）。定理1.1 和推论1.2 中包含一个各向异性范数

$$\|f\|_{Y_{m,\epsilon}} = \left\|\langle D_x\rangle^m \langle \frac{1}{D_x}\rangle^\epsilon f\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \quad \frac{1}{3} < \epsilon < \frac{1}{2} < m,$$

其在傅里叶变量中的权重函数定义为

$$\Lambda_{m,\epsilon}(k) = (1+|k|^2)^m (1+|k|^{-2})^\epsilon,$$

该范数在利用毕奥-萨伐尔定律处理速度时发挥着重要作用。例如，参见如下项

$$\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}|l| \left\|\Delta_l^{-1}\omega_l\right\|_{L_y^\infty}\right\|_{L_l^1}$$

在引理 4.4， （4.17）中。

在高频（$|k| \gg 1$）下，$\Lambda_{m,\,\epsilon}(k) \sim |k|^{2m}$，从而在 x方向上施加 m阶正则性；而在低频（$|k| \ll 1$）下，$\Lambda_{m,\,\epsilon}(k) \sim |k|^{-2\epsilon}$，这会惩罚靠近 $k=0$的集中。由于 $2\epsilon < 1$，该奇点是可积的，因此不会排除典型的 L^2 函数。与带权 $(1+|k|^2+|\xi|^2)^s$的各向同性索伯列夫范数不同，$Y_{m,\,\epsilon}$-范数具有各向异性，并且仅作用于 x。特别地，

$$\|f\|_{H_x^s L_y^2} \lesssim \|f\|_{Y_{m,\epsilon}}, \qquad -\epsilon \le s \le m,$$

因此，$Y_{m,\,\epsilon}$ 控制了 x正则性的一个完整区间。典型例子包括$\mathcal{S}$（$\mathbb{R}^2$）、C_c^∞（$\mathbb{R}^2$）、高斯分布函数、具有 $g \in L^2$的 $f = \partial_x g$ 函数，以及零 x平均的 L^2 函数，而非零常数则被排除在外。

注记 1.7（具有任意大能量的初始数据示例）。设 $\phi,\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 为满足以下条件的施瓦茨函数：

- 支集 $\widehat{\phi} \subseteq [1,2]$;
- $\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$.

定义扰动 d_{in} $(u_{\text{in}} = 0)$，它依赖于缩放参数 $\lambda \in (0,1)$、频率参数 $N \gg 1$ 和指数 θ（待确定），如下所示：

$$d_{\text{in}}^{\lambda,N}(x,y) := \lambda^{\theta}\phi(\lambda x)\varphi(y)\cos(Ny)e_1.$$

在 $Y_{m,\epsilon}$ 中的范数估计。 注意，$\phi(\lambda x)$ 的傅里叶变换支撑在 $k \in [\lambda, 2\lambda]$ 中。对于 $\lambda \ll 1$，在此支撑范围内有：

- $\langle k \rangle \approx 1$.
- $\langle k^{-1} \rangle = (1 + |k|^{-2})^{1/2} \approx \lambda^{-1}$.

此外，x 分量的 L^2 缩放为 $\|\phi(\lambda x)\|_{L^2_x} = \lambda^{-1/2}$。

（i）低阶项的估计（L）： 考虑项 $|D_x|^{1/3} d_{\text{in}}$。算子乘子为 $|k|^{1/3} \approx \lambda^{1/3}$。

$$\begin{aligned} L(\lambda) &:= \left\| |D_x|^{1/3} d_{\text{in}} \right\|_{Y_{m,\epsilon}} \\ &\approx \lambda^{\theta} \cdot \underbrace{\lambda^{-\epsilon}}_{\text{weight}} \cdot \underbrace{\lambda^{1/3}}_{\text{derivative}} \cdot \underbrace{\lambda^{-1/2}}_{L^2 \text{ mass}} \cdot \|\varphi \cos(Ny)\|_{L^2_y} \\ &\leq C\lambda^{\theta-\epsilon-1/6}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

（注意：当 N 较大时，$\|\varphi\cos(\bar{N}y)\|_{L^2_y} \approx 1/\sqrt{2}$）。为确保当 $\lambda \to 0$ 时 $L(\lambda)$ 保持较小（或有界），我们要求 $\theta > \epsilon + 1/6$。

（ii）高阶项的估计（H）： 考虑 $\left(\partial_x^2, \partial_y^2\right) |D_x|^{1/3} d_{\text{in}}$。当 N 较大时，∂_y^2项占主导地位（$\partial_y^2 \sim N^2$）。

$$\begin{aligned} H(\lambda, N) &:= \| \left(\partial_x^2, \partial_y^2\right) |D_x|^{1/3} d_{\text{in}} \|_{Y_{m,\epsilon}} \\ &\approx N^2 \left\| |D_x|^{1/3} d_{\text{in}} \right\|_{Y_{m,\epsilon}} \leq CN^2\lambda^{\theta-\epsilon-1/6}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

能量估计。狄利克雷能量由 y-导数项主导：

$$\begin{aligned} E(\lambda, N) &:= \|\nabla d_{\text{in}}\|_{L^2}^2 \geq \|\partial_y d_{\text{in}}\|_{L^2}^2 \\ &= \lambda^{2\theta} \|\phi(\lambda x)\|_{L^2_x}^2 \|\partial_y(\varphi(y)\cos(Ny))\|_{L^2_y}^2 \\ &\approx \lambda^{2\theta} \cdot \lambda^{-1} \cdot \frac{N^2}{2} \geq C\lambda^{2\theta-1}N^2. \end{aligned} \tag{1.10}$$

为达到 $\|\nabla d_{\text{in}}\|_{L^2}^2 > 8\pi$，我们需要 $\lambda^{2\theta-1}N^2 > 16\pi$。

参数选择与验证。 根据定理 1.1，存在有效参数 A，前提是下界 A_1 严格小于小性条件所规定的上界

$A^\delta L \le 1$。

$$\underline{\text{Condition:}\quad C(m,\epsilon,\delta)\left(H(\lambda,N)+1\right)^{\kappa} < \left(L(\lambda)\right)^{-1/\delta},}$$

其中 $\kappa = \max\{\frac{2}{\delta-1}, 24\}$。由（1.8）和（1.9）可知

$$C(m,\epsilon,\delta)(N^2\lambda^{\theta-\epsilon-1/6})^{\kappa} < (\lambda^{\theta-\epsilon-1/6})^{-1/\delta}. \tag{1.11}$$

设 $\mu = \theta-\epsilon-1/6$。我们选取 θ，使得 $\mu>0$ 为一个小常数。该条件变为:

$$N^{2\kappa}\lambda^{\kappa\mu} \ll \lambda^{-\mu/\delta} \implies N \ll \lambda^{-\frac{\mu}{2}(\frac{1}{\delta}+\kappa)}.$$

由于右端的指数为负（$1/\lambda$的幂），当 $\lambda\to 0$时， N 所允许的上界增长至无穷。因此，对任意充分小的固定 λ，存在一个较大的范围N 满足间隙条件。类似地，能量按 $E\approx\lambda^{2\theta-1}N^2$标度。由于 N 可以取得任意大（在由 λ所定义的间隙限制内），我们可以选取足够大的 N，使得:

$$\lambda^{2\theta-1}N^2 > 16\pi,$$

这是合理的，因为成立

$$\lambda^{-\theta+\frac{1}{2}} \ll \lambda^{-4} \ll \lambda^{-\frac{\mu}{2}(\frac{1}{\delta}+\kappa)}$$

对于小的 λ通过选取适当的 θ。例如，取 $\theta=1$，则 $\mu=\frac{5}{6}-\epsilon>\frac{1}{3}$其中 $\frac{1}{3}<\epsilon<\frac{1}{2}$，且$-\frac{1}{2}>-\frac{\mu}{2}(\frac{1}{\delta}+\kappa)$ 显然成立。因此，可以选取 $N=\lambda^{-3}$满足（1.11），并由（1.10）

$$E(\lambda,N) := \|\nabla d_{\text{in}}\|_{L^2}^2 \ge \|\partial_y d_{\text{in}}\|_{L^2}^2 \ge C\lambda^{-5},$$

其趋于 ∞，当 $\lambda\to 0$.

1.2. **稳定机制**。 上述结果表明，库埃特流在稳定性理论中发挥着重要作用。事实上，自瑞利[瑞利79], 开尔文 [开尔文87], 奥尔 [奥尔07], 和索末菲 [索末菲08]等人的开创性研究以来，由纳维–斯托克斯方程支配的库埃特流的稳定性一直是流体力学中的重要课题。考虑库埃特流周围二维线性化纳维–斯托克斯方程的涡量形式:

$$\begin{cases} \partial_t\omega + y\partial_x\omega - \nu\Delta\omega = 0, \\ \omega|_{t=0} = \omega_{\text{in}}. \end{cases}$$

经傅里叶变换，开尔文解为

$$\hat{\omega}(t,k,\xi) = \hat{\omega}_{\text{in}}(k,\xi+kt)e^{-\nu\int_0^t |k|^2+|\xi+k(t-s)|^2 ds},$$

它满足以下两个线性估计:

$$|\hat{\omega}(t,k,\xi)| \le C\,|\hat{\omega}_{\text{in}}(k,\xi+kt)|\,e^{-c\nu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}, \tag{1.12}$$

$$|\hat{\phi_0}(t,k,\xi)| \le C\langle t\rangle^{-2}\frac{1+|k|^2+|\xi+kt|^2}{|k|^4}\,|\hat{\omega}_{\mathrm{in}}(k,\xi+kt)|\,e^{-c\nu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}, \tag{1.13}$$

对于某个 $c>0$，其中 $\phi_0=\Delta^{-1}\omega$ 是流函数。

1.2.1. 增强耗散。不等式 (1.12) 给出了增强耗散估计。其对应的时间尺度为 $O\left(\nu^{-1/3}\right)$，对于较小的 ν，该时间尺度显著短于标准热耗散时间尺度 $O(\nu^{-1})$，这意味着衰减速度快得多。增强耗散现象已在物理学文献中得到广泛观察和研究（例如，参见 [Tho88, RY83, BL94, LB01]）。近年来，它在纳维–斯托克斯方程的二维库埃特流稳定性研究中受到广泛关注。例如，若涡量扰动属于 Gevrey-s，且 $s<2$，Bedrossian–Masmoudi–Vicol [BMV16] 证明，在周期区域上，当 $\gamma=0$ 时，解是稳定的；更多进展可见 [BVW18, CLWZ20, MZ22, WZ23]。当 $\Omega=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 时，Arbon–Bedrossian [AB25] 和 Li–Liu–Zhao [LLZ26] 得到了几乎尖锐的稳定性阈值。更多参考文献请参见 [DWZ21, WZ21, CWZ24, CWY25b] 及其中的参考文献。此外，增强耗散在抑制二维 Keller–Segel（–纳维–斯托克斯）系统中的爆破方面也发挥着关键作用 [KX16, BH17, ZZZ21, CW24, LXX25]。关于高维或超临界情形的最新进展，请参见 [DSW25, CWW+25, CWWW25, CWYZ25] 及其中的参考文献。

1.2.2. 无粘阻尼。 不等式（1.13）表示所谓的无粘阻尼估计，这归因于剪切流引发的涡量混合。这一现象类似于等离子体物理中的朗道阻尼，最早由 Landau 发现 [Lan46]。对于一般的剪切流，建立（非）线性无粘阻尼仍是一项颇具挑战的问题。然而，在一系列研究中， [WZZ18、WZZ19、WZZ20], Wei–Zhang–Zhao 为单调流及某些非单调流建立了线性无粘阻尼理论，其中包括 Poiseuille 流和 Kolmogorov流。关于近期的一些进展，请读者参阅 [MV11、BM15、Zil16、BCZV19、IJ20、Jia20] 及其中的参考文献。

1.3. 证明中的关键思想。 主定理的证明依赖于一个自举论证，其中涉及精心构造的时空范数。为了闭合能量估计，尤其是处理纳维–斯托克斯方程与指向矢场方程之间的强耦合，我们引入了若干技术创新。

1.3.1. 乘子的构造。 第一个关键思想是构造时变傅里叶乘子，以捕捉库埃特流的稳定化效应。受关于剪切流稳定性的研究启发 [BGM17, DWZ21, WZ23], 我们引入两个自伴傅里叶乘子，作为“幽灵权重”提供额外的耗散性质。

对于 $k,\xi\in\mathbb{R}$ 以及剪切振幅 $A>0$，我们定义：

$$\mathcal{M}_1(k,\xi):=\arctan\left(A^{-\frac{1}{3}}|k|^{-\frac{1}{3}}\operatorname{sgn}(k)\xi\right)+\frac{\pi}{2},$$
$$\mathcal{M}_2(k,\xi):=\arctan\left(\frac{\xi}{k}\right)+\frac{\pi}{2}.$$

总乘 子定义为 $\mathcal{M}:=\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2+1$，满足有界性条件

$$1\le\mathcal{M}\le 1+2\pi. \tag{1.14}$$

- $\mathcal{M}_1$ 是**增强耗散乘子**。它刻画了增强耗散时间尺度 $O(\nu^{-1/3})$，该时间尺度显著短于标准热耗散时间尺度。这对于抑制指向矢场的爆破至关重要。

- $\mathcal{M}_2$ 是**无黏阻尼乘子**。它追踪剪切流诱导的涡量混合，类似于朗道阻尼。

这些乘子的一个关键特征是它们与输运算子 $\partial_t+y\partial_x$ 的交换子：

$$2\Re\Big((\partial_t+y\partial_x)f\mid\mathcal{M}_if\Big)=\frac{d}{dt}\left\|\sqrt{\mathcal{M}_i}f\right\|_{L^2}^2+\int_{\mathbb{R}^2}k\partial_\xi\mathcal{M}_i(k,\xi)|\hat{f}|^2dkd\xi, \tag{1.15}$$

对于足够光滑的函数 $f=f(t,\ x,\ y)$ 定义在 $(0,\ +\infty)$ 上 $\times\mathbb{R}^2$。如 [CWY25a和LLZ26],所示，我们有如下强制性：

$$\int_{\mathbb{R}^2}k\partial_\xi\mathcal{M}(k,\xi)|\hat{f}|^2dkd\xi\ge\frac{1}{4A^{\frac{1}{3}}}\left\||D_x|^{\frac{1}{3}}f\right\|_{L^2}^2-\frac{1}{2A}\left\|\partial_yf\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_x\nabla\Delta^{-1}f\right\|_{L^2}^2. \tag{1.16}$$

这使我们能够恢复一个符号为正的分数阶导数项 $\left\||D_x|^{1/3}f\right\|_{L^2}^2$，这对于在自举论证中控制高频相互作用至关重要。

1.3.2. 基于频率的两层分解。为处理复杂的非线性项，特别是指向矢方程中的几何约束项 $|\nabla d|^2d$ 以及流体方程中的应力张量 $\nabla\cdot(\nabla d\odot\nabla d$，这些项涉及频率空间中的卷积，难以用标准抛物乘积进行估计，因此我们引入如下基于频率的两层分解。受 [LLZ26], 的启发，对于固定频率 k 和卷积变量 l，我们根据频率的相对大小将积分区域划分为三个不同的部分：

- **区域I（近共振相互作用）：** $\mathcal{R}_{\text{res}}(k,\ l):=\mathbb{R}\times\{l:\ \frac{1}{2}|k-l|\le|k|\le 2|k-l|\}$。在此区域内，相互作用的频率相近，即 $|k|\sim|k-l|$。
- **区域II（高低频相互作用）：** $\mathcal{R}_{\text{HL}}(k,\ l):=\mathbb{R}\times\{l:\ |k|>2|k-l|\}$。在这里，输出频率 k 远大于差值 $k-l$，这意味着 $|k|\sim|l|$。
- **区域 III（低高频相互作用）：** $\mathcal{R}_{\text{LH}}(k,\ l):=\mathbb{R}\times\{l:\ 2|k|<|k-l|\}$。这里，输出频率相较于输入频率较小，这意味着 $|k-l|\sim|l|$。

一个新的观察如下**基于频率的双层分解方法**。考虑区域 I 中类似

$$\int_{\mathcal{R}_{\rm res}}\left(\int_{\mathbb{R}}\cdots d\eta\right)dkdl=\int_{\mathcal{R}_{\rm res}}\left(\int_{\{\eta:\,\frac{1}{2}|k-l-\eta|\le|k-l|\le 2|k-l-\eta|\}}\cdots d\eta\right)dkdl$$
$$+\int_{\mathcal{R}_{\rm res}}\left(\int_{\{\eta:\,|k-l|>2|k-l-\eta|\}}\cdots d\eta\right)dkdl+\int_{\mathcal{R}_{\rm res}}\left(\int_{\{\eta:\,2|k-l|<|k-l-\eta|\}}\cdots d\eta\right)dkdl \tag{1.17}$$

这使我们能够有效地平衡权重$\langle k\rangle^m\langle 1/k\rangle^\epsilon$ 以及不同频率模态上的导数损失。例如，在引理3.2的证明中，利用傅里叶变换，我们得到

$$\begin{aligned}&\left|\Re\left(|D_x|^{\frac13}\left(|\partial_x d|^2 d\right)\middle|\,\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac13}|D_x|^{\frac23}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}|D_x|^{\frac13}d\right)\right|\\ \lesssim&\int_{\mathbb{R}^3}e^{2aA^{-\frac13}|k|^{\frac23}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac23}\\ &\qquad\times\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)d_k(y)\cdot d_l(y)\left(k-l-\eta\right)\eta d_{k-l-\eta}(y)\cdot d_\eta(y)dy\right|dkdld\eta\end{aligned}$$

由（2.6）及推论2.6（$\alpha=\beta=\frac13$），$\mathcal{R}_{\rm res}$（k，l）右端的项受控于

$$\begin{aligned}&C\left\|e^{aA^{-\frac13}|k|^{\frac23}t}\langle k\rangle^m\langle\frac{1}{k}\rangle^\epsilon|k|^{\frac23}\|d_k\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_k}\left\|e^{aA^{-\frac13}|l|^{\frac23}t}\|d_l\|_{L^\infty_y}\right\|_{L^1_l}\\ &\quad\times\left\|e^{aA^{-\frac13}|k-l|^{\frac23}t}\langle k-l\rangle^m\langle\frac{1}{k-l}\rangle^\epsilon\int_{\mathbb{R}}|k-l-\eta||\eta|\|d_{k-l-\eta}\|_{L^2_y}\|d_\eta\|_{L^\infty_y}d\eta\right\|_{L^2_{k-l}},\end{aligned}$$

其中，右端最后一项可利用（1.17）中的思想再次估计（更多细节见引理3.4）。我们指出，处理多个函数卷积的方法有望应用于更多更一般的物理模型，例如带有Leslie系数的一般Ericksen–Leslie系统、Landau–Lifshitz–Gilbert方程等。

1.3.3. 能量传递机制与爆破抑制。通过第3–6节中导出的能量估计，我们证明，由项 $A^{1/6}\left\||D_x|^{1/3}d\right\|$量化的增强耗散效应在 A 充分大时主导非线性聚焦效应。具体而言，强剪切流将指向矢场 d 沿 x方向迅速混合，从而把能量传递到耗散高效的高频。该机制阻止了形成奇点所需的能量集中，进而在条件 $A\gg 1$下将局部解延拓为整体解。

最后一个关键思想是利用较大的剪切参数 A 来抑制有限时间爆破。流体与晶体之间的耦合会诱导出复杂的能量传递机制，我们通过如下估计层级对其进行量化：

• **水平正则性（命题 3.1）：** 该命题控制水平导数 $|D_x|^{1/3}d$。增强耗散提供了关于 A 的强衰减因子。示意如下：

$$\left\||D_x|^{1/3}d\right\|_X^2 \lesssim \|\text{data}\|^2 + A^{-1/2}\|\omega\|_X \left\||D_x|^{1/3}d\right\|_X + A^{-1/6}\|\text{nonlinear terms}\|,$$

其中，因子 $A^{-1/6}$ 对于吸收非线性增长至关重要。

•**混合正则性（命题 4.1）：** 该命题处理混合导数$\nabla^2|D_x|^{1/3}d$。由于剪切输运项 $y\partial_x$，估计垂直导数时通常会出现 A阶的导数损失。我们得到：

$$\left\|\partial_y|D_x|^{1/3}\nabla d\right\|_X^2 \lesssim \|\text{data}\|^2 + A\left\||D_x|^{1/3}d\right\|_X \left\|\partial_y|D_x|^{1/3}\nabla d\right\|_X + \dots,$$

从右数第二项**是最棘手的一项**。尽管出现了一个因子A，但它乘以低阶范数 $\left\||D_x|^{1/3}d\right\|_X$，而该范数很小（由命题 3.1控制）。尽管存在剪切诱导的增长，这仍使我们能够闭合估计。

• **流体涡量（命题 5.1）：** 流体涡量 ω 由 Leslie 应力驱动$\nabla\cdot(\nabla d\odot\nabla d)$。估计形式如下：

$$\|\omega\|_X^2 \lesssim \|\text{data}\|^2 + A^{-1/2}\|\omega\|_X^3 + A^{-1/3}\|\omega\|_X\left(\left\||D_x|^{1/3}\nabla d\right\|_X^2 + \left\||D_x|^{1/3}\left(\partial_x^2,\partial_y^2\right)d\right\|_X^2\right),$$

这表明，指向矢场对流体的反馈受到 $A^{-1/2}$ or$A^{-1/3}$ 的抑制。

该系统呈现循环依赖：指向矢场的估计依赖于速度场 $\|\omega\|_X$ 的小量性，而涡量估计（命题 5.1）则依赖于对指向矢场应力 $\left\|\nabla^2|D_x|^{1/3}d\right\|_X$ 的控制。通过选取足够大的 A，非线性项和耦合项中的衰减因子（$A^{-1/6}$，$A^{-1/2}$）将压过不稳定因子（例如线性增长项 A），从而完成命题 2.8 中的自举论证。

1.4. 符号与概要。 下面列出本文中使用的一些符号。**符号**：

• 对于定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的函数 $f(x,\ y)$，其第 k 阶水平傅里叶模态可定义为

$$f_k(y) = \mathcal{F}_{x\to k}(f)(k,y) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{e}^{-ikx}dx, \tag{1.18}$$

此外，记

$$\hat{f}_k(\xi) = \hat{f}(k,\xi) = \mathcal{F}_{y\to\xi}(f_k)(y) = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{e}^{-i(kx+\xi y)}dxdy.$$

对于另一个给定的函数 $g(x,y)$，定义在 $\mathbb{R}^2$ 上，注意

$$\mathcal{F}_{x\to k}(f\cdot g)(k,y) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} f_k(y) * g_k(y).$$

• 表示一个与 A, t 和初始数据无关的正定常数，并且它可以在不同的行中取不同的值。 $B \lesssim D$ 表示存在一个绝对常数 $C > 0$，使得$B \leq CD$。 $B \sim D$ 表示存在一个常数 $C > 0$，使得 $C^{-1}B \leq D \leq CB$.

•空间范数 $\|f\|_{L^p}$定义为$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} = (\int_{\mathbb{R}^2} |f|^p dxdy)^{1/p}$。对于 $t \geq 0$，时空范数 $\|f\|_{L^qL^p}$定义为 $\|f\|_{L^qL^p} = \left\| \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \right\|_{L^q(0,t)}$。为简便起见，记作$\|(f,g)\|_{L^p} = \sqrt{\|f\|_{L^p}^2 + \|g\|_{L^p}^2}$。

• 将 $(f|g)$ 记为 f 与 g的 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 内积。

• 记 $\nabla_k := (k, \partial_y)$ 和 $\Delta_k := \partial_y^2 - k^2$。

• 我们引入两个符号，使证明更加简洁。

$$\partial_{i,ph} = \begin{cases} \partial_x, & i = 1, \\ \partial_y, & i = 2, \end{cases} \qquad \partial_{i,fr} = \begin{cases} \hat{\partial}_x, & i = 1, \\ \partial_y, & i = 2, \end{cases} \tag{1.19}$$

其中，$\hat{}\,\partial_x$ 表示 ∂_x 在傅里叶侧的形式（具体而言，在不同情况下，它可以是 k、 $k-l$、$k-l-\eta$ 等，因情况而异）。

结构安排：本文其余部分安排如下。第 2 节介绍一些预备知识，并在命题 2.8 的基础上给出主定理的证明。第 3 节推导 $|D_x|^{1/3}d$ 的能量估计（命题 3.1），其中包括对弹性非线性项和非线性能量的估计。第 4 节专门讨论高阶导数项的能量估计（∂_x^2, ∂_y^2）$|D_x|^{1/3}d$（命题 4.1）。第 5 节建立涡量 ω 的能量估计（命题 5.1）。最后，第 6 节完成命题 2.8 的证明。

2. Preliminaries and proof of the main theorem

本节将介绍一些有用的引理，并借助一个重要命题完成主定理的证明。

2.1. **时空估计**。

设 u 由（1.3）$_2$，且 f 满足

$$\begin{cases} \partial_t f + y\partial_x f - \frac{1}{A}\Delta f = -\frac{1}{A}u \cdot \nabla f + g, & (t,x,y) \in (0,T) \times \mathbb{R}^2, \\ f|_{t=0} = f_{\text{in}}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 g 表示一个附加项。我们回顾（2.1）的时空估计 .

命题 2.1 (命题 2.3，见 [CWY25a])。 设 u 由 (1.3)$_2$ 和 $0 < a < 1\,16(1+2\pi)$确定。那么，对于 ~~$0 < \epsilon <$~~ $\frac{1}{2} < m$ 和 $0 \leq t \leq T$,

$$\|f\|_{X_{a,m,\epsilon}}^2 \lesssim \|f_{\text{in}}\|_{L^2}^2 + \int_0^t \left| \Re \left(g \left| \mathcal{M} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t} \langle D_x \rangle^{2m} \langle \frac{1}{D_x} \rangle^{2\epsilon} f \right. \right) \right| dt + \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}} \|\omega\|_{X_{a,m,\epsilon}} \|f\|_{X_{a,m,\epsilon}}^2.$$

特别地，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{A}\int_0^t \left|\Re\left(u\cdot\nabla f\,\middle|\,\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}f\right)\right|dt\\
\lesssim&\frac{1}{A}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)f_k(y)\partial_y\Delta_l^{-1}\omega_l(y)(k-l)f_{k-l}(y)dy\right|dkdldt\\
&+\frac{1}{A}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)f_k(y)l\Delta_l^{-1}\omega_l(y)\partial_y f_{k-l}(y)dy\right|dkdldt\\
\lesssim&\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}\|\omega\|_{X_{a,m,\epsilon}}\|f\|^2_{X_{a,m,\epsilon}},
\end{aligned}\tag{2.2}$$

其中 $f_k(y)$ 以及 $X_{a,\ m,\ \epsilon}$ 分别定义于 (1.18) 和 (1.5)中。

Nex对于形如 $(|D_x|^{1/3}u)\cdot\nabla f$ 的非线性项，我们给出直接估计 .

引理 2.2 ([CWY25a]中的引理 A.3。 设 u 由 (1.3)$_2$ 和 $0<a<\frac{1}{16(1+2\pi)}$确定。对于 $0<\epsilon<\frac{1}{2}<m$、 $0\le t\le T$ 以及某个足够光滑的 f，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{A}\int_0^t \left|\Re\left(|D_x|^{\frac{1}{3}}u\cdot\nabla f\,\middle|\,\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}|D_x|^{\frac{1}{3}}f\right)\right|dt\\
\lesssim&\frac{1}{A}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{1}{3}}|l|^{\frac{1}{3}}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)f_k(y)\partial_y\Delta_l^{-1}\omega_l(y)(k-l)f_{k-l}(y)dy\right|dkdldt\\
&+\frac{1}{A}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{1}{3}}|l|^{\frac{1}{3}}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)f_k(y)l\Delta_l^{-1}\omega_l(y)\partial_y f_{k-l}(y)dy\right|dkdldt\\
\lesssim&\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}\|\omega\|_{X_{a,m,\epsilon}}\left\||D_x|^{\frac{1}{3}}f\right\|^2_{X_{a,m,\epsilon}}.
\end{aligned}\tag{2.3}$$

2.2. L^∞ **嵌入。** 以下是一系列关于 L^∞ 嵌入的引理，后文将频繁用到。

引理 2.3. 对于任意 $0<\delta_1<\delta_2$ 以及某个足够光滑且在无穷远处消失的函数 $f=f(x,y)$，存在一个依赖于 δ_1、 δ_2 的正定常数 C，使得

$$\|f\|_{L^\infty}\le C\left\||D_x|^{\delta_1}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{\delta_2}\nabla f\right\|_{L^2},$$

where $\left\||D_x|^{\delta_1}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{\delta_2}\nabla f\right\|^2_{L^2}:=\left\||k|^{\delta_1}\langle\frac{1}{k}\rangle^{\delta_2}(k,\xi)\hat{f}\right\|^2_{L^2}$.

证明。由傅里叶反演公式和普朗歇尔恒等式可得

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^\infty}&\le\int_{\mathbb{R}^2}\left|\widehat{f}_k(\xi)\right|dkd\xi\le\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{\sqrt{k^2+\xi^2}}\left|(k,\xi)\widehat{f}_k(\xi)\right|dkd\xi\\
&\lesssim\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{|k|^{\frac{1}{2}}}\left\|(k,\xi)\widehat{f}_k(\xi)\right\|_{L^2_\xi}dk\lesssim\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{|k|^{\frac{1}{2}+\delta_1}\langle\frac{1}{k}\rangle^{\delta_2}}\left\||k|^{\delta_1}\langle\frac{1}{k}\rangle^{\delta_2}(k,\xi)\widehat{f}_k(\xi)\right\|_{L^2_\xi}dk\\
&\lesssim\left\||D_x|^{\delta_1}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{\delta_2}\nabla f\right\|_{L^2},
\end{aligned}$$

其中我们使用了

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|k|^{1+2\delta_1}\langle \frac{1}{k}\rangle^{2\delta_2}} dk \lesssim 1$$

由于 $0 < \delta_1 < \delta_2$。

□

推论 2.4. 设 $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ 由 (1.3)$_2$确定。则存在正定常数 C依赖于 ϵ 和 m，使得

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\|\omega\|_{Y_{m,\epsilon}}, \quad 0 < \epsilon \leq 2m,$$
$$\|\nabla d\|_{L^\infty} \leq C \left\| \left(\partial_x^2, \partial_y^2\right) |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{Y_{m,\epsilon}}, \quad \frac{1}{3} < \epsilon \leq 2m,$$

其中$Y_{m,\ \epsilon}$ 在 (1.4)中定义。

证明。 由引理 2.3 和 $\Delta u = \nabla^\perp \omega$，我们有

$$\|u\|_{L^\infty} \lesssim \left\| |D_x|^{\frac{\epsilon}{2}} \langle \frac{1}{D_x} \rangle^{\epsilon} \nabla u \right\|_{L^2} \lesssim \|\omega\|_{Y_{m,\epsilon}},$$

在$0 < \frac{\epsilon}{2} \leq m$的条件下。此外，若 $\frac{1}{6} < \frac{\epsilon}{2} \leq m$，则由引理 2.3 可得

$$\begin{aligned} \|\partial_x d\|_{L^\infty} &\lesssim \left\| |D_x|^{\frac{\epsilon}{2}-\frac{1}{6}} \langle \frac{1}{D_x} \rangle^{\epsilon-\frac{1}{3}} \partial_x \nabla d \right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\| \partial_x^2 |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{Y_{m,\epsilon}} + \left\| \partial_x \partial_y |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{Y_{m,\epsilon}} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \|\partial_y d\|_{L^\infty} &\lesssim \left\| |D_x|^{\frac{\epsilon}{2}-\frac{1}{6}} \langle \frac{1}{D_x} \rangle^{\epsilon-\frac{1}{3}} \nabla \partial_y d \right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\| \partial_y^2 |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{Y_{m,\epsilon}} + \left\| \partial_x \partial_y |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{Y_{m,\epsilon}}. \end{aligned}$$

□

引理 2.5 （例如，参见 [CWY25a]中的引理 A.2）。对于 $f_l = f_l(y) \in H^1(\mathbb{R})$ （定义见（1.18））， 成立：

$$\|f_l(\cdot)\|_{L^\infty} \leq \|f_l(\cdot)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\partial_y f_l(\cdot)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \tag{2.4}$$
$$\|f_l(\cdot)\|_{L^\infty} \leq |l|^{-\frac{1}{2}} \|\nabla_l f_l(\cdot)\|_{L^2}. \tag{2.5}$$

利用（2.4）， 立即得到以下推论。

推论 2.6. 对于某个充分光滑的函数 $f_l = f_l(y)$， α、 $\beta \geq 0$ 和 $-m < \frac{\alpha+\beta-1}{2} < \epsilon$，我们有——

$$\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t} \|f_l\|_{L_y^\infty} \right\|_{L_l^1} \leq \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t} \langle l \rangle^m \langle \frac{1}{l} \rangle^{\epsilon} \right\|_{L_l^2} \left\| |l|^{\alpha} f_l \|_{L_y^2}^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_l^2} \left\| |l|^{\beta} \partial_y f_l \|_{L_y^2}^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_l^2} \left\| |l|^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} \langle l \rangle^{-m} \langle \frac{1}{l} \rangle^{-\epsilon} \right\|_{L_l^2}$$

$$\lesssim \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\alpha} f \right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\beta}\partial_y f \right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}.$$

2.3. **不同频率区域中的不等式。** 回顾上一节 $\mathcal{R}_{\mathrm{res}}(k,l)$、 $\mathcal{R}_{\mathrm{HL}}(k,l)$ 和 $\mathcal{R}_{\mathrm{LH}}(k,l)$ 的定义，并且我们有以下不同频率之间的不等式估计。1.3.2,

引理 2.7 （频率区域中的估计）。 下列不等式在相应区域中成立:

（1） 在 $R_{res}(k,l)$ ： 对任意 s、 s_1、 $s_2 \geq 0$,

$$|l|^s \lesssim |k|^s \sim |k-l|^s \quad and \quad \langle k\rangle^{s_1}\langle\frac{1}{k}\rangle^{s_2} \lesssim \langle k-l\rangle^{s_1}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{s_2}; \tag{2.6}$$

（2） 在 $R_{HL}(k,l)$ ： 对任意 s、 s_1、 $s_2 \geq 0$,

$$|k-l|^s \lesssim |k|^s \sim |l|^s \quad and \quad \langle k\rangle^{s_1}\langle\frac{1}{k}\rangle^{s_2} \lesssim \langle l\rangle^{s_1}\langle\frac{1}{l}\rangle^{s_2}; \tag{2.7}$$

（3） 在 $R_{LH}(k,l)$ ： 对任意 s_1、 s_2、 $s_3 \geq 0$ 以及 $s = s_1 + s_2$,

$$|k|^s \lesssim |k-l|^s \sim |l|^s, \quad \langle k\rangle^{2s} \lesssim \langle l\rangle^s\langle k-l\rangle^s, \tag{2.8}$$

$$1 \leq \langle\frac{1}{k-l}\rangle^s|k-l|^s \lesssim \langle\frac{1}{l}\rangle^{s_3}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{s_3}\left(1+\langle\frac{1}{k}\rangle^{s-2s_3}\right)|k-l|^{s_1}|l|^{s_2}. \tag{2.9}$$

证明。 只需验证（2.9）的不等式，其余可由直接计算得到。事实上，只需证明

$$\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{s-2s_3} \lesssim 1+\langle\frac{1}{k}\rangle^{s-2s_3}$$

由于 (2.8)。考虑以下两种情况即可验证这一事实： $s-2s_3$ 大于零或$s-2s_3$ 小于或等于零。□

2.4. **命题 2.8 下主定理的证明。** 本文采用标准的自举论证来证明命题 2.8下的主定理。

定义 T为满足以下假设对所有 $0 \leq t \leq T$ 均成立的最大区间 $[0,T]$ 的端点:

$$E(t) := A^{\delta}\||D_x|^{\frac{1}{3}}d\|_{X_{a,m,\epsilon}} + \left\|\left(\partial_x^2,\partial_y^2\right)|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}} + \|\omega\|_{X_{a,m,\epsilon}} \leq 2K, \tag{2.10}$$

其中 a， m， ϵ， $\delta \geq 0$ 以及 $K \geq 1$ 将在证明中确定。我们将证明以下命题，以改进假设 (2.10)。

命题 2.8。 在定理 *1.1*的相同假设下，存在一个正定常数A_1 满足

$$\bar{A}_1 = C(m,\epsilon,\delta)\left(\left\|\left(\partial_x^2,\partial_y^2\right)|D_x|^{\frac{1}{3}}d_{\mathrm{in}}\right\|_{Y_{m,\epsilon}} + \|\omega_{\mathrm{in}}\|_{Y_{m,\epsilon}} + 1\right)^{\max\{\frac{2}{\delta-1},24\}}$$

使得若 $A > A_1$ 且 (1.6) 成立，则

$$E(t) \le K \quad for\ all\ 0 < t < T.$$

定理 1.1 的证明。 命题 2.8 结合系统（ [Hon11], [HLX14]或 [HLW14]）的局部适定性（参见例如 1.3）可推出 $T = +\infty$，因此利用推论2.4 即完成证明。 □

3. $|D_x|^{1/3}d$的能量估计

本节旨在证明 $|D_x|^{1/3}d$的主要能量估计。论证基于一组针对加权傅里叶乘子的预备不等式，以及这些不等式在非线性项中的应用。主要命题如下。

命题 3.1。 假设 $0 \le t \le T$。对于$0 < a < \frac{1}{16(1+2\pi)}$ 且 $\frac{1}{6} < \epsilon < \frac{1}{2} < m$，

$$\begin{aligned}\left\||D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^2_{X_{a,m,\epsilon}} \le C\left\||D_x|^{\frac{1}{3}}d_{\text{in}}\right\|^2_{Y_{m,\epsilon}} + \frac{C}{A^{\frac{1}{2}}}\|\omega\|_{X_{a,m,\epsilon}}\left\||D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^2_{X_{a,m,\epsilon}} \\ + \frac{C}{A^{\frac{1}{3}}}\left\||D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^2_{X_{a,m,\epsilon}}\left\|\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^2_{X_{a,m,\epsilon}} \\ + \frac{C}{A^{\frac{1}{6}}}\left\||D_x|^{\frac{1}{3}}d^1\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}\left\||D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}\left\|\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}.\end{aligned}$$

在证明命题3.1之前，我们先建立两个关于非线性项的引理。

引理 3.2. 对于 $0 < a < \frac{1}{16(1+2\pi)}$和 $\frac{1}{6} < \epsilon < \frac{1}{2} < m$，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{A}\int_0^t\left|\Re\left(|D_x|^{\frac{1}{3}}\left(|\nabla d|^2 d\right)\left|\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right.\right)\right|dt \\ \lesssim\ &\frac{1}{A^{\frac{1}{3}}}\left\||D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^2_{X_{a,m,\epsilon}}\left\|\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^2_{X_{a,m,\epsilon}}.\end{aligned}$$

引理 3.3. 对于 $0 < a < \frac{1}{16(1+2\pi)}$和 $0 < \epsilon < \frac{1}{2} < m$，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{A}\int_0^t\left|\Re\left(|D_x|^{\frac{1}{3}}\left(|\nabla d|^2 e_1\right)\left|\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right.\right)\right|dt \\ \lesssim\ &\frac{1}{A^{\frac{1}{6}}}\left\||D_x|^{\frac{1}{3}}d^1\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}\left\||D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}\left\|\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}.\end{aligned}$$

有了引理 3.2和 3.3 ，我们现在证明命题 3.1。

命题的证明 3.1。 由（1.3）可知， $|D_x|^{\frac{1}{3}}d$满足

$$\partial_t|D_x|^{\frac{1}{3}}d + y\partial_x|D_x|^{\frac{1}{3}}d - \frac{1}{A}\Delta|D_x|^{\frac{1}{3}}d = -\frac{1}{A}|D_x|^{\frac{1}{3}}(u\cdot\nabla d) + \frac{1}{A}|D_x|^{\frac{1}{3}}\left(|\nabla d|^2(d+e_1)\right). \tag{3.1}$$

将（3.1）乘以 $2\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}|D_x|^{\frac{1}{3}}d$，并利用（1.14）–（1.16），当 $0<a<\frac{1}{16(1+2\pi)}$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\|\sqrt{\mathcal{M}}e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^2_{Y_{m,\epsilon}}+\frac{1}{A}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^2_{Y_{m,\epsilon}}\\
&\quad+\frac{1}{16A^{\frac{1}{3}}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{2}{3}}d\right\|^2_{Y_{m,\epsilon}}+\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\partial_x\nabla\Delta^{-1}|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^2_{Y_{m,\epsilon}}\\
&\le\frac{2}{A}\left|\Re\left(|D_x|^{\frac{1}{3}}(u\cdot\nabla d)\,\middle|\,\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right)\right|\\
&\quad+\frac{2}{A}\left|\Re\left(|D_x|^{\frac{1}{3}}\left(|\nabla d|^2(d+e_1)\right)\,\middle|\,\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right)\right|.
\end{aligned}\tag{3.2}$$

这里我们利用傅里叶空间中的一个关键估计：

$$\begin{aligned}
(fg\,|\,|D_x|^{\frac{2}{3}}h)&=\left(|k|^{\frac{1}{3}}\widehat{fg}\,\middle|\,|k|^{\frac{1}{3}}\hat{h}\right)\\
&\lesssim\int_{\mathbb{R}^2}|k|^{\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{1}{3}}|\hat{f}(k-l)\hat{g}(l)\hat{h}(k)|dkdl\\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^2}|k|^{\frac{1}{3}}|l|^{\frac{1}{3}}|\hat{f}(k-l)\hat{g}(l)\hat{h}(k)|dkdl.
\end{aligned}$$

对于适当的函数 f、g 和 h，该不等式成立。将 $|D_x|^{\frac{1}{3}}(u\cdot\nabla d)$ 形式上分解为两个相应的项后，在对 (3.1) 进行L^2能量估计时，我们可以通过 $|D_x|^{\frac{1}{3}}u\cdot\nabla d$ 和 $u\cdot\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d$ 对其进行控制。接着，将命题 2.1 ($f=|D_x|^{\frac{1}{3}}d$) 中的 (2.2) 应用于 (3.2) 中的项$u\cdot\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d$，并将引理 2.2 ($f=d$) 中的 (2.3) 应用于项 $|D_x|^{\frac{1}{3}}u\cdot\nabla d$，可得

$$\begin{aligned}
&\left\||D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^2_{X_{a,m,\epsilon}}\\
&\lesssim\left\||D_x|^{\frac{1}{3}}d_{\text{in}}\right\|^2_{Y_{m,\epsilon}}+\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}\|\omega\|_{X_{a,m,\epsilon}}\left\||D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^2_{X_{a,m,\epsilon}}\\
&\quad+\frac{1}{A}\int_0^t\left|\Re\left(|D_x|^{\frac{1}{3}}\left(|\nabla d|^2d\right)\,\middle|\,\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right)\right|dt\\
&\quad+\frac{1}{A}\int_0^t\left|\Re\left(|D_x|^{\frac{1}{3}}\left(|\nabla d|^2e_1\right)\,\middle|\,\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right)\right|dt.
\end{aligned}$$

因此，回顾引理 3.2 和 3.3，证明完成。 □

剩余的论证分为两个小节。首先，我们建立一个一般性引理，为估计非线性项提供基本工具。其次，我们利用这些结果证明引理中给出的非线性估计3.2 和3.3。

3.1. **弹性非线性项的估计**。我们首先给出一个通用估计，它将在非线性分析中反复使用。回顾 (1.18)，可得：

引理 3.4。令 $i \in \{0,1\}$, $0 < a < \frac{1}{16}$ 和 $\frac{1-i}{6} < \epsilon < \frac{1}{2} < m$。对于某些光滑函数$f = f(x,y)$和 $g = g(x,y)$，有

$$
\begin{aligned}
I &:= \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^m \langle \frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}|k-l|^{\frac{i}{3}} \int_{\mathbb{R}} \|f_{k-l-\eta}(y)\|_{L^2_y}\|g_\eta(y)\|_{L^\infty_y} d\eta \right\|_{L^2_{k-l}} \\
&\lesssim \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}} f \right\|_{Y_{m,\epsilon}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{i+1}{3}} g \right\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{m,\epsilon}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\partial_y|D_x|^{\frac{1}{3}} g \right\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{m,\epsilon}}. \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

这一结果将在下一小节及下一节中频繁使用，用以控制能量估计中出现的非线性项。为完成本小节，我们给出引理3.4的证明。

引理3.4的证明。根据引理2.7，我们估计项 I 于各频率区域。

$$
\begin{aligned}
I \le & \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^m \langle \frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}|k-l|^{\frac{i}{3}} \|f_{k-l-\eta}(y)\|_{L^2_y}\|g_\eta(y)\|_{L^\infty_y} \right\|_{L^2_{k-l}L^1_\eta(\mathcal{R}_{\mathrm{res}}(k-l,\eta))} \\
& + \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^m \langle \frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}|k-l|^{\frac{i}{3}} \|f_{k-l-\eta}(y)\|_{L^2_y}\|g_\eta(y)\|_{L^\infty_y} \right\|_{L^2_{k-l}L^1_\eta(\mathcal{R}_{\mathrm{HL}}(k-l,\eta))} \\
& + \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^m \langle \frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}|k-l|^{\frac{i}{3}} \|f_{k-l-\eta}(y)\|_{L^2_y}\|g_\eta(y)\|_{L^\infty_y} \right\|_{L^2_{k-l}L^1_\eta(\mathcal{R}_{\mathrm{LH}}(k-l,\eta))} \\
=: & \, I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}
$$

对 I_1的估计。在$\mathcal{R}_{\mathrm{res}}(k-l,\eta)$的区域内，利用(2.6)，我们有

$$|\eta| \lesssim |k-l-\eta| \sim |k-l|.$$

然后由 $|k_1+k_2|^{\frac{2}{3}} \le |k_1|^{\frac{2}{3}} + |k_2|^{\frac{2}{3}}$及卷积的杨不等式，我们如下估计 I_1：

$$
\begin{aligned}
I_1 &\lesssim \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l-\eta\rangle^m \langle \frac{1}{k-l-\eta}\rangle^{\epsilon}|\eta|^{-\frac{1-i}{3}}|k-l-\eta|^{\frac{1}{3}} \|f_{k-l-\eta}(y)\|_{L^2_y}\|g_\eta(y)\|_{L^\infty_y} \right\|_{L^2_{k-l}L^1_\eta} \\
&\lesssim \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l-\eta|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l-\eta\rangle^m \langle \frac{1}{k-l-\eta}\rangle^{\epsilon}|k-l-\eta|^{\frac{1}{3}} \|f_{k-l-\eta}(y)\|_{L^2_y} \right\|_{L^2_{k-l-\eta}} \\
&\quad \times \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|\eta|^{\frac{2}{3}}t}|\eta|^{-\frac{1-i}{3}} \|g_\eta(y)\|_{L^\infty_y} \right\|_{L^1_\eta},
\end{aligned}
$$

这可以通过 H¨older 不等式和（2.4）来控制

$$
\begin{aligned}
& C \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^m \langle \frac{1}{D_x}\rangle^{\epsilon}|D_x|^{\frac{1}{3}} f \right\|_{L^2} \left\| |\eta|^{-\frac{4-i}{6}}\langle\eta\rangle^{-m}\langle\frac{1}{\eta}\rangle^{-\epsilon} \right\|_{L^2_\eta} \\
& \quad \times \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|\eta|^{\frac{2}{3}}t}\langle\eta\rangle^m \langle\frac{1}{\eta}\rangle^{\epsilon} \left\| |\eta|^{\frac{i+1}{3}} g_\eta(y) \right\|^{\frac{1}{2}}_{L^2_y} \left\| |\eta|^{\frac{1}{3}}\partial_y g_\eta(y) \right\|^{\frac{1}{2}}_{L^2_y} \right\|_{L^2_\eta}
\end{aligned}
$$

$$\lesssim \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}f \right\|_{Y_{m,\epsilon}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{i+1}{3}}g \right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}g \right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}},$$

其中我们用到了

$$\left\| |\eta|^{-\frac{4-i}{6}}\langle\eta\rangle^{-m}\langle\frac{1}{\eta}\rangle^{-\epsilon} \right\|_{L^2_\eta} \lesssim 1$$

当 $\epsilon > \frac{1}{6}$时， $i=0$；当 $\epsilon > 0$ 时， $i=1$.

对 I_2 的估计。在 $\mathcal{R}_{\mathrm{HL}}(k-l,\eta)$ 中，由 (2.7) 可得

$$|k-l-\eta| \lesssim |k-l| \sim |\eta|$$

再次使用卷积的杨不等式，得到

$$\begin{aligned} I_2 &\lesssim \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle\eta\rangle^m\langle\frac{1}{\eta}\rangle^\epsilon|k-l-\eta|^{\frac{i-2}{6}}|\eta|^{\frac{i+2}{6}}\|f_{k-l-\eta}(y)\|_{L^2_y}\|g_\eta(y)\|_{L^\infty_y} \right\|_{L^2_{k-l}L^1_\eta} \\ &\lesssim \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l-\eta|^{\frac{2}{3}}t}|k-l-\eta|^{\frac{i-2}{6}}\|f_{k-l-\eta}(y)\|_{L^2_y} \right\|_{L^1_{k-l-\eta}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|\eta|^{\frac{2}{3}}t}\langle\eta\rangle^m\langle\frac{1}{\eta}\rangle^\epsilon|\eta|^{\frac{i+2}{6}}\|g_\eta(y)\|_{L^\infty_y} \right\|_{L^2_\eta} \end{aligned}$$

结合 (2.4，可得

$$\begin{aligned} I_2 &\lesssim \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^m\langle\frac{1}{D_x}\rangle^\epsilon|D_x|^{\frac{i+1}{3}}g \right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^m\langle\frac{1}{D_x}\rangle^\epsilon\partial_y|D_x|^{\frac{1}{3}}g \right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad\times \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l-\eta|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l-\eta\rangle^m\langle\frac{1}{k-l-\eta}\rangle^\epsilon|k-l-\eta|^{\frac{1}{3}}\|f_{k-l-\eta}(y)\|_{L^2_y} \right\|_{L^2_{k-l-\eta}} \\ &\quad\times \left\| |k-l-\eta|^{-\frac{4-i}{6}}\langle k-l-\eta\rangle^{-m}\langle\frac{1}{k-l-\eta}\rangle^{-\epsilon} \right\|_{L^2_{k-l-\eta}} \\ &\lesssim \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}f \right\|_{Y_{m,\epsilon}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{i+1}{3}}g \right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}g \right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

对 I_3 的估计。对于 I_3，由 (2.8) 和 (2.9) 可推得

$$|k-l| \lesssim |k-l-\eta| \sim |\eta|, \quad \langle k-l\rangle^2 \lesssim \langle\eta\rangle\langle k-l-\eta\rangle,$$

$$1 \le \langle\frac{1}{k-l-\eta}\rangle^s|k-l-\eta|^s \lesssim \langle\frac{1}{\eta}\rangle^{s_3}\langle\frac{1}{k-l-\eta}\rangle^{s_3}\left(1+\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{s-2s_3}\right)|k-l-\eta|^{s_1}|\eta|^{s_2}.$$

然后，取 $s=\frac{4-i}{6}$、~~$s_1=\frac{1-i}{3}$~~、~~$s_2=\frac{i+2}{6}$~~和 $s_3=\epsilon$，可得

$$\begin{aligned} I_3 \lesssim \Big\| & e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l-\eta\rangle^m\langle\eta\rangle^m\langle k-l\rangle^{-m} \\ & \times\langle\frac{1}{\eta}\rangle^\epsilon\langle\frac{1}{k-l-\eta}\rangle^\epsilon\left(\langle\frac{1}{k-l}\rangle^\epsilon+\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{\frac{4-i}{6}-\epsilon}\right)|k-l-\eta|^{\frac{1}{3}}|\eta|^{\frac{i+2}{6}}\|f_{k-l-\eta}(y)\|_{L^2_y}\|g_\eta(y)\|_{L^\infty_y} \Big\|_{L^2_{k-l}L^1_\eta} \end{aligned}$$

$$\lesssim \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l-\eta|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l-\eta\rangle^m\langle\frac{1}{k-l-\eta}\rangle^\epsilon|k-l-\eta|^{\frac{1}{3}}\|f_{k-l-\eta}(y)\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_{k-l-\eta}}$$
$$\times \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|\eta|^{\frac{2}{3}}t}\langle\eta\rangle^m\langle\frac{1}{\eta}\rangle^\epsilon|\eta|^{\frac{i+2}{6}}\|g_\eta(y)\|_{L^\infty_y}\right\|_{L^2_\eta} \left\| \left(\langle\frac{1}{k-l}\rangle^\epsilon+\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{\frac{4-i}{6}-\epsilon}\right)\langle k-l\rangle^{-m}\right\|_{L^2_{k-l}}$$
$$\lesssim \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}f\right\|_{Y_{m,\epsilon}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{i+1}{3}}g\right\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{m,\epsilon}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}g\right\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{m,\epsilon}}.$$

因此，将 3.3 中的各项相加即可得到该估计 I_1， I_2， I_3。 □

3.2. **非线性能量估计**。 利用上一小节中得到的结果，我们证明两个非线性能量估计，即引理3.2和3.3。

引理 *3.2* 的证明。 借助傅里叶变换，我们得到

$$\frac{1}{A}\left|\Re\left(|D_x|^{\frac{1}{3}}\left(|\nabla d|^2 d\right)\middle|\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right)\right|$$
$$\lesssim \frac{1}{A}\int_{\mathbb{R}^3} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}$$
$$\times\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)d_k(y)\cdot d_l(y)\nabla_{k-l-\eta}d_{k-l-\eta}(y)\cdot\nabla_\eta d_\eta(y)dy\right|dkdld\eta, \tag{3.4}$$

w这里，最后一项可通过以下三个不同区域估计 .

- **在** $\mathcal{R}_{\mathbf{res}}(k,\ l)$ **中**。 由（2.6）和杨氏不等式，我们可得

$$\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{res}(k,l)}\times\mathbb{R}} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}$$
$$\times\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)d_k(y)\cdot d_l(y)\nabla_{k-l-\eta}d_{k-l-\eta}(y)\cdot\nabla_\eta d_\eta(y)dy\right|dkdld\eta$$
$$\lesssim \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^m\langle\frac{1}{k}\rangle^\epsilon|k|^{\frac{2}{3}}\|d_k\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_k}\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\|d_l\|_{L^\infty_y}\right\|_{L^1_l}$$
$$\times\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^m\langle\frac{1}{k-l}\rangle^\epsilon\int_{\mathbb{R}}\|\nabla_{k-l-\eta}d_{k-l-\eta}\|_{L^2_y}\|\nabla_\eta d_\eta\|_{L^\infty_y}d\eta\right\|_{L^2_{k-l}},$$

并由推论 2.6 $(\alpha=\beta=\frac{1}{3})$ 和引理3.4 $(i=0,\ f=g=\nabla d)$ 这可以由以下内容控制

$$C\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{2}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{m,\epsilon}}\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\partial_y|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{m,\epsilon}}$$
$$\times\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^{\frac{3}{2}}_{Y_{m,\epsilon}}\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\partial_y|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{m,\epsilon}}. \tag{3.5}$$

- **在** $\mathcal{R}_{\mathbf{HL}}(k,l)$**中**。 再次利用引理 3.4 $(i=0,\ f=g=\nabla d)$，结合式（2.4）和式（2.7），可得

$$\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{HL}(k,l)}\times\mathbb{R}} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \left| \int_{\mathbb{R}} \mathcal{M}\left(k, D_y\right) d_k(y) \cdot d_l(y) \nabla_{k-l-\eta} d_{k-l-\eta}(y) \cdot \nabla_\eta d_\eta(y) dy \right| dk dl d\eta \\
\lesssim & \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t} \langle k \rangle^m \langle \frac{1}{k} \rangle^\epsilon |k|^{\frac{2}{3}} \|d_k\|_{L_y^2} \right\|_{L_k^2} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t} \langle l \rangle^m \langle \frac{1}{l} \rangle^\epsilon |l|^{\frac{1}{3}} \|d_l\|_{L_y^\infty} \right\|_{L_l^2} \\
& \times \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t} \langle k-l \rangle^m \langle \frac{1}{k-l} \rangle^\epsilon \int_{\mathbb{R}} \|\nabla_{k-l-\eta} d_{k-l-\eta}\|_{L_y^2} \|\nabla_\eta d_\eta\|_{L_y^\infty} d\eta \right\|_{L_{k-l}^2} \\
& \times \left\| |k-l|^{-\frac{1}{3}} \langle k-l \rangle^{-m} \langle \frac{1}{k-l} \rangle^{-\epsilon} \right\|_{L_{k-l}^2} \\
\lesssim & \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t} |D_x|^{\frac{2}{3}} d \right\|_{Y_{m,\epsilon}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t} |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t} \partial_y |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}} \\
& \times \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t} \nabla |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{3}{2}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t} \partial_y \nabla |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

- **在 $\mathcal{R}_{\mathbf{LH}}(k,l)$中。** 与区域 $\mathcal{R}_{\mathrm{HL}(k,l)}$类似，由式（2.8）和式（2.9）可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{LH}(k,l)} \times \mathbb{R}} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t} \langle k \rangle^{2m} \langle \frac{1}{k} \rangle^{2\epsilon} |k|^{\frac{2}{3}} \\
&\qquad \times \left| \int_{\mathbb{R}} \mathcal{M}\left(k, D_y\right) d_k(y) \cdot d_l(y) \nabla_{k-l-\eta} d_{k-l-\eta}(y) \cdot \nabla_\eta d_\eta(y) dy \right| dk dl d\eta \\
\lesssim & \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t} \langle k \rangle^m \langle \frac{1}{k} \rangle^\epsilon |k|^{\frac{2}{3}} \|d_k\|_{L_y^2} \right\|_{L_k^2} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t} \langle l \rangle^m \langle \frac{1}{l} \rangle^\epsilon |l|^{\frac{1}{3}} \|d_l\|_{L_y^\infty} \right\|_{L_l^2} \\
& \times \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t} \langle k-l \rangle^m \langle \frac{1}{k-l} \rangle^\epsilon \int_{\mathbb{R}} \|\nabla_{k-l-\eta} d_{k-l-\eta}\|_{L_y^2} \|\nabla_\eta d_\eta\|_{L_y^\infty} d\eta \right\|_{L_{k-l}^2} \\
& \times \left\| \left(\langle \frac{1}{k} \rangle^\epsilon + \langle \frac{1}{k} \rangle^{\frac{1}{3}-\epsilon} \right) \langle k \rangle^{-m} \right\|_{L_k^2},
\end{aligned}
$$

这可利用3.5），结合2.4）和引理3.4 再次得到控制。

因此，汇总3.5）–（3.6），并由1.5）和（3.4）可推得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{A} \int_0^t \left| \Re \left(|\nabla d|^2 d \left| \mathcal{M} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t} \langle D_x \rangle^{2m} \langle \frac{1}{D_x} \rangle^{2\epsilon} |D_x|^{\frac{2}{3}} d \right. \right) \right| dt \\
\lesssim & \frac{1}{A^{\frac{1}{3}}} \left(A^{\frac{1}{6}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t} |D_x|^{\frac{2}{3}} d \right\|_{L_t^2 Y_{m,\epsilon}} \right) \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t} |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{L_t^\infty Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}} \left(A^{\frac{1}{4}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t} \partial_y |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{L_t^2 Y_{m,\epsilon}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \times \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t} \nabla |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{L_t^\infty Y_{m,\epsilon}}^{\frac{3}{2}} \left(A^{\frac{1}{4}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t} \partial_y \nabla |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{L_t^2 Y_{m,\epsilon}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
\lesssim & \frac{1}{A^{\frac{1}{3}}} \left\| |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^2 \left\| \nabla |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^2,
\end{aligned}
$$

至此，证明完成。 □

引理的证明 3.3。利用傅里叶变换，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{A}\left|\Re\left(|D_x|^{\frac{1}{3}}\left(|\nabla d|^2 e_1\right)\right|\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right)\right| \\
\lesssim\ &\frac{1}{A}\int_{\mathbb{R}^2} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)d_k^1(y)\nabla_l d_l(y)\cdot\nabla_{k-l}d_{k-l}(y)dy\right|dkdl, \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

这仍将在三个不同的频域中进行估计。

- **在 $\mathcal{R}_{\mathbf{res}}(k,l)$中。** 由（2.6）和推论 2.6 ($\alpha=\frac{2}{3},\beta=\frac{1}{3}$)，我们推得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{res}}(k,l)} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)d_k^1(y)\nabla_l d_l(y)\cdot\nabla_{k-l}d_{k-l}(y)dy\right|dkdl \\
\lesssim\ &\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}|k|^{\frac{1}{3}}\left\|d_k^1\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_k^2}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\left\|\nabla_l d_l\right\|_{L_y^\infty}\right\|_{L_l^1} \\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^{m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}|k-l|^{\frac{1}{3}}\left\|\nabla_{k-l}d_{k-l}\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_{k-l}^2} \\
\lesssim\ &\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}d^1\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}} \\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\partial_y\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

- **在 $\mathcal{R}_{\mathbf{HL}}(k,l)$中。** 根据（2.4），由（2.7）可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{HL}}(k,l)} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)d_k^1(y)\nabla_l d_l(y)\cdot\nabla_{k-l}d_{k-l}(y)dy\right|dkdl \\
\lesssim\ &\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}|k|^{\frac{1}{3}}\left\|d_k^1\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_k^2}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\langle l\rangle^{m}\langle\frac{1}{l}\rangle^{\epsilon}|l|^{\frac{1}{2}}\left\|\nabla_l d_l\right\|_{L_y^\infty}\right\|_{L_l^2} \\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^{m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}|k-l|^{\frac{1}{3}}\left\|\nabla_{k-l}d_{k-l}\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_{k-l}^2}\left\||k-l|^{-\frac{1}{2}}\langle k-l\rangle^{-m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{-\epsilon}\right\|_{L_{k-l}^2} \\
\lesssim\ &\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}d^1\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}} \\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\partial_y\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

- **在 $\mathcal{R}_{\mathbf{LH}}(k,l)$中。** 利用 (2.8) 与 (2.9) ($s=s_2=\frac{1}{2}$, $s_1=0$, $s_3=\epsilon$)，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{LH}}(k,l)} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)d_k^1(y)\nabla_l d_l(y)\cdot\nabla_{k-l}d_{k-l}(y)dy\right|dkdl \\
\lesssim\ &\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}|k|^{\frac{1}{3}}\left\|d_k^1\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_k^2}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\langle l\rangle^{m}\langle\frac{1}{l}\rangle^{\epsilon}|l|^{\frac{1}{2}}\left\|\nabla_l d_l\right\|_{L_y^\infty}\right\|_{L_l^2} \\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^{m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}|k-l|^{\frac{1}{3}}\left\|\nabla_{k-l}d_{k-l}\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_{k-l}^2}\left\|\left(\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}+\langle\frac{1}{k}\rangle^{\frac{1}{2}-\epsilon}\right)\langle k\rangle^{-m}\right\|_{L_k^2},
\end{aligned}$$

其可由 (3.8) 中的最后一项通过再次使用 (2.4) 加以界定。

注意，估计式（3.7）–（3.9）表明

$$\begin{aligned}
&\left|\Re\left(|\nabla d|^2\left|\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}|D_x|^{\frac{2}{3}}d^1\right.\right)\right| \\
\lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}d^1\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}} \\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\partial_y\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}},
\end{aligned}$$

由此结合（1.5），可推得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{A}\int_0^t\left|\Re\left(|\nabla d|^2\left|\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}|D_x|^{\frac{2}{3}}d^1\right.\right)\right|dt \\
\lesssim&\frac{1}{A}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}d^1\right\|_{L_t^\infty Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{L_t^2Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}} \\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\partial_y\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{L_t^2Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{L_t^2Y_{m,\epsilon}} \\
\lesssim&\frac{1}{A^{\frac{1}{6}}}\left\||D_x|^{\frac{1}{3}}d^1\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}\left\||D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}\left\|\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

4. 高阶导数项的能量估计 $\left(\partial_x^2,\partial_y^2\right)|D_x|^{1/3}d$

本节致力于证明关于 $\left(\partial_x^2,\partial_y^2\right)|D_x|^{1/3}d$ 的主要能量估计，该估计蕴含了 ∇d 的有界性。

命题 4.1。 假设 $0\le t\le T$。那么，对于 $0<a<{}^{1}{}_{16}{}_{(1+2\pi)}$ 以及 $\frac{1}{6}<\epsilon<\frac{1}{2}<m$，

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(\partial_x^2,\partial_y^2\right)|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^2 \\
\le&C\left\|\left(\partial_x^2,\partial_y^2\right)|D_x|^{\frac{1}{3}}d_{\text{in}}\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^2+CA\left\||D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}\left\|\left(\partial_x^2,\partial_y^2\right)|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}} \\
&+\frac{C}{A^{\frac{1}{6}}}\left\|\left(\partial_x^2,\partial_y^2\right)|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^{\frac{3}{2}}\left\|\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^{\frac{5}{2}} \\
&+\frac{C}{A^{\frac{1}{6}}}\left\|\left(\partial_x^2,\partial_y^2\right)|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^{2}\left\||D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}\left\|\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^{\frac{3}{2}} \\
&+\frac{C}{A^{\frac{1}{6}}}\left\|\left(\partial_x^2,\partial_y^2\right)|D_x|^{\frac{1}{3}}d^1\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}\left\|\left(\partial_x^2,\partial_y^2\right)|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}\left\|\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}} \\
&+\frac{C}{A^{\frac{1}{3}}}\left\|\left(\partial_x^2,\partial_y^2\right)|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}\|\omega\|_{X_{a,m,\epsilon}}\left(\left\|\left(\partial_x^2,\partial_y^2\right)|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}+\left\|\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}\right).
\end{aligned}$$

为处理涉及高阶导数的能量估计，我们建立三个引理，用于证明上述命题。

引理 4.2。 令 $0<a<\frac{1}{16(1+2\pi)}$ 且 $\frac{1}{6}<\epsilon<\frac{1}{2}<m$。则，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{A}\int_0^t\left|\Re\left(\partial_{i,ph}^2\left(|\nabla d|^2 d\right)\left|\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}\partial_{i,ph}^2|D_x|^{\frac{2}{3}}d\right.\right)\right|dt\\ \lesssim&\frac{1}{A^{\frac{1}{6}}}\left\|\left(\partial_x^2,\partial_y^2\right)|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^{\frac{3}{2}}\left\|\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^{\frac{5}{2}}\\ &+\frac{1}{A^{\frac{1}{6}}}\left\|\left(\partial_x^2,\partial_y^2\right)|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^{2}\left\||D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}\left\|\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

对 $i=1,2$成立，其中 $\partial_{i,ph}$ 定义见 （1.19）。

引理 4.3。 对于 $0<a<\frac{1}{16(1+2\pi)}$ 、 $0<\epsilon<\frac{1}{2}<m$ 和 $i=1,2$，有以下估计成立：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{A}\int_0^t\left|\Re\left(\partial_{i,ph}^2\left(|\nabla d|^2 e_1\right)\left|\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}\partial_{i,ph}^2|D_x|^{\frac{2}{3}}d\right.\right)\right|dt\\ \lesssim&\frac{1}{A^{\frac{1}{6}}}\left\|\left(\partial_x^2,\partial_y^2\right)|D_x|^{\frac{1}{3}}d^1\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}\left\|\left(\partial_x^2,\partial_y^2\right)|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}\left\|\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}.\end{aligned}$$

引理 4.4。 对于 $0<a<\frac{1}{16(1+2\pi)}$ 、 $\frac{1}{6}<\epsilon<\frac{1}{2}<m$ 和 $i=1,2$，我们有 e

$$\begin{aligned}&\frac{1}{A}\int_0^t\left|\Re\left(\partial_{i,ph}^2\left(u\cdot\nabla d\right)\left|\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}\partial_{i,ph}^2|D_x|^{\frac{2}{3}}d\right.\right)\right|dt\\ \lesssim&\frac{1}{A^{\frac{1}{3}}}\left\|\left(\partial_x^2,\partial_y^2\right)|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}\|\omega\|_{X_{a,m,\epsilon}}\left(\left\|\left(\partial_x^2,\partial_y^2\right)|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}+\left\|\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}\right).\end{aligned}$$

命题 4.1的证明。 对于 $i=1,2$，应用 $\partial_{i,ph}^2$ 到（1.3）$_3$ 可得

$$\partial_t\partial_{i,ph}^2 d+y\partial_x\partial_{i,ph}^2 d-\frac{1}{A}\Delta\partial_{i,ph}^2 d=-\frac{1}{A}\partial_{i,ph}^2(u\cdot\nabla d)+\frac{1}{A}\partial_{i,ph}^2\left(|\nabla d|^2(d+e_1)\right)-2(i-1)\partial_x\partial_y d. \quad (4.1)$$

将（4.1）与 $2\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}\partial_{i,ph}^2|D_x|^{\frac{2}{3}}d$作内积，并利用（1.14）、（1.15）和（1.16），对于 $0<a<\frac{1}{16(1+2\pi)}$，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\|\sqrt{\mathcal{M}}e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\partial_{i,ph}^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^2+\frac{1}{A}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\partial_{i,ph}^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^2\\ &+\frac{1}{16A^{\frac{1}{3}}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\partial_{i,ph}^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^2+\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\partial_x\nabla\Delta^{-1}\partial_{i,ph}^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{L^2}^2\\ \lesssim&\frac{2}{A}\left|\Re\left(\partial_{i,ph}^2\left(u\cdot\nabla d\right)\left|\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}\partial_{i,ph}^2|D_x|^{\frac{2}{3}}d\right.\right)\right|\\ &+\frac{2}{A}\left|\Re\left(\partial_{i,ph}^2\left(|\nabla d|^2(d+e_1)\right)\left|\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}\partial_{i,ph}^2|D_x|^{\frac{2}{3}}d\right.\right)\right|\end{aligned}$$

$$+4(i-1)\left|\Re\left(\partial_x\partial_y d\,\middle|\,\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}\partial_{i,ph}^2|D_x|^{\frac{2}{3}}d\right)\right|.$$

注意，当 $i=2$ 时，

$$\begin{aligned}&\left|\Re\left(\partial_x\partial_y d\,\middle|\,\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}\partial_y^2|D_x|^{\frac{2}{3}}d\right)\right|\\ \lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\partial_x\partial_y|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\end{aligned}$$

意味着

$$\begin{aligned}&\int_0^t\left|\Re\left(\partial_x\partial_y d\,\middle|\,\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}\partial_y^2|D_x|^{\frac{2}{3}}d\right)\right|dt\\ \lesssim&A\left\||D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}\left\|\partial_x\partial_y|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}},\end{aligned}$$

这与引理 4.2、4.3 和 4.4一起完成了证明。 □

在本节剩余部分，我们将逐一给出三个引理的证明。

引理 4.2的证明。 利用分部积分和傅里叶变换，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{A}\left|\Re\left(\partial_{i,ph}^2\left(|\nabla d|^2d\right)\,\middle|\,\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}\partial_{i,ph}^2|D_x|^{\frac{2}{3}}d\right)\right|\\ \lesssim&\frac{1}{A}\int_{\mathbb{R}^3}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}\\ &\qquad\times\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)\partial_{i,fr}^3d_k(y)\cdot\partial_{i,fr}d_l(y)\nabla_{k-l-\eta}d_{k-l-\eta}(y)\cdot\nabla_\eta d_\eta(y)dy\right|dkdld\eta\\ &+\frac{1}{A}\int_{\mathbb{R}^3}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}\\ &\qquad\times\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)\partial_{i,fr}^3d_k(y)\cdot d_l(y)\nabla_{k-l-\eta}d_{k-l-\eta}(y)\cdot\nabla_\eta\partial_{i,fr}d_\eta(y)dy\right|dkdld\eta\\ =:&\,II_1+II_2.\end{aligned}\tag{4.2}$$

- **在 $\mathcal{R}_{\mathbf{res}}(k,l)\times\mathbb{R}$。** 借助于 **(2.6)** 以及推论 2.6 ($\alpha=\beta=\frac{1}{3}$)，对于 II_1 的项，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{res}(k,l)}\times\mathbb{R}}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}\\ &\qquad\times\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)\partial_{i,fr}^3d_k(y)\cdot\partial_{i,fr}d_l(y)\nabla_{k-l-\eta}d_{k-l-\eta}(y)\cdot\nabla_\eta d_\eta(y)dy\right|dkdld\eta\\ \lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^m\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}|k|^{\frac{1}{3}}\left\|\partial_{i,fr}^3d_k\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_k^2}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\left\|\partial_{i,fr}d_l\right\|_{L_y^\infty}\right\|_{L_l^1}\\ &\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^m\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}|k-l|^{\frac{1}{3}}\int_{\mathbb{R}}\left\|\nabla_{k-l-\eta}d_{k-l-\eta}\cdot\nabla_\eta d_\eta\right\|_{L_y^2}d\eta\right\|_{L_{k-l}^2}\end{aligned}$$

$$\lesssim \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\left(\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right)\right\|_{Y_{m,\epsilon}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\partial_y\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}$$
$$\times \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^m\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}|k-l|^{\frac{1}{3}}\int_{\mathbb{R}}\|\nabla_{k-l-\eta}d_{k-l-\eta}\|_{L^2_y}\|\nabla_\eta d_\eta\|_{L^\infty_y}d\eta\right\|_{L^2_{k-l}}$$

并且利用引理 3.4 ($i=1,\ f=g=\nabla d$)，它可由

$$C\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\left(\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right)\right\|_{Y_{m,\epsilon}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{3}{2}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}$$
$$\times \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\left(\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right)\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}. \tag{4.3}$$

类似地，对于 II_2项，再次利用（2.6）和推论2.6 （$\alpha=\beta=\frac{1}{3}$），我们有

$$\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{res}(k,l)}\times\mathbb{R}} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}$$
$$\times\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}(k,D_y)\,\partial^3_{i,fr}d_k(y)\cdot d_l(y)\nabla_{k-l-\eta}d_{k-l-\eta}(y)\cdot\nabla_\eta\partial_{i,fr}d_\eta(y)dy\right|dkdld\eta$$
$$\lesssim \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^m\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}|k|^{\frac{1}{3}}\left\|\partial^3_{i,fr}d_k\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_k} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\|d_l\|_{L^\infty_y}\right\|_{L^1_l}$$
$$\times\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^m\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}|k-l|^{\frac{1}{3}}\int_{\mathbb{R}}\|\nabla_{k-l-\eta}d_{k-l-\eta}\cdot\nabla_\eta\partial_{i,fr}d_\eta\|_{L^2_y}d\eta\right\|_{L^2_{k-l}}$$
$$\lesssim \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\left(\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right)\right\|_{Y_{m,\epsilon}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^m\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}|k-l|^{\frac{1}{3}}\int_{\mathbb{R}}\|\nabla_{k-l-\eta}d_{k-l-\eta}\|_{L^2_y}\|\nabla_\eta\partial_{i,fr}d_\eta\|_{L^\infty_y}d\eta\right\|_{L^2_{k-l}}$$

并利用引理3.4 （$i=1,\ \ f=\nabla d,\ \ g=\nabla^2 d$），它可被控制为

$$C\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\left(\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right)\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{3}{2}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{3}{2}}$$
$$\times \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}. \tag{4.4}$$

- **在** $\mathcal{R}_{\mathrm{HL}}(k,l)\times\mathbb{R}$。**根据**（2.4）和（2.7），一方面，我们有

$$\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{HL}}(k,l)\times\mathbb{R}} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}$$
$$\times\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}(k,D_y)\,\partial^3_{i,fr}d_k(y)\cdot\partial_{i,fr}d_l(y)\nabla_{k-l-\eta}d_{k-l-\eta}(y)\cdot\nabla_\eta d_\eta(y)dy\right|dkdld\eta$$
$$\lesssim \|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^m\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}|k|^{\frac{1}{3}}\|\partial^3_{i,fr}d_k\|_{L^2_y}\|_{L^2_k}\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\langle l\rangle^m\langle\frac{1}{l}\rangle^{\epsilon}|l|^{\frac{1}{2}}\|\partial_{i,fr}d_l\|_{L^\infty_y}\|_{L^2_l}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^{m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}\int_{\mathbb{R}}\|\nabla_{k-l-\eta}d_{k-l-\eta}\|_{L^2_y}\|\nabla_\eta d_\eta\|_{L^\infty_y}d\eta\|_{L^2_{k-l}}\\
&\times \||k-l|^{-\frac{1}{6}}\langle k-l\rangle^{-m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{-\epsilon}\|_{L^2_{k-l}}\\
\lesssim &\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla(\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d)\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{m,\epsilon}}\\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^{\frac{3}{2}}_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla(\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d)\right\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{m,\epsilon}},
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

这里在第二行中应用了引理 3.4 ($i=0,\ f=g=\nabla d$)。另一方面，对于 II_2这一项，利用引理 3.4 ($i=0,\ f=\nabla d$ 和 $g=\nabla^2 d$)，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{HL}}(k,l)\times\mathbb{R}}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}\\
&\qquad\times\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}(k,D_y)\,\partial^3_{i,fr}d_k(y)\cdot d_l(y)\nabla_{k-l-\eta}d_{k-l-\eta}(y)\cdot\nabla_\eta\partial_{i,fr}d_\eta(y)dy\right|dkdld\eta\\
\lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}|k|^{\frac{1}{3}}\left\|\partial^3_{i,fr}d_k\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_k}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\langle l\rangle^{m}\langle\frac{1}{l}\rangle^{\epsilon}|l|^{\frac{1}{2}}\|d_l\|_{L^\infty_y}\right\|_{L^2_l}\\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^{m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}\int_{\mathbb{R}}\|\nabla_{k-l-\eta}d_{k-l-\eta}\|_{L^2_y}\|\nabla_\eta\partial_{i,fr}d_\eta\|_{L^\infty_y}\,d\eta\right\|_{L^2_{k-l}}\\
&\times\left\||k-l|^{-\frac{1}{6}}\langle k-l\rangle^{-m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{-\epsilon}\right\|_{L^2_{k-l}}\\
\lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\left(\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right)\right\|^{\frac{3}{2}}_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{2}{3}}d\right\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^{\frac{3}{2}}_{Y_{m,\epsilon}}\\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{m,\epsilon}}.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

- **在 $\mathcal{R}_{\mathrm{LH}}\times\mathbb{R}$中**。由（2.8）和（2.9），可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{LH}}(k,l)\times\mathbb{R}}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}\\
&\qquad\times\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}(k,D_y)\,\partial^3_{i,fr}d_k(y)\cdot\partial_{i,fr}d_l(y)\nabla_{k-l-\eta}d_{k-l-\eta}(y)\cdot\nabla_\eta d_\eta(y)dy\right|dkdld\eta\\
\lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}|k|^{\frac{1}{3}}\left\|\partial^3_{i,fr}d_k\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_k}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\langle l\rangle^{m}\langle\frac{1}{l}\rangle^{\epsilon}|l|^{\frac{1}{2}}\|\partial_{i,fr}d_l\|_{L^\infty_y}\right\|_{L^2_l}\\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^{m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}\int_{\mathbb{R}}\|\nabla_{k-l-\eta}d_{k-l-\eta}\cdot\nabla_\eta d_\eta\|_{L^2_y}\,d\eta\right\|_{L^2_{k-l}}\\
&\times\left\|\left(\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}+\langle\frac{1}{k}\rangle^{\frac{1}{6}-\epsilon}\right)\langle k\rangle^{-m}\right\|_{L^2_k}
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

and

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{LH}}(k,l)\times\mathbb{R}} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}} \\
&\qquad\qquad \times\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)\partial_{i,fr}^3 d_k(y)\cdot d_l(y)\nabla_{k-l-\eta}d_{k-l-\eta}(y)\cdot\nabla_\eta\partial_{i,fr}d_\eta(y)dy\right| dkdld\eta \\
\lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^m\langle\frac{1}{k}\rangle^\epsilon|k|^{\frac{1}{3}}\|\partial_y^3 d_k\|_{L_y^2}\right\|_{L_k^2}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\langle l\rangle^m\langle\frac{1}{l}\rangle^\epsilon|l|^{\frac{1}{2}}\|d_l\|_{L_y^\infty}\right\|_{L_l^2} \\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^m\langle\frac{1}{k-l}\rangle^\epsilon\int_{\mathbb{R}}\|\nabla_{k-l-\eta}d_{k-l-\eta}\|_{L_y^2}\|\nabla_\eta\partial_{i,fr}d_\eta\|_{L_y^\infty}d\eta\right\|_{L_{k-l}^2} \\
&\times\left\|\left(\langle\frac{1}{k}\rangle^\epsilon+\langle\frac{1}{k}\rangle^{\frac{1}{6}-\epsilon}\right)\langle k\rangle^{-m}\right\|_{L_k^2}. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

于是，利用（2.4）和引理 3.4，（4.7）和（4.8）分别由（4.5）和（4.6）的最后一项控制。

合并（4.3）–（4.6），我们得到

$$\begin{aligned}
&II_1+II_2 \\
\lesssim&\frac{1}{A}\sum_{j\in\{0,1\}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\left(\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right)\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{j}{3}}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}} \\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1-j}{3}}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}} \\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\left(\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right)\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}} \\
&+\frac{1}{A}\sum_{j\in\{0,1\}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\left(\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right)\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{3}{2}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{j+1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}} \\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{3}{2}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1-j}{3}}\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}} \\
\lesssim&\frac{1}{A^{\frac{1}{6}}}\left(\left\|\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^{\frac{3}{2}}\left\|\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^{\frac{5}{2}}+\left\|\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^{2}\left\||D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}\left\|\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^{\frac{3}{2}}\right),
\end{aligned}$$

回顾（4.2），即可完成证明。 □

引理的证明 4.3。注意

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{A}\left|\Re\left(\partial_{i,ph}^2\left(|\nabla d|^2e_1\right)\left|\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}\partial_{i,ph}^2|D_x|^{\frac{2}{3}}d\right)\right| \\
\lesssim&\frac{1}{A}\int_{\mathbb{R}^2}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)\partial_{i,fr}^3 d_k^1(y)l\left(k-l\right)\partial_{i,fr}d_l(y)\cdot d_{k-l}(y)dy\right|dkdl \\
&+\frac{1}{A}\int_{\mathbb{R}^2}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)\partial_{i,fr}^3 d_k^1(y)\partial_{i,fr}\partial_y d_l(y)\cdot\partial_y d_{k-l}(y)dy\right|dkdl.
\end{aligned}$$

- **在 $\mathcal{R}_{\mathbf{res}}(k,\ l)$。** 由（2.6）可知

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{res}}(k,l)} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)\partial_{i,fr}^3 d_k^1(y)l\left(k-l\right)\partial_{i,fr}d_l(y)\cdot d_{k-l}(y)dy\right|dkdl\\
\lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}|k|^{\frac{1}{3}}\left\|\partial_{i,fr}^3 d_k^1\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_k^2}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}|l|^{\frac{2}{3}}\left\|\partial_{i,fr}d_l\right\|_{L_y^\infty}\right\|_{L_l^1}\\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^{m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}|k-l|^{\frac{5}{3}}\left\|d_{k-l}\right\|_{L_y^2}d\eta\right\|_{L_{k-l}^2}\\
\lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\left(\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d^1\right)\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}},
\end{aligned}\tag{4.9}$$

其中我们使用了 H¨older 不等式和（2.4）得到

$$\begin{aligned}
&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}|l|^{\frac{2}{3}}\left\|\partial_{i,fr}d_l\right\|_{L_y^\infty}\right\|_{L_l^1}\\
\lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}|l|^{\frac{2}{3}}\left\|\partial_{i,fr}d_l\right\|_{L_y^2}^{\frac{1}{2}}\left\|\partial_y\partial_{i,fr}d_l\right\|_{L_y^2}^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_l^1}\\
\lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\langle l\rangle^{m}\langle\frac{1}{l}\rangle^{\epsilon}\left\||l|\partial_{i,fr}|l|^{\frac{1}{3}}d_l\right\|_{L_y^2}^{\frac{1}{2}}\left\|\partial_y\partial_{i,fr}|l|^{\frac{1}{3}}d_l\right\|_{L_y^2}^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_l^2}\left\||l|^{-\frac{1}{6}}\langle l\rangle^{-m}\langle\frac{1}{l}\rangle^{-\epsilon}\right\|_{L_l^2}\\
\lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}
\end{aligned}$$

此外，由推论 2.6 ($\alpha=\frac{2}{3}$，$\beta=\frac{1}{3}$) 可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{res}}(k,l)} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)\partial_{i,fr}^3 d_k^1(y)\partial_{i,fr}\partial_y d_l(y)\cdot\partial_y d_{k-l}(y)dy\right|dkdl\\
\lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}|k|^{\frac{1}{3}}\left\|\nabla\partial_{i,fr}^2 d_k^1\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_k^2}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\left\|\partial_{i,fr}\partial_y d_l\right\|_{L_y^\infty}\right\|_{L_l^1}\\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^{m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}|k-l|^{\frac{1}{3}}\left\|\partial_y d_{k-l}\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_{k-l}^2}\\
\lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\left(\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d^1\right)\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}\\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\left(\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right)\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}.
\end{aligned}\tag{4.10}$$

- **在 $\mathcal{R}_{\mathbf{HL}}(k,l)$中。** 由 (2.4) 和 (2.7)，可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{HL}}(k,l)} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)\partial_{i,fr}^3 d_k^1(y)l\left(k-l\right)\partial_{i,fr}d_l(y)\cdot d_{k-l}(y)dy\right|dkdl\\
\lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}|k|^{\frac{1}{3}}\left\|\partial_{i,fr}^3 d_k^1\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_k^2}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\langle l\rangle^{m}\langle\frac{1}{l}\rangle^{\epsilon}|l|^{\frac{3}{2}}\|\partial_{i,fr}d_l\|_{L_y^\infty}\right\|_{L_l^2}
\end{aligned}$$

$$\times \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^{m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}|k-l|^{\frac{4}{3}}\left\|d_{k-l}\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_{k-l}^2}\left\||k-l|^{-\frac{1}{2}}\langle k-l\rangle^{-m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{-\epsilon}\right\|_{L_{k-l}^2}$$

$$\lesssim \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\left(\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d^1\right)\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\left(\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right)\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}. \tag{4.11}$$

类似地，我们有

$$\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{HL}}(k,l)} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)\partial_{i,fr}^3 d_k^1(y)\partial_{i,fr}\partial_y d_l(y)\cdot\partial_y d_{k-l}(y)dy\right|dkdl$$

$$\lesssim \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}|k|^{\frac{1}{3}}\left\|\partial_{i,fr}^3 d_k^1\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_k^2}\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\langle l\rangle^{m}\langle\frac{1}{l}\rangle^{\epsilon}|l|^{\frac{1}{2}}\left\|\partial_{i,fr}\partial_y d_l\right\|_{L_y^\infty}\right\|_{L_l^2}$$

$$\times \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^{m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}|k-l|^{\frac{1}{3}}\left\|\partial_y d_{k-l}\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_{k-l}^2}\left\||k-l|^{-\frac{1}{2}}\langle k-l\rangle^{-m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{-\epsilon}\right\|_{L_{k-l}^2}$$

$$\lesssim \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\left(\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d^1\right)\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\left(\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right)\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}} \tag{4.12}$$

- **在 $\mathcal{R}_{\mathrm{LH}}(k,l)$ 中。由**式（2.4）、（2.8）和（2.9）**($s_1=0$, $s=s_2=\frac{1}{2}$, $s_3=\epsilon$)**，我们得到

$$\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{LH}}(k,l)} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)\partial_{i,fr}^3 d_k^1(y)l\left(k-l\right)\partial_{i,fr}d_l(y)\cdot d_{k-l}(y)dy\right|dkdl$$

$$\lesssim \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}|k|^{\frac{1}{3}}\left\|\partial_{i,fr}^3 d_k^1\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_k^2}\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\langle l\rangle^{m}\langle\frac{1}{l}\rangle^{\epsilon}|l|^{\frac{3}{2}}\|\partial_{i,fr}d_l\|_{L_y^\infty}\right\|_{L_l^2}$$

$$\times \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^{m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}|k-l|^{\frac{4}{3}}\left\|d_{k-l}\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_{k-l}^2}\left\|\langle k\rangle^{-m}\left(\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}+\langle\frac{1}{k}\rangle^{\frac{1}{2}-\epsilon}\right)\right\|_{L_k^2},$$

其由（4.11）的最后一项控制。类似地，

$$\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{LH}}(k,l)} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)\partial_{i,fr}^3 d_k^1(y)\partial_{i,fr}\partial_y d_l(y)\cdot\partial_y d_{k-l}(y)dy\right|dkdl$$

$$\lesssim \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}|k|^{\frac{1}{3}}\left\|\partial_{i,fr}^3 d_k^1\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_k^2}\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\langle l\rangle^{m}\langle\frac{1}{l}\rangle^{\epsilon}|l|^{\frac{1}{2}}\left\|\partial_{i,fr}\partial_y d_l\right\|_{L_y^\infty}\right\|_{L_l^2}$$

$$\times \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^{m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}|k-l|^{\frac{1}{3}}\left\|\partial_y d_{k-l}\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_{k-l}^2}\left\|\langle k\rangle^{-m}\left(\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}+\langle\frac{1}{k}\rangle^{\frac{1}{2}-\epsilon}\right)\right\|_{L_k^2},$$

其上界与（4.12）相同。

结合（4.9）–（4.12），我们得到

$$\frac{1}{A}\left|\Re\left(\partial_{i,ph}^2\left(|\nabla d|^2 e_1\right)\left|\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}\partial_{i,ph}^2|D_x|^{\frac{2}{3}}d\right)\right|\right.$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \frac{1}{A}\left(\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\left(\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d^1\right)\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\right.\\
&\quad+\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\left(\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d^1\right)\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}\\
&\quad\left.\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\left(\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right)\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\right)\\
&\lesssim \frac{1}{A^{\frac{1}{6}}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d^1\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}.
\end{aligned}
$$

证明完毕。 □

引理的证明 4.4。 考虑以下分解:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{A}\left|\Re\left(\partial_{i,ph}^2\left(u\cdot\nabla d\right)\left|\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}\partial_{i,ph}^2|D_x|^{\frac{2}{3}}d\right.\right)\right|\\
&\lesssim \frac{1}{A}\int_{\mathbb{R}^2}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)(k-l)\partial_{i,fr}\partial_y\Delta_l^{-1}\omega_l\partial_{i,fr}^3d_k(y)\cdot d_{k-l}(y)dy\right|dkdl\\
&\quad+\frac{1}{A}\int_{\mathbb{R}^2}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)(k-l)\partial_y\Delta_l^{-1}\omega_l\partial_{i,fr}^3d_k(y)\cdot\partial_{i,fr}d_{k-l}(y)dy\right|dkdl\\
&\quad+\frac{1}{A}\int_{\mathbb{R}^2}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)\partial_{i,fr}(l\Delta_l^{-1}\omega_l)\partial_{i,fr}^3d_k(y)\cdot\partial_yd_{k-l}(y)dy\right|dkdl\\
&\quad+\frac{1}{A}\int_{\mathbb{R}^2}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|^{\frac{2}{3}}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)l\Delta_l^{-1}\omega_l\partial_{i,fr}^3d_k(y)\cdot\partial_{i,fr}\partial_yd_{k-l}(y)dy\right|dkdl\\
&=:\frac{1}{A}\int_{\mathbb{R}^2}\Phi_1(k,l)dkdl+\cdots+\frac{1}{A}\int_{\mathbb{R}^2}\Phi_4(k,l)dkdl.
\end{aligned}
$$

接下来，我们分四步估计各项。

步骤 I：估计 $\Phi_1(k,\ l)$。 根据（2.4）和（2.6），我们有

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{res}}(k,l)}\Phi_1(k,l)dkdl&\lesssim\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^m\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}|k|^{\frac{1}{3}}\left\|\partial_{i,fr}^3d_k\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_k^2}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}|l|^{-\frac{1}{3}}\left\|\partial_{i,fr}\partial_y\Delta_l^{-1}\omega_l\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_l^1}\\
&\quad\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^m\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}|k-l|^{\frac{5}{3}}\left\|d_{k-l}\right\|_{L_y^\infty}\right\|_{L_{k-l}^2}\\
&\lesssim\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\left(\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right)\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\omega\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\\
&\quad\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

其中，在上面的第一个不等式中，我们使用了 H¨older 不等式，得到

$$
\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}|l|^{-\frac{1}{3}}\left\|\partial_{i,fr}\partial_y\Delta_l^{-1}\omega_l\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_l^1}\lesssim\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\langle l\rangle^m\langle\frac{1}{l}\rangle^{\epsilon}\left\|\partial_{i,fr}\partial_y\Delta_l^{-1}\omega_l\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_l^2}\left\||l|^{-\frac{1}{3}}\langle l\rangle^{-m}\langle\frac{1}{l}\rangle^{-\epsilon}\right\|_{L_l^2}
$$

$$\lesssim \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\omega \right\|_{Y_{m,\epsilon}}$$

对于 $\epsilon > 0$. 此外，(2.7)意味着

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{HL}}(k,l)} \Phi_1(k,l)dkdl \\
\lesssim &\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^m \langle\frac{1}{k}\rangle^\epsilon |k|^{\frac{1}{3}} \left\|\partial^3_{i,fr}d_k\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_k} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\langle l\rangle^m \langle\frac{1}{l}\rangle^\epsilon |l|^{\frac{1}{3}} \left\|\partial_{i,fr}\partial_y\Delta_l^{-1}\omega_l\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_l} \\
&\times \left\| \langle k-l\rangle^{-m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{-\epsilon}|k-l|^{-\frac{1}{3}}\right\|_{L^2_{k-l}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^m\langle\frac{1}{k-l}\rangle^\epsilon |k-l|^{\frac{4}{3}}\|d_{k-l}\|_{L^\infty_y}\right\|_{L^2_{k-l}}
\end{aligned}$$

以及（2.8）-（2.9）蕴含

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{LH}}(k,l)} \Phi_1(k,l)dkdl \\
\lesssim &\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^m \langle\frac{1}{k}\rangle^\epsilon |k|^{\frac{1}{3}} \|\partial^3_{i,fr}d_k\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_k} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\langle l\rangle^m \langle\frac{1}{l}\rangle^\epsilon |l|^{\frac{1}{3}} \|\partial_{i,fr}\partial_y\Delta_l^{-1}\omega_l\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_l} \\
&\times \left\| \left(\langle\frac{1}{k}\rangle^\epsilon + \langle\frac{1}{k}\rangle^{\frac{1}{3}-\epsilon}\right)\langle k\rangle^{-m}\right\|_{L^2_k} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^m\langle\frac{1}{k-l}\rangle^\epsilon |k-l|^{\frac{4}{3}}\|d_{k-l}\|_{L^\infty_y}\right\|_{L^2_{k-l}},
\end{aligned}$$

其中两项均可由下式控制

$$\begin{aligned}
&C\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\left(\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right)\right\|_{Y_{m,\epsilon}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\omega\right\|_{Y_{m,\epsilon}} \\
&\times \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{m,\epsilon}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{m,\epsilon}}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

由（2.4）。

步骤 II：估计 $\Phi_2(k,\ l)$。利用（2.6），得到

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{res}}(k,l)} \Phi_2(k,l)dkdl \lesssim &\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^m\langle\frac{1}{k}\rangle^\epsilon|k|^{\frac{1}{3}}\left\|\partial^3_{i,fr}d_k\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_k} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}|l|^{-\frac{1}{6}}\left\|\partial_y\Delta_l^{-1}\omega_l\right\|_{L^\infty_y}\right\|_{L^1_l} \\
&\times \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^m\langle\frac{1}{k-l}\rangle^\epsilon|k-l|^{\frac{3}{2}}\left\|\partial_{i,fr}d_{k-l}\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_{k-l}} \\
\lesssim &\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\left(\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right)\right\|_{Y_{m,\epsilon}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\omega\right\|_{Y_{m,\epsilon}} \\
&\times \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^{\frac{5}{6}}_{Y_{m,\epsilon}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}\right\|^{\frac{1}{6}}_{Y_{m,\epsilon}},
\end{aligned} \tag{4.15}$$

其中我们使用了 H¨older 不等式和（2.5）得到

$$\left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}|l|^{-\frac{1}{6}}\|\partial_y\Delta_l^{-1}\omega_l\|_{L^\infty_y}\right\|_{L^1_l} \lesssim \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}|l|^{-\frac{2}{3}}\left\|\nabla_l\partial_y\Delta_l^{-1}\omega_l\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^1_l}$$

$$\lesssim \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\langle l\rangle^m\langle\frac{1}{l}\rangle^\epsilon \left\|\nabla_l\partial_y\Delta_l^{-1}\omega_l\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_l} \left\||l|^{-\frac{2}{3}}\langle l\rangle^{-m}\langle\frac{1}{l}\rangle^{-\epsilon}\right\|_{L^2_l}$$
$$\lesssim \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\omega\right\|_{Y_{m,\epsilon}}$$

对于 $\epsilon > \frac{1}{6}$. 再次利用（2.7）–（2.9），我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{HL}}(k,l)}\Phi_2(k,l)dkdl\\
\lesssim& \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^m\langle\frac{1}{k}\rangle^\epsilon|k|^{\frac{1}{3}}\left\|\partial^3_{i,fr}d_k\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_k} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\langle l\rangle^m\langle\frac{1}{l}\rangle^\epsilon|l|^{\frac{4}{3}}\left\|\partial_y\Delta_l^{-1}\omega_l\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_l}\\
&\times \left\||k-l|^{-\frac{1}{3}}\langle k-l\rangle^{-m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{-\epsilon}\right\|_{L^2_{k-l}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^m\langle\frac{1}{k-l}\rangle^\epsilon|k-l|^{\frac{1}{3}}\|\partial_{i,fr}d_{k-l}\|_{L^\infty_y}\right\|_{L^2_{k-l}},
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{LH}}(k,l)}\Phi_2(k,l)dkdl\\
\lesssim& \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^m\langle\frac{1}{k}\rangle^\epsilon|k|^{\frac{1}{3}}\|\partial^3_{i,fr}d_k\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_k} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\langle l\rangle^m\langle\frac{1}{l}\rangle^\epsilon|l|^{\frac{4}{3}}\|\partial_y\Delta_l^{-1}\omega_l\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_l}\\
&\times \left\|\left(\langle\frac{1}{k}\rangle^\epsilon+\langle\frac{1}{k}\rangle^{\frac{1}{3}-\epsilon}\right)\langle k\rangle^{-m}\right\|_{L^2_k} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^m\langle\frac{1}{k-l}\rangle^\epsilon|k-l|^{\frac{1}{3}}\|\partial_{i,fr}d_{k-l}\|_{L^\infty_y}\right\|_{L^2_{k-l}}.
\end{aligned}$$

由（2.4），两项均可由（4.14）控制。

第三步：对 $\Phi_3(k,\ l)$ 的估计。 由（2.4）和（2.6），我们推得

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{res}}(k,l)}\Phi_3(k,l)dkdl \lesssim& \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^m\langle\frac{1}{k}\rangle^\epsilon|k|^{\frac{1}{3}}\left\|\partial^3_{i,fr}d_k\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_k} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}|l|\left\|\partial_{i,fr}\Delta_l^{-1}\omega_l\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^1_l}\\
&\times \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^m\langle\frac{1}{k-l}\rangle^\epsilon|k-l|^{\frac{1}{3}}\left\|\partial_y d_{k-l}\right\|_{L^\infty_y}\right\|_{L^2_{k-l}}\\
\lesssim& \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\left(\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right)\right\|_{Y_{m,\epsilon}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\partial_x\nabla\Delta^{-1}\omega\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\\
&\times \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{m,\epsilon}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{m,\epsilon}}.
\end{aligned}\tag{4.16}$$

由（2.7）–（2.9），我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{HL}}(k,l)}\Phi_3(k,l)dkdl\\
\lesssim& \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^m\langle\frac{1}{k}\rangle^\epsilon|k|^{\frac{1}{3}}\left\|\partial^3_{i,fr}d_k\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_k} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\langle l\rangle^m\langle\frac{1}{l}\rangle^\epsilon|l|^{\frac{4}{3}}\left\|\partial_{i,fr}\Delta_l^{-1}\omega_l\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_l}\\
&\times \left\||k-l|^{-\frac{1}{3}}\langle k-l\rangle^{-m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{-\epsilon}\right\|_{L^2_{k-l}} \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^m\langle\frac{1}{k-l}\rangle^\epsilon|k-l|^{\frac{1}{3}}\|\partial_y d_{k-l}\|_{L^\infty_y}\right\|_{L^2_{k-l}},
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{LH}}(k,l)}\Phi_3(k,l)dkdl\\&\lesssim\left\|e^{aA^{-\frac13}|k|^{\frac23}t}\langle k\rangle^m\langle\frac1k\rangle^\epsilon|k|^{\frac13}\|\partial^3_{i,fr}d_k\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_k}\left\|e^{aA^{-\frac13}|l|^{\frac23}t}\langle l\rangle^m\langle\frac1l\rangle^\epsilon|l|^{\frac43}\|\partial_{i,fr}\Delta_l^{-1}\omega_l\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_l}\\&\quad\times\left\|\left(\langle\frac1k\rangle^\epsilon+\langle\frac1k\rangle^{\frac13-\epsilon}\right)\langle k\rangle^{-m}\right\|_{L^2_k}\left\|e^{aA^{-\frac13}|k-l|^{\frac23}t}\langle k-l\rangle^m\langle\frac{1}{k-l}\rangle^\epsilon|k-l|^{\frac13}\|\partial_y d_{k-l}\|_{L^\infty_y}\right\|_{L^2_{k-l}}.\end{aligned}$$

同理，这两项可由（4.14）控制。

第四步：对 $\Phi_4(k,\ l)$ 的估计。 一方面，由（2.6）可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{res}}(k,l)}\Phi_4(k,l)dkdl\lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac13}|k|^{\frac23}t}\langle k\rangle^m\langle\frac1k\rangle^\epsilon|k|^{\frac13}\left\|\partial^3_{i,fr}d_k\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_k}\left\|e^{aA^{-\frac13}|l|^{\frac23}t}|l|\left\|\Delta_l^{-1}\omega_l\right\|_{L^\infty_y}\right\|_{L^1_l}\\&\times\left\|e^{aA^{-\frac13}|k-l|^{\frac23}t}\langle k-l\rangle^m\langle\frac{1}{k-l}\rangle^\epsilon|k-l|^{\frac13}\|\partial_{i,fr}\partial_y d_{k-l}\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_{k-l}}.\end{aligned}\tag{4.17}$$

另一方面，由（2.7）–（2.9）可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{HL}}(k,l)}\Phi_4(k,l)dkdl\\&\lesssim\left\|e^{aA^{-\frac13}|k|^{\frac23}t}\langle k\rangle^m\langle\frac1k\rangle^\epsilon|k|^{\frac13}\left\|\partial^3_{i,fr}d_k\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_k}\left\|e^{aA^{-\frac13}|l|^{\frac23}t}\langle l\rangle^m\langle\frac1l\rangle^\epsilon|l|^{\frac32}\left\|\Delta_l^{-1}\omega_l\right\|_{L^\infty_y}\right\|_{L^2_l}\\&\quad\times\left\||k-l|^{-\frac12}\langle k-l\rangle^{-m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{-\epsilon}\right\|_{L^2_{k-l}}\left\|e^{aA^{-\frac13}|k-l|^{\frac23}t}\langle k-l\rangle^m\langle\frac{1}{k-l}\rangle^\epsilon|k-l|^{\frac13}\|\partial_y\partial_{i,fr}d_{k-l}\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_{k-l}},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{LH}}(k,l)}\Phi_4(k,l)dkdl\\&\lesssim\left\|e^{aA^{-\frac13}|k|^{\frac23}t}\langle k\rangle^m\langle\frac1k\rangle^\epsilon|k|^{\frac13}\|\partial^3_{i,fr}d_k\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_k}\left\|e^{aA^{-\frac13}|l|^{\frac23}t}\langle l\rangle^m\langle\frac1l\rangle^\epsilon|l|^{\frac32}\|\Delta_l^{-1}\omega_l\|_{L^\infty_y}\right\|_{L^2_l}\\&\quad\times\left\|\left(\langle\frac1k\rangle^\epsilon+\langle\frac1k\rangle^{\frac12-\epsilon}\right)\langle k\rangle^{-m}\right\|_{L^2_k}\left\|e^{aA^{-\frac13}|k-l|^{\frac23}t}\langle k-l\rangle^m\langle\frac{1}{k-l}\rangle^\epsilon|k-l|^{\frac13}\|\partial_y\partial_{i,fr}d_{k-l}\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_{k-l}}.\end{aligned}$$

因此，由

$$\begin{aligned}\left\|e^{aA^{-\frac13}|l|^{\frac23}t}|l|\left\|\Delta_l^{-1}\omega_l\right\|_{L^\infty_y}\right\|_{L^1_l}&\lesssim\left\|e^{aA^{-\frac13}|l|^{\frac23}t}\langle l\rangle^m\langle\frac1l\rangle^\epsilon l\left\|\nabla_l\Delta_l^{-1}\omega_l\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_l}\left\||l|^{-\frac12}\langle l\rangle^{-m}\langle\frac1l\rangle^{-\epsilon}\right\|_{L^2_l}\\&\lesssim\left\|e^{aA^{-\frac13}|D_x|^{\frac23}t}\partial_x\nabla\Delta^{-1}\omega\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\end{aligned}$$

以及（2.5）可知

$$\int_{\mathcal{R}^2}\Phi_4(k,l)dkdl\lesssim\left\|e^{aA^{-\frac13}|D_x|^{\frac23}t}\nabla\left(\nabla^2|D_x|^{\frac13}d\right)\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac13}|D_x|^{\frac23}t}\partial_x\nabla\Delta^{-1}\omega\right\|_{Y_{m,\epsilon}}$$

$$\times \left\| e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d \right\|_{Y_{m,\epsilon}}. \tag{4.18}$$

步骤 V：汇总。汇总（4.13）–（4.18），并根据$X_{a,\ m,\ \epsilon}$中的定义（1.5），得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{A}\left|\Re\left(\partial_{i,ph}^2\left(u\cdot\nabla d\right)\left|\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}\partial_{i,ph}^2|D_x|^{\frac{2}{3}}d\right.\right)\right|dt\\ \lesssim&\frac{1}{A^{\frac{1}{3}}}\left\|\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}\|\omega\|_{X_{a,m,\epsilon}}\left(\left\|\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}+\left\|\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}\right).\end{aligned}$$

证明完毕。 □

5. 涡量的能量估计 ω

本节中，我们给出速度（涡量，见命题 5.1）的能量估计，然后给出证明。

命题 5.1. 对于 $0<a<\frac{1}{16(1+2\pi)}$ 和 $0<\epsilon<\frac{1}{2}<m$，有

$$\begin{aligned}\|\omega\|_{X_{a,m,\epsilon}}^2\leq& C\|\omega_{\text{in}}\|_{Y_{m,\epsilon}}^2+\frac{C}{A^{\frac{1}{2}}}\|\omega\|_{X_{a,m,\epsilon}}^3\\&+\frac{C}{A^{\frac{1}{3}}}\|\omega\|_{X_{a,m,\epsilon}}\|\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\|_{X_{a,m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}\left\|\left(\partial_x^2,\partial_y^2\right)|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}\\&\times\left(\left\|\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}+\left\|\left(\partial_x^2,\partial_y^2\right)|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^{\frac{1}{2}}\right).\end{aligned}$$

证明. 回忆

$$\partial_t\omega+y\partial_x\omega-\frac{1}{A}\Delta\omega=-\frac{1}{A}\Big[u\cdot\nabla\omega-\partial_x\left(\partial_y d\cdot\Delta d\right)+\partial_y\left(\partial_x d\cdot\Delta d\right)\Big]. \tag{5.1}$$

将命题2.1 应用于（5.1），可得

$$\begin{aligned}\|\omega\|_{X_{a,m,\epsilon}}^2\lesssim&\|\omega_{\text{in}}\|_{Y_{m,\epsilon}}^2+\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}\|\omega\|_{X_{a,m,\epsilon}}^3\\&+\frac{1}{A}\int_0^t\left|\Re\left(\partial_x\left(\partial_y d\cdot\Delta d\right)\left|\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}\omega\right.\right)\right|dt\\&+\frac{1}{A}\int_0^t\left|\Re\left(\partial_y\left(\partial_x d\cdot\Delta d\right)\left|\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}\omega\right.\right)\right|dt.\end{aligned} \tag{5.2}$$

然后，我们通过分三步估计其余各项来完成证明。

第一步：估计 $\partial_x(\partial_y d\cdot\Delta d)$。借助傅里叶变换，我们有

$$\begin{aligned}&\left|\Re\left(\partial_x\left(\partial_y d\cdot\Delta d\right)\left|\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}\omega\right.\right)\right|\\\lesssim&\int_{\mathbb{R}^2}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)\omega_k(y)\partial_y d_l(y)\cdot\Delta_{k-l}d_{k-l}(y)dy\right|dkdl\end{aligned}$$

• **在 $\mathcal{R}_{\mathbf{res}}(k,l)$中。** 由式（2.6）和推论 2.6 ($\alpha=\beta=\frac{1}{3}$)，可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{res}}(k,l)} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)\omega_k(y)\partial_y d_l(y)\cdot\Delta_{k-l}d_{k-l}(y)dy\right|dkdl\\
\lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}|k|^{\frac{1}{3}}\left\|\omega_k\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_k}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\left\|\partial_y d_l\right\|_{L^\infty_y}\right\|_{L^1_l}\\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^{m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}|k-l|^{\frac{2}{3}}\left\|\Delta_{k-l}d_{k-l}\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_{k-l}}\\
\lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\omega\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\partial_y|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{m,\epsilon}}\\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\partial_y^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}.
\end{aligned}\tag{5.3}$$

• **在 $\mathcal{R}_{\mathbf{HL}}(k,l)$中。** 由 (2.4) 和 (2.7)，可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{HL}}(k,l)} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)\omega_k(y)\partial_y d_l(y)\cdot\Delta_{k-l}d_{k-l}(y)dy\right|dkdl\\
\lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}|k|^{\frac{1}{3}}\left\|\omega_k\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_k}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\langle l\rangle^{m}\langle\frac{1}{l}\rangle^{\epsilon}|l|^{\frac{2}{3}}\left\|\partial_y d_l\right\|_{L^\infty_y}\right\|_{L^2_l}\\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^{m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}|k-l|^{\frac{1}{3}}\left\|\Delta_{k-l}d_{k-l}\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_{k-l}}\left\||k-l|^{-\frac{1}{3}}\langle k-l\rangle^{-m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{-\epsilon}\right\|_{L^2_{k-l}}\\
\lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\omega\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\partial_y|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{m,\epsilon}}\\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\partial_y^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}.
\end{aligned}\tag{5.4}$$

• **在 $\mathcal{R}_{\mathbf{LH}}(k,l)$中。** 不等式 (2.4)、(2.8) 和 (2.9) 表明

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{LH}}(k,l)} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}|k|\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)\omega_k(y)\partial_y d_l(y)\cdot\Delta_{k-l}d_{k-l}(y)dy\right|dkdl\\
\lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}|k|^{\frac{1}{3}}\|\omega_k\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_k}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\langle l\rangle^{m}\langle\frac{1}{l}\rangle^{\epsilon}|l|^{\frac{2}{3}}\|\partial_y d_l\|_{L^\infty_y}\right\|_{L^2_l}\\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^{m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}|k-l|^{\frac{1}{3}}\|\Delta_{k-l}d_{k-l}\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_{k-l}}\left\|\left(\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}+\langle\frac{1}{k}\rangle^{\frac{1}{3}-\epsilon}\right)\langle k\rangle^{-m}\right\|_{L^2_k},
\end{aligned}$$

它可以由与 (5.4) 相同的界控制。

步骤 II： $\partial_y\left(\partial_x d\cdot\ \Delta d\right)$**的估计。**注意到

$$\begin{aligned}
&\left|\Re\left(\partial_y\left(\partial_x d\cdot\Delta d\right)\left|\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}\omega\right.\right)\right|\\
\lesssim&\int_{\mathbb{R}^2}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)\partial_y\omega_k(y)ld_l(y)\cdot\Delta_{k-l}d_{k-l}(y)dy\right|dkdl.
\end{aligned}$$

• **在 $\mathcal{R}_{\mathbf{res}}(k,l)$中。** 由（2.6）和推论 2.6 ($f_l = |l|^{\frac{2}{3}} d_l$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$)，我们可推得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{res}}(k,l)} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)\partial_y\omega_k(y)ld_l(y)\cdot\Delta_{k-l}d_{k-l}(y)dy\right|dkdl\\
\lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}\left\|\partial_y\omega_k\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_k}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}|l|^{\frac{2}{3}}\left\|d_l\right\|_{L^\infty_y}\right\|_{L^1_l}\\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^{m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}|k-l|^{\frac{1}{3}}\left\|\Delta_{k-l}d_{k-l}\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_{k-l}}\\
\lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\omega\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\partial_x|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{m,\epsilon}}\\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\partial_y|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}.
\end{aligned}\tag{5.5}$$

• **在 $\mathcal{R}_{\mathbf{HL}}(k,\ l)$中。** 由 (2.4)、(2.7) 及 $1\lesssim|l|^{\frac{1}{6}}|k-l|^{-\frac{1}{6}}$，可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{HL}}(k,l)} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)\partial_y\omega_k(y)ld_l(y)\cdot\Delta_{k-l}d_{k-l}(y)dy\right|dkdl\\
\lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}\left\|\partial_y\omega_k\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_k}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\langle l\rangle^{m}\langle\frac{1}{l}\rangle^{\epsilon}|l|^{\frac{7}{6}}\left\|d_l\right\|_{L^\infty_y}\right\|_{L^2_l}\\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^{m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}|k-l|^{\frac{1}{3}}\left\|\Delta_{k-l}d_{k-l}\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_{k-l}}\left\||k-l|^{-\frac{1}{2}}\langle k-l\rangle^{-m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{-\epsilon}\right\|_{L^2_{k-l}}\\
\lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla\omega\right\|_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\partial_x|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{m,\epsilon}}\\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}|D_x|^{\frac{1}{3}}\partial_y|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^{\frac{1}{2}}_{Y_{m,\epsilon}}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\nabla^2|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|_{Y_{m,\epsilon}}.
\end{aligned}\tag{5.6}$$

• **在 $\mathcal{R}_{\mathbf{LH}}(k,\ l)$中。** 由 (2.4)、(2.8) 及 (2.9)，可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{R}_{\mathrm{LH}}(k,l)} e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{2m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{2\epsilon}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}\left(k,D_y\right)\partial_y\omega_k(y)ld_l(y)\cdot\Delta_{k-l}d_{k-l}(y)dy\right|dkdl\\
\lesssim&\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\langle k\rangle^{m}\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}\left\|\partial_y\omega_k\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_k}\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}t}\langle l\rangle^{m}\langle\frac{1}{l}\rangle^{\epsilon}|l|^{\frac{7}{6}}\left\|d_l\right\|_{L^\infty_y}\right\|_{L^2_l}\\
&\times\left\|e^{aA^{-\frac{1}{3}}|k-l|^{\frac{2}{3}}t}\langle k-l\rangle^{m}\langle\frac{1}{k-l}\rangle^{\epsilon}|k-l|^{\frac{1}{3}}\left\|\partial^2_{i,fr}d_{k-l}\right\|_{L^2_y}\right\|_{L^2_{k-l}}\left\|\langle k\rangle^{-m}\left(\langle\frac{1}{k}\rangle^{\epsilon}+\langle\frac{1}{k}\rangle^{\frac{1}{2}-\epsilon}\right)\right\|_{L^2_k},
\end{aligned}$$

它可以由 (5.6) 的最后一项控制。

第三步：汇总。 结合（5.3）–（5.6），得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{A}\int_0^t\left|\Re\left(\partial_x\left(\partial_y d\cdot\Delta d\right)\left|\mathcal{M}e^{2aA^{-\frac{1}{3}}|D_x|^{\frac{2}{3}}t}\langle D_x\rangle^{2m}\langle\frac{1}{D_x}\rangle^{2\epsilon}\omega\right.\right)\right|dt\\
\lesssim&\frac{1}{A^{\frac{2}{3}}}\left\|\omega\right\|_{X_{a,m,\epsilon}}\left\|\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^{\frac{1}{2}}_{X_{a,m,\epsilon}}\left\|\left(\partial^2_x,\partial^2_y\right)|D_x|^{\frac{1}{3}}d\right\|^{\frac{3}{2}}_{X_{a,m,\epsilon}}
\end{aligned}$$

and

$$\int_0^t \left| \Re \left(\partial_y \left(\partial_x d \cdot \Delta d \right) \middle| \mathcal{M} e^{2aA^{-\frac{1}{3}} |D_x|^{\frac{2}{3}} t} \langle D_x \rangle^{2m} \langle \frac{1}{D_x} \rangle^{2\epsilon} \omega \right) \right| dt$$
$$\lesssim \frac{1}{A^{\frac{1}{3}}} \|\omega\|_{X_{a,m,\epsilon}} \left\| \nabla |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{X_{a,m,\epsilon}} \left\| \left(\partial_x^2, \partial_y^2 \right) |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{X_{a,m,\epsilon}},$$

这与（5.2）一起，完成了证明。

□

6. 命题 2.8的证明

在本节中，我们闭合能量估计以完成自举论证，即给出命题2.8的证明。

命题 2.8的证明。 由（2.10）及杨氏不等式，我们有

$$\left\| |D_x|^{\frac{1}{3}} \nabla d \right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^2 \leq C \left(\left\| |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^2 + \left\| |D_x|^{\frac{1}{3}} \nabla^2 d \right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^2 \right) \leq C K^2.$$

由命题 3.1 可知，对 $0 \leq t \leq T$，成立

$$\begin{aligned}
\left\| |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^2 &\leq C \left\| |D_x|^{\frac{1}{3}} d_{\text{in}} \right\|_{Y_{m,\epsilon}}^2 + \frac{C}{A^{\frac{1}{2}}} \|\omega\|_{X_{a,m,\epsilon}} \left\| |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^2 \\
&\quad + \frac{C}{A^{\frac{1}{3}}} \left\| |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^2 \left\| \nabla |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^2 \\
&\quad + \frac{C}{A^{\frac{1}{6}}} \left\| |D_x|^{\frac{1}{3}} d^1 \right\|_{X_{a,m,\epsilon}} \left\| |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{X_{a,m,\epsilon}} \left\| \nabla |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{X_{a,m,\epsilon}}. \\
&\leq C \left\| |D_x|^{\frac{1}{3}} d_{\text{in}} \right\|_{Y_{m,\epsilon}}^2 + \frac{C}{A^{\frac{1}{6}}} K^2 \left\| |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^2 + \frac{C}{A^{\frac{1}{2}}} \left\| |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^2 K^2.
\end{aligned}$$

类似地，由命题4.1 我们有

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(\partial_x^2, \partial_y^2 \right) |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{X_{a,m,\epsilon}}^2 \\
&\leq C \left\| \left(\partial_x^2, \partial_y^2 \right) |D_x|^{\frac{1}{3}} d_{\text{in}} \right\|_{Y_{m,\epsilon}}^2 + CA \left\| |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{X_{a,m,\epsilon}} \left\| \left(\partial_x^2, \partial_y^2 \right) |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{X_{a,m,\epsilon}} + \frac{C}{A^{\frac{1}{6}}} K^4
\end{aligned}$$

以及命题 5.1意味着

$$\|\omega\|_{X_{a,m,\epsilon}}^2 \leq C \|\omega_{\text{in}}\|_{Y_{m,\epsilon}}^2 + \frac{C}{A^{\frac{1}{3}}} K^3.$$

因此，(2.10) 推出

$$\begin{aligned}
E(t) &= A^{\delta} \left\| |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{X_{a,m,\epsilon}} + \left\| \left(\partial_x^2, \partial_y^2 \right) |D_x|^{\frac{1}{3}} d \right\|_{X_{a,m,\epsilon}} + \|\omega\|_{X_{a,m,\epsilon}} \\
&\leq C A^{\delta} \left\| |D_x|^{\frac{1}{3}} d_{\text{in}} \right\|_{Y_{m,\epsilon}} + C \left\| \left(\partial_x^2, \partial_y^2 \right) |D_x|^{\frac{1}{3}} d_{\text{in}} \right\|_{Y_{m,\epsilon}} + C \|\omega_{\text{in}}\|_{Y_{m,\epsilon}} + \frac{C}{A^{\frac{1}{12}}} K^2 + C A^{\frac{1-\delta}{2}} K.
\end{aligned}$$

然后，选择 $\delta > 1$ 并且

$$\bar{A}_1 = C(m, \epsilon, \delta) K^{\max\{\frac{2}{\delta-1}, 24\}}$$

使得如果 $A > A_1$，则可得

$$1 \geq \frac{C}{A^{\frac{1}{12}}} K^2 + C A^{\frac{1-\delta}{2}} K.$$

接下来，由 (1.6) 定义

$$E(t) \leq C \left(\left\| \left(\partial_x^2, \partial_y^2 \right) |D_x|^{\frac{1}{3}} d_{\text{in}} \right\|_{Y_{m,\epsilon}} + \|\omega_{\text{in}}\|_{Y_{m,\epsilon}} + 1 \right) =: K,$$

注意到……，由此完成证明

$$A \geq C(m, \epsilon, \delta) \left(\left\| \left(\partial_x^2, \partial_y^2 \right) |D_x|^{\frac{1}{3}} d_{\text{in}} \right\|_{Y_{m,\epsilon}} + \|\omega_{\text{in}}\|_{Y_{m,\epsilon}} + 1 \right)^{\max\{\frac{2}{\delta-1}, 24\}}.$$

□

声明

•**致谢** W. Wang 得到了国家重点研发计划（编号：2023YFA1009200）和国家自然科学基金委员会项目（项目编号：12471219）的资助。J. Wei 的研究部分得到了香港研究资助局优配研究金的资助，项目名称为“非线性偏微分方程奇点形成的新前沿”。

- **利益冲突** 作者声明不存在利益冲突。
- **数据可用性** 本文不适用数据共享，因为本研究期间未生成或分析任何数据集。

参考文献

[*AB*25] *R. Arbon* 与 *J. Bedrossian*，无界区域上具纳维边界条件的库埃特流的定量流体动力学稳定性，《数学物理通讯》*406 (2025)*，第*6*期，论文编号*129*，*57*页。[*BCZV*19] *J. Bedrossian*、*M. Coti Zelati* 与 *V. Vicol*，线性化二维欧拉方程中的涡旋轴对称化、无粘阻尼与涡量耗尽，《偏微分方程年刊》*5 (2019)*，第*1*期，论文编号*4*，*192*页。[*BGM*17] *J. Bedrossian*、*P. Germain* 与 *N. Masmoudi*，论索*об*列夫正则性下三维库埃特流的稳定性阈值，《数学年刊》（*2*）*185 (2017)*，第*2*期，*541–608*。[*BH*17] *J. Bedrossian* 与 *S. He*，借助剪切流抑制 *Patlak-Keller-Segel*模型中的爆破，《*SIAM*数学分析杂志》*49 (2017)*，第*6*期，*4722–4766*。[*BL*94] *A. J. Bernoff* 与 *J. F. Lingevitch*，轴对称涡旋的快速松弛，《流体物理学》*6 (1994)*，第*11*期，*3717–3723*。[*BM*15] *J. Bedrossian* 与 *N. Masmoudi*，二维欧拉方程中平面剪切流的无粘阻尼与渐近稳定性，数学研究所出版物，高等´科学研究 *122 (2015)*，*195–300*。[*BMV*16] *J. Bedrossian*、*N. Masmoudi* 与 *V. Vicol*，二维库埃特流附近纳维-斯托克斯方程无黏极限中的增强耗散与无粘阻尼，《理性力学与分析档案》*219 (2016)*，第*3*期，*1087–1159*。

[BVW18] J. Bedrossian、V. Vicol 与 F. Wang，库埃特附近二维剪切流的Sobole夫稳定性阈值，《非线性科学杂志》28 (2018)，第6期，2051–2075。[CDY92] K.-C. Chang、W. Y. Ding 与 R. Ye，曲面调和映射热流的有限时间爆破，《微分几何杂志》36 (1992)，第2期，507–515。[CHL20] G. Chen、T. Huang 与 W. Liu，经由完整 Ericksen-Leslie 模型的向列型液晶泊肃叶流，《理性力学与分析档案》236 (2020)，第2期，839–891。[CHXZ26] G. Chen、T. Huang、X. Xu 与 Q. Zhang，二维双曲 Ericksen-Leslie 系统的泊肃叶流，《变分法与偏微分方程计算》65 (2026)，第2期，论文编号65。[CLWZ20] Q. Chen、T. Li、D. Wei 与 Z. Zhang，有限通道中二维库埃特流的转变阈值，《理性力学与分析档案》238 (2020)，第1期，125–183。[CW24] S. Cui 与 W. Wang，借助有限通道中的泊肃叶流抑制多物种 Patlak-Keller-Segel-Navier-Stokes 系统中的爆破，《SIAM数学分析杂志》56 (2024)，第6期，7683–7712。[CWW+25] S. Cui、L. Wang、W. Wang、J. Wei 与 G. Yang，借助库埃特流与逻辑斯蒂源项得到的三维 Patlak-Keller-Segel-Navier-Stokes 系统的整体有界解，arXiv预印本 arXiv:2509.18718 (2025)。[CWWW25] S. Cui、L. Wang、W. Wang 与 J. Wei，论借助库埃特流的三维 Patlak-Keller-Segel-Navier-Stokes 系统的尖锐临界质量阈值，arXiv预印本 arXiv:2506.10578 (2025)。[CWY25a] Y. Chen、W. Wang 与 G. Yang，借助 $\mathbb{R}^2$上的库埃特流对 Patlak-Keller-Segel（-Navier-Stokes）系统的定量爆破解除，arXiv预印本 arXiv:2511.12915 (2025)。[CWY25b] ，$\mathbb{R}^2$中 Boussinesq 方程的库埃特流稳定性阈值，arXiv预印本 arXiv:2508.11908 (2025)。[CWYZ25] Y. Chen、W. Wang、G. Yang 与 Y. Zhang，$\mathbb{R}^2$中库埃特流附近一类广义 Hillen-Painter 模型的整体有界解，预印本 (2025)。[CWZ24] Q. Chen、D. Wei 与 Z. Zhang，有限通道中三维库埃特流的转变阈值，《美国数学会纪要》296 (2024)，第1478期，v+178。[DdPW20] J. D´avila、M. del Pino 与 J. Wei，映入 S^2的二维调和映射流的奇点形成，《数学发明》219 (2020)，第2期，345–466。[DEE88] M. Doi、S. F. Edwards 与 S. F. Edwards，高分子动力学理论，第73卷，牛津大学出版社，1988。[dG74] P.-G. de Gennes，液晶物理学，物理学国际专著丛书 (1974)。[DSW25] S. Deng、B. Shi 与 W. Wang，借助全空间中的库埃特流抑制三维 Keller-Segel 模型中的爆破，《微分方程杂志》432 (2025)，论文编号113265，40页。[DWZ21] W. Deng、J. Wu 与 P. Zhang，具垂直耗散的二维 Boussinesq 系统中库埃特流的稳定性，《泛函分析杂志》281 (2021)，第12期，论文编号109255，40页。[Eri62] J. L. Ericksen，液晶静水理论，《理性力学与分析档案》9 (1962)，371–378。[HLLW16] T. Huang、F. Lin、C. Liu 与 C. Wang，三维向列型液晶流的有限时间奇异性，《理性力学与分析档案》221 (2016)，第3期，1223–1254。[HLW14] J. Huang、F. Lin 与 C. Wang，$\mathbb{R}^2$中 Ericksen-Leslie 系统整体解的正则性与存在性，《数学物理通讯》331 (2014)，第2期，805–850。[HLX14] M.-C. Hong、J. Li 与 Z. Xin，$\mathbb{R}^3$中 Ericksen-Leslie 系统强解的爆破准则，《偏微分方程通讯》39 (2014)，第7期，1284–1328。[Hon11] M.-C. Hong，二维简化 Ericksen-Leslie 系统解的整体存在，《变分法与偏微分方程计算》40 (2011)，第1–2期，15–36。

[HX12] M.-C. Hong 和 Z. Xin， $\mathbb{R}^2$中 Oseen-Frank 模型液晶流解的整体存在性，Adv. Math. 231 (2012), no. 3-4, 1364–1400.[IJ20] A. D. Ionescu 和 H. Jia，通道中库埃特流附近的无粘阻尼，Comm. Math. Phys. 374 (2020), no. 3, 2015–2096.[Jia20] H. Jia，单调剪切流附近的线性无粘阻尼，SIAM J. Math. Anal. 52 (2020), no. 1, 623–652.[Kel87] L. Kelvin，流体运动的稳定性：两块平行板之间粘性流体的直线运动，Phil. Mag 24 (1887), no. 5, 188–196.[KW25] J. Kortum 和 C. Wang，三维轴对称 Ericksen–Leslie 系统全局弱解的存在性与紧性，SIAM J. Math. Anal. 57 (2025), no. 6, 6660–6684.[KX16] A. Kiselev 和 X. Xu，通过混合抑制趋化性爆炸，Arch. Ration. Mech. Anal. 222 (2016), no. 2, 1077–1112.[Lan46] L. Landau，关于电子等离子体的振荡，Acad. Sci. USSR. J. Phys. 10 (1946), 25–34.[LB01] M. Latini 和 A. J. Bernoff，泊肃叶流中的瞬态反常扩散，流体力学杂志 441 (2001), 399–411.[Les68] F. M. Leslie，液晶的一些本构方程，Arch. Rational Mech. Anal. 28 (1968), no. 4, 265–283.[LL95] F.-H. Lin 和 C. Liu，描述液晶流动的非抛物型耗散系统，Comm. Pure Appl. Math. 48 (1995), no. 5, 501–537.[LL96] ，描述液晶流动的动力系统的部分正则性，Discrete Contin. Dynam. Systems 2 (1996), no. 1, 1–22.[LLW10] F. Lin、J. Lin 和 C. Wang，二维液晶流，Arch. Ration. Mech. Anal. 197 (2010), no. 1, 297–336.[LLW+22] C.-C. Lai、F. Lin、C. Wang、J. Wei 和 Y. Zhou，二维向列型液晶流的有限时间爆破，Comm. Pure Appl. Math. 75 (2022), no. 1, 128–196.[LLZ14] Z. Lei、D. Li 和 X. Zhang，关于二维液晶流和调和映射热流整体适定性的注记，Proc. Amer. Math. Soc. 142 (2014), no. 11, 3801–3810.[LLZ26] H. Li、N. Liu 和 W. Zhao，整个平面上二维库埃特流的稳定性阈值，J. Funct. Anal. 290 (2026), no. 4, Paper No. 111271.[LW10] F. Lin 和 C. Wang，关于调和映射热流及向列型液晶流体动力学流的唯一性，Chinese Ann. Math. Ser. B 31 (2010), no. 6, 921–938.[LW16] ,三维向列型液晶流弱解的整体存在性，Comm. Pure Appl. Math. 69 (2016), no. 8, 1532–1571.[LXX25] H. Li、Z. Xiang 和 X. Xu，通过泊肃叶流抑制 Patlak-Keller-Segel-Navier-Stokes 系统中的爆破，J. Differential Equations 434 (2025), Paper No. 113301, 48.[MV11] C. Mouhot 和 C. Villani，关于朗道阻尼，Acta Math. 207 (2011), no. 1, 29–201.[MZ22] N. Masmoudi 和 W. Zhao，Sobolev 空间中二维库埃特流的稳定性阈值，Ann. Inst. H. Poincar´e C Anal. Non Lin´eaire 39 (2022), no. 2, 245–325.[Ons49] L. Onsager，形状对胶体粒子相互作用的影响，Annals of the New York Academy of Sciences 51 (1949), no. 4, 627–659.

[*Orr*07] *W. M. Orr*，理想液体和粘性液体定常运动的稳定性或不稳定性。第二部分：粘性液体，*Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences, vol. 27, JSTOR, 1907, pp. 69–138.*[*Ray*79] *L. Rayleigh*，论某些流体运动的稳定性或不稳定性，*Proceedings of the London Math- ematical Society 1 (1879), no. 1, 57–72.*[*RY*83] *P. B. Rhines* 和 *W. R. Young*，闭合流线内被动标量的混合速度有多快？，流体力学杂志 *133 (1983), 133–145.*[*Som*08] *A. Sommerfield*，关于湍流流体运动的流体动力学解释的贡献，*Atti Congr. Int. Math. 4th (1908).*[*Tho*88] *W. Thomson*，*1.* 流体运动的稳定性——两平行平面之间粘性流体的直线运动，*Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 14 (1888), 359–368.*[*WW*14] *M. Wang* 和 *W. Wang*，二维 *Ericksen-Leslie* 系统弱解的整体存在性，*Calc. Var. Partial Differential Equations 51 (2014), no. 3-4, 915–962.*[*WWZ*16] *M. Wang*、*W. Wang* 和 *Z. Zhang*，关于二维 *Ericksen-Leslie* 系统弱解的唯一性，*Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 21 (2016), no. 3, 919–941.*[*WZ*21] *D. Wei* 和 *Z. Zhang*，*Sobolev* 空间中三维库埃特流的转变阈值，*Comm. Pure Appl. Math. 74 (2021), no. 11, 2398–2479.*[*WZ*23] ，二维库埃特流的非线性增强耗散与无粘阻尼，*Tunis. J. Math. 5 (2023), no. 3, 573–592.*[*WZZ*13] *W. Wang*、*P. Zhang* 和 *Z. Zhang*，*Ericksen-Leslie* 系统的适定性，*Arch. Ration. Mech. Anal. 210 (2013), no. 3, 837–855.*[*WZZ*18] *D. Wei*、*Z. Zhang* 和 *W. Zhao*，*Sobolev* 空间中一类单调剪切流的线性无粘阻尼，*Comm. Pure Appl. Math. 71 (2018), no. 4, 617–687.*[*WZZ* 19] ，剪切流的线性无粘阻尼与涡量耗尽，*Ann. PDE 5 (2019), no. 1, Paper No. 3, 101.*[*WZZ* 20] ，*Kolmogorov*流的线性无粘阻尼与增强耗散，*Adv. Math. 362 (2020), 106963, 103.*[*XZ*12] *X. Xu* 和 *Z. Zhang*，二维液晶流弱解的整体正则性与唯一性，*J. Differential Equations 252 (2012), no. 2, 1169–1181.*[*Zil* 16] *C. Zillinger*，有限周期通道中单调剪切流的线性无粘阻尼、边界效应、爆破与临界*Sobolev*正则性，*Arch. Ration. Mech. Anal. 221 (2016), no. 3, 1449–1509.*[*ZZZ*21] *L. Zeng*、*Z. Zhang* 和 *R. Zi*，通过库埃特流抑制 *Patlak-Keller-Segel-Navier-Stokes* 系统中的爆破，*J. Funct. Anal. 280 (2021), no. 10, Paper No. 108967, 40.*

(Yubo Chen) 数学科学学院，大连理工大学，大连，116024，中国电子邮箱： 1220823215@mail.dlut.edu.cn
(Wendong Wang) 数学科学学院，大连理工大学，大连，116024，中国电子邮箱： wendong@dlut.edu.cn
(Juncheng Wei) 数学系，香港中文大学，沙田，新界，香港电子邮箱： wei@math.cuhk.edu.hk(GuoxuYang)数学科学学院，大连理工大学，大连，116024，中国电子邮箱： guoxu dlut@outlook.com