解卷绕不变类的保真定理：模态逻辑与图神经网络的统一方法

Przemysław Andrzej Wałęga
伦敦玛丽女王大学 英国伦敦
p.walega@qmul.ac.uk

Bernardo Cuenca Grau 牛津
大学 英国牛津
bernardo.grau@cs.ox.ac.uk

arXiv:2602.01856v1 [cs.LO] 2 Feb 2026

摘要

我们研究有限结构上的模态逻辑保持定理，考察三种基本语义关系：嵌入、单射同态和同态。我们关注在有界展开下保持不变的带指定点的克里普克模型类；这是一种自然的局部性条件，模态逻辑和图神经网络（GNN）均满足该条件。我们证明，在嵌入下保持等价于可由存在分级模态逻辑定义；在单射同态下保持等价于可由存在正分级模态逻辑定义；在同态下保持则等价于可由存在正模态逻辑定义。一项关键的技术贡献是关于结构的良拟序结果。我们证明，在一致有界高度的树形模型类上，嵌入关系构成良拟序，并证明有界高度这一假设不可或缺。该良拟序结果带来一种有限极小树论证，从而通过有限析取的（分级）模态公式，得到明确的句法刻画。

作为一项应用，我们推导出关于图神经网络表达能力的结论。利用针对单射同态的保持定理，我们得到了单调图神经网络的一种新逻辑刻画，表明它们恰好对应存在正计数模态逻辑，而采用 MAX聚合的单调图神经网络则恰好对应存在正模态逻辑。

CCS 概念

• **计算理论** → **有限模型论**；**模态与时序逻辑**。

关键词

保持定理、有限模型论、模态逻辑、图神经网络的表达能力

ACM 参考格式：
Przemysław Andrzej Wałęga 和 Bernardo Cuenca Grau。2026。《展开不变类的保持定理：模态逻辑与图神经网络的统一方法》。载于 请从您的权利确认电子邮件中输入正确的会议标题（会议缩写“*XX*”）。ACM，美国纽约州纽约市，13页。https://doi.org/XXXXXXX.XXXXXXX

允许为个人或课堂使用而免费制作本作品的全部或部分数字副本或纸质副本，前提是不得为盈利或商业利益而制作或分发副本，且副本首页须附有本声明和完整引文。对于本作品中由作者以外的其他人拥有版权的部分，必须尊重其版权。注明出处后可以摘录。若要以其他方式复制、再版、发布到服务器或分发至列表，则须事先获得明确许可和/或支付费用。请通过 permissions@acm.org 申请许可。会议缩写“*XX*”，纽约州伍德斯托克 © 2026 版权所有归所有者/作者所有。出版权授权予 ACM。ACM ISBN 978-1-4503-XXXX-X/2018/06 https://doi.org/XXXXXXX.XXXXXXX

1 引言

保持定理是模型论和理论计算机科学中的核心主题。它们刻画结构类的闭包性质（例如在嵌入或同态下保持），并将其与特定逻辑片段中的可定义性联系起来。Łoś-Tarski 定理、Lyndon 定理和同态保留定理是三个经典例子 [19, 22, 23, 32]。每个定理都指出，一阶逻辑的某个特定片段——分别是存在片段、正片段和存在正片段——在逻辑等价意义下，恰好与这样一类一阶公式同样具有表达力：这些公式的模型在结构之间相应的关系下保持不变，而这些关系分别是嵌入、满同态和同态。

尽管这些经典保持定理对任意结构都成立，但其中许多定理在限制为有限结构时便不再成立。标准证明依赖于紧致性以及经典模型论中的其他无穷技术 [36], ，而这些技术在有限情形下无法使用 [15, 20, 29]。只有少数经典工具（其中最值得一提的是 Ehrenfeucht-Fraïssé 博弈）也适用于有限模型论，但它们不足以弥补紧致性失效所留下的缺口。因此，Łoś-Tarski 和 Lyndon 等重要保持定理已知在有限结构上并不成立 [20, 29]。相比之下，Rossman 的一项突破性成果表明，同态保留定理在有限结构上仍然成立 [30]。

保持定理也已在模态逻辑的框架下得到广泛研究。与一阶逻辑不同，标准模态逻辑本质上具有局部性，并享有树模型性质 [5, 6, 10]。模态语义在互模拟下保持不变，并可通过展开得到规范的树表示。Van Benthem 的经典刻画定理表明，在任意结构上，在互模拟下不变的一阶性质恰好是基本模态逻辑 ML 可定义的性质。随后，Rosen 证明了这种对应关系在有限结构上仍然成立，从而确立了即使缺少紧致性，互模拟不变性仍足以保证模态可定义性 [28, 29]。

此外，Rosen [28] 证明了一个有限模态版本的 Łoś-Tarski 保持定理，表明在有限带指模型上，在嵌入下保持不变的 ML 公式可由 ML 的存在片段定义。最近，Abramsky 和 Reggio [3] 利用范畴论方法和博弈余单子 [1, 2]，为同态保持定理构建了一个统一框架。特别是，他们证明，对于模态逻辑以及分级模态逻辑 GML，在同态下保持不变等价于可由存在正

片段定义，且模态深度不会增加。他们的结果适用于有限和无限结构，无需依赖紧致性。

本文从有限模型论的角度研究模态保持定理。我们研究在有界展开下保持不变的有限带指定点的 Kripke 模型类，这是模态逻辑中一种自然的局部性条件。在这一框架下，我们针对嵌入、单射同态和同态建立了保持定理，并以 GML 和模态逻辑的存在片段及存在正片段给出了精确刻画。我们的结果通过提供句法刻画，补充了 Rosen 的有限保持定理以及 Abramsky 和 Reggio 的范畴框架。特别是，我们在 GML 框架下为嵌入和单射同态得出了新的保持定理。我们的结果也蕴含了 Rosen 以及 Abramsky 和 Reggio 关于有限模型的结果。

支撑我们方法的一个重要技术要素，是关于良拟序（wqos）的结构性结果。在第 3 节中，我们证明，在高度一致有界的树形模型类上，嵌入关系构成良拟序（定理 3）；并且这一有界高度假设至关重要：若没有这一假设，所考虑的关系都无法保证形成良拟序（定理 5）。我们对良拟序的运用，在思想上与 Lopez [21], 提出的框架密切相关；该框架通过极小模型、良拟序和诺特拓扑研究有限保持定理。不过，这两种方法针对的情形不同：Lopez 的结果依赖于有限结构的遗传类这一假设，而该假设对克里普克模型的展开不变类并不成立（见命题 2），因此需要采用不同的技术。

在第 4 节中，基于关于良拟序的结果，我们为在有界展开下保持不变的有限带点克里普克模型类 C 建立了一般保持定理。对于任何在上述某种语义关系下保持不变的此类 C，我们都能提取出有限个极小树形模型。每棵这样的极小树都可由一个有界深度的模态公式定义，而这些公式的有限析取则给出了定义 C 的公式。具体而言，我们证明：C 在嵌入下保持不变，当且仅当它可由存在GML定义（定理 9）；C 在单射同态下保持不变，当且仅当它可由存在正GML定义（定理 13）；C 在同态下保持不变，当且仅当它可由存在正ML定义（定理 21）。根据这些结果，我们推导出 GML 和模态逻辑公式的相应保持定理，汇总于表1。

正如我们在第5节所示，除了在逻辑领域本身具有的重要意义外，我们的保持定理还直接影响图神经网络（GNNs）的表达能力 [14]——这类用于图数据的机器学习模型——因为它们要求满足节点置换不变性（即对图同构的不变性）等结构不变量 [11, 17, 31]。GNNs最常见的形式是消息传递架构，通过反复聚合邻居节点的信息来计算节点表示。因此，它们的表达能力——即能够表示的图性质类别——与局部性和展开等逻辑概念密切相关 [8]。越来越多的研究已经建立了GNN架构类别与逻辑之间的对应关系，其中包括基本模态逻辑和分级模态逻辑、二变量片段以及Datalog

表1：（分级）模态逻辑的保持性结果。

	嵌入	单射同态。	同态。
GML	∃GML（定理 10）	$\exists^+$GML（定理 14）	$\exists^+$ML[3]
$\mathcal{ML}$	∃ML[28]	$\exists^+$ML（定理 18）	$\exists^+$ML[3]

[4, 8, 9, 12, 16, 18, 26, 33–35]。具体而言，单调图神经网络——即所有激活函数和聚合函数均为单调函数且矩阵权重均为非负数的架构——可以用带不等式的非递归树形Datalog程序表示；而仅使用MAX聚合的单调图神经网络则可以在不使用不等式的情况下表示 [33, 35]。

我们的结果为单调图神经网络提供了一种新的逻辑刻画。利用单射同态的保持定理，我们证明单调图神经网络的表达能力恰好等同于存在正GML，而单调MAX图神经网络的表达能力则等同于存在正ML。这些结果基于模态保留理论，提供了统一的说明。更广泛地说，我们的方法表明，有限模型论中的工具（例如展开不变性和良拟序）可以有效应用于机器学习模型理论分析中的问题。

2 预备知识

克里普克模型。 本文讨论的所有模型都是有限的，且定义在有限命题符号集 PROP 上的模态词汇中。等价地，它们可以视为有限的一阶σ结构，其词汇 σ 包含一个二元关系符号 R，并且对每个命题 $p_i \in \text{PROP}$，都包含一个一元谓词符号 P_i。

我们采用标准的克里普克语义 [10]：模型 $\mathfrak{M}$ 是一个三元组 (W, R, V)，其中 W是非空有限的世界集合，$R \subseteq W \times W$是可及关系，而 V是赋值函数，它将每个 $p_i \in \text{PROP}$映射到 W的一个子集。带指定点的模型 是一个二元组 $(\mathfrak{M}, w)$，其中 $w \in W$。如果对于每个世界 $v \in W$，都存在一条从 w到 v的唯一有向路径，那么带指定点的模型 $(\mathfrak{M}, w)$就是树形的；我们称 w 为根节点。树形模型的高度是从根节点出发的最长有向路径的长度。

语义关系。 设 $(\mathfrak{M}, w)$ 和 $(\mathfrak{N}, v)$ 是带指定点的模型，其中 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 和 $\mathfrak{N} = (W', R', V')$。我们考察满足 $f(w) = v$ 的函数 $f\colon W \to W'$。

函数 f是 $(\mathfrak{M}, w)$ 和 $(\mathfrak{N}, v)$ 之间的同构，当且仅当它是一个双射，并且对于所有 $u, z \in W$以及每个 $p_i \in \text{PROP}$，都满足 uRz当且仅当 $f(u)R'f(z)$，且 $u \in V(p_i)$当且仅当 $f(u) \in V'(p_i)$。

函数 f是从 $(\mathfrak{M}, w)$ 到 $(\mathfrak{N}, v)$ 的嵌入，当且仅当它是 $(\mathfrak{M}, w)$ 与 $(\mathfrak{N}, v)$ 中由像集 $f(W)$ 诱导的子模型之间的同构。

函数 f是从 $(\mathfrak{M}, w)$ 到 $(\mathfrak{N}, v)$ 的同态，当且仅当对于所有 $u, z \in W$以及每个 $p_i \in \text{PROP}$，uRz蕴含 $f(u)R'f(z)$，且 $u \in V(p_i)$ 蕴含 $f(u) \in V'(p_i)$。如果 f是单射，则称其为单射同态。

显然，每个同构都是一个嵌入，每个嵌入都是一个单射同态，而每个单射同态都是一个同态。

展开。 设 $(\mathfrak{M}, w)$ 是一个带指定点的模型，其中 $\mathfrak{M}=(W, R, V)$，并且 $L \in \mathbb{N}$。$(\mathfrak{M}, w)$ 的 L-展开记作 $\mathrm{Unr}^L(\mathfrak{M}, w)$，它是如下定义的带指定点的模型 $((W', R', V')\ w')$：

- W' 对每条长度为 的路径 $wRv_1Rv_2\ldots v_{\ell-1}Rv_\ell$ $\ell \le L$ $\mathfrak{M}$ 都包含一个世界（$w, v_1, \ldots, v_\ell$）。
- 指定世界 w' 是与长度为 0 的路径（w）相对应的世界。
- 当且仅当 $v_{\ell-1}Rv_\ell$ 时，$(w, v_1, \ldots, v_{\ell-1})\ R'(w, v_1, \ldots, v_\ell)$。
- 对于每个 $p_i \in \mathrm{PROP}$，我们定义

$$V'(p_i) = \{(w, v_1, \ldots, v_\ell) \in W' \mid v_\ell \in V(p_i)\}$$

.

图1展示了一个模型及其 3-展开的示例。一个 L-展开是高度至多为 L的树形模型。

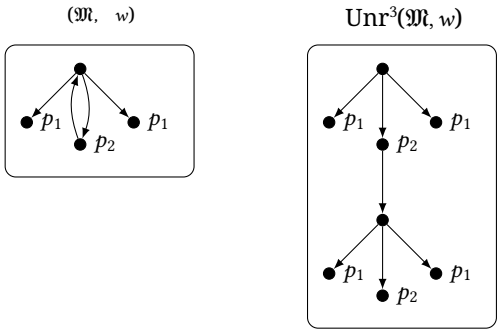

图1：一个模型及其3层展开

互模拟。 由于本文始终讨论有界展开，我们引入一种以深度为参数的互模拟概念。设$(\mathfrak{M}, w)$和$(\mathfrak{N}, v)$是带指定点的 Kripke 模型，其中 $\mathfrak{M}=(W, R, V)$且 $\mathfrak{N}=(W', R', V')$，并设 $L \in \mathbb{N}$。$(\mathfrak{M}, w)$与$(\mathfrak{N}, v)$之间的 L-互模拟是一个关系 $Z \subseteq W \times W'$，满足 wZv，并且对所有 uZu'，以下条件均成立：

- 对于每个 $p_i \in \mathrm{PROP}$，$u \in V(p_i)$当且仅当 $u' \in V'(p_i)$；
- 如果 uRz 且 u 到根节点 w 的距离小于 L，则存在 $z' \in W'$ 使得 $u'Rz'$ 且 zZz'。
- 如果 $u'Rz'$，且 u' 到根节点 v的距离小于 L，则存在 $z \in W$ 使得 uRz 且 zZz'。

如果存在这样的关系，则（$\mathfrak{M}, w$）和（$\mathfrak{N}, v$）是 L-双模拟等价的，我们记作（$\mathfrak{M}, w$）$\sim_L$（$\mathfrak{N}, v$）。对于每个带指定点的模型（$\mathfrak{M}, w$）和 $L \in \mathbb{N}$，（$\mathfrak{M}, w$）与其 L-展开 Unr^L（$\mathfrak{M}, w$）双模拟等价。

保持性与不变性。令 C 为带指定点的模型类，$\preceq$ 为带指定点的模型上的二元关系。

- 保持性。若（$\mathfrak{M}, w$）$\in$C，且（$\mathfrak{M}, w$）$\preceq$（$\mathfrak{N}, v$）蕴含（$\mathfrak{N}, v$）$\in$C，则称类 C 在 $\preceq$下保持。
- 不变性。若类 C 在 $\preceq$下不变，即它在 $\preceq$及其逆关系 $\preceq^{-1}$下均保持，则称其在 $\preceq$下不变。

我们只考虑在同构下保持不变的带指定点的模型类，并将模型与其同构类型视为相同。此外，我们研究在嵌入、单射同态和同态下保持不变的模型类。这些概念分别在带指定点的模型上诱导出相应的关系 $\preceq$，其中 $(\mathfrak{M}, w) \preceq (\mathfrak{N}, v)$ 成立，当且仅当存在一个从 $(\mathfrak{M}, w)$ 到 $(\mathfrak{N}, v)$ 的给定类型映射。在有限模型论中，刻画在这些关系下保持不变的模型类是一项核心课题。

关于不变性，我们关注在 L-展开下保持不变的带指定点的模型类；也就是说，类 C 满足：$(\mathfrak{M}, w) \in$C，当且仅当 $\mathrm{Unr}^L(\mathfrak{M}, w) \in$C。文献中已对展开下保持不变的类进行了广泛研究。对我们的结果而言，关键在于，模态逻辑公式和图神经网络所诱导的模型类都只在展开下保持不变；本文将充分利用这一事实。

良拟序。 我们的结果利用了良拟序（wqo）及其标准性质，下面回顾这些内容。设 A为一个集合，$\preceq$为 A上的一个二元关系。若对偶 $(A, \preceq)$ 是拟序（即自反且传递），并且 A中的每个无限序列 $a_1, a_2, \ldots$都包含满足 $a_i \preceq a_j$的指标 $i < j$，则称其为良拟序 。等价地，若 $\preceq$是良基的且没有无限反链，则它是良拟序。特别地，在良拟序中，每个子集都有有限多个极小元，因为无限多个极小元会构成无限反链。

我们将使用良拟序的下列基本性质。若 $(A, \preceq)$ 是良拟序，则带有 $A' \subseteq A$ 的 $(A', \preceq)$ 也是良拟序。此外，若 $\preceq'$ 是 A 上扩展 $\preceq$的拟序，则 $(A, \preceq')$ 仍是良拟序。

本文所用良拟序的另一关键性质是希格曼引理。设 A^* 为元素取自 A 的所有有限序列构成的集合，并设 $\preceq^*$ 为子序列序，其定义为：若存在严格递增映射 $f\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$，使得对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 都有 $a_i \preceq b_{f(i)}$，则 $(a_1, \ldots, a_n) \preceq^* (b_1, \ldots, b_m)$。

引理 1 (希格曼引理)。 若$(A, \preceq)$ 是良拟序，则$(A^*, \preceq^*)$ 也是良拟序。

模态逻辑。 我们的保持定理通过模型类在模态逻辑中的可定义性来刻画这些模型类。具体而言，我们考虑分级模态逻辑 (GML)、基本模态逻辑 (ML)及其若干片段。下面简要回顾它们的语法和语义。全文中，我们固定一个有限签名 PROP $=\{p_1, \ldots, p_n\}$，其元素为命题符号。PROP 上的 GML 公式 [13, 27, 37] 由以下文法归纳定义

$$\varphi := p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \Diamond^{\ge k}\varphi,$$

其中 $p \in \mathrm{PROP}$，并且对于每个 $k \ge 1$，$\Diamond^{\ge k}$是 k-分级模态算子。GML 公式 φ 的（模态）深度 是 φ中分级模态算子的最大嵌套层数。

GML 的存在 片段记为 ∃GML，它允许否定仅出现在命题符号之前。存在正 片段记为 $\exists^+$GML，它进一步将公式限制为不含否定。ML 逻辑是将分级模态算子限制为 $k=1$，并将 $\Diamond$ 写作 $\Diamond^{\ge 1}$而得到的。ML 的片段 ∃ML 和 $\exists^+$ML 以类似方式定义。

公式在克里普克模型 $\mathfrak{M}=(W, R, V)$ 上解释。满足关系按以下方式归纳定义：

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{M}, w) &\models p && \text{iff} && w \in V(p), \text{ where } p \in \mathrm{PROP}\\
(\mathfrak{M}, w) &\models \neg\varphi && \text{iff} && (\mathfrak{M}, w) \not\models \varphi\\
(\mathfrak{M}, w) &\models \varphi \wedge \psi && \text{iff} && (\mathfrak{M}, w) \models \varphi \text{ and } (\mathfrak{M}, w) \models \psi\\
(\mathfrak{M}, w) &\models \varphi \vee \psi && \text{iff} && (\mathfrak{M}, w) \models \varphi \text{ or } (\mathfrak{M}, w) \models \psi\\
(\mathfrak{M}, w) &\models \Diamond^{\ge k}\varphi && \text{iff} && \text{there exist at least } k \text{ worlds } v \in W\\
& && && \text{such that } wRv \text{ and } (\mathfrak{M}, v) \models \varphi
\end{aligned}$$

给定带指定点的模型 $(\mathfrak{M}, w)$ 和 $(\mathfrak{N}, v)$、模态逻辑 L 以及 $\ell \geq 0$，如果这两个带指定点的模型满足完全相同的深度至多为 ℓ 的 L-公式，我们就记作 $(\mathfrak{M}, w) \equiv_\ell^{\mathcal{L}} (\mathfrak{N}, v)$。对于模态逻辑，假设模型是有限的，则 $(\mathfrak{M}, w) \equiv_\ell^{\mathcal{ML}} (\mathfrak{N}, v)$ 当且仅当 $(\mathfrak{M}, w) \sim_\ell (\mathfrak{N}, v)$。此外，众所周知，对于每个深度为 L 的 GML 公式 φ 以及每个带指定点的模型 $(\mathfrak{M}, w)$，$(\mathfrak{M}, w) \models \varphi$ 当且仅当 $\mathsf{Unr}^L(\mathfrak{M}, w) \models \varphi$。也就是说，$\varphi$ 的带点模型类在 L-展开下保持不变。若存在一个 L-公式 φ，使得 $(\mathfrak{M}, v) \models \varphi$ 当且仅当 $(\mathfrak{M}, v) \in \mathsf{C}$，则称带点模型类 C 可由模态逻辑 L 定义。

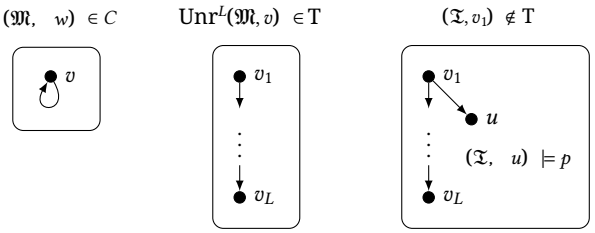

图 2：模型 $(\mathfrak{M}, w)$、$\mathsf{Unr}^L(\mathfrak{M}, v)$ 以及 $(\mathfrak{T}, v_1)$

3 有界高度树形模型的良拟序

本节中，我们将确立构成本文技术核心的结构性结果。我们研究树形带指定点的克里普克模型类上的嵌入、单射同态和同态关系，并特别关注有界高度所发挥的作用。本文始终在有限模型论的框架下展开，因此所考虑的模型都是有限的。

我们首先概述支撑本文保持性结果的一般策略。令 $\preceq$ 表示嵌入、单射同态和同态关系之一。给定一个在 $\preceq$ 下保持的带指定点的模型类 C，我们固定一个界 L，并考虑 C 中模型的 L-展开所构成的类 T。根据构造，T 由高度至多为 L 的树形带指定点的模型组成。接着，我们考虑 $\mathsf{T}_{\mathsf{min}} \subseteq \mathsf{T}$ 中的 $\preceq$-极小带指定点的模型集合。

对于 $\mathsf{T}_{\mathsf{min}}$ 中的每个带指定点的模型，我们构造一个刻画它的模态公式。若 $\mathsf{T}_{\mathsf{min}}$ 是有限的，这些公式的析取便定义了类 C。因此，这种方法能否成功取决于 $\mathsf{T}_{\mathsf{min}}$ 是否有限。

本节的主要目标是通过确立一个更强的结构性质来论证这种有限性，即 $\preceq$ 是 T 上的良拟序。由于每个良拟序只有有限多个极小元，这意味着 $\mathsf{T}_{\mathsf{min}}$ 是有限的。因此，我们着手确立树形模型类上关系 $\preceq$ 的良拟序结果，首先考察 $\preceq$ 为嵌入关系的情形。

我们首先说明，在嵌入下的保持性一般不会传递到 L-展开。具体而言，即使一个带点模型类在嵌入下保持，对应的 L-展开类也不一定如此。

命题 2。对于任意 $L > 1$，存在一个在嵌入下保持不变的带点模型类，但其 L-展开类并非如此。

证明。固定 $L > 1$，并令 $(\mathfrak{M}, w)$ 为一个带指定点的模型，其中 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 满足 $W = \{w\}$、$R = \{(w, w)\}$，且对于每个命题 p，$V(p) = \emptyset$，如图 2 左侧所示。令 C 为带指定点的模型 $(\mathfrak{N}, v)$ 构成的类，其在 v 上的限制与 $(\mathfrak{M}, w)$ 同构。等价地，$\mathfrak{N}$ 在 v 处有一个自环，且没有任何命题在 v 处成立。因此，C 在嵌入下保持不变。

令 $\mathsf{T} = \{\mathsf{Unr}^L(\mathfrak{M}', w') \mid (\mathfrak{M}', w') \in \mathsf{C}\}$ 为 C 中模型的所有 L-展开构成的类。特别地，图 2 中间所示的 L-展开属于 T。我们将证明 T 在嵌入下不保持不变。

考虑图 2 右侧所示的带指定点的树形模型 $(\mathfrak{T}, v_1)$。它由一条长度为 L 的有向路径 $v_1, \ldots, v_L$ 以及一个额外的世界 u 组成，使得 (v_1, u)。一个命题 p 在 u 处成立，且没有任何其他命题在任何其他世界成立。显然，$(\mathfrak{T}, v_1)$ 是树形的，并且 $\mathsf{Unr}^L(\mathfrak{M}, v)$ 嵌入到 $(\mathfrak{T}, v_1)$ 中。

我们断言 $(\mathfrak{T}, v_1) \notin \mathsf{T}$。反设存在 $(\mathfrak{M}', w') \in \mathsf{C}$，使得 $\mathsf{Unr}^L(\mathfrak{M}', w')$ 与 $(\mathfrak{T}, v_1)$ 同构。由于 $(\mathfrak{T}, v_1)$ 有一个满足 p 的根节点的邻居 u，而 w' 本身并不满足 p（因为 $(\mathfrak{M}', v') \in \mathsf{C}$），因此 $\mathfrak{M}'$ 必须包含一个从 w' 一步可达且满足 p 的世界。此外，由于 $(\mathfrak{M}', v') \in \mathsf{C}$，$\mathfrak{M}'$ 必须包含一个自环 (w', w')。

因此，$\mathsf{Unr}^L(\mathfrak{M}', w')$ 包含从根节点到满足 p 的不同节点的长度分别为 $1, \ldots, L$ 的不同路径。特别地，$\mathsf{Unr}^L(\mathfrak{M}', w')$ 包含 L 个满足 p 的不同节点。相比之下，$(\mathfrak{T}, v_1)$ 恰好包含一个满足 p 的世界。由于 $L > 1$，我们得出 $\mathsf{Unr}^L(\mathfrak{M}', w')$ 不可能与 $(\mathfrak{T}, v_1)$ 同构，这与我们的假设矛盾。□

因此，我们不能假设展开类 T 在嵌入下保持不变。为克服这一障碍并确保 $\mathsf{T}_{\mathsf{min}}$ 的有限性，我们确立一个更强的结构性结果。具体而言，我们证明，嵌入关系在任意一致有界高度的树形模型类上构成良拟序。由于 L-展开的高度至多为 L，这一结果可直接应用于上述展开类 T。

然而，这一定理的适用范围超出了展开这一情形：它适用于任意树形模型类，不受任何保持性质的限制。特别是，它补充了 Lopez [21], 提出的框架；该框架依赖于有限结构的遗传类。如命题 2 所示，带指定点的 Kripke 模型的展开不变类并非遗传类，因此 [21] 中的结果不适用于我们的情形。

定理3. 在高度由固定常数统一界定的任意一类带指定点的树形模型上，嵌入关系是良拟序。

证明。令 L 为所考虑模型高度的统一上界，并令 $\preceq$ 为带指定点的模型之间的嵌入关系。显然，$\preceq$ 是一个拟序。我们对 $\ell \leq L$ 进行归纳，证明以下断言：对于每一类高度至多为 ℓ 的带指定点的树形模型 T，拟序 $(\mathsf{T}, \preceq)$ 是良拟序。

基例 $(\ell = 0)$。高度为 0 的树形模型由一个带有某个集合 $S \subseteq \mathsf{PROP}$ 标记的单个根节点构成。由于命题符号集 PROP 是有限的，这种形式的非同构模型只有有限多个。因此，对于任意高度为 0 的带指定点的树形模型类，由 $\preceq$ 诱导的拟序是良拟序。注意，PROP 的有限性对这一论证至关重要。

归纳步骤。令 $\ell \geq 1$，并假设该命题对 $\ell - 1$ 成立。设 T 是一个任意的、高度至多为 ℓ 的带指定点的树形模型类。我们证明 $(\mathrm{T}, \preceq)$ 是良拟序。

我们首先将 T 划分为由 $S \subseteq \mathrm{PROP}$ 索引的子类 T^S，其中 T^S 由 T 中所有根节点恰好满足 S 中命题的带指定点模型组成。由于 2^{PROP} 是有限的，且有限个良拟序的不交并仍是良拟序，因此只需证明每个 $(\mathrm{T}^S, \preceq)$ 都是良拟序。

固定 $S \subseteq \mathrm{PROP}$。对于 T^S 中的每个 $(\mathfrak{M}, w)$，令 $\tau_{\mathfrak{M},w} = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ 为一个有限序列，枚举其根节点 w 的子节点所对应的直接子树。由于子节点没有顺序，我们固定模型上的一个任意但规范的排序，以获得定义良好的枚举。带指定点模型上的嵌入关系 $\preceq$ 在其有限序列上诱导出子序列序关系 $\preceq^*$，其定义与希格曼引理（引理 1）相同。为考虑子节点排序的任意性，我们考察置换闭包变体 $\preceq^*_\pi$，其定义为：$\tau \preceq^*_\pi \tau'$ 当且仅当对于某个置换 f，有 $\tau \preceq^* f(\tau')$。我们声称，对于任意 $(\mathfrak{M}, w)$、$(\mathfrak{N}, v) \in \mathrm{T}^S$，$(\mathfrak{M}, w) \preceq (\mathfrak{N}, v)$ 当且仅当 $\tau_{\mathfrak{M},w} \preceq^*_\pi \tau_{\mathfrak{N},v}$。事实上，从 $(\mathfrak{M}, w)$ 到 $(\mathfrak{N}, v)$ 的嵌入必须将 w 的每个子节点单射地映射到 v 的一个不同子节点，使得对应的子树能够递归地嵌入。由此可得 $\tau_{\mathfrak{M},w} \preceq^*_\pi \tau_{\mathfrak{N},v}$。反过来，若 $\tau_{\mathfrak{M},w} \preceq^*_\pi \tau_{\mathfrak{N},v}$，则 $\tau_{\mathfrak{M},w}$ 中的每棵子树都能嵌入 $\tau_{\mathfrak{N},v}$ 中一棵不同的子树，从而得到一个从 $(\mathfrak{M}, w)$ 到 $(\mathfrak{N}, v)$ 的嵌入。

因此，我们证明了 $(\{\tau_{\mathfrak{M},w} \mid (\mathfrak{M}, w) \in \mathrm{T}^S\}, \preceq^*_\pi)$ 是良拟序。为此，令 I 为所有高度至多为 $\ell - 1$ 的带指定点的树形模型的集合。根据归纳假设，$(\mathrm{I}, \preceq)$ 是良拟序。根据希格曼引理（引理 1），按子序列关系 $\preceq^*$ 排序的有限序列 I^* 的集合也是良拟序。由于良拟序对取子集封闭，且 $(\{\tau_{\mathfrak{M},w} \mid (\mathfrak{M}, w) \in \mathrm{T}^S\})$ 是 I^* 的子集，因此 $((\{\tau_{\mathfrak{M},w} \mid (\mathfrak{M}, w) \in \mathrm{T}^S\}, \preceq^*)$ 是良拟序。此外，由于 $\preceq^*$ 是 $\preceq^*_\pi$ 的子关系，且 $\preceq^*_\pi$ 是拟序，因此 $\preceq^*_\pi$ 在该集合上也是良拟序。归纳步骤至此完成。□

作为一个直接推论，前述定理可以推广到本文考察的其他语义关系。由于良拟序在扩张为更大的关系后仍是良拟序，且单射同态关系和同态关系都扩张了嵌入关系，因此这些关系也满足相同的结论。

推论 4. 在任何高度一致有界的树形模型类上，单射同态关系和同态关系都是良拟序。

因此，对于取值为嵌入关系、单射同态关系或同态关系的 $\preceq$，以及任意一个由一致有界高度的带指定点的树形模型构成的类 T，拟序 $(\mathrm{T}, \preceq)$ 是良拟序。特别地，T 仅有有限多个极小元 $\preceq$。这一有限性性质是后续保持定理中所用极小模型论证的基础。

本节最后说明，有界高度假设至关重要：如果高度无界，良拟序性质便不再成立。

定理 5. 在无有界高度的带指定点树形模型类上，嵌入、单射同态和同态关系一般都不是良拟序。

证明。我们先考虑单射同态的情形，这也涵盖了嵌入这一特殊情形。考虑如下类 T：它由带指定点的树形模型组成，对于每个 $n \geq 1$，都包含一个带指定点的模型 $(\mathfrak{M}_n, v_1)$，其世界为 $v_1, \ldots v_n, v_{n+1}, v_{n+2}, u, w$，满足 $v_i R v_{i+1}$ 对 $1 \leq i \leq n+1$ 以及 $v_1 R u$ 和 $v_{n+1} R w$，如图 3 所示。所有世界均未标记，也就是说，赋值函数将每个命题符号映射到空集。

在每个 $(\mathfrak{M}_n, v_1)$ 中，距离根节点 $n+1$ 的位置恰有两个世界，即 v_{n+2} 和 w。相比之下，如果 $m > n$，那么 $(\mathfrak{M}_m, v_1)$ 在距离 $n+1$ 的位置只有一个世界，即 v_{n+2}。因此，对于任意 $n \neq m$，从 $(\mathfrak{M}_n, v_1)$ 到 $(\mathfrak{M}_m, v_1)$ 不存在单射同态，反之亦然。因此，T 关于单射同态关系构成一个无限反链，关于嵌入关系也同样如此。

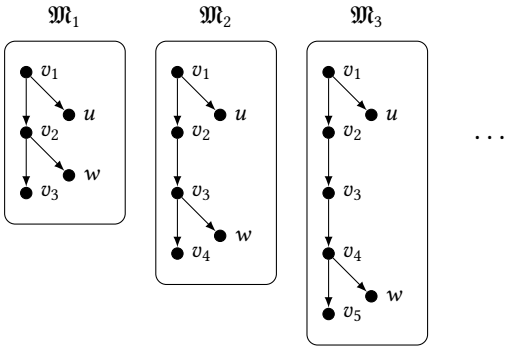

图 3：关于单射同态（及嵌入）关系的一个模型无限反链

现在我们转向同态的情形。考虑对 T 作如下修改：在每个模型 $(\mathfrak{M}_n, v_1)$ 中，赋值函数定义为：$V(p_1) = \{v_i \mid i \text{为偶数}\}$，$V(p_2) = \{v_i \mid i \text{为奇数}\}$，$V(p_3) = u$，以及 $V(p_4) = w$；所有其他命题的取值均为 $\emptyset$。

令 $n < m$，并反设 f 是从 $(\mathfrak{M}_n, v_1)$ 到 $(\mathfrak{M}_m, v_1)$ 的同态。我们对 $i \leq n+2$ 进行归纳法，证明 $f(v_i) = v_i$。基例 $i = 1$ 显然成立。归纳步骤中，假设 $f(v_i) = v_i$。于是，$f(v_{i+1})$ 必须是 $\mathfrak{M}_m$ 中 v_i 的一个后继，并且满足与 $\mathfrak{M}_n$ 中 v_{i+1} 相同的命题。在 $\mathfrak{M}_m$ 中，唯一满足这一条件的后继就是其自身 v_{i+1}，因此 $f(v_{i+1}) = v_{i+1}$。特别地，$f(v_{n+1}) = v_{n+1}$。由此可知，$f(w)$ 是 $\mathfrak{M}_m$ 中 v_{n+1} 的一个后继，并且满足 p_4。然而，$\mathfrak{M}_m$ 中唯一满足 p_4 的世界是 w，它是 v_{m+1} 而非 v_{n+1} 的后继。这就导致矛盾。对称地可证，不存在从 $(\mathfrak{M}_m, v_1)$ 到 $(\mathfrak{M}_n, v_1)$ 的同态。□

最后，我们注意到，定理 5 的证明依赖于两种不同的构造。针对嵌入和单射同态的反例使用无标记模型，也就是说，这些模型中所有命题符号都被赋值为空集。相比之下，针对同态的反例依赖于带标记模型。正如我们接下来将要说明的，第二种构造中使用带标记模型是不可避免的。

命题 6。 对于任意一对无标记的带根树形模型，都存在一个从其中一个模型到另一个模型的同态。

证明。设 $(\mathfrak{M}, w)$ 和 $(\mathfrak{N}, v)$ 分别为高度为 m 和 n 的无标记带指定点的模型，且满足 $m \leq n$。由于 $\mathfrak{N}$ 的高度为 n，它

包含一条长度为 n 的路径 $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$，且满足 $v_1 = v$。我们定义一个函数 f，将 $\mathfrak{M}$ 的世界映射到 $\mathfrak{N}$ 的世界：把 $\mathfrak{M}$ 中距根节点 i 的每个世界 w' 映射到 v_i。由于 $i \leq m \leq n$，该映射定义良好。由于两个模型都是无标记的，同态的赋值条件显然得到满足。此外，根据构造，f 保持边关系。因此，f 是从 $(\mathfrak{M}, w)$ 到 $(\mathfrak{N}, v)$ 的同态。□

4 解卷绕不变类与模态逻辑的保持定理

现在，我们将运用上一节的结果——尤其是定理3——来证明适用于在展开下保持不变的模型类的保持定理。随后，我们将应用这些结果，为模态逻辑证明保持定理，进而为图神经网络证明保持定理。

本节分为三个主要部分，分别探讨在嵌入、单射同态和同态下保持不变的模型展开不变类，与 ∃GML、∃⁺GML 和 ∃⁺模态逻辑中的可定义性之间的关系。

这三个保持定理遵循相同的基本证明策略。设 C 为一个在 L-展开下保持不变、且在关系 $\preceq$（即嵌入、单射同态或同态）下保持的模型类。我们首先构造类 T，其中包含 C 中模型的 L-展开。然后令 $\mathsf{T}_{\min}$ 为 T 中 $\preceq$-极小模型的集合。对于每个模型 $(\mathfrak{T}, v) \in \mathsf{T}_{\min}$，我们构造一个特征公式 $\varphi_{\mathfrak{T}, v}$，使得对于任意带指定点的模型 $(\mathfrak{M}, w)$，$(\mathfrak{M}, w) \models \varphi_{\mathfrak{T}, v}$ 当且仅当 $(\mathfrak{T}, v) \preceq \mathrm{Unr}^L(\mathfrak{M}, w)$。最后，我们将公式 φ_C 定义为所有 $\varphi_{\mathfrak{T}, v}$ 的析取，其中 $(\mathfrak{T}, v) \in \mathsf{T}_{\min}$。根据构造，公式 φ_C 定义了类 C。

对于这一策略而言，$\mathsf{T}_{\min}$ 的有限性至关重要。如果 $\mathsf{T}_{\min}$ 是无限的，所得的析取也将是无限的。值得注意的是，$\mathsf{T}_{\min}$ 的有限性由定理3保证。特征公式 $\varphi_{\mathfrak{T}, v}$ 所属的模态语言取决于所选的关系 $\preceq$：当 $\preceq$ 分别为嵌入、单射同态和同态时，这些公式 $\varphi_{\mathfrak{T}, v}$ 分别属于片段 ∃GML、∃⁺GML和 ∃⁺模态逻辑。

4.1 嵌入下的保持性

我们的目标是证明，任何在嵌入下保持且在 L-展开下不变的模型类，都可以由一个 ∃GML公式定义。此外，我们还将证明，可以将该公式选取得深度至多为 L。为此，我们在 ∃GML中引入特征公式。这些公式是在文献 [12, 27]中标准分级模态逻辑特征公式的基础上修改而来的。关键区别在于，我们在 ∃GML中的特征公式不包含否定模态算子。

定义 7. 设 $(\mathfrak{M}, w)$ 是一个带指定点的模型，其形式为 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$。对于每个 $\ell \in \mathbb{N}$，我们归纳定义一个深度为 ℓ 的特征 $\exists\mathcal{GML}$ 公式 $\varphi^{\ell}_{\mathfrak{M}, w}$，如下所示。对于 $\ell = 0$，令

$$\varphi^{0}_{\mathfrak{M}, w} := \bigwedge \{p \mid (\mathfrak{M}, w) \models p\} \wedge \bigwedge \{\neg p \mid (\mathfrak{M}, w) \not\models p\}.$$

对于 $\ell + 1$，根据关系 $\equiv^{\mathcal{GML}}_{\ell}$ 将 w 的 R-后继划分为等价类 C_1、……、C_m。对于每个 C_j，选择一个任意代表 $w_j \in C_j$ 并定义

$$\varphi^{\ell+1}_{\mathfrak{M}, w} := \varphi^{0}_{\mathfrak{M}, w} \wedge \bigwedge_{j=1}^{m} \Diamond^{\geq |C_j|} \varphi^{\ell}_{\mathfrak{M}, w_j}.$$

对于完整的 GML，深度为 ℓ 的带指定点模型 $(\mathfrak{M}, w)$ 的特征公式在 $(\mathfrak{N}, v)$ 中成立，当且仅当这两个带指定点的模型之间存在分级 ℓ-互模拟。在有限模型上，这等价于 $(\mathfrak{M}, w) \equiv^{\mathcal{GML}}_{\ell} (\mathfrak{N}, v)$ [27]。上文为 ∃GML 定义的特征公式严格较弱，因此这些等价关系不再成立。相反，∃GML 特征公式保证了一种单向结构性质：用于构造特征公式的模型的 ℓ-展开嵌入到任何满足该公式的模型的 ℓ-展开中。以下引理刻画了这一性质，并在嵌入保持定理中发挥核心作用。

引理 8. 设 $(\mathfrak{M}, w)$ 与 $(\mathfrak{N}, v)$ 为带指定点的模型，并设 $\ell \in \mathbb{N}$。我们有 $(\mathfrak{N}, v) \models \varphi^{\ell}_{\mathfrak{M}, w}$ 当且仅当 $\mathrm{Unr}^{\ell}(\mathfrak{M}, w)$ 嵌入到 $\mathrm{Unr}^{\ell}(\mathfrak{N}, v)$。

证明。我们通过对 ℓ 的归纳法证明该等价性。设 $\preceq$ 为带指定点的模型之间的嵌入关系。

基例（$\ell = 0$）。公式 $\varphi^{0}_{\mathfrak{M}, w}$ 是在 $(\mathfrak{M}, w)$ 处成立的所有文字（命题及其否定）的合取。因此，$(\mathfrak{N}, v) \models \varphi^{0}_{\mathfrak{M}, w}$ 当且仅当 $(\mathfrak{M}, w) \equiv^{\mathcal{GML}}_{0} (\mathfrak{N}, v)$。由于 $\mathrm{Unr}^0(\mathfrak{M}, w)$ 与 $\mathrm{Unr}^0(\mathfrak{N}, v)$ 均由单个世界构成，该结论成立当且仅当 $\mathrm{Unr}^0(\mathfrak{M}, w) \preceq \mathrm{Unr}^0(\mathfrak{N}, v)$。

归纳步骤。假设该断言对 $\ell \geq 0$ 成立。我们证明它对 ℓ+1 也成立。回顾 $\varphi^{\ell+1}_{\mathfrak{M}, w} := \varphi^{0}_{\mathfrak{M}, w} \wedge \bigwedge_{j=1}^{m} \Diamond^{\geq |C_j|} \varphi^{\ell}_{\mathfrak{M}, w_j}$，其中 $C_1, \ldots, C_m$ 是 w 在 $\equiv^{\mathcal{GML}}_{\ell}$ 下的 R-后继的等价类，且 $w_j \in C_j$ 是任意代表。对每个 j，我们还固定一个枚举 $C_j = \{w_{j,1}, \ldots, w_{j,|C_j|}\}$。

(⇒)假设 $(\mathfrak{N}, v) \models \varphi^{\ell+1}_{\mathfrak{M}, w}$。那么，$(\mathfrak{N}, v) \models \varphi^{0}_{\mathfrak{M}, w}$，因此 $(\mathfrak{M}, w) \equiv^{\mathcal{GML}}_{0} (\mathfrak{N}, v)$。此外，对于每个 j，都存在 $|C_j|$ 个彼此不同的后继 $v_{j,1}, \ldots, v_{j,|C_j|}$，它们属于 v，且满足 $(\mathfrak{N}, v_{j,k}) \models \varphi^{\ell}_{\mathfrak{M}, w_j}$。

根据归纳假设，对于每个这样的 j 和 k，都存在一个嵌入 $f_{j,k}$，将 $\mathrm{Unr}^{\ell}(\mathfrak{M}, w_j)$ 嵌入 $\mathrm{Unr}^{\ell}(\mathfrak{N}, v_{j,k})$。由于 $w_{j,k} \equiv^{\mathcal{GML}}_{\ell} w_j$，展开 $\mathrm{Unr}^{\ell}(\mathfrak{M}, w_{j,k})$ 与 $\mathrm{Unr}^{\ell}(\mathfrak{M}, w_j)$ 同构。将此同构与 $f_{j,k}$ 复合，可得到一个嵌入，将 $\mathrm{Unr}^{\ell}(\mathfrak{M}, w_{j,k})$ 嵌入 $\mathrm{Unr}^{\ell}(\mathfrak{N}, v_{j,k})$。

现在我们按如下方式构造一个从 $\mathrm{Unr}^{\ell+1}(\mathfrak{M}, w)$ 到 $\mathrm{Unr}^{\ell+1}(\mathfrak{N}, v)$ 的全局嵌入 f。函数 f 将 $\mathrm{Unr}^{\ell+1}(\mathfrak{M}, w)$ 的根节点映射到 $\mathrm{Unr}^{\ell+1}(\mathfrak{N}, v)$ 的根节点。对于每个 j 和 k，f 在以对应于 $w_{j,k}$ 的节点为根的子树上，与上述构造的嵌入一致。由于后继 $v_{j,k}$ 两两不同，这些嵌入的像互不相交。因此，f 是一个从 $\mathrm{Unr}^{\ell+1}(\mathfrak{M}, w)$ 到 $\mathrm{Unr}^{\ell+1}(\mathfrak{N}, v)$ 的嵌入。

（⇐）反过来，假设 f 是从 $\mathrm{Unr}^{\ell+1}(\mathfrak{M}, w)$ 到 $\mathrm{Unr}^{\ell+1}(\mathfrak{N}, v)$ 的一个嵌入。那么，f 将 $\mathrm{Unr}^{\ell+1}(\mathfrak{M}, w)$ 的根节点映射到 $\mathrm{Unr}^{\ell+1}(\mathfrak{N}, v)$ 的根节点，因此，$(\mathfrak{M}, w) \equiv^{\mathcal{GML}}_{0} (\mathfrak{N}, v)$。于是，$(\mathfrak{N}, v) \models \varphi^{0}_{\mathfrak{M}, w}$。固定 $j \in \{1, \ldots, m\}$。根据展开的定义，$\mathrm{Unr}^{\ell+1}(\mathfrak{M}, w)$ 的根节点在深度 1 处恰有 $|C_j|$ 个不同的节点，分别对应于 w的后继 w_j,1, . . . , $w_{j,|C_j|}$。由于 f 是单射，它将这些节点映射到 $\mathrm{Unr}^{\ell+1}(\mathfrak{N}, v)$ 中深度 1 处的 $|C_j|$ 个不同节点。每个这样的节点都对应于 $\mathfrak{N}$中 v 的一个后继 $v_{j,k}$，且该节点下方的子树恰好是

$\mathrm{Unr}^\ell(\mathfrak{N}, v_{j,k})$。将 f限制在相应的子树上即可得到嵌入，因此，对于 $k = 1, \ldots, |C_j|$，$\mathrm{Unr}^\ell(\mathfrak{M}, w_{j,k}) \trianglelefteq \mathrm{Unr}^\ell(\mathfrak{N}, v_{j,k})$。根据归纳假设，这意味着 $(\mathfrak{N}, v_{j,k}) \models \varphi^\ell_{\mathfrak{M}, w_{j,k}}$。由于每个 $w_{j,k} \in C_j$，我们得到 $\varphi^\ell_{\mathfrak{M}, w_{j,k}}$与 $\varphi^\ell_{\mathfrak{M}, w_j}$相同。此外，世界 $v_{j,k}$是 v的两两不同的后继。因此，$(\mathfrak{N}, v) \models \Diamond^{\geq |C_j|} \varphi^\ell_{\mathfrak{M}, w_j}$，证毕。□

借助引理 8 和定理3，我们现在可以证明这样一类模型的保持定理：它们在嵌入下保持，并且在 L展开下不变。正如我们将在下文证明的，这些类恰好是由模态深度至多为 L的 ∃ GML 公式所定义的类。

定理 9。对于任意带指定点的模型类C 以及任意 $L \in \mathbb{N}$，以下条件等价：

- C 在 L展开下不变，并且在嵌-入下保持；
- C 可由一个深度至多为 L的 $\exists\mathcal{GML}$ 公式定义。

证明。(⇛)令 $\mathsf{T} = \{\mathrm{Unr}^L(\mathfrak{M}, w) \mid (\mathfrak{M}, w) \in \mathsf{C}\}$，并令 $\trianglelefteq$为嵌入关系。由于 C 在 L展开下不变，我们有 $\mathsf{T} \subseteq \mathsf{C}$。根据定理3，$(\mathsf{T}, \trianglelefteq)$ 是良拟序，因此在同构意义下只有有限多个 $\trianglelefteq$极小元。令 $\mathsf{T}_{\min}$恰好包含每种极小同构类型的一个代表。对于每个 $(\mathfrak{T}, v) \in \mathsf{T}_{\min}$，我们构造 ∃GML 特征公式 $\varphi^L_{\mathfrak{T}, v}$，并定义 $\varphi_{\mathsf{C}} = \bigvee_{(\mathfrak{T}, v) \in \mathsf{T}\min} \varphi^L_{\mathfrak{T}, v}$。由于析取是有限的，且每个 $\varphi^L_{\mathfrak{T}, v}$都是一个 ∃GML 公式，$\varphi_{\mathsf{C}}$便是一个（有限的） ∃GML 公式。我们证明 φ_{C}定义了 C。

设 $(\mathfrak{M}, w) \in \mathsf{C}$。于是 $\mathrm{Unr}^L(\mathfrak{M}, w) \in \mathsf{T}$。由于 $(\mathsf{T}, \trianglelefteq)$ 是良拟序，存在一个 $\trianglelefteq$-极小元素 $(\mathfrak{T}, v) \in \mathsf{T}_{\min}$，使得 $(\mathfrak{T}, v) \trianglelefteq \mathrm{Unr}^L(\mathfrak{M}, w)$。由于 $(\mathfrak{T}, v)$ 是高度至多为 L 的树形结构，我们有 $\mathrm{Unr}^L(\mathfrak{T}, v) = (\mathfrak{T}, v)$。因此，$\mathrm{Unr}^L(\mathfrak{T}, v) \trianglelefteq \mathrm{Unr}^L(\mathfrak{M}, w)$，由引理 8 可得 $(\mathfrak{M}, w) \models \varphi^L_{\mathfrak{T}, v}$。由此可知 $(\mathfrak{M}, w) \models \varphi_{\mathsf{C}}$。

反过来，假设 $(\mathfrak{M}, w) \models \varphi_{\mathsf{C}}$。那么，$(\mathfrak{M}, w) \models \varphi^L_{\mathfrak{T}, v}$，其中 $(\mathfrak{T}, v) \in \mathsf{T}_{\min}$。由引理 8 可知，这意味着 $\mathrm{Unr}^L(\mathfrak{T}, v) \trianglelefteq \mathrm{Unr}^L(\mathfrak{M}, w)$。由于 $(\mathfrak{T}, v)$ 是高度至多为 L 的树形结构，我们再次有 $\mathrm{Unr}^L(\mathfrak{T}, v) = (\mathfrak{T}, v)$，因此 $(\mathfrak{T}, v) \trianglelefteq \mathrm{Unr}^L(\mathfrak{M}, w)$。根据构造，$\mathsf{T}_{\min} \subseteq \mathsf{T} \subseteq \mathsf{C}$，因此 $(\mathfrak{T}, v) \in \mathsf{C}$。由于 C 在嵌入下保持不变，我们有 $\mathrm{Unr}^L(\mathfrak{M}, w) \in \mathsf{C}$。最后，C 在 L-展开下的不变性推出 $(\mathfrak{M}, w) \in \mathsf{C}$。

(⇐) 假设 C 可由深度至多为 L 的 ∃GML 公式 φ 定义。那么 C 在 L-展开下保持不变：对于每个带指定点的模型，$(\mathfrak{M}, w) \models \varphi$ 当且仅当 $\mathrm{Unr}^L(\mathfrak{M}, w) \models \varphi$，因为 φ 的真值仅取决于深度至 L 的展开。我们论证 C 在嵌入下也保持不变。设 $(\mathfrak{M}, w) \models \varphi$，并假设存在一个嵌入，证明 $(\mathfrak{M}, w) \trianglelefteq (\mathfrak{N}, v)$。由于嵌入保持命题标签并将后继单射地映射，一次对 φ 结构的常规归纳即可表明 $(\mathfrak{N}, v) \models \varphi$。特别地，对于 φ 中出现的每个形如 $\Diamond^{\geq k}\psi$ 的子公式，如果 $(\mathfrak{M}, w)$ 中存在满足 ψ 的 k 个后继，那么 $(\mathfrak{N}, v)$ 中也存在满足 ψ 的 k 个后继。因此，C 在嵌入下保持不变。□

作为定理 9 的推论，我们得到如下适用于 GML 的等秩嵌入保持定理。

定理 10。对于任意深度至多为 L的$\mathcal{GML}$ 公式φ，以下条件等价：

- φ 在嵌入下保持，
- φ 等价于一个深度至多为 L的 ∃ $\mathcal{GML}$ 公式。

证明。(⇛)设 φ 是一个深度至多为 L 且在嵌入下保持的 GML 公式。每个深度至多为 L 的 GML 公式在 L展开下均保持不变。因此，根据定理 9，φ 等价于一个深度至多为 L的 ∃GML 公式。

(⇐) 反过来，假设 φ 等价于一个深度至多为 L的 ∃GML 公式。根据定理 9 的（⇐）方向，每个∃GML 公式都在嵌入下保持。由于在嵌入下保持这一性质在逻辑等价下不变，φ 在嵌入下保持。□

4.2 单射同态下的保持性

接下来，我们刻画在单射同态下保持的展开不变类。回顾一下，每个嵌入都是单射同态，但反之不成立。这表明，定义在单射同态下保持的类所需的逻辑语言应严格弱于在嵌入下保持所需的逻辑语言。根据定理 9，后者是 ∃GML。如下文所示，在单射同态的情形下，合适的语言是 $\exists^+$GML，即 GML 的存在正片段。

我们首先定义特征 $\exists^+$GML 公式，它们是通过删除所有负文字，从特征 ∃GML 公式得到的。

定义 11。设 $(\mathfrak{M}, w)$是一个带指定点的模型，且 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$。深度为 ℓ 的特征 $\exists^+\mathcal{GML}$ 公式$\psi^\ell_{\mathfrak{M}, w}$定义为从特征 $\exists\mathcal{GML}$ 公式$\varphi^\ell_{\mathfrak{M}, w}$（见定义 7）中删除所有负文字 $\neg p$ 后得到的公式。

注意，$\psi^\ell_{\mathfrak{M}, w}$ 的定义方式与 $\varphi^\ell_{\mathfrak{M}, w}$ 相同，只是省略了合取项 $\bigwedge\{\neg p \mid (\mathfrak{M}, w) \not\models p\}$。因此，$\psi^\ell_{\mathfrak{M}, w}$ 不含否定，故是一个 $\exists^+$GML 公式。

虽然$\varphi^\ell_{\mathfrak{M}, w}$保证模型的 ℓ-展开之间存在嵌入，但公式$\psi^\ell_{\mathfrak{M}, w}$保证这些展开之间存在单射同态。以下引理对此进行了刻画。

引理 12. 设$(\mathfrak{M}, w)$和$(\mathfrak{N}, v)$是带指定点的模型，且设 $\ell \in \mathbb{N}$。那么 $(\mathfrak{N}, v) \models \psi^\ell_{\mathfrak{M}, w}$当且仅当存在从$\mathrm{Unr}^\ell(\mathfrak{M}, w)$到$\mathrm{Unr}^\ell(\mathfrak{N}, v)$的单射同态。

证明. 证明对 ℓ 作归纳法，并且与引理 8 的证明大体相同；我们仅指出单射同态取代嵌入之处。在整个证明中，令 $\trianglelefteq$ 表示单射同态关系。

基例（$\ell = 0$）。公式 $\psi^0_{\mathfrak{M}, w}$是所有在 w处成立的命题符号的合取。因此，$(\mathfrak{N}, v) \models \psi^0_{\mathfrak{M}, w}$当且仅当 $(\mathfrak{N}, v)$ 满足至少与 $(\mathfrak{M}, w)$ 相同的命题。由于 $\mathrm{Unr}^0(\mathfrak{M}, w)$ 和 $\mathrm{Unr}^0(\mathfrak{N}, v)$ 各自只包含一个世界，因此这当且仅当 $\mathrm{Unr}^0(\mathfrak{M}, w) \trianglelefteq \mathrm{Unr}^0(\mathfrak{N}, v)$。

归纳步骤。假设该结论对某个 $\ell \geq 0$ 成立，并考虑 $\ell + 1$。我们沿用引理 8 证明中的记号。

(⇒)假设 $(\mathfrak{N}, v) \models \psi^{\ell+1}_{\mathfrak{M},w}$。那么 $(\mathfrak{N}, v) \models \psi^{0}_{\mathfrak{M},w}$，并且对于每个等价类 C_j，都存在 $|C_j|$ 个互不相同的后继 $v_{j,1}, \ldots, v_{j,|C_j|}$，它们属于 v，且满足 $(\mathfrak{N}, v_{j,k}) \models \psi^{\ell}_{\mathfrak{M},w_j}$。根据归纳假设，对于每个 j,k，都存在一个单射同态，因此 $\mathrm{Unr}^{\ell}(\mathfrak{M}, w_j) \preceq \mathrm{Unr}^{\ell}(\mathfrak{N}, v_{j,k})$。如引理 8 的证明所示，可以将这些同态组合成一个从 $\mathrm{Unr}^{\ell+1}(\mathfrak{M}, w)$ 到 $\mathrm{Unr}^{\ell+1}(\mathfrak{N}, v)$ 的单射同态：映射根节点，并在对应的子树上使用上述同态。由于这些映射的目标分别位于以不同深度为 1 的节点为根的两两不相交子树中，因此所得同态是单射的。于是，$\mathrm{Unr}^{\ell+1}(\mathfrak{M}, w) \preceq \mathrm{Unr}^{\ell+1}(\mathfrak{N}, v)$。

（⇐）反过来，假设存在一个从 $\mathrm{Unr}^{\ell+1}(\mathfrak{M}, w)$ 到 $\mathrm{Unr}^{\ell+1}(\mathfrak{N}, v)$ 的单射同态。于是 f 将根节点映射到根节点，这意味着 $(\mathfrak{N}, v) \models \psi^{0}_{\mathfrak{M},w}$。固定 $j \in \{1, \ldots, m\}$。f 的单射性迫使 $\mathrm{Unr}^{\ell+1}(\mathfrak{M}, w)$ 的根节点下方 $|C_j|$ 个互不相同的深度为 1 的节点，被映射到 $\mathrm{Unr}^{\ell+1}(\mathfrak{N}, v)$ 中 $|C_j|$ 个互不相同的深度为 1 的节点。每个这样的节点都对应于 $\mathfrak{N}$ 中 v 的一个后继 $v_{j,k}$。将 f 限制在相应的子树上，可得到从 $\mathrm{Unr}^{\ell}(\mathfrak{M}, w_{j,k})$ 到 $\mathrm{Unr}^{\ell}(\mathfrak{N}, v_{j,k})$ 的单射同态。根据归纳假设，对所有 k，我们得到 $(\mathfrak{N}, v_{j,k}) \models \psi^{\ell}_{\mathfrak{M},w_j}$。由于世界 $v_{j,k}$ 是 v 的两两不同的后继，我们可得 $(\mathfrak{N}, v) \models \Diamond^{\geq |C_j|} \psi^{\ell}_{\mathfrak{M},w_j}$。因为这对每个 j 都成立，所以 $(\mathfrak{N}, v) \models \psi^{\ell+1}_{\mathfrak{M},w}$。 □

利用上述关于特征性 ∃GML 公式的结果，我们现在可以证明以下定理：对于在单射同态下保持且在展开下不变的类，该定理成立。

定理 13. 对于任意带指定点的模型类 C 以及任意 $L \in \mathbb{N}$，以下条件等价：

- C 在单射同态下保持，且在 L展开下不变；
- C 可由深度至多为 L 的 $\exists^{+}\mathcal{GML}$ 公式定义。

证明。证明采用与定理 9 相同的策略，但现在利用引理 12，而非引理 8。

(⇒)令 $\mathsf{T} = \{\mathrm{Unr}^{L}(\mathfrak{M}, w) \mid (\mathfrak{M}, w) \in \mathsf{C}\}$，并令 $\preceq$ 为单射同态关系。由于 C 在 L展开下不变，因此 $\mathsf{T} \subseteq \mathsf{C}$。由推论 4 可知，$(\mathsf{T}, \preceq)$ 是良拟序，因而在同构意义下只有有限多个 $\preceq$极小元。令 $\mathsf{T}_{\mathsf{min}}$包含每种极小同构类型的一个代表。对于每个 $(\mathfrak{T}, v) \in \mathsf{T}_{\mathsf{min}}$，我们构造特征性 $\exists^{+}$GML 公式 $\psi^{L}_{\mathfrak{T},v}$，并定义 $\psi_{\mathsf{C}} = \bigvee_{(\mathfrak{T},v) \in \mathsf{T}\mathrm{min}} \psi^{L}_{\mathfrak{T},v}$。证明 ψ_{C} 定义 C 的论证与定理 9 证明中相应的论证完全相同，只需用引理 12 替代引理 8。

(⇐)假设 C 可由深度至多为 L 的 $\exists^{+}$GML 公式 φ 定义。那么 C 在 L-展开下保持不变：对于每个带指定点的模型 $(\mathfrak{M}, w)$、$(\mathfrak{M}, w)$，$\models \varphi$ 当且仅当 $\mathrm{Unr}^{L}(\mathfrak{M}, w) \models \varphi$。现在我们证明 C 在单射同态下保持。设 $(\mathfrak{M}, w) \models \varphi$，并设 f 是一个见证 $(\mathfrak{M}, w) \preceq (\mathfrak{N}, v)$ 的单射同态。由于单射同态以单调方式保留命题标签，并将后继单射地映射，按照公式 φ 的结构进行常规归纳即可证明 $(\mathfrak{N}, v) \models \varphi$，与定理 9 的证明完全相同。□

现在我们利用定理 13，证明 GML 关于单射同态的等秩保持定理。

定理 14. 对于任意深度至多为 L的$\mathcal{GML}$公式φ，以下各项等价：

- φ 在单射同态下保持，
- φ 等价于一个深度至多为 L 的 $\exists^{+}\mathcal{GML}$ 公式。

证明。(⇒)设 φ 是一个深度至多为 L、在单射同态下保持的 GML 公式。每个深度至多为 L 的 GML 公式在 L-展开下都保持不变。因此，根据定理 13，φ 等价于一个深度为 $\leq L$ 的 $\exists^{+}$GML 公式。(⇐)假设 φ 等价于一个深度至多为 L 的 $\exists^{+}$GML 公式。根据定理 13 的（⇐）方向，每个 $\exists^{+}$GML 公式都在单射同态下保持。由于在单射同态下保持这一性质在逻辑等价下不变，因此 φ 在单射同态下保持。□

值得注意的是，在知识表示与推理领域的描述逻辑研究中，与 GML 和$\exists^{+}$GML 对应的逻辑都得到了广泛研究。具体而言，与 GML 对应的描述逻辑是 ALCQ [7]，而与 $\exists^{+}$GML 对应的逻辑是 ELUQ [25]。因此，定理 14 表明，ELUQ 恰好是 ALCQ 中在单射同态下保持的片段。

现在我们转而讨论模态逻辑 ML 在单射同态下的保持性。为证明相应的保持定理，我们引入额外的工具，即针对树形模型的修剪操作及其一些基本性质。

定义 15. 设 $(\mathfrak{M}, w)$ 是一个高度为 L的带指定点的树形模型，并设 $<$ 是 $\mathfrak{M}$的各个世界上的一个固定线性序。我们按归纳方式定义一个模型序列 $\mathfrak{M}^{k}$ 如下：

- $\mathfrak{M}^{0} := \mathfrak{M}$，
- $\mathfrak{M}^{k+1}$ 由 $\mathfrak{M}^{k}$ 通过移除任意高度为 k的子树$(\mathfrak{T}, v)$ 得到，条件是存在一个高度为 k的兄弟子树$(\mathfrak{T}, v')$，满足$(\mathfrak{T}, v') \equiv_{\text{模态逻辑}\, k} (\mathfrak{T}, v)$，且 $v' < v$。

剪枝 $(\mathfrak{M}, w)$ 定义为 $(\mathfrak{M}^{L}, w)$。

图 4 展示了一个模型及其剪枝的示例。根据构造，树形模型的剪枝仍是树形的，因为它是通过删除子树得到的。此外，定义 15 中线性序 $<$ 的选择不会影响所得剪枝在同构意义下的结果：在每一步中，每个模态逻辑$_k$-等价类的兄弟子树中恰好保留一个代表。

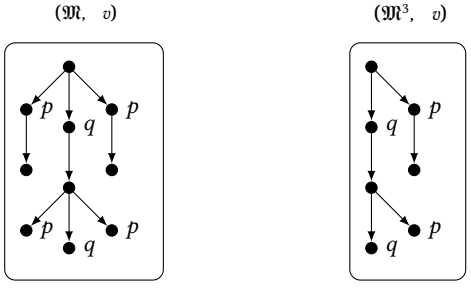

图 4：树形模型及其剪枝

接下来，我们阐述修剪操作的两个关键性质。首先，我们证明，高度为 L 的树形模型及其修剪

满足所有深度至多为 L的相同模态逻辑，也就是说，它们是 L-双模拟等价的。其次，我们证明修剪后的模型存在一个到原模型的单射同态。

引理 16。 设$(\mathfrak{M}, w)$是一个高度为 L的带指定点的树形模型，并设$(\mathfrak{M}^L, w)$是其剪枝结果。以下结论成立：

• $(\mathfrak{M}, w) \sim_L (\mathfrak{M}^L, w)$，• 存在一个从$(\mathfrak{M}^L, w)$到$(\mathfrak{M}, w)$的单射同态。

证明。设 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$，并设$(\mathfrak{M}^L, w)$是$(\mathfrak{M}, w)$的剪枝结果。根据构造，$W^L \subseteq W$，且每个 $v \in W$要么在剪枝过程中保留下来（即 $v \in W^L$），要么在某个阶段被移除 $k \leq L$，因为保留了一个具有相同 $\equiv_k^{\mathcal{ML}}$-类型、在 $<$意义下更小的兄弟节点。

我们定义关系 $Z \subseteq W \times W^L$ 如下。对于每个 $v \in W^L$，令vZv。对于每个 $v \notin W^L$，令 vZv'，其中 v' 是导致 v 在剪枝过程中被移除的唯一一个在 $<$ 意义下最小的兄弟节点。根据构造，Z是一个从W到 W^L的全函数。

我们证明明 Z是 $(\mathfrak{M}, w)$ 与 $(\mathfrak{M}$ 之间的 L-双模拟 $^L w)$。

首先，注意到 R^L 和 V^L 分别是 R 和 V 在 W^L 上的限制。此外，根据剪枝的构造，若 vZv'，则对于某个 $k \leq L$，有 $(\mathfrak{M}, v) \equiv_k^{\mathcal{ML}} (\mathfrak{M}^L, v')$。特别地，$V(v) = V^L(v')$。

双模拟的前向条件。假设 vZv' 和 vRu。根据 Z 的定义，存在 $u' \in W^L$ 使得 uZu'。我们证明 $v'R^Lu'$。

若 $v \in W^L$，则 $v' = v$。剪枝过程中，v 的后继被划分为若干个模态逻辑$_k$-等价类，并且每个等价类保留了一个代表。由于 u 属于这样一个等价类，其保留的代表恰好是 u'，因此 $v'R^Lu'$。

如果 $v \notin W^L$，那么 v' 是 v 的一个保留的兄弟节点，使得 $(\mathfrak{M}, v) \equiv_k^{\mathcal{ML}} (\mathfrak{M}, v')$。这一等价关系意味着，在 v 的后继中实现的每一种 ML_{k-1}-类型，也会在 v' 的后继中实现。剪枝确保后继 u 在 v' 的后继中有一个保留的代表 u'，根据 Z 的定义，我们有 uZu'。因此，在这种情况下也有 $v'R^Lu'$。

双模拟的回条件。假设 vZv'，并令 $v'R^Lu'$。根据剪枝的构造，u' 是以 $\mathfrak{M}$ 中 v 的一个后继 u 为根的某个子树的保留代表。根据 Z 的定义，我们有 uZu'，正如所需。

我们得出结论，Z 是 $(\mathfrak{M}, w)$ 与 $(\mathfrak{M}^L, w)$ 之间的一个 L-双模拟，因此 $(\mathfrak{M}, w) \sim_L (\mathfrak{M}^L, w)$。

最后，我们证明恒等映射 $f\colon W^L \mapsto W$ 是从 $(\mathfrak{M}^L, w)$ 到 $(\mathfrak{M}, w)$ 的一个单射同态。由于 $W^L \subseteq W$，该映射是单射的。此外，对于所有 $v', u' \in W^L$，当且仅当 $v'Ru'$ 且 $V^L(v') = V(v')$ 时，有 $v'R^Lu'$。因此，f 保持可及关系和赋值，故是从 $(\mathfrak{M}^L, w)$ 到 $(\mathfrak{M}, w)$ 的一个同态（实际上是一个嵌入）。□

剪枝会在兄弟子树中，每个 ML_k-等价类恰好保留一个代表。因此，在剪枝模型中，计数大于 1 的分级模态都无法成立。由此可将特征公式化简为基本模态逻辑中的公式。

引理 17. 设$(\mathfrak{M}, w)$是高度为 L 的带指定点的树形模型，设$(\mathfrak{M}^L, w)$是其剪枝，并设 $\ell \leq L$。那么，在特征 $\exists\mathcal{GML}$ 公式 $\varphi^{\ell}_{\mathfrak{M}^L, w}$ 和特征 $\exists^+\mathcal{GML}$ 公式 $\psi^{\ell}_{\mathfrak{M}^L, w}$中，所有算子 $\Diamond^{\geq k}$ 都只与 $k = 1$ 一起出现。特别地，$\varphi^{\ell}_{\mathfrak{M}^L, w}$是一个 $\exists$模态逻辑公式，而$\psi^{\ell}_{\mathfrak{M}^L, w}$是一个 $\exists^+$模态逻辑公式。

证明。该证明通过对 ℓ进行归纳法得出。

基例 $(\ell = 0)$. 公式 $\varphi^0_{\mathfrak{M}^L, w}$和 $\psi^0_{\mathfrak{M}^L, w}$是命题公式。因此，$\varphi^0_{\mathfrak{M}^L, w}$是一个 $\exists$模态逻辑公式，而 $\psi^0_{\mathfrak{M}^L, w}$是一个 $\exists^+$模态逻辑公式。

归纳步骤。 设 $\ell \geq 1$，并假设该结论对 $\ell - 1$成立。将 $\mathfrak{M}^L$中的 w的子节点划分为 $\equiv_{\ell-1}^{\mathcal{ML}}$-等价类 C_1、……、 C_m。根据剪枝的构造，在兄弟子树中，每个 $\equiv_{\ell-1}^{\mathcal{ML}}$-等价类至多保留一个代表。因此，每个类 C_j 都是单元素集合。

由于 ML 是 GML 的片段，关系 $\equiv_{\ell-1}^{\mathcal{GML}}$ 细化了$\equiv_{\ell-1}^{\mathcal{ML}}$。由此可知，$\mathfrak{M}^L$ 中 w的子节点之间的每个 $\equiv_{\ell-1}^{\mathcal{GML}}$-等价类也都是单元素集合。因此，特征$\exists$GML 公式 $\varphi^{\ell}_{\mathfrak{M}^L, w} := \varphi^0_{\mathfrak{M}^L, w} \wedge \bigwedge_{j=1}^m \Diamond^{\geq 1} \varphi^{\ell-1}_{\mathfrak{M}^L, w_j}$仅包含阈值为 1 的分级模态算子。根据归纳假设，$\varphi^{\ell-1}_{\mathfrak{M}^L, w_j}$是一个 $\exists$ML 公式，因此 $\varphi^{\ell}_{\mathfrak{M}^L, w}$也属于 $\exists$ML。

对特征公式 $\exists^+$GML- formula $\psi^{\ell}_{\mathfrak{M}^L, w} := \psi^0_{\mathfrak{M}^L, w} \wedge \bigwedge_{j=1}^m \Diamond^{\geq 1} \psi^{\ell-1}_{\mathfrak{M}^L, w_j}$，可以应用类似的论证。根据归纳假设，每个 $\psi^{\ell-1}_{\mathfrak{M}^L, w_j}$都是一个 $\exists^+$模态逻辑公式，因此$\psi^{\ell}_{\mathfrak{M}^L, w}$也是一个 $\exists^+$模态逻辑公式。□

结合剪枝构造以及引理16和引理 17中的结果，我们得到如下关于模态逻辑公式在单射同态下的保持定理。

定理 18。 对于任意深度至多为 L的模态逻辑 公式-φ，以下条件等价：

• φ 在单射同态下保持；• φ 等价于一个深度至多为 L的 $\exists^+$模态逻辑-公式。

证明。$(\Rightarrow)$设 φ是一个在单射同态下保持的模态逻辑公式。设 C 为满足 φ的带点模型类，并设 $\mathrm{T} = \{\mathrm{Unr}^{\ell}(\mathfrak{M}, w) \mid (\mathfrak{M}, w) \in \mathrm{C}\}$。由于 C 在 ℓ- 展开下不变，因此 $\mathrm{T} \subseteq \mathrm{C}$。

令 $\preceq$ 表示单射同态关系。由推论 4，$(\mathrm{T}, \preceq)$ 是良拟序，因此在同构意义下只有有限多个 $\preceq$-极小元。令 $\mathrm{T}_{\mathsf{min}}$ 包含每种此类极小同构类型的一个代表，并令 T' 由 $\mathrm{T}_{\mathsf{min}}$中模型的剪枝组成。

由引理 16，每个剪枝都与原树 L 双模拟等价。由于 φ是深度为 ℓ 的模态逻辑公式，类 C 在 ℓ 双模拟下保持不变，因此 $\mathrm{T}' \subseteq \mathrm{C}$。此外，$\mathrm{T}'$是有限的，因为 $\mathrm{T}_{\mathsf{min}}$ 是有限的。

对于每棵剪枝后的树 $(\mathfrak{T}, t) \in \mathrm{T}'$，考虑其特征 $\exists^+$ GML 公式$\psi^{\ell}_{\mathfrak{T}, t}$。根据构造，这些公式都是正的；并且由引理 17，每个 $\psi^{\ell}_{\mathfrak{T}, t}$实际上都是一个 $\exists^+$模态逻辑公式。令

$$\Psi = \bigvee_{(\mathfrak{T}, t) \in \mathcal{T}'} \psi^{\ell}_{\mathfrak{T}, t}.$$

那么 Ψ 是深度至多为 ℓ 的有限析取，由 $\exists^+$ 个 ML 公式构成。根据构造，Ψ 在 T' 中的每个模型中都成立，因此在 $\mathrm{T}_{\mathsf{min}}$ 中的每个模型中也成立。根据引理 12，它在 T 中的所有模型中都成立；又由于 C 在 ℓ- 展开下保持不变，因此 Ψ 定义了 C。

$(\Leftarrow)$ 设 $\exists^+$ φ $\exists^+$ $\subseteq$ 等价于一个 $\exists^+$ML 公式。由于 $\exists^+$ML GML，φ 也等价于一个 GML 公式。根据定理 14，它在单射同态下保持不变。□

4.3 同态下的保持性

现在转向在同态下保持不变的类。我们首先证明，若这类在展开下保持不变，则它可由存在正模态逻辑（$\exists^+$ML）定义。我们的证明策略沿用嵌入和单射同态情形中的总体思路。具体而言，我们定义一种恰当形式的特征 $\exists^+$ML 公式。

定义 19。 设$(\mathfrak{M}, w)$是一个带指定点的模型，其为 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$，则深度为 ℓ 的特征 $\exists^+\mathcal{ML}$-公式 $\chi^{\ell}_{\mathfrak{M},w}$ 定义为：从特征 $\exists\mathcal{GML}$-公式$\varphi^{\ell}_{\mathfrak{M},w}$（见定义 7）中移除所有负文字 $\neg p$，并将每个分级模态算子 $\Diamond^{\geq k}$ 替换为基本模态算子 $\Diamond$后得到的公式。

特征 $\exists^+$ML 公式与展开之间的同态如下引理所述。

引理 20。 设$(\mathfrak{M}, w)$和$(\mathfrak{N}, v)$是带指定点的模型，并设 $\ell \in \mathbb{N}$。那么，$(\mathfrak{N}, v) \models \chi^{\ell}_{\mathfrak{M},w}$当且仅当$\mathrm{Unr}^{\ell}(\mathfrak{M}, w) \preceq \mathrm{Unr}^{\ell}(\mathfrak{N}, v)$，其中 $\preceq$表示同态关系。

证明。对 ℓ进行归纳。

基例（$\ell = 0$）。 公式 $\chi^{0}_{\mathfrak{M},w}$是一个由命题符号构成的合取式，在 w处成立。因此，$(\mathfrak{N}, v) \models \chi^{0}_{\mathfrak{M},w}$当且仅当 $(\mathfrak{N}, v)$ 满足至少与 $(\mathfrak{M}, w)$ 相同的命题符号。由于 $\mathrm{Unr}^0(\mathfrak{M}, w)$ 和 $\mathrm{Unr}^0(\mathfrak{N}, v)$ 都只包含一个世界，当且仅当 $\mathrm{Unr}^0(\mathfrak{M}, w) \preceq \mathrm{Unr}^0(\mathfrak{N}, v)$ 时，这一条件成立。

归纳步骤。假设对于某个 $\ell \geq 0$，该断言成立，并考虑 $\ell + 1$。我们采用与引理 8 的证明相同的记号。（$\twoheadrightarrow$ 设 $(\mathfrak{N}, v) \models \chi^{\ell+1}_{\mathfrak{M}}, w$。那么，对于 $\mathfrak{M}$ 中 w 的后继的每个等价类 C_j，在 $\mathfrak{N}$ 中都至少存在一个 v 的后继 v_j，使得 $(\mathfrak{N}, v_j) \models \chi^{\ell}_{\mathfrak{M},w_j}$。根据归纳假设，对于每个 j，$\mathrm{Unr}^{\ell}(\mathfrak{M}, w_j) \preceq \mathrm{Unr}^{\ell}(\mathfrak{N}, v_j)$。展开 $\mathrm{Unr}^{\ell+1}(\mathfrak{M}, w)$ 由根节点以及以深度为 1 的节点为根的子树组成，这些节点对应于 w的后继。由于同态不必是单射，同一等价类 C_j 中对应于后继的所有深度为 1 的节点都可以映射到对应于 v_j 的同一个深度为 1 的节点。将根节点映射到根节点，并在对应的子树上使用上述同态，即可得到从 $\mathrm{Unr}^{\ell+1}(\mathfrak{M}, w)$ 到 $\mathrm{Unr}^{\ell+1}(\mathfrak{N}, v)$ 的一个同态。

($\Leftarrow$) 设 f 是从 $\mathrm{Unr}^{\ell+1}(\mathfrak{M}, w)$ 到 $\mathrm{Unr}^{\ell+1}(\mathfrak{N}, v)$ 的同态。那么，f 将根映射到根，这意味着 $(\mathfrak{N}, v) \models \chi^{0}_{\mathfrak{M},w}$。固定一个等价类 C_j。每个对应于 w 的后继 w_j 的深度为 1 的节点，都必须由 f 映射到某个对应于 v 的后继 v_j 的深度为 1 的节点。将 f 限制在对应的子树上，可得到一个同态 $\mathrm{Unr}^{\ell}(\mathfrak{M}, w_j) \to \mathrm{Unr}^{\ell}(\mathfrak{N}, v_j)$；根据归纳假设，我们得到 $(\mathfrak{N}, v_j) \models \chi^{\ell}_{\mathfrak{M},w_j}$。因此，对于每个 j，都有 $(\mathfrak{N}, v) \models \Diamond\chi^{\ell}_{\mathfrak{M},w_j}$，进而 $(\mathfrak{N}, v) \models \chi^{\ell+1}_{\mathfrak{M}}, w$。□

前述结果使我们能够为展开不变类证明同态保留定理。

定理 21. 对于任意带指定点的模型类 C 以及任意 $L \in \mathbb{N}$，下列各项等价：

- C 在同态下保持不变，且在L-展开下具有不变性，因此
- C 可由深度至多为 L的 $\exists^+$模态逻辑公式定义。

证明。证明沿用了定理 9 的总体策略，但以引理 20 取代引理 8。

($\twoheadrightarrow$设 $\mathbf{C} = \{\mathrm{Unr}^L(\mathfrak{M}, w) \mid (\mathfrak{M}, w) \in \mathbf{C}\}$。由于 C 在 L-展开下不变，我们有 $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{C}$。设 $\mathbf{C}_{\mathrm{min}} \subseteq \mathbf{C}$ 为 C 的同态极小元素的一组代表。由推论 4，$\mathbf{C}_{\mathrm{min}}$ 是有限的（或者，有限性也可由如下事实得出：深度至多为 L 的 ML 不等价公式只有有限多个）。对每个 $(\mathfrak{T}, v) \in \mathbf{C}_{\mathrm{min}}$，设 $\chi^{L}_{\mathfrak{T},v}$ 为其特征 $\exists^+$ML 公式，并定义 $\chi_C = \bigvee_{(\mathfrak{T},v)\in\mathbf{C}_{\mathrm{min}}} \chi^{L}_{\mathfrak{T},v}$，这是一个深度至多为 L的有限 $\exists^+$ML 公式。

由构造，χ_C 在 $\mathbf{C}_{\mathrm{min}}$ 中的每个模型中成立，因此由引理 20，它在 C 中的所有模型中成立。由于 C 在L-展开下不变，故 χ_C 定义了 C。

($\Leftarrow$) 假设 C 可由一个深度至多为 L 的 $\exists^+$ML 公式 φ 定义。由于 φ 是正的，标准翻译会得到一个存在正一阶逻辑公式。此类公式在同态 [30] 下保持不变。此外，由于 φ 的深度至多为 L，它在 L 展开下保持不变。□

我们注意到，定理 21 直接推出模态逻辑的等秩同态保持定理作为推论。Abramsky 和 Reggio [3] 此前在一般的范畴论框架中得到了此类结果。在我们的设定中，这些结果直接源于展开不变性。事实上，每个深度至多为 L 的 GML（以及 ML）公式在 L 展开下保持不变，因此定理 21 适用于其模型类。

推论 22 ([3], 定理 5.20). 对于任意深度至多为 L 的 $\mathcal{GML}$ 公式 φ，以下条件等价：

- φ 在同态下保持；
- φ 等价于一个深度至多为 L的 $\exists^+$模态逻辑公式。

4.4 恢复 Rosen 的模态逻辑嵌入保持定理

最后，我们指出，我们的框架还恢复了 Rosen 在有限情形下针对模态逻辑提出的经典嵌入保持定理 [28]。这给出了一种基于良拟序和极小模型、而非 Ehrenfeucht-Fraïssé 博弈的替代证明。

定理 23 （[28], 命题 6）。对于任意深度至多为 L 的模态逻辑公式 φ，以下命题等价：

- φ 在嵌入下保持，
- φ 等价于一个深度至多为 L的 $\exists$模态逻辑公式。

证明。（$\Leftarrow$）假设 φ 等价于一个深度至多为 L 的 $\exists$模态逻辑公式。由于 $\exists$模态逻辑 $\subseteq \exists$GML，根据定理 9，φ 在嵌入下保持。

($\twoheadrightarrow$设 φ 在嵌入下保持不变，令 C 为 φ的带指定点模型类。由于 $\varphi \in$ ML，类 C 在 L-展开下保持不变。根据定理 9，C 可由特征公式的有限析取$\bigvee_{(\mathfrak{T},\ t)\in\mathcal{T}_{\mathrm{min}}} \varphi^{L}_{\mathfrak{T},\ t}$定义，其中 $\mathbf{T}_{\mathrm{min}}$由高度为 $\leq L$且关于 $\preceq$嵌入关系 $\preceq$-极小的树形模型组成。令 $\mathbf{T}'$由 $\mathbf{T}_{\mathrm{min}}$中每个树形模型的剪枝组成。根据引理 16，每个 $(\mathfrak{T},\ t) \in \mathbf{T}_{\mathrm{min}}$ 都与其剪枝 L-双模拟等价，因此满足相同的深度为 $\leq L$的 ML 公式。特别地，$\mathbf{T}'$，$\subseteq$C，且 $\mathbf{T}'$是有限的，因为对于 $k \leq L$，剪枝至多保留每种 ML_k-类型的一个代表。根据引理 17，公式

$\psi = \bigvee_{(\mathfrak{T},\ w)\in\mathcal{T},\ \varphi^{L}_{\mathfrak{T}},\ w}$ 是一个 ∃ML 公式。定理 9 的证明中所用的相同论证表明，ψ 定义了 C。□

5 图神经网络的保持定理

本节将注意力转向图神经网络（GNN）——用于图结构数据的机器学习模型。我们重点关注 GNN 的旗舰类别之一，即聚合-组合型 GNN [8]。当训练好的此类 GNN N 用于对图中的节点进行二元分类时，它会定义一个带指定点的模型类（类似于逻辑公式），并接受该类中的模型。

由具有 L 层的 GNN 定义的带指定点的模型类，在 L-展开下保持不变 [8, 24, 38]。GNN 与模态逻辑之间也存在引人注目的联系 [8, 9, 12, 26]。具体而言，现有结果表明，一阶性质可由聚合-组合型 GNN 定义，当且仅当它可由 GML 定义 [8]。因此，我们关于展开不变类的结果可直接应用于 GNN，从而得到以下保持定理。

推论 24。 设$\mathcal{N}$ 是一个具有 L 层的聚合-组合图神经网络，C 是由$\mathcal{N}$定义的带点模型类。则以下等价关系成立：

- C 在嵌入下保持，当且仅当C 可由深度至多为 L的 $\exists\mathcal{GML}$公式定义；
- C 在单射同态下保持，当且仅当C 可由深度至多为 L的 $\exists^{+}\mathcal{GML}$公式定义；
- C 在同态下保持，当且仅当C 可由深度至多为 L的 $\exists^{+}\mathcal{ML}$公式定义。

在接下来的小节中，我们将展示如何利用保持定理，精确刻画文献 [25, 33–35]近期研究的两类图神经网络的表达能力。具体而言，我们将证明单调图神经网络的表达能力恰好等同于 $\exists^{+}$GML（定理28），而采用MAX聚合的单调图神经网络的表达能力恰好等同于 $\exists^{+}$ML（定理 29）。

5.1 图神经网络

我们考虑有限、无向、简单的节点标记图$G = (V, E, \lambda)$，其中 V 是有限的节点集，E是不含自环的无向边集，且 $\lambda\colon V \to \{0,1\}^{d}$ 为每个节点分配一个固定维度为 d 的二进制向量（ G的维度 ）。一个带指定点的图 是由一个图和一个指定节点组成的对(G, v)。维度为 d 的带标记图以标准方式对应于大小为 d 的命题符号集上的克里普克模型：节点对应于世界，每条无向边 $\{u, v\}$在两个方向上诱导可及关系，二进制向量对应于赋值，其中节点 v 处向量的第 i个位置决定 v处第 i个命题的真值。在此对应关系下，嵌入与同态的概念（及其保持性）可从克里普克模型无缝延伸到带标记图。

一个节点分类器是将带标记图映射为真（接受）或假（拒绝）的函数。若两个分类器计算同一函数，则它们等价。两个分类器族 F 与 F′ 具有相同的表达能力，记作 $\mathrm{F} \equiv \mathrm{F}'$，是指 F 中的每个分类器（相应地，F′）在 F′中都有一个等价的分类器（相应地，F）。我们考虑具有聚合-组合层 [8, 9] 的图神经网络节点分类器。一层是一个二元组 (agg, comb)，其中 agg 是将向量的多重集映射为单个向量的聚合函数，comb 是将向量映射为向量的组合函数。将一层应用于 $G = (V, E, \lambda)$ 会得到一个图 $G' = (V, E, \lambda')$，其节点和边保持不变，但标记函数 λ' 已更新。对每个节点 $v \in V$，更新后的标记 $\lambda'(v)$ 定义为

$$\mathrm{comb}\Big(\lambda(v), \mathrm{agg}(\{\!\{\lambda(w)\}\!\}_{w\in N_G(v)})\Big), \tag{1}$$

其中，$N_G(v) = \{w \mid \{v,\ w\} \in E\}$ 表示 v 的邻居。

每个聚合函数和组合函数都有固定的输入维度和输出维度。要使层的应用定义良好，这些维度必须兼容：如果 agg 的输入维度为 d，输出维度为 d'，那么 comb 的输入维度为 $d + d'$。一个维度为 d 的*GNN* 分类器 N由 L 个聚合-组合层和一个将向量映射为真值的分类函数 cls 组成。第一层的输入维度为 d，因此第 ℓ 层的输出维度与第 $\ell+1$ 层的输入维度相匹配。对于在应用第 ℓ 层后与节点 v 关联的向量，我们记作 $\lambda^{(\ell)}(v)$，其中 $\lambda^{(0)}(v) = \lambda(v)$，而 $\lambda^{(L)}(v)$ 是最终表示。在带指定点的图 $(G,\ v)$ 上，N 的输出定义为真值 $\mathrm{N}\ (G,\ v) = \mathrm{cls}\left(\lambda^{(L)}(v)\right)$。

5.2 单调图神经网络的表达能力

对于维度相同的向量 $\mathbf{x},\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{d}$，若对所有 $i \in [d]$都有 $x_i \le x'_i$，则记作 $\mathbf{x} \le \mathbf{x}'$。对于维度相同的向量多重集 M 和 M'，若存在一个单射 $f\colon M \to M'$，使得对每个$\mathbf{x} \in M$都有$\mathbf{x} \le f(\mathbf{x})$，则记作 $M \le M'$。例如，

$$\{\!\{[-1,2],[0,1]\}\!\} \le \{\!\{[-1,2],[0,3],[-1,-1]\}\!\},$$

其中，单射 f定义为 $f([-1,2]) = [-1,2]$ 和 $f([0,1]) = [0,3]$。

函数 f将向量或多重集映射为向量或数值——例如组合函数、聚合函数或分类函数——若非递减，则当 $x \le y$时，$f(x) \le f(y)$对所有可取参数 x, y均成立。

若图神经网络的所有聚合函数、组合函数以及最终分类函数均为非递减函数，则该图神经网络是单调的。正权重图神经网络是指每一层 ℓ 都具有以下形式的图神经网络：

$$ReLU\Big(\mathbf{b}_\ell + \lambda(v)\mathbf{A}_\ell + \mathrm{agg}_\ell\big(\{\!\{\lambda(w) \mid w \in N_G(v)\}\!\}\big)\mathbf{C}_\ell\Big)$$

其中 $\mathbf{b}_\ell \in \mathbb{R}^{d_\ell}$、$\mathbf{A}_\ell$、$\mathbf{C}_\ell \in \mathbb{R}^{d_{\ell-1}\times d_\ell}_{\ge 0}$，$\mathrm{agg}_\ell$是求和、最大值或 max-$k$-求和，而分类函数 cls 是如下形式的阈值函数：对所有 i，$\mathrm{cls}(\mathbf{x}) = 1$ 当且仅当 $x_i \ge t$（或 $x_i > t$），其中阈值为 $t \in \mathbb{R}$。

命题25。 使用最大值、求和或 *max-k-sum* 聚合的正权重图神经网络是单调的。相比之下，使用均值聚合的正权重图神经网络不是单调的。

证明。在所有这些图神经网络中，组合函数都是单调的，因为 ReLU激活函数是单调的，而且对于每一层 ℓ，权重矩阵 $\mathbf{A}_\ell$和 $\mathbf{C}_\ell$的所有元素都非负。聚合函数最大值、求和和最大值-k-求和相对于多重集序也都是单调的。相比之下，均值并非单调。事实上，$\{\!\{1\}\!\} \le \{\!\{1,\ 0\}\!\}$，但 $MEAN(\{\!\{1\}\!\}) = 1 \not\le 0.5 = MEAN\ \ |1\ 0|$

□ ({, }).

定理 26. 单调图神经网络在单射同态下保持不变，但在任意同态下则不然。

证明。设 $h\colon (G, v) \to (G', v')$ 是带标记图之间的单射同态，并设 N 是一个单调图神经网络，满足 $\mathsf{N}(G, v) = 1$。我们证明 $\mathsf{N}(G', v') = 1$。

由于分类函数 cls 是非递减的，只需证明 $\lambda^{(L)}(v) \leq \lambda^{(L)}(v')$，其中 L 为 N 的层数。我们通过对 $\ell \leq L$ 进行归纳，证明对于 G中的每个节点 w，都有 $\lambda^{(\ell)}(w) \leq \lambda^{(\ell)}(h(w))$。

基例（$\ell = 0$）成立，因为 h 保持节点标签不变。对于归纳步骤，假设该结论对 $\ell < L$成立。由于 h是单射同态，它将 G中 w的邻居多重集单射地映射到 中

$h\ w \quad G' \qquad\qquad |\lambda^{(\ell)}\ u\ |(\,)$ 的邻居 $u \in N_G\ w\ | \leq |\lambda^{(\ell)}\ u'\ | u' \in N_{G'}\ h\ w\ |$ 多重集。根据归纳假设，可得 $\{\,(\,)(\,)\} \{\,(\,)((\,))\}$。由聚合函数和组合函数的单调性可知，$\lambda^{(\ell+1)}(w) \leq \lambda^{(\ell+1)}(h(w))$。因此，$\mathsf{N}(G', v') = 1$。

为了看出单调图神经网络在任意同态下并不保持，设 $G = (V, E, \lambda)$，其中 $V = \{v, u, w\}$，$E = \{\{v, u\}, \{v, w\}\}$，$\lambda(v) = \lambda(u) = \lambda(w) = 1$，并设 $G' = (V' E', \lambda')$，其中 $V' = \{v', u'\}$，$E = \{\{v', u'\}\}$，以及 $\lambda'(v) = \lambda'(u) = 1$。将 N 定义为单层，聚合函数为求和，参数为 $\mathsf{b} = 0$ 与 $\mathsf{A} = \mathsf{C} = 1$，分类函数为 $\mathsf{cls}(x) = 1$ 当且仅当 $x \geq 3$。于是，$\mathsf{N}(G, v) = 1$，但 $\mathsf{N}(G', v') = 0$。然而，由 $f(v) = v'$、$f(u) = u'$ 与 $f(w) = u'$ 所定义的函数 f是从 (G, v) 到 (G', v') 的一个（非单射）同态。□

上述结论涵盖了单调最大值-k-求和图神经网络在单射同态下封闭的结果 [35, 命题 7]。

单调 MAX 图神经网络是一种仅使用最大值作为聚合函数的单调图神经网络。下面的定理将最大值聚合单独列为一种不再需要单射性的情形

定理 27。 单调MAX图神经网络在任意同态下保持不变。

证明。证明的总体结构与定理 26 的证明相同。设 $h\colon (G, v) \to (G', v')$ 是带标记图之间的一个同态，并设 N 是一个单调 MAX 图神经网络，满足 $\mathsf{N}(G, v) = 1$。我们证明 $\mathsf{N}(G', v') = 1$。与之前一样，由于分类函数 cls 是非递减的，只需证明 $\lambda^{(L)}(v) \leq \lambda^{(L)}(v')$，其中 L 是 N 中的层数。

为此，我们对 $\ell \leq L \qquad w \leq \lambda^{(\ell)}\ h\ w$ 用归纳法证明：对于其中的每个节点，均有 $w_{\lambda^{(\ell)}}(\,)(\,(\,))$。基例 $\ell = 0$ 成立，因为 h 保持节点标签。对于归纳步骤，假设该结论对 $\ell < L$ 成立。由于 h 是同态，G 中 w 的每个邻居 u 都被映射到 G' 中 $h(u)$ 的某个邻居 $h(u)$。根据归纳假设，$\lambda^{(\ell)}\ u \leq \lambda^{(\ell)}\ h\ u \qquad MAX\ |\lambda^{(\ell)}\ u\ |(\,)(\,(\,))$，因此 $(\{\,)(\,) u \in N_G\ w\ | \leq MAX\ |\lambda^{(\ell)}\ u'\ | u' \in N_{G'}\ h\ w\ |(\,)(\,)\}) (\{\,)(\,(\,))\})$。由组合函数的单调性，我们得出 $\lambda^{(\ell+1)}{}_w(\leq \lambda^{(\ell+1)}\ h\ w \qquad G'\ v' = 1 \quad \square)(\,(\,))$，从而完成归纳。因此 $\mathsf{N}(,)$。

定理 28。 单调图神经网络与 $\exists^{+}\mathcal{GML}$具有完全相同的表达能力。

证明。我们首先证明，每个单调图神经网络 N 都存在一个等价的 $\exists^{+}$GML 公式。设 C 为 N 所接受的带标记图类。根据定理 26，C 在单射同态下保持不变。此外，C 在 L 次展开下保持不变，其中 L 是 N 的层数，因为经过 L 层后，节点的表示仅取决于其半径为 L 的邻域 [8]。将图视为克里普克模型，并利用 C 在单射同态下保持不变且在 L 次展开下保持不变这一事实，定理 13 表明 C 可由一个 $\exists^{+}$GML 公式定义。

反之，设 φ是一个 $\exists^{+}$GML 公式。通过将 [8] 命题 4.1 中的构造调整到存在正片段，我们得到一个计算 φ的图神经网络。由于 φ是正的， [8] 中的构造仅使用非负权重、求和聚合和 ReLU 激活函数。因此，所得图神经网络是单调的。 □

定理 29。 单调MAX图神经网络与 $\exists^{+}\mathcal{ML}$具有完全相同的表达能力。

证明。设 N 是一个单调图神经网络，其中每个聚合函数均为最大值，并设 C 是 N 所接受的带标记图类。根据定理 27，类 C 在任意同态下保持不变。此外，与任何单调图神经网络一样，C 在 L-展开下保持不变，其中 L 是 N 的层数。因此，根据定理 21，类 C 可由一个 $\exists^{+}$ML 公式定义。反之，设 φ是一个 $\exists^{+}$ML 公式。 [12], 中的定理 6 表明， φ 等价于一个仅使用最大值作为聚合函数的正权重图神经网络。根据命题25，该图神经网络是单调的。□

6 结论

本文提出了一种统一的方法，用于研究在展开下保持不变的模型类的保持定理，涵盖（分级）模态逻辑和图神经网络。我们的结果确立了语义保持性质与逻辑可定义性之间的对应关系：嵌入下的保持性等价于存在分级模态逻辑中的可定义性，单射同态下的保持性等价于存在正计数模态逻辑中的可定义性，而同态下的保持性则等价于存在正模态逻辑中的可定义性。在技术层面，我们的方法依赖于一项结构性结果：有界高度的树形模型具有良序性质。该框架使我们能够为分级模态逻辑建立新的保持定理，恢复并推广有限结构上基本模态逻辑的经典结果，并给出不依赖紧致性和 Ehrenfeucht-Fraïssé 博弈的替代证明。此外，我们关于图神经网络的结果运用有限模型论中的优雅方法，将近期对图神经网络表达能力的分析纳入统一的逻辑框架。

我们的工作为未来研究开辟了若干方向。在逻辑方面，自然可以探究能否为模态逻辑的扩展建立类似的保持定理，例如带有命名元、全局模态算子或不动点算子的逻辑，以及受限片段，包括霍恩片段或核变体。在算法与机器学习方面，一个重要的开放问题是：我们基于展开不变性、良拟序和极小模型的证明策略，能否加以改造，用以分析其他类别图神经网络的表达能力，例如采用注意力机制、归一化或高阶消息传递的架构。我们相信，有限模型论与图神经网络理论之间的进一步互动，将继续为这两个领域带来富有成效的洞见。

参考文献

[1] Samson Abramsky. 2022. 《结构与力量：正在浮现的图景》. Fundam. Informaticae 186, 1 4 2022 1 26 10 3233 222116 - ( ), – . doi: . /FI- [2] Samson Abramsky、Anuj Dawar和Pengming Wang. 2017. 《有限模型论中的卵石化余单子》. 载于第32届年度ACM/IEEE计算机科学逻辑研讨会, LICS 2017, 雷克雅未克, 冰岛, 2017年6月20-23日. IEEE计算机学会, 1 12 10 1109 2017 8005129 – . doi: . /LICS. . [3] Samson Abramsky和Luca Reggio. . 《树状范畴与等资源同态保守定理》. Ann. Pure Appl. Log. 175, 6 (2024), 103423. doi: 10 1016 2024 103423 . /J. APAL. . [4] Veeti Ahvonen、Damian Heiman、Antti Kuusisto和Carsten Lutz. 2024. 《带实数与浮点数的循环图神经网络的逻辑刻画》. 载于NeurIPS会议论文集, Amir Globersons 、 Lester Mackey 、 Danielle Belgrave 、 Angela Fan 、 Ulrich Paquet、Jakub M. Tomczak和Cheng Zhang（编）. [5] Hajnal Andréka、István Németi和Johan van Benthem. 1998. 《模态语言与谓词逻辑的有界片段》. J. Philos. Log. 27, 3 (1998), 217–274. doi:10.1023/A:1004275029985[6] Carlos Areces、Guillaume Hoffmann和Alexandre Denis. 2010. 《计数模态逻辑》. 载于WoLLIC会议论文集（《计算机科学讲义》, 第6188卷）, Anuj Dawar和Ruy J. G. B. de Queiroz（编）. 施普林格, 98–109. [7] Franz Baader、Diego Calvanese、Deborah L. McGuinness、Daniele Nardi和Peter F. Patel-Schneider（编）. 2003. 《描述逻辑手册：理论、实现与应用》. 剑桥大学出版社. [8] Pablo Barceló、Egor V. Kostylev、Mikaël Monet、Jorge Pérez、Juan L. Reutter和Juan Pablo Silva. 2020. 《图神经网络的逻辑表达能力》. 载于ICLR会议论文集. [9] Michael Benedikt、Chia-Hsuan Lu、Boris Motik和Tony Tan. 2024. 《经由逻辑刻画的图神经网络可判定性》. 载于ICALP会议论文集, 第297卷. 达格施图尔宫, 127:1–127:20. [10] Patrick Blackburn、J. F. A. K. van Benthem和Frank Wolter（编）. 2007. 《模态逻辑手册》 . 《逻辑与实践推理研究》 , 第 3 卷 . 北荷兰 . [11] Michael M. Bronstein、Joan Bruna、Taco Cohen和Petar Velickovic. 2021. 《几何深度学习：网格、群、图、测地线与规范》. CoRR abs/ 2104 13478 2021 2104 13478 2104 13478 . ( ). arXiv: . https://arxiv.org/abs/ . [12] Bernardo Cuenca Grau、Eva Feng和 Przemyslaw Walega. . 《有界图神经网络与一阶逻辑片段之间的对应》. 载于AAAI会议论文集. [13] Maarten de Rijke. 2000. 《关于分级模态逻辑的注记》. Stud Logica 64, 2 (2000), 271–283. doi:10.1023/A:1005245900406[14] Justin Gilmer、Samuel S. Schoenholz、Patrick F. Riley、Oriol Vinyals和George E. Dahl. 2017. 《面向量子化学的神经消息传递》. 载于ICML会议论文集, 第70卷. 1263–1272.[15] Erich Grädel、Phokion G. Kolaitis、Leonid Libkin、Maarten Marx、Joel Spencer、Moshe Y. Vardi、Yde Venema和Scott Weinstein. 2007. 《有限模型论及其应用》. 施普林格. [16] Martin Grohe. 2024. 《图神经网络的描述复杂性》. TheoretiCS 3 (2024). [17] William L. Hamilton. 2020. 《图表示学习》. Morgan & Claypool出版社. doi:10.2200/S01045ED1V01Y202009AIM046[18] Stan P. Hauke和Przemyslaw Andrzej Walega. 2025. 《聚合-组合-读出图神经网络比C_2逻辑更具表达能力》. CoRR abs/2508.06091 (2025). arXiv:2508.06091 doi:10.48550/ARXIV.2508.06091[19] Wilfrid Hodges. 1997. 《更简明的模型论》. 剑桥大学出版社 . [20] Leonid Libkin. 2004. 《有限模型论基础》 . 施普林格 . [21] Aliaume Lopez. 2023. 《有限模型论中的一阶保守定理：局部性、拓扑与极限构造》. （一阶逻辑保持定理：局部性、拓扑与极限构造） . 博士学位论文 . 巴黎萨克雷大学 , 法国 . https://tel.archives-ouvertes.fr/ tel-04534568[22] Jerzy Łoś 和 Roman Suszko. 1955. 《论模型的扩张（II）》. Fundamenta Mathematicae 42, 2 (1955), 343–347. [23] Roger C Lyndon. 1959. 《在同态下保持的性质》. (1959). [24] Christopher Morris、Martin Ritzert、Matthias Fey、William L. Hamilton、Jan Eric Lenssen、Gaurav Rattan和Martin Grohe. 2019. 《 Weisfeiler和Leman走向神经：高阶图神经网络》. 载于AAAI会议论文集. AAAI出版社, 4602–4609.[25] Matthew Morris和Ian Horrocks. 2025. 《均值聚合图神经网络的可靠逻辑解释》. 载于第三十九届神经信息处理系统年会. https://openreview.net/forum?id=7TY89cqLfE [26] Pierre Nunn、Marco Sälzer、François Schwarzentruber和Nicolas Troquard. 2024. 《一种用于关于聚合-组合图神经网络之推理的逻辑》. 载于IJCAI会议论文集. ijcai.org, 3532–3540. [27] Martin Otto. 2019. 《分级模态逻辑与计数双模拟》. CoRR abs/1910.00039 (2019). arXiv:1910.00039 http://arxiv.org/abs/1910.00039 [28] Eric Rosen. 1997. 有限结构上的模态逻辑。*J.Log.Lang. Inf.* 6, 4 (1997), 427–439. doi:10.1023/A:1008275906015[29] Eric Rosen. 2002. 模型论与有限结构的若干方面。*Bull. Symb. Log.* 8, 3 2002 380 403 10 2178 1182353894 ( ), – . doi: . / . [30] BSL/ Benjamin Rossman. . 同态保持定理。*J. ACM* 55, 3 (2008 15 1 15 53 10 1145 1379759 1379763), : – : . doi: . / . Moritz Schönherr [31] and Carsten Lutz. . 均值聚合 GNN 的逻辑刻画。*CoRR* abs/2507.18145 (2025). arXiv:2507.18145 doi:10. 48550/ARXIV.2507.18145[32] Alfred Tarski. 1954. 对模型理论的贡献。I. 载于*Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, 第 57 卷。Elsevier BV, 572–581. [33] David Tena Cucala, Bernardo Cuenca Grau, Boris Motik, and Egor V. Kostylev. 2023. 单调最大和 GNN 与 Datalog 之间的对应关系。载于*Proc. ofKR*, Pierre Marquis, Tran Cao Son, and Gabriele Kern-Isberner (编)。658–667.[34] David J. Tena Cucala and Bernardo Cuenca Grau. 2024. 通过否定连接最大图神经网络与 Datalog。载于*Proc. of KR*, Pierre Marquis, Magdalena Ortiz, and Maurice Pagnucco (编)。[35] David J Tena Cucala, Bernardo Cuenca Grau, Boris Motik, and Egor V Kostylev. 2025. 通过 Datalog 探究单调图神经网络的表达能力。载于 *Handbook on Neurosymbolic AI and Knowledge Graphs*。IOS Press, 780–807。[36] Katrin Tent and Martin Ziegler. 2012. 模型论教程。第 40 号。剑桥大学出版社。[37] Stephan Tobies. 2001. 分级模态逻辑的 PSPACE 推理。*J. Log. Comput.* 11, 1 2001 85 106 10 1093 11 1 85 ( ), – . doi: . /LOGCOM/ . . [38] Keyulu Xu, Weihua Hu, Jure Leskovec, and Stefanie Jegelka. 2019. 图神经网络的能力有多强？载于*Proc. of ICLR*。

收稿日期：2007年2月20日；修订日期：2009年3月12日；录用日期：2009年6月5日