arXiv:2602.01857v1 [eess.SY] 2 Feb 2026

网络上的超扭转：用于分布式微分的李雅普诺夫方法

Rodrigo Aldana-L´opez * **Irene P´erez-Salesa** * **David Gomez-Gutierrez** ** **Rosario Arag¨u´es** * **Carlos Sag¨u´es** *

*信息学与系统工程系（*DIIS*）及阿拉贡工程研究所（*I3A*），萨拉戈萨大学，*50018*，西班牙萨拉戈萨。（电子邮箱：*rodrigo.aldana.lopez@gmail.com, i.perez@unizar.es, raragues@unizar.es, csagues@unizar.es*）

**墨西哥国立技术大学，*José Mario Molina Pasquel y Henríquez*技术学院，*Cam.Arenero1101*，*45019*，萨波潘，哈利斯科州，墨西哥。（电子邮箱：*david.gomez.g@ieee.org*）

摘要： 我们研究分布式微分问题：在对智能体信号及其一阶和二阶导数作出温和假设的条件下，网络化系统中的智能体估计局部时变信号的平均值及其导数。现有滑模方法只能提供局部稳定性保证，且缺乏系统的增益选择方法。通过提取与超扭转算法共有的结构特征，并将其编码为抽象模型，我们构造了一个李雅普诺夫函数，从而能够系统地设计增益，并证明分布式微分器可全局有限时间收敛至一致。在此框架基础上，我们采用时变阈值规则和依赖状态的阈值规则，开发了一种事件触发混杂系统实现方案，并推导出最小事件间隔保证和精度界，以量化估计精度与通信开销之间的权衡。

关键词： 网络化系统、事件触发混杂系统、多智能体系统、传感器网络

1. 引言

分布式微分问题涉及一个由智能体构成的网络，各智能体拥有局部时变信号，并旨在以分布式方式协同估计这些信号平均值的导数，即使信号存在某种持续变化也是如此。这项任务可视为动态平均一致性（DAC）问题的扩展。动态平均一致性的应用包括传感器网络中的集体估计、电网中的协调以及多智能体系统的编队控制（Kia等人，2019）。从结构上看，动态平均一致性算法对于基于分层观测器的分布式协调算法很有用（Aldana-Lopez等，2022b；Yu等，2019）。如今，动态平均一致性最热门的应用之一是分布式优化（Carnevale等，2025），其中动态平均一致性模块用于分布式梯度跟踪。动态平均一致性的最新进展包括加速技术（Sebasti´an等，2023）以及针对不可靠通信的韧性机制（Iqbal等，2022）。将动态平均一致性扩展至分布式微分十分自然，因为许多应用不仅需要平均信号，还需要其导数，例如，可用于设计分布式轨迹跟踪控制器、传感器融合，或估计网络的高阶行为（Caccavale andPierri,2022; Aldana-Lopez 等，2022b; Aldana-L´opez et al., 2023b）。然而，在信号持续变化时，大多数动态平均一致性方法无法收敛到真实导数，只能实现最终有界稳定性，这是其线性结构固有局限所致。为解决这一问题，Aldana-Lopez等人（2021）提出了基于高阶滑模（HOSM）技术的精确动态一致性（EDC）概念。在这一背景下，滑模的首次应用依赖于一阶滑模（FOSM）（George 和 Freeman，2019）。然而，FOSM方案容易出现众所周知的抖振现象（Perruquetti and Barbot, 2002, Ch. 3），即高频振荡，使得系统实现易受噪声和时延影响。此外，George 和 Freeman（2019）提出的方法只能恢复平均信号，无法获得其导数。高阶滑模提供了一种有理论依据的替代方案，可减轻抖振，并在用于观测器设计时实现高阶导数的精确计算。高阶精确动态一致性（EDCHO）算法（Aldana-Lopez等人，2021）利用这些特性，提出了文献中的首个分布式微分器，随后在 Aldana-Lopez 等，2022a中扩展为鲁棒 EDCHO（REDCHO）。Aldana-L´opez et al., 2023a提出了一个完整的分布式微分器，其中包括噪声鲁棒性分析，且无需外部局部微分器，

⋆ This 本研究得到以下项目资助：MICIU/AEI/10.13039/501100011033 资助的 PID2021-124137OB-I00 和 PID2024-159279OB-I00 项目，以及欧洲区域发展基金/欧盟资助的 REMAIN S1/1.1/E0111 项目（Interreg Su- doe 计划，欧洲区域发展基金）。BG24/00121 资助项目由 MI- CIU/AEI/10.13039/501100011033 资助。本研究还得到阿拉贡政府 ´DGA T45 23R 项目和西班牙资助项目 FPU20/03134 的资助。本文为提交以供审稿发表的预印本。版权可能在未另行通知的情况下转让，届时此版本可能不再公开。

尽管用途广泛，当前基于 EDC 的分布式微分器公式尚缺乏系统的参数调优指南，导致实践者只能依靠仿真进行增益选择。此外，尽管仿真结果表明 REDCHO 也应能够证明全局稳定性，目前仅确立了其局部稳定性。

这些算法的稳定性分析与高阶滑模微分器理论密切相关（Levant，2003年），尤其是超扭转算法（Levant，1998年），它是一阶微分器的典型代表。因此，我们简要回顾现有的超扭转算法稳定性证明方法，并指出其中哪些要素可迁移至分布式微分器场景。早期分析利用其二维结构构造主曲线，但这种方法无法推广至高阶或多智能体场景。随后，人们提出了基于齐次性的方法（Levant，2003年、2005年），并将其用于 EDCHO 的原始分析。然而，这些方法无法给出明确的增益条件。之后，（Shtessel 等人，2010年；Moreno 和 Osorio，2012 年）提出了更系统的超扭转李雅普诺夫分析，随后又经改进，在（Seeber 和 Horn，2017年；Seeber 等人，2018年）中得到了明确的可行增益和收敛时间估计，并在（Cruz-Zavala 和 Moreno，2019年；Seeber，2023年）中将其扩展至任意阶算法。此外，人们还提出了结构化方法：通过适当的变量替换，可将超扭转算法变换为由非线性标量函数缩放的线性系统，并据此推导出李雅普诺夫函数。（Haimovich 和 De Battista，2019年）将这一思路应用于广义类超扭转系统，（Seeber 等人，2021年）则将其用于预定义时间微分器。然而，在多智能体场景中，耦合作用使得无法采用统一的变量替换，因此这类变换无法直接应用。近期，（Geromel 等人，2026年；Moreno 等人，2021年；L´opez-Caamal 和 Moreno，2019年）提出了广义多变量超扭转算法，并给出了构造性的李雅普诺夫分析。然而，这些算法未能适应多智能体场景所需的图依赖耦合。

在本研究中，我们为一阶分布式微分器构建了一个李雅普诺夫框架。我们提取了超扭转共有的最小结构特征，并将其形式化为一个抽象超扭转系统。通过为该抽象系统构造李雅普诺夫函数，我们证明，超扭转算法和分布式微分器的稳定性证明都是这一框架的特例。这一统一视角给出了明确的增益设计条件，并将 REDCHO 的理论保证扩展至局部稳定性之外。我们还表明，该框架有助于在其他事件触发实现方案中计算精度界。

1.1 记号

令 $\mathbb{1} = [1, \ldots, 1]^\top$ 表示适当维数的全一向量。定义 sign(x) $= 1$，若 $x > 0$；sign(0) $= 0$；以及 sign($= |x|^\alpha$ x $\lceil x \rfloor^0$ $=$ x $=$) $= -1$，若 $x < 0$。对于 $x \in \mathbb{R}$ 和 $\alpha > 0$，令 $\lceil x \rfloor^\alpha$: sign( )，并令 : sign( )。对于向量 $\mathbf{x}\,[x_1, \ldots, x_n]^\top \in \mathbb{R}^n$，定义 $\lceil \mathbf{x} \rfloor^\alpha := \left[\lceil x_1 \rfloor^\alpha, \ldots, \lceil x_n \rfloor^\alpha\right]^\top$，其中 $\alpha \geq 0$。对于 $\mathbf{r} = [r_1, \ldots, r_n]^\top$，定义加权范数 $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{r}} := \sum_{i=1}^n |x_i|^{1/r_i}$. 对于两个向量 $\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$，将它们的内积记为 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$。

2. 分布式微分

我们将一阶分布式微分问题表述如下。考虑由 $N \in \mathbb{N}$ 个智能体组成的网络化系统，这些智能体通过由无向图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$表示的通信网络进行交互，其中 $\mathcal{V} = \{1, \ldots, N\}$ 是节点集合，$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$是边集合。一条边 $(i, j) \in \mathcal{E}$ 表示智能体 i 和 j之间的双向通信链路。对于每个智能体$i \in \mathcal{V}$，令 $\mathcal{N}_i \subseteq \mathcal{V}$ 表示其邻居集合。

每个智能体 $i \in \mathcal{V}$ 可获取一个局部时变信号$s_i(t)$，并假定其二次可微。集体目标是使所有智能体仅利用通过 $\mathcal{G}$的一跳局部信息交换，恢复全局平均值$\bar{s}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i(t)$，及其时间导数 $\dot{\bar{s}}(t)$。在分析中，我们在以下有界性条件下进行。

假设 *1.* 给定 $\gamma \geq 0$，存在一个已知的 $L \geq 0$，使得对每个智能体 i 以及所有 $t \geq 0$，

$$\left|\ddot{\bar{s}}(t) - \ddot{s}_i(t) + 2\gamma\big(\dot{\bar{s}}(t) - \dot{s}_i(t)\big) + \gamma^2\big(\bar{s}(t) - s_i(t)\big)\right| \leq \frac{L}{\sqrt{N}}.$$

假设 1刻画了局部信号与其平均值之间的失配程度，即分布式微分算法能够容忍的失配水平。理解该条件的一种实用方式是借助信号及其导数的局部界。例如，当$\gamma = 0$时，二阶导数 $\ddot{s}_i(t)$的一致界足以保证假设 1成立，从而恢复标准滑模微分器中常用的同类条件。对于 $\gamma > 0$，$s_i(t)$及其导数的有界性可在局部用于推出该假设，这在许多应用中成立，例如参考信号可分解为正弦信号的情形。值得注意的是，N 可利用已知方法以分布式方式在有限时间内获得（Aldana-Lopez等，2022b）。

为此，Aldana-Lopez 等人（2022a）提出的一阶分布式微分协议的 REDCHO 实例形式如下：

协议动力学：

$$\dot{\eta}_{i,0}(t) = k_0\sqrt{L} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \lceil \hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{j,0}(t) \rfloor^{1/2} + \eta_{i,1}(t) - \gamma\eta_{i,0}(t)$$

$$\dot{\eta}_{i,1}(t) = k_1 L \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \operatorname{sign}\big(\hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{j,0}(t)\big) - \gamma\eta_{i,1}(t)$$

共享信息：

$$\hat{s}_{i,0}(t) = s_i(t) - \eta_{i,0}(t),$$

微分器输出：

$$\hat{s}_{i,1}(t) = \dot{s}_i(t) - \eta_{i,1}(t) + \gamma\eta_{i,0}(t), \tag{1}$$

其中 k_0，$k_1 > 0$, $\gamma \geq 0$ 是设计参数，而 由假设 1 选取。

我们简要说明式 (1) 背后的直观含义。引入校正项 $\lceil \hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{j,0}(t) \rfloor^{1/2}$ 和 $\operatorname{sign}(\hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{j,0}(t))$，以便仅利用相对信息实现一致。选择分数次幂项是为了引入加权齐次性这一关键结构性质，从而支持基于李雅普诺夫的稳定性分析。不连续符号项则通过抑制跟踪平均信号及其导数所产生的未知有界影响来补充这一机制。两个校正项都仅依赖于差值 $\hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{j,0}(t)$，因此智能体 i 只需传递 $\hat{s}_{i,0}(t)$。

该协议进一步引入线性项 $-\gamma\eta_{i,0}(t)$ 和 $-\gamma\eta_{i,1}(t)$，以消除分布式平均一致性方案中的经典初始化约束；否则，这些方案将要求 $\sum_{i=1}^{N}\eta_{i,\mu}(0) = 0, \mu = 0, 1$。当 $\gamma > 0$ 时，任何初始条件偏差都会以 γ 的速率指数衰减。最后，一旦达到一致，$\eta_{i,0}(t)$ 将收敛到抵消局部偏移所需的精确修正量，从而得到 $\hat{s}_{i,0}(t) = \bar{s}(t)$。随后通过 $\hat{s}_{i,1}(t) = \dot{s}_i(t) - \dot{\eta}_{i,0}(t)$ 重构导数。在收敛状态下，内部动态满足 $\dot{\eta}_{i,0}(t) = \eta_{i,1}(t) - \gamma\eta_{i,0}(t)$，由此可直接得到式 (1) 中微分器输出的定义。

注*2.*（Aldana- L´opez等人，2023a）提出了对（1）的一种修改，以使微分输出 $\hat{s}_{i,1}(t)$ 不依赖于局部导数 $\dot{s}_i(t)$。该修改后的协议可写为：

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}'_{i,0}(t) &= k_0\sqrt{L}\sum_{j\in\mathcal{N}_i}\left\lceil \hat{s}'_{i,0}(t) - \hat{s}'_{j,0}(t)\right\rfloor^{1/2} - \gamma\eta'_{i,0}(t)\\
&\quad +\eta'_{i,1}(t) + +k_0\sqrt{L}\left\lceil \hat{s}'_{i,0}(t) - \hat{s}_{i,0}(t)\right\rfloor^{1/2}\\
\dot{\eta}'_{i,1}(t) &= k_1 L\sum_{j\in\mathcal{N}_i}\operatorname{sign}\big(\hat{s}'_{i,0}(t) - \hat{s}'_{j,0}(t)\big) - \gamma\eta'_{i,1}(t)\\
&\quad +k_0\sqrt{L}\operatorname{sign}(\hat{s}'_{i,0}(t) - \hat{s}_{i,0}(t))\\
\dot{\eta}_{i,0}(t) &= k_0\sqrt{L}\left\lceil \hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}'_{i,0}(t)\right\rfloor^{1/2} + \eta_{i,1}(t) - \gamma\eta_{i,0}(t)\\
\dot{\eta}_{i,1}(t) &= k_1 L\operatorname{sign}\big(\hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}'_{i,0}(t)\big) - \gamma\eta_{i,1}(t)
\end{aligned} \tag{2}$$

其中

$$\hat{s}'_{i,0}(t) = s_i(t) - \eta'_{i,0}(t), \quad \hat{s}_{i,0}(t) = -\eta_{i,0}(t)$$

且 $\hat{s}_{i,1}(t) = 2(\gamma\eta_{i,0}(t) - \eta'_{i,1}(t))$ 为分布式微分器输出。如（Aldana-Lopez 等，2022a）所述，当该协议应用于在每个智能体上附加虚拟节点的增广网络时，它与 REDCHO 完全一致。因此，为 REDCHO 建立的收敛性分析可直接适用，并对（2）得出相同结论。

本文的第一个主要结果如下给出，并刻画了（1）的收敛性。

定理 *3.* 设假设 1 对某个 $L, \gamma \geq 0$ 成立。则存在增益 $k_0, k_1 > 0$，使得对任意初始条件 $\eta_{i,0}(0)\eta_{i,1}(0) \in \mathbb{R}$，（1）的轨迹满足

$$\hat{s}_{i,0}(t) = \hat{s}_{j,0}(t), \quad \hat{s}_{i,1}(t) = \hat{s}_{j,1}(t),$$

对所有 $(i, j) \in \mathcal{E}$ 以及所有 $t \geq T$，存在某个有限的 $T \geq 0$。此外，每个智能体都渐近地恢复全局信号，

$$\lim_{t\to\infty}|\hat{s}_{i,0}(t) - \bar{s}(t)| = 0, \qquad \lim_{t\to\infty}|\hat{s}_{i,1}(t) - \dot{\bar{s}}(t)| = 0.$$

定理 3 将 Aldana- Lopez 等人（2022a）的局部稳定性结果扩展到了全局稳定性。它还通过证明为 $k_0, k_1 > 0$ 提供了系统化设计条件，从而强化了 Aldana-Lopez 等人（2021年）的结果。

为证明定理 3，我们分析其误差系统，推导如下。首先将 (1) 重写为紧凑形式

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\eta}}_0(t) &= k_0\sqrt{L}\mathbf{D}\left\lceil \mathbf{D}^\top\hat{\mathbf{s}}_0(t)\right\rfloor^{\frac{1}{2}} + \boldsymbol{\eta}_1(t) - \gamma\boldsymbol{\eta}_0(t),\\
\dot{\boldsymbol{\eta}}_1(t) &= k_1 L\mathbf{D}\left\lceil \mathbf{D}^\top\hat{\mathbf{s}}_0(t)\right\rfloor^{0} - \gamma\boldsymbol{\eta}_1(t),
\end{aligned}$$

其中辅助变量定义为

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{s}}_0(t) &= \mathbf{s}(t) - \boldsymbol{\eta}_0(t),\\
\hat{\mathbf{s}}_1(t) &= \dot{\mathbf{s}}(t) + \gamma\mathbf{s}(t) - \boldsymbol{\eta}_1(t),
\end{aligned} \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{\eta}_\mu(t) = [\eta_{1,\mu}(t)\ldots,\eta_{N,\mu}(t)]^\top$, $\mu \in \{0,1\}$, $\mathbf{s}(t) = [s_1(t)\ldots, s_N(t)]^\top$，且 $\mathbf{D}$ 表示 $\{1, -1, 0\}$ 的关联矩阵。定义一致性误差

$$\mathbf{e}_0(t) = \mathbf{P}\hat{\mathbf{s}}_0(t), \quad \mathbf{e}_1(t) = \mathbf{P}\hat{\mathbf{s}}_1(t), \tag{4}$$

其中 $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{1}{N}\mathbb{1}\mathbb{1}^\top$。其动力学为

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{e}}_0(t) &= -k_0\sqrt{L}\mathbf{D}\left\lceil \mathbf{D}^\top\mathbf{e}_0(t)\right\rfloor^{\frac{1}{2}} + \mathbf{e}_1(t) - \gamma\mathbf{e}_0(t),\\
\dot{\mathbf{e}}_1(t) &= -k_1 L\mathbf{D}\left\lceil \mathbf{D}^\top\mathbf{e}_0(t)\right\rfloor^{0} - \gamma\mathbf{e}_1(t) + \mathbf{d}(t),
\end{aligned} \tag{5}$$

其中

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{P}\big(\ddot{\mathbf{s}}(t) + 2\gamma\dot{\mathbf{s}}(t) + \gamma^2\mathbf{s}(t)\big).$$

由假设 1 可得 $\mathbf{d}(t) \in L\mathcal{D}$：

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{d} \in \mathcal{X} : \|\mathbf{d}\| \leq 1\}.$$

定理 3 中所述的收敛性依赖于式 (5) 中动力系统收敛至原点。该收敛性证明将在第4节给出，因为它需要构建一种新颖的基于李雅普诺夫的方法；此方法将在下一节介绍，我们称之为抽象超扭转方法。

3. 抽象超扭转

下文将广泛运用齐次性概念，相关内容请参阅附录。为研究式 (5)，我们将先考虑其抽象版本。令抽象微分包含

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{e}}_0(t) &= -k_0 L^{1/2}\nabla U(\mathbf{e}_0(t)) + \mathbf{e}_1(t) - \gamma\mathbf{e}_0(t),\\
\dot{\mathbf{e}}_1(t) &\in -k_1 L\mathcal{S}(\mathbf{e}_0(t)) - \gamma\mathbf{e}_1(t) + L\mathcal{D},
\end{aligned} \tag{6}$$

其中 $\mathcal{D} \subset \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^N$。式 (6) 中的抽象超扭转系统作为分析的核心原型模型引入。我们作出以下假设，随后将在式 (5) 的误差动力学中验证这些假设，从而将该模型与定理 3 的证明直接联系起来。

假设 *4.* 以下性质成立：

i) $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^N$ 是一个向量空间。ii) $U : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ 严格凸、正定、处处可微，且为3/2次齐次。iii) 存在 $c_{\mathcal{S}} > 0$ 使得 $\mathcal{S} : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}$ 满足此外， $\mathcal{S}$ 是0次齐次的。iv) $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ 是紧集，且 $\sup_{\mathbf{d}\in\mathcal{D}}\|\mathbf{d}\| = 1$。v) 令 $\partial U : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}$ 为由 $U(\mathbf{e}_0) = \{\nabla U(\mathbf{e}_0)\}$ 定义的次微分。对所有 $\mathbf{e}_0 \in \mathcal{X}$ 均成立。假设 ∂U

并且 $\mathcal{S}$ 非空、有界、闭、凸且上半连续。[1]

注 *5.* 此处将系统 (6) 称为抽象超扭转 系统，因为在选择 $N=1, \gamma=0, U(e_0)=(2/3)|e_0|^{3/2}, \mathcal{S}(e_0)=\text{sign}(e_0)$，$\mathcal{X}=\mathbb{R}$ 和 $\mathcal{D}=[-1,1]$ 时，它会化为经典标量超扭转动力学。这些选择在 $c_{\mathcal{S}}=1$ 的条件下满足假设 4，从而得到

$$\dot{e}_0(t) = -k_0 L^{1/2} \lceil e_0(t) \rfloor^{1/2} + e_1(t),$$
$$\dot{e}_1(t) \in -k_1 L \text{sign}(e_0(t)) + [-L, L],$$

这与超扭转系统 (Levant, 1998年) 一致。此例清楚地说明了为何需要 $3/2$ 齐次度，使其梯度能够生成超扭转所需的 $1/2$ 分数幂。此外，正如我们将在第4节中详细讨论的那样，假设 4 并不构成限制，因为通过选取$\nabla U(\mathbf{e}_0) = \mathbf{D} \left\lceil \mathbf{D}^\top \mathbf{e}_0 \right\rfloor^{1/2}$和 $\mathcal{S}(\mathbf{e}_0) = \mathbf{D} \left\lceil \mathbf{D}^\top \mathbf{e}_0 \right\rfloor^0$，它也涵盖了 (5) 中所关注的误差系统。

注释 *6.* 文献中还有其他超扭转算法的推广形式，例如 Moreno等人（2021年；L´opez-Caamal 和 Moreno, 2019年）提出的推广形式。这些框架无法应用于与误差系统（5）相关的分布式微分器。事实上，要应用这些推广形式，必须存在一个常数 $c>0$，使得

$$\mathbf{D} \left\lceil \mathbf{D}^\top \mathbf{e}_0 \right\rfloor^0 = c\, \mathbf{J}(\mathbf{e}_0)\, \mathbf{D} \left\lceil \mathbf{D}^\top \mathbf{e}_0 \right\rfloor^{1/2}, \tag{7}$$

对于所有 $\mathbf{e}_0 \in \mathbb{R}^N \backslash \text{span}(1)$，其中 $\mathbf{J}(\mathbf{e}_0)$ 表示 $\mathbf{D} \left\lceil \mathbf{D}^\top \mathbf{e}_0 \right\rfloor^{1/2}$ 的雅可比矩阵，定义为

$$\mathbf{J}(\mathbf{e}_0) = \tfrac{1}{2}\, \mathbf{D}\, \text{diag}\big(|\mathbf{D}^\top \mathbf{e}_0|^{-1/2}\big)\, \mathbf{D}^\top$$

其中，$\text{diag}(|\mathbf{D}^\top \mathbf{e}_0|^{-1/2})$ 表示一个对角矩阵，其对角元素是向量 $\mathbf{D}^\top \mathbf{e}_0$ 各元素绝对值的倒数平方根。要使（7）成立，必须有 $\mathbf{D}^\top \mathbf{D} = \alpha \mathbf{I}$，其中某个 $\alpha \in \mathbb{R}$；但在任何无向连通图中，除 $N=2$ 这一平凡情形外，这一条件都不成立。

现在我们可以陈述关于抽象超扭转的主要结果。

定理 *7*。 在假设 4 下，如果增益 k_0，$k_1 > 0$和 $\gamma \geq 0$ 满足

$$k_0 > \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{r}}=1, \Gamma(\mathbf{x})>0} \frac{\Pi(\mathbf{x})}{\Gamma(\mathbf{x})}, \qquad k_1 > \frac{1}{c_{\mathcal{S}}}, \tag{8}$$

其中 Γ 和 Π 由（13）定义，则对于所有初始条件 $\mathbf{e}_0(0)$，$\mathbf{e}_1(0) \in \mathcal{X}$，式（6）的原点是有限时间稳定的。

前述结果的主要意义在于，它使我们能够分析分布式微分器的误差系统（5）的稳定性。本节的其余部分将用于证明定理 7。

3.1 不变性和李雅普诺夫函数候选

在本节中，为了突出李雅普诺夫分析中的代数关系，将省略时间依赖性。

[1] 这些条件确保式（6）的解以 Filippov 的意义存在（Arscott 和 Filippov，1988），并且在本文所考虑的示例中显然满足。

证明策略如下。首先，在引理8中，我们使用变量替换

$$\mathbf{x}_0 = \frac{\mathbf{e}_0}{L}, \qquad \mathbf{x}_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{k_0 L}, \tag{9}$$

将抽象超扭转动力学改写为与常数 L无关的形式，从而明确 L的变化对应于系统增益的重新缩放。接下来，引理 9 证明向量空间 $\mathcal{X}$在闭环动力学下是不变的。这一性质至关重要，因为若干后续论证和结论仅当轨迹在$\mathcal{X}$内演化时才成立。分析的核心基于李雅普诺夫函数候选

$$V(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) = U(\mathbf{x}_0) + (1+\beta) U^*(\mathbf{x}_1) - \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \rangle, \tag{10}$$

其中 $\beta > 0$，式中

$$U^*(\mathbf{x}_1) = \sup_{\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}} \big\{ \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \rangle - U(\mathbf{x}_0) \big\} \tag{11}$$

表示 U 的凸共轭（Boyd与Vandenberghe，2004年，第3.3.1节）。引理 10 表明，该候选函数确实是系统的有效李雅普诺夫函数。最后，第3.2节表明，所提出的李雅普诺夫函数满足一个蕴含有限时间收敛的微分不等式。

按照这一策略，我们首先引入变量替换，将(6)改写为更便于处理的形式。

引理*8.* 设假设 4 成立。通过变量替换 (9)，系统 (6) 可等价地写为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_0 &= -\gamma \mathbf{x}_0 - \tilde{k}_0 \big(\nabla U(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_1 \big), \\ \dot{\mathbf{x}}_1 &\in -\gamma \mathbf{x}_1 - \tilde{k}_1 \left(\mathcal{S}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{k_1} \mathcal{D} \right), \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $\tilde{k}_0 = k_0, \tilde{k}_1 = k_1/k_0$.

证明. 我们直接计算:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_0 &= L^{-1} \dot{\mathbf{e}}_0 \\ &= L^{-1} \big(-k_0 L^{1/2} \nabla U(\mathbf{e}_0) + \mathbf{e}_1 - \gamma \mathbf{e}_0 \big) \\ &= L^{-1} \big(-k_0 L^{1/2} \nabla U(L\mathbf{x}_0) + k_0 L \mathbf{x}_1 - \gamma L \mathbf{x}_0 \big) \\ &= -\gamma \mathbf{x}_0 - k_0 \big(\nabla U(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_1 \big), \end{aligned}$$

由于 $\nabla U(\bullet)$ 是次数为 $1/2$ 的齐次函数，因此 $\nabla U(L\mathbf{x}_0) = L^{1/2} \nabla U(\mathbf{x}_0)$。类似地,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= (k_0 L)^{-1} \dot{\mathbf{e}}_1 \\ &\in (k_0 L)^{-1} \big(-k_1 L \mathcal{S}(\mathbf{e}_0) - \gamma \mathbf{e}_1 + L\mathcal{D} \big) \\ &= (k_0 L)^{-1} \big(-k_1 L \mathcal{S}(L\mathbf{x}_0) - (k_0 L) \gamma \mathbf{x}_1 + L\mathcal{D} \big) \\ &= -\gamma \mathbf{x}_1 - \frac{k_1}{k_0} \left(\mathcal{S}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{k_1} \mathcal{D} \right), \end{aligned}$$

由于 $\mathcal{S}(\bullet)$ 是次数为 0 的齐次函数，因此 $\mathcal{S}(L\mathbf{x}_0) = \mathcal{S}(\mathbf{x}_0)$。□

既然该系统已写成 (12) 的形式，下述引理得出其轨迹在空间 $\mathcal{X}$ 内演化。

引理 *9*。 设假设 4 成立。则对于方程 (12) 的解 $\mathbf{x}_0(t)$,$\mathbf{x}_1(t)$，$\mathcal{X}$ 是正向不变的。

证明。 注意到

$$\tilde{k}_1 \Big(\mathcal{S}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{k_1} \mathcal{D} \Big) \subseteq \mathcal{X},$$

由于 $\mathcal{X}$ 在加法下封闭。因此，只要状态属于 $\mathcal{X}$，(12) 的右端也属于 $\mathcal{X}$。因此，从 $\mathbf{x}_0(0)$，$\mathbf{x}_1(0) \in \mathcal{X}$出发，通过积分即可直接得出不变性。□

接下来，我们分析式（10）中所提出的李雅普诺夫函数的性质。

引理*10.* 假设 4 成立。那么，式（10）中的李雅普诺夫函数 V 是正定且径向无界的。

证明。由式（10）可得，

$$V(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) \;=\; W(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) + \beta U^*(\mathbf{x}_1),$$

其中 $W(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1) := U(\mathbf{x}_0) + U^*(\mathbf{x}_1) - \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1\rangle$。下面将用到附录中引理 22 的性质。首先，$W(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) \geq 0$，且当且仅当 $\mathbf{x}_1 = \nabla U(\mathbf{x}_0)$ 时等号成立。同时，$\beta U^*(\mathbf{x}_1) \geq 0$，且仅当 $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ 时等号成立。因此，$V(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1) = 0$ 蕴含 $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ 且 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$，故 V 为正定的。此外，由于 U 是 $3/2$ 次齐次函数，其凸共轭 U^* 是 3 次齐次函数。因此，V 是 $\mathbf{r}$-齐次的，次数为 3，其中 $\mathbf{r} = [2\mathbb{1}^\top, \mathbb{1}^\top]$，这意味着它具有径向无界性。□

3.2 抽象超扭转的收敛性 g

我们使用李雅普诺夫函数 (10) 证明定理 7，其中 $\beta \geq 7$ 如附录中引理 22-vii) 所示。沿着 (12) 的轨迹，V的导数为

$$\begin{aligned}
&\dot V = \\
&\langle \nabla U(\mathbf{x}_0), \dot{\mathbf{x}}_0\rangle + (1+\beta)\langle \nabla U^*(\mathbf{x}_1), \dot{\mathbf{x}}_1\rangle - \langle \mathbf{x}_1, \dot{\mathbf{x}}_0\rangle - \langle \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_1\rangle \\
&= \langle \nabla U(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_1, \dot{\mathbf{x}}_0\rangle + \langle (1+\beta)\nabla U^*(\mathbf{x}_1) - \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_1\rangle.
\end{aligned}$$

代入动力学方程 (12) 得

$$\begin{aligned}
\dot V \in\; &\langle \nabla U(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_1,\; -\gamma \mathbf{x}_0 - \tilde k_0(\nabla U(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_1)\rangle \\
&+ \langle (1+\beta)\nabla U^*(\mathbf{x}_1) - \mathbf{x}_0,\; -\gamma \mathbf{x}_1 - \tilde k_1\big(\mathcal{S}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{d}/k_1\big)\rangle,
\end{aligned}$$

对于某个 $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$。重新整理各项可得

$$\begin{aligned}
\dot V \in\; &\langle \nabla U(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_1, -\gamma \mathbf{x}_0\rangle + \langle (1+\beta)\nabla U^*(\mathbf{x}_1) - \mathbf{x}_0, -\gamma \mathbf{x}_1\rangle \\
&- \tilde k_0 \|\nabla U(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_1\|^2 \\
&+ \langle (1+\beta)\nabla U^*(\mathbf{x}_1) - \mathbf{x}_0,\; -\tilde k_1\big(\mathcal{S}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{d}/k_1\big)\rangle.
\end{aligned}$$

首先，考虑 γ项:

$$\begin{aligned}
&\langle \nabla U(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_1, -\gamma \mathbf{x}_0\rangle + \langle (1+\beta)\nabla U^*(\mathbf{x}_1) - \mathbf{x}_0, -\gamma \mathbf{x}_1\rangle \\
&= -\gamma\Big(\langle \nabla U(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0\rangle + (1+\beta)\langle \nabla U^*(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_1\rangle - 2\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1\rangle\Big).
\end{aligned}$$

根据引理 22 和附录中的 v)、vii) 项，

$$\langle \nabla U(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0\rangle \;\geq\; U(\mathbf{x}_0), \qquad \langle \nabla U^*(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_1\rangle \;\geq\; U^*(\mathbf{x}_1),$$

so

$$\begin{aligned}
&\langle \nabla U(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_1, -\gamma \mathbf{x}_0\rangle + \langle (1+\beta)\nabla U^*(\mathbf{x}_1) - \mathbf{x}_0, -\gamma \mathbf{x}_1\rangle \\
&\leq -\gamma\big(U(\mathbf{x}_0) + (1+\beta)U^*(\mathbf{x}_1) - 2\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1\rangle\big) \;\leq\; 0.
\end{aligned}$$

因此，V的导数满足

$$\dot V \;\leq\; -\tilde k_0 \Gamma(\mathbf{x}) + \Pi(\mathbf{x}),$$

其中 $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1$ 且$]^\top$

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \|\nabla U(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_1\|^2,$$

$$\Pi(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{d}\in\mathcal{D}} \Big\langle (1+\beta)\nabla U^*(\mathbf{x}_1) - \mathbf{x}_0,\; -\tilde k_1\Big(\mathcal{S}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{k_1}\mathbf{d}\Big)\Big\rangle. \tag{13}$$

接下来，我们验证当 $\Gamma(\mathbf{x}) = 0$ 时，$\Pi(\mathbf{x}) < 0$ 成立，即对于

$$\mathcal{X}_U = \{(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} : \nabla U(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_1\}.$$

对于任意 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_U$，有 $\mathbf{x}_0 = \nabla U^*(\mathbf{x}_1)$，因为 $(\nabla U)^{-1} = \nabla U^*$ (Rockafellar，1970，定理 26.5)。因此

$$(1+\beta)\nabla U^*(\mathbf{x}_1) - \mathbf{x}_0 = \beta \mathbf{x}_0, \qquad \mathbf{x} \in \mathcal{X}_U.$$

因此，

$$\begin{aligned}
\Pi(\mathbf{x})\big|_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}_U} &= -\tilde k_1 \beta \langle \mathbf{x}_0, \mathcal{S}(\mathbf{x}_0)\rangle + \frac{\beta \tilde k_1}{k_1} \sup_{\mathbf{d}\in\mathcal{D}} \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{d}\rangle \\
&\leq -\tilde k_1 \beta c_{\mathcal{S}} \|\mathbf{x}_0\| + \frac{\beta \tilde k_1}{k_1} \|\mathbf{x}_0\| \sup_{\mathbf{d}\in\mathcal{D}} \|\mathbf{d}\| \\
&= -\beta \tilde k_1 \|\mathbf{x}_0\| \Big(c_{\mathcal{S}} - \frac{1}{k_1}\Big) \;<\; 0, \qquad \forall \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0},
\end{aligned}$$

其中我们用到了假设 4 中的性质 iii) 和 iv)。严格不等式由条件$k_1 > 1/c_{\mathcal{S}}$ （见式 (8)）得出。

此外，由于根据假设 4 和附录中的引理 22–iv)，U 和 U^* 分别是次数为$3/2$ 和 3 的齐次函数，因此它们的梯度分别是次数为$1/2$ 和 2 的齐次函数。由此可得，Γ 和 Π 是次数为 2 的$\mathbf{r}$-齐次函数，其中$\mathbf{r} = [2\mathbb{1}^\top, \mathbb{1}^\top]$。因此，根据附录中的引理 21，存在 $c > 0$，使得

$$-\tilde k_0 \Gamma(\mathbf{x}) + \Pi(\mathbf{x}) \;\leq\; -c\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{r}}^2, \tag{14}$$

因此，

$$\dot V \;\leq\; -c\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{r}}^2,$$

这已经保证了所有初始条件 $(\mathbf{x}_0(0), \mathbf{x}_1(0)) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$下的渐近稳定性。

令 $V_2(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{r}}^2$ 且 $V_1(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x})$。根据附录中的引理 20,

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{r}}^2 \;\geq\; \underline{v} V(\mathbf{x})^{2/3}, \tag{15}$$

for some $\underline{v} > 0$. Hence,

$$\dot V \;\leq\; -c\underline{v} V^{2/3}. \tag{16}$$

应用比较引理可得

$$-\int_{V(\mathbf{x}(0))}^{0} V^{-2/3} \mathrm{d}V \;\geq\; c\underline{v} \int_0^T \mathrm{d}t,$$

其中，T 表示 V 达到零所需的稳定时间。等价地,

$$T \;\leq\; \frac{1}{3c\underline{v}} V(\mathbf{x}(0))^{1/3}.$$

因此，对于任意初始条件 $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$，所有轨迹都会在有限时间内收敛到原点，该时间取决于 $V(\mathbf{x}(0))$。定理 7 的证明至此完成。

4. PROOF OF THE MAIN RESULT

为证明主要结果，我们将把式（5）中的误差系统与式（6）中的抽象超扭转联系起来。令

$$\begin{aligned}
\mathcal{X} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}' \text{ for some } \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^N\}, \\
\mathcal{D} &= \{\mathbf{d} \in \mathcal{X} : \|\mathbf{d}\| \leq 1\}.
\end{aligned}$$

在假设 1 下，式 (5) 中的扰动 $\mathbf{d}(t)$ 满足 $\mathbf{d}(t) \in L\mathcal{D}$，从而满足假设 4 中关于 $\mathcal{X}$，$\mathcal{D}$ 的条件。因此，误差动力学 (5) 可表示为微分包含

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{e}}_0(t) &= -k_0\sqrt{L}\,\mathbf{D}\,\big\lceil \mathbf{D}^\top \mathbf{e}_0(t)\big\rfloor^{\frac{1}{2}} + \mathbf{e}_1(t) - \gamma \mathbf{e}_0(t), \\
\dot{\mathbf{e}}_1(t) &\in -k_1 L\,\mathbf{D}\,\big\lceil \mathbf{D}^\top \mathbf{e}_0(t)\big\rfloor^{0} - \gamma \mathbf{e}_1(t) + L\mathcal{D}.
\end{aligned} \tag{17}$$

定义 $\mathcal{S}(\mathbf{e}_0) := \mathbf{D}\left\lceil \mathbf{D}^\top \mathbf{e}_0 \right\rfloor^0$。于是，

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{e}_0, \mathcal{S}(\mathbf{e}_0)\rangle = \langle \mathbf{e}_0, \mathbf{D}\left\lceil \mathbf{D}^\top \mathbf{e}_0(t)\right\rfloor^0\rangle \\
&= \langle \mathbf{D}^\top \mathbf{e}_0, \left\lceil \mathbf{D}^\top \mathbf{e}_0\right\rfloor^0\rangle = \langle \mathbf{v}, \lceil \mathbf{v}\rfloor^0\rangle = \sum_{\ell=1}^{|\mathcal{E}|} v_\ell \lceil v_\ell \rfloor^0 \\
&= \sum_{\ell=1}^{|\mathcal{E}|} |v_\ell| \geq \|\mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{D}^\top \mathbf{e}_0\| = \sqrt{\mathbf{e}_0^\top \mathbf{D}\mathbf{D}^\top \mathbf{e}_0} \\
&\geq \sqrt{\lambda_{\mathcal{G}}}\|\mathbf{e}_0\|
\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{v} = \mathbf{D}^\top \mathbf{e}_0$ 和 $c_{\mathcal{S}} = \sqrt{\lambda_{\mathcal{G}}}$，其中 $\lambda_{\mathcal{G}}$ 表示 $\mathcal{G}$的代数连通度，即拉普拉斯矩阵 $\mathbf{L} = \mathbf{D}\mathbf{D}^\top$的最小非零特征值。因此， $\mathcal{S}$ 满足假设 4 中的要求。

现在将 $\mathbf{D} = [\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_{|\mathcal{E}|}]$分开，其中每一列 $\mathbf{d}_\ell$ 对应一条边，并定义

$$U(\mathbf{e}_0) := \frac{2}{3}\sum_{\ell=1}^{|\mathcal{E}|} \left|\mathbf{d}_\ell^\top \mathbf{e}_0\right|^{\frac{3}{2}}.$$

函数 U为正，且仅当$\mathbf{e}_0 = 0$时 U才为零，其中$\mathbf{e}_0 \in$属于 $\ker(\mathbf{D}^\top)$。由于$\mathbf{e}_0 \in \mathcal{X}$，这意味着$\mathbf{e}_0 = 0$，因此 U在 $\mathcal{X}$上是正定的。此外， $|\bullet|^{\frac{3}{2}}$是严格凸的，因此在 $\mathcal{X}$ 上的非奇异仿射组合及其复合函数也都是严格凸的。因此， U 是严格凸的。

U 的梯度为

$$\begin{aligned}
\nabla U(\mathbf{e}_0) &= \sum_{\ell=1}^{|\mathcal{E}|} \mathbf{d}_\ell \left|\mathbf{d}_\ell^\top \mathbf{e}_0\right|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign}(\mathbf{d}_\ell^\top \mathbf{e}_0) \\
&= \left[\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_{|\mathcal{E}|}\right] \begin{bmatrix} \left\lceil \mathbf{d}_1^\top \mathbf{e}_0\right\rfloor^{\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ \left\lceil \mathbf{d}_{|\mathcal{E}|}^\top \mathbf{e}_0\right\rfloor^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \mathbf{D}\left\lceil \mathbf{D}^\top \mathbf{e}_0\right\rfloor^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

因此， U 满足假设 4 中的所有条件，并且（17）符合抽象超扭转系统（6）的形式。根据定理 7，当增益按照（8）进行选择时，一致性误差将在有限时间内收敛到原点。一致性误差的收敛意味着一致性分量渐近收敛至 $\bar{s}(t)$ 和 $\dot{\bar{s}}(t)$，如 Aldana-Lopez 等人（2022a）所示，由此完成证明。

注*11*。 (8) 中的增益条件可以通过将其转化为受约束的非线性优化问题，并使用标准工具求解，从而系统地进行评估。具体而言，利用 (11) 在 $\mathcal{X}$ 上计算对偶函数 $U^{*\tilde{}}$；而 (8) 中 k_1 的下界则在齐次球 $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{r}} = 1$ 上求得。由于可行性只要求增益超过这些下界，因此可以针对一族图计算这些下界，再将其最大值选作全局增益，从而确保对整个图族均有效。

5. 事件触发协议

由于分布式微分器旨在通过智能体之间的信息通信来实现，因此研究能够高效利用通信网络的实现方式是合理的。事件触发算法基于这样一种原则：以一系列传输时刻取代连续的信息交换，这些时刻由局部触发规则确定。在连续两次事件之间，每个智能体利用从邻居处最近接收到的信息以及其局部状态的即时信息来演化其局部动态。

本节旨在推导分布式微分器的事件触发版本，并研究精度与通信开销之间可能存在的权衡。为保证一般性，我们假设每条边 $(i,\ j)\ \in\ \mathcal{E}$ 都配有一系列传输时刻 $\{\tau_k^{ij}\}_{k=0}^{\infty}$，在这些时刻，两个智能体 i 和 j 都会广播各自的当前输出。于是，智能体 i 的动力学变为

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}_{i,0}(t) &= k_0\sqrt{L}\sum_{j\in\mathcal{N}_i}\left\lceil \hat{s}_{i,0}(\tau_k^{ij}) - \hat{s}_{j,0}(\tau_k^{ij})\right\rfloor^{1/2} \\
&\quad + \eta_{i,1}(t) - \gamma\eta_{i,0}(t), \\
\dot{\eta}_{i,1}(t) &= k_1 L\sum_{j\in\mathcal{N}_i}\left\lceil \hat{s}_{i,0}(\tau_k^{ij}) - \hat{s}_{j,0}(\tau_k^{ij})\right\rfloor^{0} - \gamma\eta_{i,1}(t),
\end{aligned} \tag{18}$$

其中， τ_k^{ij} 表示与边（$i,\ j$）相关的最近传输时间。

因此，时间序列 designdepends 依赖于如下形式的递归触发规则：

$$\begin{aligned}
&\tau_{k+1}^{ij} = \inf\Big\{ t \geq \tau_k^{ij} : \\
&\max\left\{|\hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{i,0}(\tau_k^{ij})|,\ |\hat{s}_{j,0}(t) - \hat{s}_{j,0}(\tau_k^{ij})|\right\} \geq \delta_{ij}(t)\Big\},
\end{aligned} \tag{19}$$

其中 $\tau_0^{ij} = 0$。每个智能体仅监测自身的输出，并在偏差超过 $\delta_{ij}(t)$ 时进行广播，这会同时更新两端，从而得到 $\tau_k^{ij} = \tau_k^{ji}$。

我们将 $\delta_{ij}(t)$ 写成时变形式，以涵盖恒定的 send-on-delta 触发器、状态依赖触发以及时变动态触发。在本节余下部分，我们将讨论选择以下几种形式的 $\delta_{ij}(t)$ 所产生的影响。

首先，我们从一种设计入手，该设计既能确保排除芝诺行为（即事件在有限时间内累积），又能确保分布式微分器精确渐近收敛。

命题 *12*。 设 (19) 中的 $\delta_{ij}(t) > 0,\ \forall t \geq 0$，$\lim_{t\to\infty}\delta_{ij}(t) = 0$，$\delta_{ij}(t)$ 有界，且在每个紧时间区间上都能达到严格正的最小值。那么，序列 $\{\tau_k^{ij}\}_{k=0}^{\infty}$ 不存在芝诺行为，且所有智能体对（$i,\ j$）$\in\mathcal{E}$ 均获得

$$\lim_{t\to\infty}|\hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{j,0}(t)| = 0, \quad \lim_{t\to\infty}|\hat{s}_{i,1}(t) - \hat{s}_{j,1}(t)| = 0.$$

证明。 注意，对于每个满足 $T > 0$ 的紧集 $[0,T]$，我们有 $\delta_{ij}(t) > \delta,\ \forall t \in [0,T]$，其中合适的 δ 取决于 T。此外，(18) 不可能在有限时间内发生逃逸，因为它由一个线性系统以及紧区间 $[0,T]$ 上的分段连续有界项组成。因此，在此区间上，所有 $\lceil s_{i,0}(t)| \leq B,\ \forall t \in [0,T]$，且存在合适的界 B，其取决于 T。因此，

$$|\hat{s}_{i,0}(\tau_{k+1}^{ij}) - \hat{s}_{i,0}(\tau_k^{ij})| \leq \left|\int_{\tau_k^{ij}}^{\tau_{k+1}^{ij}} \dot{\hat{s}}_{i,0}(\tau)\mathrm{d}\tau\right| \leq B(\tau_{k+1}^{ij} - \tau_k^{ij}).$$

另一方面，

$$|\hat{s}_{i,0}(\tau_{k+1}^{ij}) - \hat{s}_{i,0}(\tau_k^{ij})| \geq \delta_{ij}(\tau_{k+1}^{ij}) \geq \underline{\delta},$$

这意味着 $\tau_{k+1}^{ij} - \tau_k^{ij} \geq \delta/B > 0$。因此，在每个紧区间上都能确保存在严格为正的最小事件间隔，且不会发生有限时间内事件累积形式的芝诺行为。最后，注意对于所有 $t \geq T$，$T > 0$，我们有 $\delta_{ij}(t) \leq \delta$，其中界限 δ 取决于 T。因此，我们可以写出

$$\hat{s}_{i,0}(\tau_k^{ij}) - \hat{s}_{j,0}(\tau_k^{ij}) = \hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{j,0}(t) + \varepsilon_{ij}(t)$$

其中 $|\varepsilon_{ij}(t)| \leq 2\delta$，$\forall t \geq T$。因此，(18) 是 (1) 的受扰版本。于是，采用 Aldana-L´opez 等人（2023a）中的标准齐次性论证，可得到实用收敛，其精度按 $\limsup_{t\to\infty} |\hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{j,0}(t)| \leq c_0\delta$ 和 $\limsup_{t\to\infty} |\hat{s}_{i,1}(t) - \hat{s}_{j,1}(t)| \leq c_1\sqrt{\delta}$ 缩放，其中常数 $c_0, c_1 > 0$ 适当选取且与 δ 无关。由于 $\delta \to 0$ as$T \to \infty$，因此微分器一致性误差也收敛到 0。□

满足命题 12 条件的 $\delta_{ij}(t)$ 的一种可能选择是

$$\delta_{ij}(t) = \delta \exp(-q_{ij}(t - p_{ij}))$$

其中 δ，$q_{ij} > 0$，$p_{ij} \geq 0$ 是由智能体对 (i, j) 决定的常数。

虽然命题 12 证明了渐近精确性且不存在芝诺行为，但下一个命题表明，这与触发阈值 $\delta_{ij}(t)$ 渐近趋于零必然导致事件间隔也渐近趋于零这一事实并不矛盾。

命题*13.* 设 (19) 中的 $\delta_{ij}(t)$ 满足命题 12 中所述的条件。假设存在$c > 0, T_0 > 0$，使得对所有 $t \geq 0$ 及所有 $T \in (0, T_0]$，均有：

$$\left| \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \dot{\hat{s}}_{i,0}(\tau) \mathrm{d}\tau \right| \geq c. \tag{20}$$

那么，对于每个 $T \in (0, T_0]$，都存在 $K \geq 0$，使得对所有 $k \geq K$，均有

$$\tau_{k+1}^{ij} - \tau_k^{ij} \leq T.$$

等价地，在时间区间 $[0, \infty)$ 上不存在严格为正的最小事件间隔。

证明. 定义集合

$$\mathcal{T} := \left\{ t \geq \tau_k^{ij} : \max\left\{ |\hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{i,0}(\tau_k^{ij})|, |\hat{s}_{j,0}(t) - \hat{s}_{j,0}(\tau_k^{ij})| \right\} \geq \delta_{ij}(t) \right\}.$$

给定 $T_0 > 0$，任取 $T \in (0, T_0]$。选择 $T_c \geq 0$，使得对所有 $t \geq T_c$，均有 $\delta_{ij}(t) \leq cT$。选择 $k \geq 0$，使得$\tau_k^{ij} \geq T_c$。注意，$\delta_{ij}(\tau_k^{ij} + T) \leq cT$。因此，利用 (20)，可得

$$\left| \int_t^{t+T} \dot{\hat{s}}_{i,0}(\tau) \mathrm{d}\tau \right| = |\hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{i,0}(\tau_k^{ij})| \geq cT \geq \delta_{ij}(t)$$

对于 $t = \tau_k^{ij} + T$。然后，$\tau_k^{ij} + T \in \mathcal{T}$和 $\tau_{k+1}^{ij} = \inf \mathcal{T}$。因此，$\tau_k^{ij} + T \geq \tau_{k+1}^{ij}$，等价地，$T \geq \tau_{k+1}^{ij} - \tau_k^{ij}$，证明完毕。□

注意到，条件(20)意味着输出 $\hat{s}_{i,0}(t)$ 存在平均持续变化；当输入 $s_i(t)$并非渐近常数时，就可能出现这种情况。正是在这种情形下，随着 $\delta_{ij}(t)$ 趋于零，触发必须变得越来越频繁。

受命题 13 启发，并且由于我们关注的是可能导致(20)的持续变化参考信号，我们提出了一种不同的阈值设计，确保沿每条轨迹的所有 $t \in [0, \infty)$ 都具有严格为正的最小事件间隔。所提出的触发器依赖于状态，因此能够在瞬态期间减少通信，但代价是必然丧失渐近精确性，同时仍能在性能与通信之间实现有利的权衡。

定理*14*。设定理3的假设和条件成立，并考虑式(18)中的事件触发协议，其触发规则为

$$\tau_{k+1}^{ij} = \inf\left\{ t \geq \tau_k^{ij} : \max\left\{ |\hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{i,0}(\tau_k^{ij})|, |\hat{s}_{j,0}(t) - \hat{s}_{j,0}(\tau_k^{ij})| \right\} \geq \delta + \sigma|\hat{s}_{i,0}(\tau_k^{ij}) - \hat{s}_{j,0}(\tau_k^{ij})| \right\}, \tag{21}$$

对于某个任意的 $\delta > 0$ 和适当的 $\sigma \geq 0$。然后，

(1) 对于每个初始条件，都存在一个严格为正的最小事件间隔 $\tau > 0$，使得$\tau_{k+1}^{ij} - \tau_k^{ij} \geq \tau$，对于所有 $(i, j) \in \mathcal{E}$，$k \geq 0$。(2) 存在常数 c_0，$c_1 > 0$，且与 δ 无关，使得

$$\begin{aligned} \limsup_{t\to\infty} |\hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{j,0}(t)| &\leq c_0\,\delta, \\ \limsup_{t\to\infty} |\hat{s}_{i,1}(t) - \hat{s}_{j,1}(t)| &\leq c_1\sqrt{\delta}, \end{aligned} \tag{22}$$

for all $(i, j) \in \mathcal{E}$.

定理14的证明在第 5.1 节中给出详细说明，并利用了本文提出的抽象超扭转型李雅普诺夫分析。

注 *15.* 定理14中的常数 c_0, c_1 仅取决于所选增益。不同于 Aldana-L´opez 等人（2023a）的结果（其中仅能保证这些常数存在），这里可以利用定理 3 中的李雅普诺夫函数（10）估算这些常数。遵循齐次微分器的方法（Cruz-Zavala 和 Moreno，2019），计算满足以下条件的最小 $\theta \geq 0$：等值集 $\mathcal{L}_\theta = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : V(\mathbf{x}) \leq \theta\}$ 在其边界上满足 $\dot{V} < 0$，其中 V取自（28），并将 $U(\mathbf{x})$、$U^*(\mathbf{x})$ 和$\mathcal{S}(\mathbf{x})$ 替换为它们在 $\boldsymbol{\varepsilon} \in [0, 2\delta]^{|\mathcal{E}|}$ 下受扰动后的版本 $U(\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon})$、$U^*(\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon})$ 和$\mathcal{S}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon})$，这是由归一化 $\delta = 1, \sigma = 0$ 所产生的触发效应所致。这保证轨迹到达并保持在 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 中。随后得到常数 c_0, c_1，其表达式为

$$c_0 = \sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{L}_\theta} \|\mathbf{x}_0\| \qquad c_1 = \sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{L}_\theta} \|\mathbf{x}_1\|$$

虽然这种数值过程需要大量使用约束非线性优化程序，但与以往文献中的方法相比（Aldana-Lopez等人，2021年、2022a；Aldana-L´opez等人，2023a），这是一种更有原则性的设计方法；以往的方法中，增益k_0，k_1 和常数 c_0，c_1 都是通过仿真近似确定的，其有效性并无真正保证。

5.1 事件触发通信下的分析

本节给出定理14的证明。证明思路如下。首先，引理 16 将事件触发系统的误差动力学改写为抽象超扭转误差系统的受扰形式。

随后，在引理17中我们证明受扰系统满足一个适当的李雅普诺夫不等式，从而在对所有 t 解均存在的前提下蕴含有限时间稳定性。引理 18 证明对所有 t 存在严格为正的最小事件间隔，从而保证解的存在性。本节末将这些论证结合起来，得出定理14所述精度界意义下的有限时间稳定性。

引理 *16.* 考虑由变量替换 (3)、(4)、(9) 应用于满足 $\sigma < 1/2$ 的触发规则 (21) 下的系统 (18) 所得到的$\mathbf{x}_0(t)$, $\mathbf{x}_1(t)$。因此，$\mathbf{x}_0(t)$，$\mathbf{x}_1(t)$ 的动力学满足：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_0(t) &= -\gamma\mathbf{x}_0(t) - \tilde{k}_0\left(\mathbf{D}\left\lceil \mathbf{D}^\top\mathbf{x}_0(t) + \boldsymbol{\varepsilon}(t)\right\rfloor^{\frac{1}{2}} - \mathbf{x}_1(t)\right),\\ \dot{\mathbf{x}}_1(t) &\in -\gamma\mathbf{x}_1(t) - \tilde{k}_1\left(\mathbf{D}\left\lceil \mathbf{D}^\top\mathbf{x}_0(t) + \boldsymbol{\varepsilon}(t)\right\rfloor^{0} + \frac{1}{k_1}\mathcal{D}\right),\end{aligned} \tag{23}$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}(t) \in \mathrm{image}(\mathbf{D}^\top)$，且

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(t)\| \le \frac{2}{1-2\sigma}\left(\frac{\delta\sqrt{|\mathcal{E}|}}{L} + \sigma\|\mathbf{D}^\top\mathbf{x}_0(t)\|\right), \quad \forall t \ge 0. \tag{24}$$

证明。 首先写成

$$\hat{s}_{i,0}(\tau_k^{ij}) - \hat{s}_{j,0}(\tau_k^{ij}) = \hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{j,0}(t) + \varepsilon_i(t) - \varepsilon_j(t),$$

其中 $\varepsilon_i(t) = \hat{s}_{i,0}(\tau_k^{ij}) - \hat{s}_{i,0}(t)$，$\varepsilon_j(t)$ 的情况也类似。此外，由于 (21)，

$$|\varepsilon_i(t)| \le \delta + \sigma|\hat{s}_{i,0}(\tau_k^{ij}) - \hat{s}_{j,0}(\tau_k^{ij})|,\ \forall t \in [\tau_k^{ij}, \tau_{k+1}^{ij}).$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}&|\hat{s}_{i,0}(\tau_k^{ij}) - \hat{s}_{j,0}(\tau_k^{ij})| = |\hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{j,0}(t) + \varepsilon_i(t) - \varepsilon_j(t)|\\ &\le |\hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{j,0}(t)| + |\varepsilon_i(t)| + |\varepsilon_j(t)|\\ &\le |\hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{j,0}(t)| + 2\delta + 2\sigma|\hat{s}_{i,0}(\tau_k^{ij}) - \hat{s}_{j,0}(\tau_k^{ij})|,\end{aligned}$$

这意味着

$$|\hat{s}_{i,0}(\tau_k^{ij}) - \hat{s}_{j,0}(\tau_k^{ij})| \le \frac{|\hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{j,0}(t)| + 2\delta}{1-2\sigma}.$$

这一结果使我们能够写出

$$\begin{aligned}&\max\{|\varepsilon_i(t)|, |\varepsilon_j(t)|\} \le \delta + \sigma|\hat{s}_{i,0}(\tau_k^{ij}) - \hat{s}_{j,0}(\tau_k^{ij})|\\ &\le \delta + \sigma\left(\frac{|\hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{j,0}(t)|}{1-2\sigma} + \frac{2\delta}{1-2\sigma}\right)\\ &= \frac{\delta}{1-2\sigma} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}|\hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{j,0}(t)|.\end{aligned}$$

因此，我们可以得到

$$\hat{s}_{i,0}(\tau_k^{ij}) - \hat{s}_{j,0}(\tau_k^{ij}) = \hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{j,0}(t) + \varepsilon_{ij}(t),$$

其中 $\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon_i(t) - \varepsilon_j(t)$，且

$$|\varepsilon_{ij}(t)| \le \frac{2\delta}{1-2\sigma} + \frac{2\sigma}{1-2\sigma}|\hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{j,0}(t)|. \tag{25}$$

利用上述等式，我们将 (18) 写为

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_{i,0}(t) &= k_0\sqrt{L}\sum_{j\in\mathcal{N}_i}\lceil \hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{j,0}(t) + \varepsilon_{ij}(t)\rfloor^{1/2}\\ &\quad + \eta_{i,1}(t) - \gamma\eta_{i,0}(t),\\ \dot{\eta}_{i,1}(t) &= k_1 L\sum_{j\in\mathcal{N}_i}\lceil \hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{j,0}(t) + \varepsilon_{ij}(t)\rfloor^{0} - \gamma\eta_{i,1}(t),\end{aligned}$$

这等价于在（1）中的协议动力学基础上加入扰动项 $\varepsilon_{ij}(t)$。考虑到由于 $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{e}_0(t)/L$，我们定义扰动向量 $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{D}^\top[\varepsilon_1(t)\dots, \varepsilon_N(t)]^\top/L$，它满足

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\varepsilon}(t)\| &= \sqrt{\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}}(\varepsilon_{ij}(t)/L)^2}\\ &\le \frac{2}{(1-2\sigma)L}\sqrt{\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}}(\delta + \sigma|\hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{j,0}(t)|)^2}\\ &\le \frac{2}{(1-2\sigma)L}\left(\delta\sqrt{|\mathcal{E}|} + \sigma\sqrt{\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}}(\hat{s}_{i,0}(t) - \hat{s}_{j,0}(t))^2}\right)\\ &= \frac{2}{(1-2\sigma)L}\left(\delta\sqrt{|\mathcal{E}|} + \sigma\|\mathbf{D}^\top\hat{\mathbf{s}}_0(t)\|\right)\\ &= \frac{2}{1-2\sigma}\left(\frac{\delta\sqrt{|\mathcal{E}|}}{L} + \sigma\|\mathbf{D}^\top\mathbf{x}_0(t)\|\right).\end{aligned}$$

最后，按照第4节和引理8中的相同步骤，可得到 (23) 的形式，从而完成证明。□

现在，我们给出受扰系统的李雅普诺夫分析结果。

引理*17.* 令 $\boldsymbol{\varepsilon}: \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathrm{image}(\mathbf{D}^\top)$ 在 $\delta = 0$ 下满足条件。(24) 此外，设

$$\sigma \le \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{c\underline{v}}{c_\psi}\right)^2\right)^{-1}\right\}$$

其中 $c, \underline{v}, c_\psi > 0$ 分别由 (14)、(15) 得到。因此，存 (27) 在 $c_\sigma > 0$ 使得

$$\dot{V} \le -c_\sigma V^{2/3}. \tag{26}$$

对于沿 (23) 的解定义的 (10) 中的 V。

证明. 首先，将 (23) 写为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_0 &= -\gamma\mathbf{x}_0 - \tilde{k}_0(\nabla U(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_1) + \boldsymbol{\psi}_0(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varepsilon}),\\ \dot{\mathbf{x}}_1 &\in -\gamma\mathbf{x}_1 - \tilde{k}_1\left(\mathcal{S}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{k_1}\mathcal{D}\right) + \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varepsilon}),\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}_0(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varepsilon}) &:= \tilde{k}_0\mathbf{D}\left(\left\lceil \mathbf{D}^\top\mathbf{x}_0\right\rfloor^{\frac{1}{2}} - \left\lceil \mathbf{D}^\top\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}\right\rfloor^{\frac{1}{2}}\right)\\ \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varepsilon}) &:= \tilde{k}_1\mathbf{D}\left(\left\lceil \mathbf{D}^\top\mathbf{x}_0\right\rfloor^{0} - \left\lceil \mathbf{D}^\top\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}\right\rfloor^{0}\right).\end{aligned}$$

现在，令$\mathbf{w} = \mathbf{D}^\top\mathbf{x}_0$，并用 w_{ij} 表示$\mathbf{w}$ 中对应于边 (i, j) 的分量。假设 $w_{ij} \ge 0$，得出

$$w_{ij} + \varepsilon_{ij} \ge w_{ij} - \frac{2\sigma}{1-2\sigma}|w_{ij}| = \left(\frac{1-4\sigma}{1-2\sigma}\right)w_{ij} \ge 0.$$

其中用到了 (25)。同理，假设 $w_{ij} \le 0$，得出$w_{ij} + \varepsilon_{ij} \le 0$。因此：

$$\mathrm{sign}(w_{ij} + \varepsilon_{ij}) = \mathrm{sign}(w_{ij}).$$

因此，对于所有$\mathbf{x}_0$ 以及可容许的 $\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varepsilon}) \equiv \mathbf{0}$ 均成立。对于$\boldsymbol{\psi}_0(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varepsilon})$，注意到

$$\begin{aligned}&\left|\lceil w_{ij}\rfloor^{1/2} - \lceil w_{ij} + \varepsilon_{ij}\rfloor^{1/2}\right| = \left||w_{ij}|^{1/2} - |w_{ij} + \varepsilon_{ij}|^{1/2}\right|\\ &\le |(w_{ij}) - (w_{ij} + \varepsilon_{ij})|^{1/2} = |\varepsilon_{ij}|^{1/2}\end{aligned}$$

由于 $|\bullet|^{1/2}$ 是 $\mathbf{H}^{\cdot\cdot}$ 阶 Hölder 连续的。因此，

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\psi}_0(\mathbf{x}_0, \varepsilon)\| &\le \tilde{k}_0\|\mathbf{D}\|\left\|\left\lceil \mathbf{D}^\top\mathbf{x}_0\right\rfloor^{\frac{1}{2}} - \left\lceil \mathbf{D}^\top\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}\right\rfloor^{\frac{1}{2}}\right\|\\ &\le \tilde{k}_0\|\mathbf{D}\|\sqrt{\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}}|\varepsilon_{ij}|} \le \tilde{k}_0|\mathcal{E}|^{1/4}\|\mathbf{D}\|\sqrt{\frac{2\sigma}{1-2\sigma}}\sqrt{\|\mathbf{D}^\top\mathbf{x}_0\|}\end{aligned}$$

因此:

$$\begin{aligned}&\langle \nabla U(\mathbf{x}_0)-\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\psi}_0(\mathbf{x}_0,\varepsilon)\rangle \le \|\nabla U(\mathbf{x}_0)-\mathbf{x}_1\|\|\boldsymbol{\psi}_0(\mathbf{x}_0,\varepsilon)\| \\ &\le \tilde{k}_0|\mathcal{E}|^{1/4}\|\mathbf{D}\|\sqrt{\frac{2\sigma}{1-2\sigma}}\|\nabla U(\mathbf{x}_0)-\mathbf{x}_1\|\sqrt{\|\mathbf{D}^\top\mathbf{x}_0\|} \\ &\le c_\psi\sqrt{\frac{2\sigma}{1-2\sigma}}V(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1)^{2/3}\end{aligned} \tag{27}$$

对于适当的 $c_\psi \ge 0$，其独立于 σ，并根据附录中的引理 20 计算得到。现在，我们按照第3.2节中的步骤计算 V 的动力学，特别是推导至式 (16)，从而得到:

$$\begin{aligned}\dot{V} &\le -c\underline{v}V^{2/3} + \langle \nabla U(\mathbf{x}_0)-\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_0,\boldsymbol{\varepsilon})\rangle \\ &\le -c\underline{v}V^{2/3} + c_\psi\sqrt{\frac{2\sigma}{1-2\sigma}}V^{2/3} \le -c_\sigma V^{2/3}\end{aligned} \tag{28}$$

with

$$c_\sigma := c\underline{v} - c_\psi\sqrt{\frac{2\sigma}{1-2\sigma}} > 0$$

根据引理陈述中对 σ 的选择，证明完毕。□

在以下结果中，我们研究该协议的事件间隔。

引理 *18*。 考虑定理14的条件。因此，对于每个初始条件，都存在严格为正的最小事件间隔 $\tau > 0$，使得 $\tau_{k+1}^{ij} - \tau_k^{ij} \ge \tau$，对于所有 $(i,\ j) \in \mathcal{E},\ k \ge 0$。

证明。 首先，注意到对于式 (18)，不存在有限时间内的逃逸。因此，在紧时间区间 $[0, T_0]$ 内，对于所有 t，$|\hat{s}_{i,0}(t)| \le B_s$，其中 B_s 取决于区间长度 T_0 以及 $\hat{\mathbf{s}}_0 = [s_{1\,0}\ 0\ \ \dots\ \ s_{N\,0}\ 0\ ]^\top$ (0) $\hat{}$ (), $\hat{}$ () 的初始条件。假设存在 $T > 0$，使得 $\lim_{k\to\infty}\tau_k^{ij} = T$，则会产生矛盾。因此，存在 $k \ge 0$，使得

$$\tau_{k+1}^{ij} - \tau_k^{ij} \le \frac{\delta}{2B_s} \tag{29}$$

因此，对于这样的 k:

$$\begin{aligned}\delta &\le |\hat{s}_{i,0}(\tau_{k+1}^{ij}) - \hat{s}_{i,0}(\tau_k^{ij})| = \left|\int_{\tau_k^{ij}}^{\tau_{k+1}^{ij}} \dot{\hat{s}}_{i,0}(\tau)\mathrm{d}\tau\right| \\ &\le (\tau_{k+1}^{ij} - \tau_k^{ij})B_s \le \frac{\delta}{2}\end{aligned}$$

这就产生了矛盾。因此，$\lim_{k\to\infty}\tau_k^{ij} = \infty$。由此，(18) 的解在$t \in [0,\infty)$上是最大定义的，且不会发生芝诺现象。在无界时间区间 $[0,\infty)$ 上，引理17由 (26) 推出 $V \le 0$。由于根据引理 10，V 是正定且径向无界的，因此可知$\mathbf{x}_0(t)$,$\mathbf{x}_1(t)$ 对所有 $t \ge 0$ 都有界。因此，对所有 $t \ge 0$，(18) 的右端均有上界，从而$|\hat{s}_{i,0}(t)| \le B_s$，其中某个 B_s 仅取决于初始条件。最后，反设不存在严格为正的最小事件间隔。因此，存在 $k \ge 0$ 使得 (29) 成立，这再次导致矛盾，证明完毕。□

证明。 [定理 14] 的。首先，引理 18表明命题14-(1)成立。对于第(2)项，注意 $\delta = 0$仅通过允许非极大定义的扰动 $\varepsilon(t)$出现在(23)中，其中这些扰动在某个有限时间 T之后不再有定义。对于在无界时间区间 $t \in[0,\infty)$上定义的任何其他可容许扰动，引理17蕴含(26)，进而当 $\delta = 0$时蕴含向原点的有限时间收敛。在此情形下，注意 $\mathbf{D}^\top\mathbf{x}_0$ 以及(24)中 ε 的可容许集都是$\mathbf{x}_0$ 的集值函数，且具有相同的齐次度。因此，允许 $\delta > 0$意味着在 ε上存在加性有界扰动，从而产生实用收敛，其精度按(22)缩放，这可通过遵循Aldana- L´opez等人(2023a)中针对齐次微分不等式(26)的标准齐次性论证得到。□

6. 讨论

本研究结果凸显了基于齐次性的李雅普诺夫分析在分布式微分中的结构性和实践优势。齐次性是所提出方法的核心，因为它直接决定了分布式算法的鲁棒性。基于齐次滑模的微分器可实现稳态精度界，其随扰动幅值的平方根缩放。正如（Seeber和Haimovich，2023）所示，当从受到幅值为 δ的扰动污染的测量中估计导数时，没有微分器能够达到更好的渐近精度。

与这一基本极限一致，在有界噪声或幅值为 δ的触发诱导扰动下，估计误差会收敛到一个量级为$\sqrt{\delta}$的邻域。需要指出的是，在我们的情形中，此类扰动可能表现为测量噪声、时延或事件触发通信。针对测量噪声下REDCHO类型分布式微分器的精度分析已在（Aldana-L´opez等，2023a）中得到严格确立；针对时延的分析见Aldana-L´opez等（2025），但仍未明确计算缩放常数。本研究表明，在按照定理14进行适当设计的事件触发通信下，同样能够保持最优缩放。

将这一方法与文献中一种可能的替代方案进行比较，很有启发性。首先，使用 DAC 算法计算输入信号 $s_i(t)$ 的平均值，然后用局部分化器对所得平均值求导。平均一致性可以通过线性协议（Kia等人，2019年）或精确的一阶滑模一致性方案（George 和 Freeman，2019年）实现。当与事件触发通信或测量噪声结合时，这些级联设计会失去齐次性。线性一致性动态与非线性微分会导致混合阶行为，因此基于齐次性的鲁棒性论证不再适用。在线性情形下，还会引入额外的稳态误差，并叠加噪声效应。在一阶滑模情形下，理想情况下可以实现精确收敛，但噪声会导致抖振，并且当抖振被注入微分器时会进一步放大。因此，在存在噪声或触发的情况下，无法保证导数估计的 $\sqrt{\delta}$ 精度缩放。这种结构性损失直接限制了这些竞争方案所能提供的性能保证。

关于李雅普诺夫方法的局限性，需要注意的是，应用于分布式微分器的李雅普诺夫函数通过关联矩阵显式依赖于图结构。因此，对于时变拓扑，李雅普诺夫函数本身会随时间变化，从而无法使用单一势函数 U来证明收敛。此外，对于有向图，分布式动力学可能不存在潜在的凸势函数，而这正是基于齐次性的李雅普诺夫分析的关键要素。因此，将结果扩展到有向图或时变图并非易事，可能需要采用不同的分析工具，这留待未来工作探讨。

现在讨论所提方法中的事件触发方面。与之密切相关的一项工作是（Xu 等，2024），该工作通过事件触发通信实现了动态平均一致性的渐近精确性。该工作依赖于对符号函数的边界层近似，该近似能够渐近地恢复精确跟踪，并可理解为采用了一个渐近趋于零的触发阈值。从这个意义上说，其结果与命题 12 密切相关。此外，（Xu 等，2024）排除了芝诺行为。然而，相应的最小事件间隔保证仅在紧时间区间内成立。这一局限并非偶然，而是命题 13 的直接结果。命题 13 表明，当信号持续变化且触发阈值渐近趋于零时，$[0,\infty)$ 上不可能存在严格为正的最小事件间隔。这一根本局限促使我们在定理14中提出状态依赖触发策略，通过以渐近精确性换取受控的终端精度，确保最小事件间隔严格为正。

7. 数值示例

现在，我们通过仿真展示式 (18) 中事件触发分布式微分器的性能。仿真采用步长为 Δt =10^{-4}s 的前向欧拉格式，在时长为 $T = 10$s 的时间范围内进行。网络由 $N = 5$ 个按环形拓扑排列的智能体组成。每个智能体测量一个正弦信号 $s_i(t) = \sin(\omega_i t + \phi_i)$，其频率为 $\omega_i \in \{1.73, 0.58, 1.12, 0.37, 1.95\}$，相位为 $\phi_i \in \{0.27, 1.66, 0.09, 1.92, 0.45\}$。整体目标是跟踪平均导数 $\dot{\bar{s}}(t)$。参数设为 $k_0 = 4.0 > 3.45$、 $k_1 = 13 > 12.4$ ，满足条件 (8)，其中下界按注11中的方法求得。此外，我们设定 $\gamma = 1.0$，并令 $L = 4.0$满足假设 1。在第一次实验中，触发阈值固定为 $\delta_{ij}(t) = \delta = 0.02$。注11和注15所述步骤中所需的所有约束优化程序，均使用 scipy 软件包中的 minimize 例程实现。

图1总结了结果。上方子图展示了触发阈值为 $\delta = 0.02$时的估计导数$\hat{s}_{i,1}(t)$以及真实平均导数 $\dot{\bar{s}}(t)$。所有智能体均正确恢复了平均轨迹，仅存在由触发器引起的较小稳态偏差。中间子图描绘了绝对误差 $|\hat{s}_{i,1}(t) - \dot{\bar{s}}(t)|$，它们收敛到原点附近的一个邻域，其大小随$\sqrt{\delta}$变化，与定理14一致。理论界 $c_1\sqrt{\delta}$ 与 $c_1 \bar{=} 7.9$ 也一并给出，其中 $\bar{}$ 可以看出，稳态误差从未超过所保证的界。左下方子图给出了最大稳态误差随 δ变化的关系，该结果通过对 $\delta \in [0, 0.14]$ 进行扫描、开展100次实验并在 $0.8T$ 秒后测量误差而得到。数值结果从未超过所保证的预测 $c_1\sqrt{\delta}$ 界，其中可以观察到一定的预期保守性。最后，右下方子图展示了相对于连续传输的相应事件比例，说明较大的 δ 值可显著降低通信负载。

现在，我们使用其他时变和状态依赖触发方案重复实验。图2展示了在三种具有代表性的阈值选择 $\delta_{ij}(t)$ 下，事件触发分布式微分器的表现。与之前一样，采用恒定阈值$\delta_{ij}(t) = \delta$ （左列）时，算法呈现出实用收敛。经过短暂的暂态后，跟踪误差始终被限制在一个邻域内，其大小由 δ 决定；与此同时，事件间隔始终严格为正，且长期来看没有恶化。当采用渐消阈值 $\delta_{ij}(t) = \delta\exp(-t/2)$（中列）时，跟踪误差渐近趋于零，证实了分布式微分器的渐近精确性。然而，精度的提升伴随着事件间隔逐渐缩短，这反映出在信号持续变化的情况下，要维持精确跟踪所需的通信开销不断增加。最后，状态依赖触发器 $\delta_{ij}(t) = \delta + \sigma|\hat{s}_{i,0}(\tau_k) - \hat{s}_{j,0}(\tau_k)|$ （右列）则呈现出介于两者之间的表现。在暂态期间，当智能体尚未达成一致时，较大的阈值可减少通信；而在稳态下，阈值实际上会饱和于 δ，从而避免触发频率任意增高。因此，事件间隔始终与零保持一致有界的距离，同时稳态跟踪误差仍然较小，并可通过 δ进行调节，体现了通信稀疏性与终端精度之间预期的权衡。

注*19*。 如前所述，实验中使用的增益设为 $k_0 > 3.45$和 $k_1 > 12.4$，因此满足式（8）中的充分条件。一个自然的问题是这些界限的保守性。就此而言，额外的仿真表明，对于所考虑的场景，显著更小的增益（约为 $k_0 \approx 1.25$ 和 $k_1 \approx 2.25$）仍能产生稳定行为。这一观察表明，从李雅普诺夫分析中推导出的增益条件具有保守性，这正是为提供全局且严格的保证而采用充分条件时预期会出现的情况。在保留形式化保证的同时制定保守性更低的设计规则并非易事，因此留待未来工作。

8. 结论

我们提出了一种用于分布式微分的李雅普诺夫框架，扩展了现有的高阶滑模一致性方案。通过分离出与超扭转算法共有的结构特征，并将其编码到一个抽象模型中，我们推导出了显式的增益条件，并建立了全局有限时间收敛性。该分析弥补了系统化调参指南的缺失，并强化了以往仅证明局部稳定性的结果。

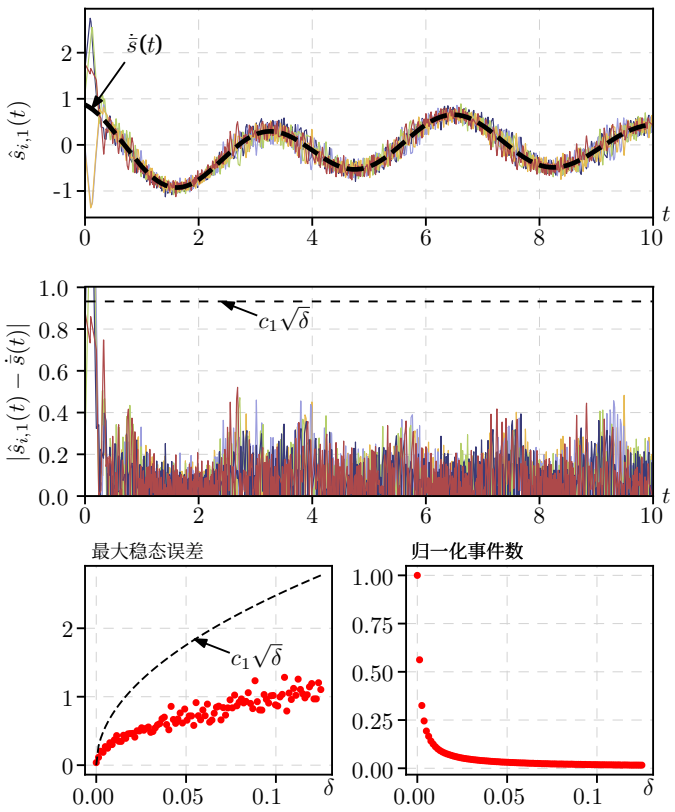

图 1. 对所提出的事件触发协议进行仿真。上：事件触发器阈值为 $\delta = 0.02$ 时，估计导数 $\hat{s}_{i,1}(t)$（实线）和真实平均导数 $\dot{\tilde{s}}(t)$（黑色虚线）。中：绝对误差 $|\hat{s}_{i,1}(t) - \dot{\tilde{s}}(t)|$。图中还显示了理论稳态误差界 $c_1\sqrt{\delta}$，其中 $c_1 = 7.9$，$\delta = 0.02$（黑色虚线）。左下：稳态误差随触发阈值 δ 的变化（红点），以及理论 $c_1\sqrt{\delta}$ 界（黑色虚线）。此处，$\delta = 0$ 对应于标准 REDCHO 的性能，参见 Aldana-López 等人（2022a）。右下：相对于全量传输情形的事件总数比例。

我们还开发了一种事件触发实现方案，其依据是常数、时变和状态依赖的事件触发阈值。对于这些方案，我们排除了芝诺行为的存在，并得到了随触发阈值变化的误差界，从而量化了网络化系统中的精度-通信折中。因此，所提出的框架为分布式微分器的设计提供了有理有据的基础，并在连续和事件触发两种设置下给出了严格保证。

附录 A. 辅助结果

本节汇集了关于齐次性（Bernuau 等，2014）和凸分析（Rockafellar，1970）的辅助概念与结果。函数 $V:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$称为次数为 d的齐次函数，当且仅当

$$V(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^d V(\mathbf{x}), \qquad \forall \lambda > 0,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

这一概念自然地扩展到加权齐次性。给定权重$\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_n]$，定义伸缩

$$\Delta_\lambda = \operatorname{diag}(\lambda^{r_1}, \dots, \lambda^{r_n}).$$

若函数 $V:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 被称为$\mathbf{r}$-齐次的，次数为 d，则

$$V(\Delta_\lambda \mathbf{x}) = \lambda^d V(\mathbf{x}), \qquad \forall \lambda > 0,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

引理 *20*。（Cruz-Zavala 和 Moreno（2019），引理 5）。设 $V_1, V_2:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为连续函数，它们关于伸缩 $\Delta_\lambda = \operatorname{diag}(\lambda^{r_1}, \dots, \lambda^{r_n})$,分别具有次数 $m_1, m_2 > 0$的齐次性。假设 V_1 为正定函数。那么，对于任意$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\underline{v} V_1(\mathbf{x})^{\frac{m_2}{m_1}} \le V_2(\mathbf{x}) \le \overline{v} V_1(\mathbf{x})^{\frac{m_2}{m_1}},$$

其中

$$\underline{v} = \inf_{\mathbf{x}:V_1(\mathbf{x})=1} V_2(\mathbf{x}), \qquad \overline{v} = \sup_{\mathbf{x}:V_1(\mathbf{x})=1} V_2(\mathbf{x}).$$

引理 *21*。（Cruz-Zavala 和 Moreno（2019），引理4）。设 $\Gamma, \Pi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为连续函数，关于伸缩 $\Delta_\lambda = \operatorname{diag}(\lambda^{r_1}, \dots, \lambda^{r_n})$, $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_n]$, 具有相同次数 $m > 0$的齐次性，其中 $\Gamma(\mathbf{x}) \ge 0$。假设

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} : \Gamma(\mathbf{x}) = 0\} \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} : \Pi(\mathbf{x}) < 0\}.$$

那么，对任意 $c > 0$，存在 $k > 0$ 使得

$$-k\Gamma(\mathbf{x}) + \Pi(\mathbf{x}) \le -c\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{r}}^m, \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

特别地，下列条件是充分的

$$k \ge \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{r}}=1, \Gamma(\mathbf{x})>0} \frac{\Pi(\mathbf{x}) + c}{\Gamma(\mathbf{x})}.$$

引理 *22.* 设假设 4 成立。则下列陈述成立：

i) $U(\mathbf{x}_0) + U^*(\mathbf{x}_1) - \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \rangle \ge 0$，当且仅当 $\mathbf{x}_1 = \nabla U(\mathbf{x}_0)$ 时等号成立。ii) U^* 是严格凸的。iii) U^* 是正定的。iv) U^* 是 3 次齐次的。v) $\langle \nabla U(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0 \rangle \ge U(\mathbf{x}_0)$，$\langle \nabla U^*(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_1 \rangle \ge U^*(\mathbf{x}_1)$。vi) 作为 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)$ 的函数，项 $U(\mathbf{x}_0)$、$U^*(\mathbf{x}_1)$ 和 $\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \rangle$ 关于伸缩 $\Delta_\lambda = \operatorname{diag}(\lambda^{r_1}, \dots, \lambda^{r_n})$ 均为 3 次 $\mathbf{r}$- 齐次的。vii) 对任意 $\beta \ge 7$，$U(\mathbf{x}_0) + (1+\beta) U^*(\mathbf{x}_1) - 2\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \rangle \ge 0, \quad \forall \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}$.

证明。 第 i) 项是标准的 Fenchel–Young 不等式，根据 (11) 中 U^* 的构造，该不等式成立。第 ii) 项可由凸分析中关于对偶的标准结果推出（Boyd 和 Vandenberghe，2004年，第3.3.1节）。对于第 iii) 项，回顾一下，第 i) 项对所有 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ 均成立。令$\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$，可得

$$U^*(\mathbf{x}_1) \ge \langle \mathbf{0}, \mathbf{x}_1 \rangle - U(\mathbf{0}) = 0.$$

此外，

$$U^*(\mathbf{0}) = \sup_{\mathbf{x}_0} \{-U(\mathbf{x}_0)\} = -\inf_{\mathbf{x}_0} U(\mathbf{x}_0) = 0,$$

由于 U 是正定的。因此 U^* 也是正定的。对于条目 iv)，注意到

$$\begin{aligned} U^*(\lambda \mathbf{x}_1) &= \sup_{\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}} \{\langle \mathbf{x}_0, \lambda \mathbf{x}_1 \rangle - U(\mathbf{x}_0)\} \\ &= \sup_{\mathbf{x}_0' \in \mathcal{X}} \{\langle \lambda^2 \mathbf{x}_0', \lambda \mathbf{x}_1 \rangle - U(\lambda^2 \mathbf{x}_0')\} \\ &= \sup_{\mathbf{x}_0' \in \mathcal{X}} \{\lambda^3 \langle \mathbf{x}_0', \mathbf{x}_1 \rangle - \lambda^3 U(\mathbf{x}_0')\} \\ &= \lambda^3 U^*(\mathbf{x}_1), \end{aligned}$$

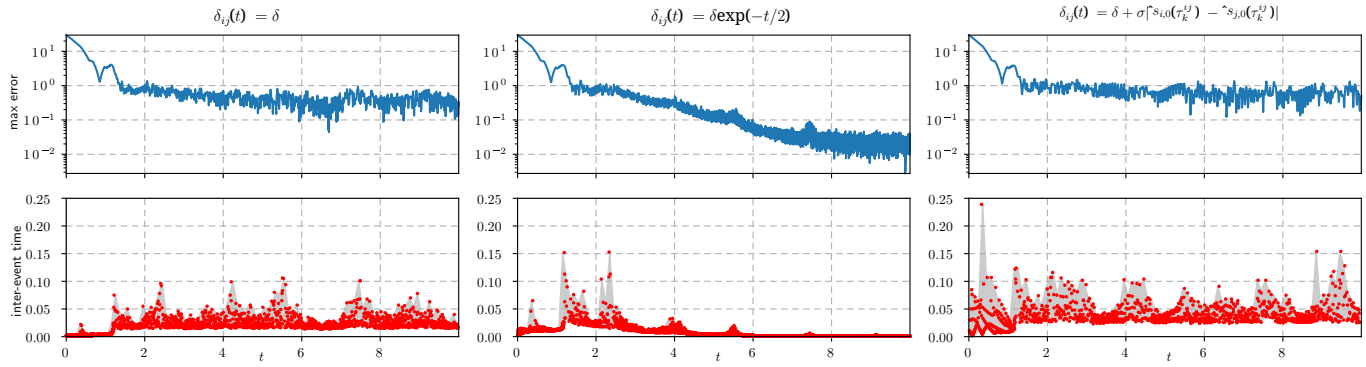

图 2. 事件触发分布式微分器中三种事件阈值 $\delta_{ij}(t)$ 的比较。左列：恒定阈值 $\delta_{ij}(t) = \delta$，可实现实用收敛至稳态误差下限，同时保持事件间隔严格为正。中列：渐消阈值 $\delta_{ij}(t) = \delta\exp(-t/2)$，以事件间隔逐渐缩短为代价，实现渐近精确跟踪。右列：状态相关阈值$\delta_{ij}(t) = \delta + \sigma|\hat{s}_{i,\,0}(\tau_k^{ij}) - \hat{s}_{j,\,0}(\tau_k^{ij})|$，$\sigma = 0.15$，实现了有利的折中：在整个运行过程中，事件间隔始终远离零，同时稳态误差保持较小，并可通过 δ进行调节。上排：每个时刻 t所有智能体的代表性最大跟踪误差。下排：同一实验中的事件间隔，灰色区域表示最大值与最小值之间的范围。

这里使用了变量替换 $\mathbf{x}_0 = \lambda^2\mathbf{x}_0'$，以及 U的 $3/2$-齐次性。对于条目 v)，令$f:\ \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ 为任意可微正定凸函数（例如，U 或 U^*）。由凸性可得

$$f(\mathbf{x}') \ \geq\ f(\mathbf{x}) + \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{x}' - \mathbf{x}\rangle.$$

令 $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$，得到

$$0 = f(\mathbf{0}) \ \geq\ f(\mathbf{x}) - \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{x}\rangle,$$

这意味着 $\langle \nabla f(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\rangle \geq f(\mathbf{x})$。将此关系应用于 U 和 U^*，即可得到所述结论。对于条目 vi)，注意到

$$U(\lambda^2\mathbf{x}_0) = (\lambda^2)^{3/2}U(\mathbf{x}_0) = \lambda^3 U(\mathbf{x}_0),$$
$$\langle \lambda^2\mathbf{x}_0, \lambda\mathbf{x}_1\rangle = \lambda^3\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1\rangle,$$

且根据条目 iv，U^* 是 3 次齐次的。因此，在 $\mathbf{r} = [2\mathbb{1}^\top, \mathbb{1}^\top]^\top$下，每一项都是 3 次$\mathbf{r}$-齐次的。最后，对于条目 vii)，Fenchel–Young 不等式意味着

$$-\langle \mathbf{x}_0, 2\mathbf{x}_1\rangle \ \geq\ -U^*(2\mathbf{x}_1) - U(\mathbf{x}_0).$$

因此，

$$\begin{aligned} &U(\mathbf{x}_0) + (1+\beta)U^*(\mathbf{x}_1) - 2\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1\rangle \\ &\geq (1+\beta)U^*(\mathbf{x}_1) - U^*(2\mathbf{x}_1) \\ &= (1+\beta)U^*(\mathbf{x}_1) - 2^3 U^*(\mathbf{x}_1) \\ &= (\beta - 7)U^*(\mathbf{x}_1) \ \geq\ 0, \end{aligned}$$

对所有 $\beta \geq 7$ 均成立。□

参考文献

Aldana-Lopez, R.、Arag¨u´es, R.与Sag¨u´es, C.（2021年）。EDCHO：高阶精确动态一致性。*Automatica*，131，109750。Aldana-Lopez, R.、Arag¨u´es, R.与Sag¨u´es, C.（2022a）。REDCHO：高阶鲁棒精确动态一致性。*Automatica*，141，110320。Aldana-Lopez, R.、Gomez-Gutierrez, D.、Aragues, R.与Sagues, C.（2022b）。用于多领导者编队跟踪的具有预设收敛时间的动态一致。*IEEE* 控制系统快报，6，3014–3019。Aldana-L´opez, R.、Arag¨u´es, R.与Sag¨u´es, C.（2023a）。用于精确动态一致性的含噪测量分布式微分。*IFAC-PapersOnLine*，56(2)，2038–2043。第22届 IFAC 世界大会。

Aldana-L´opez, R., Arag¨u´es, R., and Sag¨u´es, C.（2023b）。感知时延感知分布式目标跟踪。信息融合，99，101857。Aldana-L´opez, R., Arag¨u´es, R., and Sag¨u´es, C.（2025）。异步通信和对称时延下的准精确动态平均一致性。*ISA Transactions*。Arscott, F. and Filippov, A.（1988）。不连续右端微分方程：控制系统。数学及其应用。Springer Netherlands。Bernuau, E., Efimov, D., Perruquetti, W., and Polyakov, A.（2014）。关于齐次性及其在滑模控制中的应用。富兰克林研究所学报，351(4)，1866–1901。2010—2012年变结构系统与滑模算法进展特刊。Boyd, S. and Vandenberghe, L.（2004）。凸优化。剑桥大学出版社。Caccavale, F. and Pierri, F.（2022）。多智能体系统时变信号分布式估计的一种方法。载于*2022*年第*61*届*IEEE*决策与控制会议，3556–3561。Carnevale, G., Bastianello, N., Notarstefano, G., and Carli, R.（2025）。异步且不可靠网络上的分布式优化ADMM跟踪梯度。*IEEE*自动控制汇刊，70(8)，5160–5175。Cruz-Zavala, E. and Moreno, J.A.（2019）。Levant任意阶精确微分器：一种李雅普诺夫方法。*IEEE*自动控制汇刊，64(7)，3034–3039。George, J. and Freeman, R.A.（2019）。鲁棒动态平均一致性算法。*IEEE*自动控制汇刊，64(11)，4615–4622。Geromel, J.C., Nunes, E.V., and Hsu, L.（2026）。用于线性时不变系统鲁棒控制的多变量广义超扭转算法。*Automatica*，185，112786。

Haimovich, H. and De Battista, H.（2019）。面向扰动的超扭转算法：特性与设计框架。*Automatica*，101，318–329。Iqbal, M., Qu, Z., and Gusrialdi, A.（2022）。多智能体系统的弹性动态平均一致性。*IEEE* 控制系统快报，6，3487–3492。Kia, S.S., Van Scoy, B., Cortes, J., Freeman, R.A., Lynch, K.M., and Martinez, S.（2019）。动态平均一致性教程：问题、应用与算法。*IEEE*控制系统杂志，39(3)，40–72。Levant, A.（1998）。通过滑模技术实现鲁棒精确微分。*Automatica*，34(3)，379–384。Levant, A.（2003）。高阶滑模、微分与输出反馈控制。国际控制期刊，76，924–941。Levant, A.（2005）。高阶滑模设计的齐次性方法。*Automatica*，41(5)，823–830。L´opez-Caamal, F. and Moreno, J.A.（2019）。广义多变量超扭转算法。《国际鲁棒与非线性控制期刊》，29(3)，634–660。Moreno, J.A. and Osorio, M.（2012）。超扭转算法的严格李雅普诺夫函数。*IEEE*自动控制汇刊，57(4)，1035–1040。Moreno, J.A., R´ıos, H., Ovalle, L., and Fridman, L.（2021）。用于具有不确定输入矩阵和扰动系统的多变量超扭转算法。*IEEE*自动控制汇刊，67(12)，6716–6722。Perruquetti, W. and Barbot, J.P.（2002）。工程中的滑模控制。Marcel Dekker, Inc.，美国。Rockafellar, R.T.（1970）。凸分析。普林斯顿数学丛书。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州。Sebasti´an, E., Montijano, E., Sag¨u´es, C., Franceschelli, M., and Gasparri, A.（2023）。加速多阶段离散时间动态平均一致性。*IEEE* 控制系统快报，7，2731–2736。Seeber, R.（2023）。Levant任意阶鲁棒精确微分器的闭式稳定性条件和微分误差界。*IFAC-PapersOnLine*，56(2)，785–790。第22届 IFAC 世界大会。Seeber, R. and Haimovich, H.（2023）。通过线性自适应技术实现最优鲁棒精确微分。*Automatica*，148，110725。Seeber, R., Haimovich, H., Horn, M., Fridman, L.M., and De Battista, H.（2021）。具有预设收敛时间的鲁棒精确微分器。*Automatica*，134，109858。数字对象标识符：https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109858。Seeber, R. and Horn, M.（2017）。一种成熟超扭转参数设置的稳定性证明。*Automatica*，84，241–243。Seeber, R., Horn, M., and Fridman, L.（2018）。一种估计超扭转算法到达时间的新方法。*IEEE*自动控制汇刊，63(12)，4301–4308。Shtessel, Y.B., Moreno, J.A., Plestan, F., Fridman, L.M., and Poznyak, A.S.（2010）。超扭转自适应滑模控制：一种李雅普诺夫设计。载于第*49*届*IEEE*决策与控制会议（*CDC*），5109–5113。Xu, T., Duan, Z., Wen, G., and Sun, Z.（2024）。一种用于动态平均一致性的新型动态事件触发机制。*Automatica*，161，111495。Yu, Z., Yu, S., Jiang, H., 和 Hu, C.（2019年）。采用部分自适应动态协议的多智能体系统的基于观测器的一致。《非线性分析：混合系统》，34，58–73。