arXiv:2602.01866v1 [math.AP] 2 Feb 2026

常数势在负曲率 Hadamard 流形的凸域上并不使基本间隙达到最小

FRIEDER JÄCKEL

摘要。我们证明，对于每个负曲率 Hadamard 流形 X 和每个 $D > 0$，都存在一个凸域 $\Omega \subseteq X$，其直径为 D，并存在一个定义在 Ω 上的凸势 V，使得算子 $-\Delta + V$ 的基本间隙严格小于 $-\Delta$的基本间隙。这表明，基本谱隙猜想的第二部分在每个负曲率流形上都是错误的。与此前已知的双曲空间情形相比，这一结果难得多，因为缺乏对称性，我们必须研究真正的偏微分方程，而不只是常微分方程。

目录

1. 引言 2 1.1. 主要结果 2 1.2. 策略 3 1.3. 文章结构 4 2. 设置 4 2.1. 区域与势 4 2.2. 微分算子及其函数空间 6 3. 预备知识 7 3.1. 扰动估计 7 3.2. 艾里方程 10~4.
Δ。 10的特征函数 4.1. 设置
11 4.2. 模型常微分方程 12 4.3. 近似变量分离 16~5.
Δ 22~ ~的特征函数
5.1. 用 Δ。 22近似 Δ 5.2. 定理 1 的
证明 29 参考文献 31

日期：2026年2月2日。AMS 学科分类：35P15, 49R05, 58C40 作者获得 Fonds de la Recherche Scientifique (F.R.S.-FNRS) 的 FNRS EoS O.0033.22F 项目资助。

1. 引言

1.1. 主要结果理解拉普拉斯算子谱与底层区域几何之间的关系，是几何分析中一个具有悠久而丰硕历史的基本问题。本文研究一种近年来备受关注的谱不变量，即所谓的基本间隙。

也就是说，设 X 为一个完备黎曼流形，$\Omega \subseteq X$ 为一个连通、开且有界的区域，而 V为 Ω 上的一个势。那么，基本间隙 $\Gamma(\Omega; V)$ 是算子 $-\Delta + V$ 的前两个狄利克雷特征值之差，即:

$$\Gamma(\Omega; V) := \lambda_2 - \lambda_1 > 0,$$

其中，$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots$ 是 $-\Delta+V$ 在 Ω 上满足狄利克雷边界条件的特征值。如果势为常数，我们简单记作 $\Gamma(\Omega)$。

在他们关于基本谱隙猜想解答的杰出论文 [AC11] 中，Andrews–Clutterbuck 证明，对于每个有界的凸区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 以及 Ω 上的每个凸势 V，都有

$$\frac{3\pi^2}{\operatorname{diam}(\Omega)^2} \leq \Gamma(\Omega) \leq \Gamma(\Omega; V).$$

关于这一主题的历史和早期研究，读者可参阅 [AC11] 的引言。

本文的主要结果表明，对于一般的凸域和凸势函数，基本谱隙猜想的第二部分在每个负曲率 Hadamard 流形中都是错误的。

定理 1. 设 X 是一个截面曲率为负的 *Hadamard* 流形。那么，对任意 $D > 0$，存在一个凸区域$\Omega \subseteq X$ 以及定义在Ω上的凸势 V，使得直径$(\Omega) = D$ 且 $\Gamma(\Omega; V) < \Gamma(\Omega)$。

作者与 Clutterbuck–Nguyen [CJN25] 最近在双曲空间的情形下证明了这一点。然而，一般情形远比双曲情形困难。原因如下：由于 $\mathbb{H}^n$具有很大的对称群，可以选择允许采用变量分离假设的凸域 $\Omega \subseteq \mathbb{H}^n$。因此，这些区域上的狄利克雷特征值问题可化为一个常微分方程特征值问题。相比之下，由于缺乏对称性，在一般的负曲率 Hadamard 流形中，不可能直接将问题化为常微分方程，因此只能研究真正的偏微分方程。尽管如此，我们仍以 [CJN25]中发展的思路为基础。

在 Andrews–Clutterbuck 解决 $\mathbb{R}^n$ 基本谱隙猜想之后，人们对基本谱隙猜想的第一部分给予了极大关注，即在不同于 $\mathbb{R}^n$的流形中，$\Gamma(\Omega)$ 或 $\Gamma(\Omega; V)$ 是否可以用直径从下方界定。具体而言，Dai、He、Seto、Wang 和 Wei（在各种子集上） [SWW19], [DSW21], [HWZ20]证明了，对于凸子集 Ω，具有相同的下界$\Gamma(\Omega; V) \geq \frac{3\pi^2}{\text{直径}(\Omega)^2}$（不过，~~对于非常数势~~，需要比凸性更强的条件—— [CWY25，公式（1.4）]）。另一方面，

Bourni–Clutterbuck–Nguyen–Stancu–Wei–Wheeler [BCN+22] 证明了，基本谱隙猜想的第一部分在 $\mathbb{H}^n$中以一种非常强的意义失效。具体而言，他们证明了，对于所有 $n \geq 2$ 和 D, $\varepsilon > 0$ 都存在一个直径为 D 的凸域 $\Omega \subseteq \mathbb{H}^n$，使得 $\Gamma(\Omega) < \frac{\varepsilon}{D^2}$。随后，Khan–Nguyen [KN24]将这一结果推广到了所有负曲率 Hadamard 流形。然而，对于视界凸域 Ω，我们仍有 $\Gamma(\Omega) \geq c(n, D) > 0$，这一点由 Khan–Saha–Tuerkoen [KST25] 和 Khan–Tuerkoen [KT24] 证明（Wei–Xiao [WX25]最近还为小直径视界凸域给出了另一种证明）。

相比之下，对于不同于 $\mathbb{R}^n$ 的流形，基本谱隙猜想的第二部分几乎未受关注，也就是说，在所有凸势函数中，$\Gamma(\Omega; V)$ 是否由常数势取到极小值。事实上，除图情形中的一些工作 [AAHK24]，外，最近的 [CJN25] 是 [AC11] 之后首篇探讨这一问题的研究。据作者所知，本文因此是继 [AC11]，之后第二篇探讨此问题的研究，而且涉及的流形类别远比 [CJN25] 广泛。

在证明基本谱隙猜想第一部分在双曲空间中不成立（见 [BCN+22]）或在一般的负曲率 Hadamard 流形中不成立（见 [KN24]）时，关键在于找到区域 Ω，使得 $-\Delta$ 的第一特征函数在这些区域所谓的颈部区域内非常小。然而，这远不及第二部分不成立所要求的条件（见下文 (1.1)）。

1.2. **策略**。从根本上说，我们采用与 [CJN25] 中相同的变分策略。具体而言，我们将构造一个凸域 $\Omega \subseteq X$，并在 Ω 上构造一个凸势 P，使得

$$\int_\Omega P(u_2^2 - u_1^2)\, d\mathrm{vol} < 0, \tag{1.1}$$

其中，u_k ($k = 1, 2$) 是拉普拉斯算子 $-\Delta$ 在 Ω 上满足狄利克雷边界条件的第 k 个特征函数。也就是说，若 (1.1) 成立，则当 $r > 0$ 足够小时，势 $V_r = rP$ 的基本间隙严格小于常势的基本间隙。事实上，根据 Hellmann–Feynman 恒等式，导数 $\frac{d}{dr}\Gamma(\Omega; V_r)\big|_{r=0}$ 恰好等于 (1.1) 中的积分（由于[Ka95，第 3.9 定理（第 392] 页），可以应用 Hellmann–Feynman 恒等式）。我们指出，对于所选的区域，第一和第二特征值最终将是单重的（见 (5.1)）。

尽管在一般的负曲率 Hadamard 流形上，$-\Delta$ 的特征值问题不能直接化为常微分方程，本文的主要见解是，对于恰当选取的区域，$-\Delta$ 的特征函数仍可通过变量分离假设得到良好近似。

实现这一点的基本思路大致如下：我们选取一列区域 $\Omega_\varepsilon \subseteq X$，使其随着 $\varepsilon \to 0$ 的变化，越来越集中于一条固定的测地线 γ_o 周围。这样，我们便可以在 Ω_ε 中用一个椭圆算子 Δ。近似 Δ；在恰当选取的局部坐标系中，该算子的系数仅取决于参数 t，而该参数用于标记测地线 γ_o。随后，我们为 $-\Delta$。定义一个模型常微分方程，并证明 (1) 经过适当的重新缩放后，模型常微分方程是艾里方程的一个小扰动，因此其特征函数也可以用艾里方程的特征函数很好地近似，并且

(2) $\Delta_\circ$的特征函数可以通过对模型常微分方程的特征函数采用变量分离假设，在存在小误差的情况下得到。
正确利用 X 具有负曲率这一假设后（见引理 4.1），通过改编 [CJN25]中的论证即可得到 (1)。另一方面，(2) 需要新的思路，相关概要请参阅命题 4.5 后的评述。利用艾里方程特征函数的性质，我们将能够验证，对于沿着 γ_o严格递增的任意势 P，(1.1) 均成立。

1.3. **文章结构**。本文结构如下。第 2 节将正式引入所需的对象。具体而言，我们将在第 2.1节定义本文所讨论的凸域和凸势函数，而第 2.2 节将介绍算子$\sim$ $\sim\Delta$， $\Delta_\circ$、它们相应的重新缩放 Δ， $\Delta_\circ$以及相关函数空间。第 3 节将汇集微扰理论（第 3.1 节）和艾里方程（第 3.2 节）所需的背景知识。本文的核心内容在第 4 节。具体而言，在第 4.1 节引入所需对象之后，我们将在第 4.2 节介绍并分析模型常微分方程，随后在第 4.3 节说明， $\Delta_\circ$的特征函数$\widetilde{\ }$在误差较小的意义下，可由模型常微分方程的特征函数$\widetilde{\ }$通过变量分离假设得到。第 5.1 节解释为何 Δ 的特征函数$\widetilde{\ }$可由 $\Delta_\circ$的特征函数很好地近似。最后，我们将在第 5.2 节给出定理 1 的证明。

2. 准备工作

2.1. **区域与势**。 设 X 为一个具有负截面曲率的 Hadamard 流形。固定一个基点 $o \in X$ 和一个余维一线性子空间 $H \subseteq T_oX$，并考虑子流形 $\Sigma := \exp_o(H) \subseteq X$。那么

$$\text{the second fundamental form of } \Sigma \text{ vanishes at } o. \tag{2.1}$$

最后，我们也固定沿着 Σ的一个单位法向量场 ν。

定义 2.1 （区域）。 对于所有 $t_0 > 0$、 $\tau_0 \geq 0$和 $\varepsilon > 0$，我们定义

$$\Omega := \Omega(\varepsilon; -\tau_0, t_0) := \Big\{ \exp_p(t\nu_p) \in X \,\Big|\, p \in B_\varepsilon^\Sigma(o) \text{ and } t \in (-\tau_0, t_0) \Big\},$$

其中 $B_\varepsilon^\Sigma(o)$ 表示 Σ中以 o 为中心、半径为 ε 的球。

下一个引理表明，在适当的选择下，这些区域是凸的。

引理 2.2。 对于所有 $t_0 > 0$ 和 $\tau_0 > 0$，都存在 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(t_0, \tau_0) > 0$，使得区域$\Omega(\varepsilon; -\tau_0, t_0)$ 对所有 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ 都是凸的。

如果 $\Sigma \subseteq X$ 在每一点都是全测地的，那么对于所有 $\varepsilon > 0$ 和 $t_0 > 0$，$\Omega(\varepsilon; 0, t_0)$ 都是凸的，因为 $\sec(X) < 0$。

以下技术性说明对于定理 1 的证明至关重要。

注 2.3 （局部一致常数）。 引理 2.2 中的常数 ε_0 可以选取为关于 $t_0 > 0$ 和 $\tau_0 > 0$局部一致；也就是说，对于所有 $0 < t_- \leq t_+ < \infty$ 和 $0 < \tau_- \leq \tau_+ < \infty$，都存在 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(t_-, t_+, \tau_-, \tau_+) > 0$，使得引理 2.2 的结论对

所有 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$，以及所有 $t_0 \in [t_-, t_+]$ 和 $\tau_0 \in [\tau_-, \tau_+]$ 都成立。事实上，本文中的所有常数都具有这一性质。这一点从证明中显而易见。

证明。 $\Omega(\varepsilon; -\tau_0, t_0)$ 的边界分解为以下三个部分

$$\partial\Omega(\varepsilon; -\tau_0, t_0) = \Sigma^{\varepsilon}_{t_0} \cup Z_\varepsilon \cup \Sigma^{\varepsilon}_{-\tau_0},$$

其中 $\Sigma^{\varepsilon}_{t_0}$ 和 $\Sigma^{\varepsilon}_{-\tau_0}$ 分别是边界的顶部和底部，即

$$\Sigma^{\varepsilon}_{t_0} := \left\{\exp_p(t_0\nu_p) \in X \,|\, p \in B^{\Sigma}_{\varepsilon}(o)\right\} \quad \text{resp.} \quad \Sigma^{\varepsilon}_{-\tau_0} := \left\{\exp_p(-\tau_0\nu_p) \in X \,|\, p \in B^{\Sigma}_{\varepsilon}(o)\right\},$$

Z_ε 是边界的圆柱部分，其定义为

$$Z_\varepsilon := \left\{\exp_p(t\nu_p) \in X \,|\, p \in \partial B^{\Sigma}_{\varepsilon}(o) \text{ and } t \in (-\tau_0, t_0)\right\}.$$

由于 Z_ε 与 $\Sigma^{\varepsilon}_{t_0}$ 和 $\Sigma^{\varepsilon}_{-\tau_0}$ 正交相交，只需证明对于边界的每个部分，相对于指向外侧的单位法向量，其形状算子均为正。

显然，当 $\varepsilon > 0$ 足够小时（取决于 t_0 和 τ_0），Z_ε 相对于指向外侧的单位法向量的形状算子为正。

剩下只需检验对 $\Sigma^{\varepsilon}_{t_0}$ 同样成立（对 $\Sigma^{\varepsilon}_{-\tau_0}$ 的论证类似，此处不再赘述）。对于所有 $t \in \mathbb{R}$，我们记

$$\Sigma_t := \left\{\exp_p(t\nu_p) \in X \,|\, p \in B^{\Sigma}_{\varepsilon}(o)\right\}$$

为到 Σ的有符号距离为 t 的余维一子流形。此外，对于所有 $t \neq 0$，记 H_t 为 Σ_t 相对于指向外侧的单位法向量∇d的形状算子（$\cdot$，Σ）。考虑测地线 $\gamma_o(t) := \exp_o(t\nu_o)$，其中 $o \in \Sigma$ 是固定的基点。由 (2.1) 可知，$\lim_{t\to 0}\mathrm{H}_t|_{\gamma_o(t)} = 0$。由 Riccati 比较可得，对所有 $t > 0$，$\mathrm{H}_t|_{\gamma_o(t)}$均为正定。特别地，$\mathrm{H}_{t_0}|_{\gamma_o(t_0)}$ 为正定。因此，由连续性可知，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时（取决于 t_0），H_{t_0} 在 $\Sigma^{\varepsilon}_{t_0}$ 上为正定。证明完毕。□

为了定义 $\Omega(\varepsilon; -\tau_0, t_0)$ 上的凸势 P，我们再固定一个 $t_P \in (t_0/4, t_0/2)$。

D定义 2.4（势）。对于所有 $t_0 > 0$、$\tau_0 \geq 0$、$\varepsilon > 0$ 和 $t_P \in (t_0/4, t_0/2)$，定义

$$P : \Omega(\varepsilon; -\tau_0, t_0) \to \mathbb{R},\ \exp_p(t\nu_p) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{if } -\tau_0 \leq t \leq t_P \\ (t - t_P)^3 & \text{if } t_P \leq t \leq t_0 \end{cases}.$$

P 的精确公式并不重要。关键性质是，$P(\exp_p(t\nu_p))$ 仅取决于 t。为了证明 P 在 Ω 上是凸的，我们只需要 $t \mapsto P(t)$ 对于 $t \leq t_P$、$P' \geq 0$ 和 $P'' \geq 0$ 是 C^2、$P = 0$。之后，我们只需要 $t \mapsto P(t)$ 是 C^2，且 $P'(t_0) > 0$（见推论 5.4）。因此，P 的选择有很大的自由度。

引理2.5。对于所有 $t_0 > 0$，存在 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(t_0) > 0$，使得势 P 在 $\Omega(\varepsilon; -\tau_0, t_0)$ 上为凸函数，对所有 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$。

证明。为简化记号，我们将 $\Omega := \Omega(\varepsilon; -\tau_0, t_0)$ 简记为 Ω。我们沿用引理 2.2 证明中的记号Σ_t 和 H_t。此外，我们用 ∂_t 表示 Σ_t上的单位法向量场，即，

$$\partial_t|_{\exp_p(t\nu_p)} := \left.\frac{d}{d\tau}\exp_p(\tau\nu_p)\right|_{\tau=t}.$$

利用 P 是 C^2 且仅依赖于 t这一点，经过简单计算可得，对所有$v, w \in T\Sigma_t$，均有

$$(\nabla^2 P)(\partial_t, \partial_t) = \partial_{tt}^2(P), \quad (\nabla^2 P)(\partial_t, v) = 0, \quad \text{and} \quad (\nabla^2 P)(v, w) = \langle \mathcal{H}_t(v), w\rangle \partial_t(P).$$

根据构造，对于所有 $t \in [-\tau_0, t_0]$，我们有 $P''(t) \geq 0$和 $P'(t) \geq 0$；对于所有$t \in [-\tau_0, t_P]$，我们有 $P(t) = 0$。此外，由引理 2.2 的证明可知，对于所有 $t \in [t_0/4,\ t_0]$ 以及足够小的 $\varepsilon > 0$ （取决于 t_0），H_t在 $\Sigma_t \cap \Omega$ 上正定。因此，对于所有足够小的 $\varepsilon > 0$，$\nabla^2 P \geq 0$ 在 Ω 中。证明完毕。□

稍后，我们将先固定 $t_0 > 0$，再选择一个适当的 $\tau_0 > 0$ （取决于 t_0），并且只考虑足够小的 $\varepsilon > 0$，使得可以应用引理 2.2 和引理2.5。

2.2. 微分算子及其函数空间。我们继续使用第2.1节中的相同记号，即， $H \subseteq T_o X$ 是一个余维一的固定线性子空间，$\Sigma := \exp_o(H)$，并且 ν 是沿着 Σ的单位法向量场。

记 $\psi_\Sigma : H \to \Sigma$ 为 $\exp_o$ 在 H 上的限制，并固定一个等同 $\mathbb{R}^{n-1} \cong H$。我们定义

$$\Psi : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R},\ (s,t) \longmapsto \exp_{\psi_\Sigma(s)}\left(t\nu_{\psi_\Sigma(s)}\right).$$

于是， Ψ 是 $(0,0)$ 附近的局部微分同胚。更确切地说，对所有 $t_0, \tau_0 > 0$，存在 $\epsilon_0 > 0$，使得 Ψ 在 $B_{\epsilon_0}(0) \times (-\tau_0, t_0)$ 上的限制是到其像上的微分同胚。因此，对所有足够小的 $\varepsilon > 0$，Ψ 是从 $B_\varepsilon(0) \times (-\tau_0, t_0)$ 到 $\Omega(\varepsilon;\ -\tau_0, t_0)$ 的微分同胚。把 Ψ 用作稍大区域上的坐标图会比较方便，例如对某个 $\epsilon_0 > 2\varepsilon$，用于 $B_{\epsilon_0}(0) \times (-\tau_0 - 1, t_0 + 1) \cong \Omega(\epsilon_0;\ -\tau_0 - 1, t_0 + 1)$。

注意，在坐标图 Ψ中， X 的度量 g 具有如下形式

$$g = dt^2 + g_{ij}(s,t)ds^i ds^j + g_{ti}(s,t)dtds^i, \tag{2.2}$$

根据（2.1），对于所有 $t \in (-\tau_0,\ t_0)$，都有 $g_{ti}(0,\ t) = 0$。

我们将 $g_\circ$ 定义为在 X 上的黎曼度量，它由处处取 $s = 0$的值从 g 得到，即

$$g_\circ := dt^2 + g_{ij}(0,t)ds^i ds^j. \tag{2.3}$$

我们用 Δ 表示 g的拉普拉斯算子，用 $\Delta_\circ$表示 X上的 $g_\circ$ 的拉普拉斯算子。在局部坐标下，它们分别为

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\partial_t\left(\sqrt{|g|}\partial_t\right) + \partial_{s_i}\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_{s_j}\right) + \partial_t\left(\sqrt{|g|}g^{ti}\partial_{s_i}\right) + \partial_{s_i}\left(\sqrt{|g|}g^{ti}\partial_t\right)\right), \tag{2.4}$$

同样地，由于（$g_\circ$）$_{ij}$ 仅取决于 t,

$$\Delta_\circ = \frac{1}{\sqrt{|g_\circ|}}\partial_t\left(\sqrt{|g_\circ|}\partial_t\right) + \partial_{s_i}\left(g_\circ^{ij}\partial_{s_j}\right). \tag{2.5}$$

为简化记号，我们将简写为

$$\mathrm{jac}(s,t) := \sqrt{|g|}(s,t) \quad \text{and} \quad \mathrm{jac}_\circ(t) := \sqrt{|g_\circ|}(t). \tag{2.6}$$

大多数时候，我们不会直接使用由 Ψ 给出的坐标 $(t,\ s)$ 进行计算，而是会采用变量替换

$$x := \delta^{-1/3}(t_0 - t) \quad \text{and} \quad y := \frac{s}{\varepsilon}, \tag{2.7}$$

其中，$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 是一个适当选取的常数，满足 $\delta \to 0$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时成立（此刻无需关心 δ 的精确定义）。

类似地，我们不直接研究 Δ 和 $\Delta_\circ$，而是考察重新缩放后的算子

$$\widetilde{\Delta} := \delta^{2/3}\Delta \quad \text{and} \quad \widetilde{\Delta}_\circ := \delta^{2/3}\Delta_\circ. \tag{2.8}$$

$\sim$ $\sim$我们将 Δ 和 Δ_0 视为定义在该区域上的椭圆偏微分算子

$$\widetilde{\Omega} := \big(0, \delta^{-1/3}(t_0 + \tau_0)\big) \times B_1(0) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \tag{2.9}$$

它对应于坐标图 Ψ 下的 Ω，以及变量替换 (2.7)。那么，$\widetilde{\Delta}$ 和 $\widetilde{\Delta}_\circ$ 分别是加权 L^2-空间上的无界自伴算子

$$\tilde{L}^2(\widetilde{\Omega}) := \Big(L^2(\widetilde{\Omega}), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\tilde{L}^2(\widetilde{\Omega})}\Big) \quad \text{resp.} \quad \tilde{L}^2_\circ(\widetilde{\Omega}) := \Big(L^2(\widetilde{\Omega}), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\tilde{L}^2_\circ(\widetilde{\Omega})}\Big),$$

其中，$\cdot,\cdot_{\tilde{L}^2(\sim\Omega)}$ 和 $\cdot,\cdot_{\tilde{L}^2_\circ(\sim\Omega)}$ 分别是由下式给出的加权 L^2-内积

$$\langle w_1, w_2\rangle_{\tilde{L}^2(\widetilde{\Omega})} := \int_{\widetilde{\Omega}} \frac{\mathrm{jac}(\varepsilon y, t_0 - \delta^{1/3}x)}{\mathrm{jac}_\circ(t_0)} w_1(x,y) w_2(x,y)\, dxdy \tag{2.10}$$

分别

$$\langle w_1, w_2\rangle_{\tilde{L}^2_\circ(\widetilde{\Omega})} := \int_{\widetilde{\Omega}} \frac{\mathrm{jac}_\circ(t_0 - \delta^{1/3}x)}{\mathrm{jac}_\circ(t_0)} w_1(x,y) w_2(x,y)\, dxdy. \tag{2.11}$$

由下述注记可知，在区域 $H^2(\sim\Omega) \cap H^1_0(\sim\Omega) \subseteq L^2(\sim\Omega)$ 上，算子 Δ 和 $\Delta_\circ$ 无界且自伴。

注记 2.6（边界上的 H^2-估计）。尽管 $\sim\Omega$ 的边界并不光滑，对于 $\sim\Omega$ 上任意一个散度形式且系数为 Lipschitz 系数的椭圆算子，我们仍可得到直至边界的 H^2-估计。

事实上，利用沿着 $\sim\Omega$ 的底面和顶面 $\{0\}\times\bar{B}_1(0)$ 以及 $\{\delta^{-1/3}(t_0+\tau_0)\}\times\bar{B}_1(0)$ 进行的标准奇反射构造，$\mathrm{L}u = f$ 的任意解 $u \in H^1_0(\sim\Omega)$ 都可延拓为定义在区域 $\frown\Omega = (-\delta^{-1/3}(t_0+\tau_0)\ 2\delta^{-1/3}(t_0+\tau_0)) \times B_1(0)$ 上的 $\frown\mathrm{L}u = \hat{}f$ 的解 $\hat{}u \in H^1_0(\frown\Omega)$。因此，$\sim\Omega$ 边界上的 H^2-扰动估计可由 $\frown\Omega$ 内部的 H^2-扰动估计推出。

3. 预备知识

3.1. 扰动估计。 本小节汇总了本文其余部分将要使用的基本扰动估计。

第一个结果使我们能够猜测特征值和特征向量。在其表述中，V 是一个实可分希尔伯特空间，L 是 V 上一个具有紧预解式的无界自伴算子，而 $(v_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq$V 是 L 的完备正交归一特征向量基，其特征值为 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$。

引理 3.1 (猜测特征对象)。 假设 $v^{\mathrm{Guess}} \in$ 定义域$(\mathcal{L})$，并且 $\lambda^{\mathrm{Guess}} \in \mathbb{R}$ 和 满足

$$\left\|(\mathcal{L} - \lambda^{\mathrm{Guess}})v^{\mathrm{Guess}}\right\| \le \varepsilon_{\mathrm{Guess}} \quad and \quad \left\|v^{\mathrm{Guess}}\right\| = 1$$

对于某个 $\varepsilon_{\mathrm{Guess}} \ge 0$。那么，存在 $j \in \mathbb{N}$ 使得

$$\left|\lambda_j - \lambda^{\mathrm{Guess}}\right| \le \varepsilon_{\mathrm{Guess}}. \tag{3.1}$$

此外，如果由 (*3.1*) 给出的 $\mathcal{L}$ 的第 j 个特征值 λ_j 是单的，那么在将v_j 的符号进行适当调整后，有

$$\left\|v_j - v^{\mathrm{Guess}}\right\| \le \frac{C\varepsilon_{\mathrm{Guess}}}{\Gamma_j}, \tag{3.2}$$

其中 $\Gamma_j := \min\{\lambda_{j+1} - \lambda_j, \lambda_j - \lambda_{j-1}\} > 0$，且 $C > 0$ 是一个普适常数。

这是谱定理的直接推论。

证明。 如果 $R > 0$ 满足对所有 $j \in \mathbb{N}$ 都有 $|\lambda_j - \lambda^{\mathrm{Guess}}| \ge R$，那么由谱分解可知，对于所有 $v \in \in$L 的定义域 Dom(L)，都有 $\|(\mathrm{L} - \lambda^{\mathrm{Guess}})v\| \ge R\|v\|$。由此，（ 3.1 ）立即成立。

剩下要证明 (3.2)。如果 $\varepsilon_{\mathrm{Guess}} \ge \frac{1}{2}\Gamma_j$，那么根据三角不等式，(3.2) 显然成立。因此，从现在起我们可以假设 $\varepsilon_{\mathrm{Guess}} \le \frac{1}{2}\Gamma_j$。

将 $v^{\mathrm{Guess}} = \beta v_j + w \in \mathrm{span}\{v_j\} + \mathrm{span}\{v_j\}^\perp$ 分解。适当改变 v_j 的符号后，不失一般性地假设 $\beta \ge 0$。于是 $\|v^{\mathrm{Guess}} - v_j\| \le \sqrt{2}\|w\|$，因此只需对 $\|w\|$ 进行估计。

注意到，由 (3.1) 和 $\varepsilon_{\mathrm{Guess}} \le \frac{1}{2}\Gamma_j$ 可知，对于所有 $j' \in \mathbb{N} \setminus \{j\}$，都有 $|\lambda_{j'} - \lambda^{\mathrm{Guess}}| \ge \frac{1}{2}\Gamma_j$。因此，由谱分解以及 $w \in \mathrm{span}\{v_j\}^\perp$ 可得 $\frac{1}{2}\Gamma_j\|w\| \le \|(\mathrm{L} - \lambda^{\mathrm{Guess}})w\|$。最后，由 (3.1) 和可估计 $\|(\mathrm{L} - \lambda^{\mathrm{Guess}})w\| \le 2\varepsilon_{\mathrm{Guess}}$。

$$\begin{aligned}(\mathcal{L} - \lambda^{\mathrm{Guess}})w &= (\mathcal{L} - \lambda_j)w + (\lambda_j - \lambda^{\mathrm{Guess}})w = (\mathcal{L} - \lambda_j)v^{\mathrm{Guess}} + (\lambda_j - \lambda^{\mathrm{Guess}})w \\ &= (\mathcal{L} - \lambda^{\mathrm{Guess}})v^{\mathrm{Guess}} + (\lambda^{\mathrm{Guess}} - \lambda_j)(v^{\mathrm{Guess}} - w).\end{aligned}$$

由此得到 (3.2)，从而完成证明。 □

第二个扰动估计比较了两个相对于不同内积自伴的无界算子的特征值和特征向量。具体而言，设 $\mathrm{V}_\circ = (V, \cdot, \cdot)_\circ$ 和 $\mathrm{V} = (V, \cdot, \cdot)$ 是定义在同一底层向量空间 V 上的两种实可分希尔伯特空间结构。我们假设 $\cdot, \cdot_\circ$ 和 $\cdot, \cdot$ 在以下意义下几乎等价：存在 $\varepsilon_{\mathrm{comp}} \in [0, 1/2]$，使得对所有 $w_1, w_2 \in V$，都有

$$\left|\langle w_1, w_2\rangle_\circ - \langle w_1, w_2\rangle\right| \le \varepsilon_{\mathrm{comp}}\|w_1\|_\circ\|w_2\|_\circ \tag{3.3}$$

并且，将上界中的 $\|\cdot\|_\circ$ 替换为 $\|\cdot\|$，也有类似的界。

此外，设 $\mathrm{L}_\circ$（分别为 L）是 $\mathrm{V}_\circ$（分别为 V）上的非负无界自伴算子，且具有紧预解式；并设 $(v_i^\circ)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{V}_\circ$（分别为 $(v_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{V}$）是 $\mathrm{L}_\circ$（分别为 L）的一组完备正交特征向量基，对应的特征值为 $\lambda_1^\circ \le \lambda_2^\circ \le \ldots$（分别为 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$）。

我们还假设，对于所有 $i \in \mathbb{N}$， $v_i^\circ \in \mathrm{Dom}(\mathrm{L})$ 且 $v_i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{L}_\circ)$。最后，对于所有 $k \in \mathbb{N}$，我们简记

$$S_k^\circ := \mathrm{span}\{v_1^\circ, \dots, v_k^\circ\} \quad \text{and} \quad S_k := \mathrm{span}\{v_1, \dots, v_k\}.$$

有了这些记号，我们现在可以陈述第二个扰动估计。这与 [CJN25,引理 3.1], 类似，但针对我们的目的作了调整。

引理 3.2。 设 $\mathcal{V}_\circ$、$\mathcal{V}$、$\mathcal{L}_\circ$、$\mathcal{L}$ 以及 $\varepsilon_{\mathrm{comp}}$ 如上所述。那么，对所有 $k \in \mathbb{N}$，我们有

$$-3\varepsilon_{\mathrm{comp}}\lambda_k - \max_{v\in S_k} \frac{|\langle(\mathcal{L}_\circ - \mathcal{L})v, v\rangle_\circ|}{\|v\|_\circ^2} \le \lambda_k - \lambda_k^\circ \le 3\varepsilon_{\mathrm{comp}}\lambda_k^\circ + \max_{v\in S_k^\circ} \frac{|\langle(\mathcal{L}_\circ - \mathcal{L})v, v\rangle|}{\|v\|^2}. \tag{3.4}$$

此外，如果$\mathcal{L}_\circ$ 的第 k 个特征值 λ_k° 是单重的，那么，在必要时将 v_k° 改变符号后，我们有

$$\|v_k - v_k^\circ\|_\circ^2 \le \frac{C}{\Gamma_k^\circ}\left(\varepsilon_{\mathrm{comp}}\lambda_k^\circ + \max_{v\in S_k^\circ} \frac{|\langle(\mathcal{L}_\circ - \mathcal{L})v, v\rangle|}{\|v\|^2} + \max_{v\in S_k} \frac{|\langle(\mathcal{L}_\circ - \mathcal{L})v, v\rangle_\circ|}{\|v\|_\circ^2}\right), \tag{3.5}$$

其中 $\Gamma_k^\circ :=$最小值 $\{\lambda_{k+1}^\circ - \lambda_k^\circ、\ \lambda_k^\circ - \lambda_{k-1}^\circ\} > 0$，且 C 是一个普适常数。

由于范数 $\|\cdot\|_\circ$ 和 $\|\cdot\|$ 根据 (3.3) 一致等价，我们可以在 (3.5) 中用 $\|v_k - v_k^\circ\|^2$ 替换$\|v_k - v_k^\circ\|_\circ^2$。

证明。 我们将 $E := \mathrm{L}$ –$\mathrm{L}_\circ$简记为。于是，由极小极大原理可得

$$\lambda_k \le \max_{v\in S_k^\circ} \frac{\langle \mathcal{L}v, v\rangle}{\|v\|^2} \le \max_{v\in S_k^\circ} \frac{\langle \mathcal{L}_\circ v, v\rangle}{\|v\|^2} + \max_{v\in S_k^\circ} \frac{\langle Ev, v\rangle}{\|v\|^2}.$$

此外，利用 (3.3) 可估计得

$$\langle \mathcal{L}_\circ v, v\rangle \le \langle \mathcal{L}_\circ v, v\rangle_\circ + \varepsilon_{\mathrm{comp}}\|\mathcal{L}_\circ v\|_\circ \|v\|_\circ.$$

对于所有 $v \in S_k^\circ$，由于 $\mathrm{L}_\circ$ 非负，我们有 $\|\mathrm{L}_\circ v\|_\circ \le \lambda_k^\circ \|v\|_\circ$。注意，由 (3.3) 可得 $\|v\|_\circ^2 \le (1+\varepsilon_{\mathrm{comp}})\|v\|^2 \le 2\|v\|^2$。结合这些估计，我们推出

$$\begin{aligned}\lambda_k \le& (1+\varepsilon_{\mathrm{comp}}) \max_{v\in S_k^\circ} \frac{\langle \mathcal{L}_\circ v, v\rangle_\circ}{\|v\|_\circ^2} + 2\varepsilon_{\mathrm{comp}}\lambda_k^\circ + \max_{v\in S_k^\circ} \frac{\langle Ev, v\rangle}{\|v\|^2} \\ =& (1+\varepsilon_{\mathrm{comp}})\lambda_k^\circ + 2\varepsilon_{\mathrm{comp}}\lambda_k^\circ + \max_{v\in S_k^\circ} \frac{\langle Ev, v\rangle}{\|v\|^2},\end{aligned}$$

由此可直接得到 (3.4) 中的上界。交换 $\mathrm{L}_\circ$ 与 L 的角色也可得到下界，从而证明 (3.4)。

剩下只需证明 (3.5)。将 $v_k = \beta v_k^\circ + w^\circ \in \mathrm{span}\{v_k^\circ\} + \mathrm{span}\{v_k^\circ\}^\perp$分解。适当改变 v_k° 的符号后，不妨设 $\beta \ge 0$。于是 $\|v_k - v_k^\circ\|_\circ \le \sqrt{2}\|w^\circ\|_\circ$，因此只需对 $\|w^\circ\|_\circ$给出上界。

注意 $(\mathrm{L}_\circ - \lambda_k^\circ)w^\circ = (\mathrm{L}_\circ - \lambda_k^\circ)v_k$、$(\mathrm{L}_\circ - \lambda_k^\circ)w^\circ \perp v_k^\circ$ 和 $\mathrm{L}_\circ v_k = \mathrm{L}v_k - Ev_k = \lambda_k v_k - Ev_k$。因此

$$\langle(\mathcal{L}_\circ - \lambda_k^\circ)w^\circ, w^\circ\rangle_\circ = \langle(\mathcal{L}_\circ - \lambda_k^\circ)v_k, v_k\rangle_\circ = (\lambda_k - \lambda_k^\circ)\|v_k\|_\circ^2 - \langle Ev_k, v_k\rangle_\circ$$

然而，由于 $\mathrm{L}_\circ - \lambda_k^\circ$ 在 $\mathrm{span}\{v_k^\circ\}^\perp$ 上的限制具有谱隙 Γ_k，因此 $(\mathrm{L}_\circ - \lambda_k^\circ)w^\circ$，$w^\circ$。。牢记 $\|\cdot\|_\circ^2 \le 2\|\cdot\|^2$，即可由 (3.4) 得出 (3.5)。□

3.2. **艾里方程**。本小节用于介绍记号并汇集艾里方程的一些性质。更多细节请参见 [CJN25，第 2 节。2]

该艾里方程 为

$$y''(x) = xy(x).$$

艾里函数 Ai 和 Bi 是艾里方程的两个不同且线性无关的解。二者对所有 $x \in \mathbb{R}$ 均有定义，对 $x < 0$ 均呈振荡，而当 $x > 0$ 时，Ai 指数衰减，Bi 指数增长（例如参见 [BO99，第 69 页图 3.1，以及第 100] 页的 (3.5.17a)、(3.5.17b)）。我们用

$$\cdots < -a_3 < -a_2 < -a_1 < 0$$

表示 Ai 的零点。

若 $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ 是艾里特征值问题的一个非零解

$$y''(x) = (x - \alpha)y(x)$$

且满足 $y(0) = 0$ 和 $y \in L^2(0, \infty)$，则 $\mathrm{Ai}(-\alpha) = 0$，即 $\alpha = a_k$ 对某个 $k \in \mathbb{N}$成立。因此，对于所有 $k \in \mathbb{N}$，函数

$$v_k(x) := \frac{\mathrm{Ai}(x - a_k)}{\|\mathrm{Ai}(\cdot - a_k)\|_{L^2(0,\infty)}} \tag{3.6}$$

是第 L^2归一化的艾里方程在 $[0, \infty)$ 上满足狄里克雷边界

条件且特征值为 a_k 的第 个特征函数。

下式将作为积分的渐近模型（取负号）：

(1.1）（见推论 5.4）。

引理 3.3（模型积分）。我们有

$$\int_0^\infty x \left(v_2^2(x) - v_1^2(x) \right) dx = \frac{2}{3}(a_2 - a_1) > 0,$$

其中， v_1、 v_2 在（*3.6*）中定义，而 $0 > -a_1 > -a_2 > \ldots$ 是<「*style id='4'*>艾里函数的零点。

这在 [CJN25 的引理 2.2]中得到了证明，证明使用了简单的缩放论证以及 Hellmann–Feynman 恒等式。

~4. Δ。的特征函数

~本节旨在控制第 2.2 节中定义的算子 Δ。的特征函数。实现这一目标的大致策略如下：

~(1) 首先，我们为 Δ。引入一个模型常微分方程，并证明该模型常微分方程的特征函数是艾里方程特征函数的小扰动。~(2) 然后我们证明，在误差较小的意义下， Δ。的特征函数可以通过变量分离假设从模型常微分方程的特征函数得到。

具体陈述请参见命题 4.2 和命题 4.5。

为实施这一策略，我们首先在第 4.1 节介绍必要的记号和对象。接着，在第 4.2 节中实现 (1)。这可以通过自然推广 [CJN25, 第 3 节中的论证来实现，2]前提是正确利用 X 具有负曲率这一事实（见引理 4.1）。另一方面，证明 (2) 需要全新的论证。这将在第 4.3 节中完成。

~4.1. **准备工作**。我们回顾一下，(2.9) 中 Ω 表示区域

$$\widetilde{\Omega} = \big(0, \delta^{-1/3}(t_0+\tau_0)\big) \times B_1(0) \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1},$$

~ ~并且我们将 $\Delta_\circ$ 视为 Ω 上的二阶椭圆偏微分算子。由 $\Delta_\circ$ 的公式 (2.5) 和变量替换 ~的定义 (2.7) 可知， $\Delta_\circ$ 可表示为

$$\widetilde{\Delta}_\circ = \frac{\mathrm{jac}_\circ(t_0)}{\mathrm{jac}_\circ(t_0-\delta^{1/3}x)}\partial_x\left(\frac{\mathrm{jac}_\circ(t_0-\delta^{1/3}x)}{\mathrm{jac}_\circ(t_0)}\partial_x\right) + \delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\partial_{y_i}\Big(g_\circ^{ij}(t_0-\delta^{1/3}x)\partial_{y_j}\Big). \tag{4.1}$$

为简化记号，我们简记

$$G_\circ(t) := \big((g_\circ)_{ij}(t)\big)_{1\le i,j\le n-1} \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R}),$$

并直接写作

$$\widetilde{\Delta}_\circ = \frac{\mathrm{jac}_\circ(t_0)}{\mathrm{jac}_\circ}\partial_x\left(\frac{\mathrm{jac}_\circ}{\mathrm{jac}_\circ(t_0)}\partial_x\right) + \delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\,\mathrm{div}\left(G_\circ^{-1}\nabla\right),$$

其中 div 和 ∇ 分别表示 $\mathbb{R}^{n-1}$中的标准散度和梯度。有时我们写作 div_y 和 ∇_y，以强调它们仅作用于 y变量。

我们还要指出，$\mathrm{jac}_\circ$ 和 $g_\circ^{ij}$的定义区域略大于 ~Ω，例如，在 $(-1,\ \delta^{-1/3}(t_0+\tau_0)+1)\times B_2(0)$ 上。

由于对所有 $t\in[-\tau_0,t_0]$，$B_1(0)\subseteq\mathbb{R}^{n-1}$上满足狄利克雷边界条件的 $-\mathrm{div}(G_\circ^{-1}(t)\nabla)$ 的第一特征值 $\mu_1(t)$ 是单的，$\mu_1(\cdot)$ 是光滑的，并且存在一个光滑参数化

$$f_1^{(t)} \in H_0^1\big(B_1(0)\big) \subseteq L^2\big(B_1(0)\big) \quad \big(t\in[-\tau_0,t_0]\big)$$

第一 L^2-归一化狄利克雷特征函数，即，

$$-\mathrm{div}\left(G_\circ^{-1}(t)\nabla f_1^{(t)}\right) = \mu_1(t) f_1^{(t)} \quad \text{and} \quad \left\|f_1^{(t)}\right\|_{L^2(B_1(0))} = 1.$$

根据抽象微扰理论，$t\mapsto f_1^{(t)}$ 先验上仅是一个取值于 L^2 的光滑映射。然而，由索博列夫嵌入和椭圆正则性理论可容易推出，对于所有 $m\in\mathbb{N}$，它也是一个取值于 C^m 的光滑映射。

以下是 μ_1 的基本性质，它将使我们能够调整 [CJN25] 中的论证，以研究第 4.2 节中的模型常微分方程。其证明将以关键方式利用 X 具有负截面曲率这一事实。

引理 4.1 (μ_1的单调性)。对每个 $t\in(0,t_0]$，都有 $\mu_1'(t)<0$ 。

在给出引理 4.1 的证明之前，我们先定义所选常数。首先，固定 $t_0>0$。然后，我们只考虑满足以下条件的 $\tau_0>0$

$$\mu_1(-\tau_0) \ge \mu_1(t_0/4). \tag{4.2}$$

根据引理 4.1，$\tau_0>0$ 存在。此外，我们将 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 定义为

$$\delta := \frac{\varepsilon^2}{-\mu_1'(t_0)}. \tag{4.3}$$

注意，得益于引理 4.1，$\delta > 0$。

现在给出引理 4.1 的证明。

引理 *4.1* 的证明。Hellmann-Feynman恒等式指出，对所有 $t \in [-\tau_0, t_0\quad\quad\quad\quad]$，

$$\begin{aligned}\mu'(t) &= \left\langle f_1^{(t)}, \left(\frac{d}{dt}\operatorname{div}_y(G_\circ^{-1}(t)\nabla_y)\right) f_1^{(t)}\right\rangle_{L^2(B_1)} \\ &= \int_{B_1(0)} \left\langle \left(\frac{d}{dt}G_\circ^{-1}(t)\right)\nabla_y f_1^{(t)}, \nabla_y f_1^{(t)}\right\rangle_{\mathbb{R}^{n-1}} dy.\end{aligned}$$

对 $G_\circ G_\circ^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n-1}}$ 求导可得 $(G_\circ^{-1})' = -G_\circ^{-1}G_\circ' G_\circ^{-1}$。因此，注意到 $G_\circ^{-1}$ 是对称的，我们得到，对所有 $t \in [-\tau_0, t_0]$，

$$\mu_1'(t) = -\int_{B_1(0)} \left\langle G_\circ'(t)\left(G_\circ^{-1}(t)\nabla_y f_1^{(t)}\right), G_\circ^{-1}(t)\nabla_y f_1^{(t)}\right\rangle_{\mathbb{R}^{n-1}} dy. \tag{4.4}$$

回顾第2.1节以及引理 2.2 的证明中使用的记号，即，$\Sigma_t \subseteq X$ 是有符号距离为 t 、到 Σ 的余维一子流形，而 H_t 是 Σ_t 的形状算子。考虑从固定基点 $o \in \Sigma$ 出发的法向测地线 $\gamma_o(t) := \exp_o(t\nu_o)$。对于所有 $i = 1, \ldots, n-1$，记沿 γ_o 的雅可比场为 J_i，其初始条件为 $J_i(0) = \partial_{s_i}|_o$ 和 $J'(0) = 0$（见 (2.1)）。于是 $(g_\circ)_{ij} = \langle J_i, J_j\rangle$，因此

$$(g_\circ)_{ij}'(t) = \langle J_i'(t), J_j(t)\rangle + \langle J_i(t), J_j'(t)\rangle = \langle \mathcal{H}_t(J_i), J_j\rangle + \langle J_i, \mathcal{H}_t(J_j)\rangle = 2\langle \mathcal{H}_t(J_i), J_j\rangle.$$

注意，对于满足 $c(t) > 0$ （$t > 0$）的函数 $c(\cdot)$，有 $\mathrm{H}_t|_{\gamma_o(t)} \geq c(t)\mathrm{id}_{T\Sigma_t}$。事实上，这由 Riccati 比较、$\sec(X) < 0$以及根据 (2.1) 有 $\mathrm{H}_0|_o = 0$ 这一事实得出。因此，令 $J_\xi := \xi^i J_i$ 表示 $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$，我们对所有 $t \in (0, t_0]$得到：

$$\langle G_\circ'(t)\xi, \xi\rangle_{\mathbb{R}^{n-1}} = 2\left\langle \mathcal{H}_t\left(J_\xi\right), J_\xi\right\rangle_X \geq 2c(t)\left|J_\xi\right|_X^2.$$

此外，$|J_\xi|(t) \geq |J_\xi|(0) = |\xi|$ 可由雅可比场比较和 $\sec(X) \leq 0$得出。结合 (4.4) 以及 $G_\circ^{-1}(t)$ 是正定这一事实，可推出对所有 $t \in (0, t_0]$，都有 $\mu_1'(t) < 0$。证明至此完成。□

~4.2. **模型常微分方程**。现在我们引入 $\Delta_\circ$ 的模型常微分方程，并证明其特征函数是艾里方程特征函数的小扰动。

回顾第 4.1 节，$\mu_1(t)$ 表示 $B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ 中 $-\operatorname{div}_y(G_\circ^{-1}(t)\nabla_y)$ 的第一Dirichlet特征值。那么，模型常微分方程特征值问题为：

$$\frac{\mathrm{jac}_\circ(t_0)}{\mathrm{jac}_\circ}\frac{d}{dx}\left(\frac{\mathrm{jac}_\circ}{\mathrm{jac}_\circ(t_0)}\frac{d}{dx}\tilde{h}\right) = \left(\delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\mu_1 - \tilde{\lambda}^{\mathrm{ODE}}\right)\tilde{h} \quad \text{on } \left(0, \delta^{-1/3}(t_0+\tau_0)\right) \tag{4.5}$$

满足狄利克雷边界条件。为便于阅读，这里将 $\mathrm{jac}_\circ$和 μ_1 分别简写为 $\mathrm{jac}_\circ(t_0 - \delta^{1/3}x)$ 和 $\mu_1(t_0 - \delta^{1/3}x)$。回顾一下，$\delta$ 已在式 (4.3) 中定义。

相应的常微分算子

$$-\frac{\mathrm{jac}_\circ(t_0)}{\mathrm{jac}_\circ}\frac{d}{dx}\left(\frac{\mathrm{jac}_\circ}{\mathrm{jac}_\circ(t_0)}\frac{d}{dx}\right) + \delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\mu_1$$

是定义在……上的无界自伴算子

$$\tilde{L}^2\left(0, \delta^{-1/3}(t_0+\tau_0)\right) := \left(L^2\left(0, \delta^{-1/3}(t_0+\tau_0)\right), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\tilde{L}^2}\right),$$

其中 $\cdot,\cdot_{\tilde{L}^2}$ 是加权的 L^2 内积

$$\langle w_1, w_2\rangle_{\tilde{L}^2} := \int_0^{(t_0+\tau_0)\delta^{-1/3}} \frac{\mathrm{jac}_\circ(t_0-\delta^{1/3}x)}{\mathrm{jac}_\circ(t_0)} w_1(x)w_2(x)\,dx. \tag{4.6}$$

我们将 $(\tilde{h}_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \tilde{L}^2(0,\ \delta^{-1/3}(t_0+\tau_0))$ 记为模型常微分方程 (4.5) 的一组完备正交归一特征函数基，其特征值记为 $\tilde{\lambda}_1^{\mathrm{ODE}} \le \tilde{\lambda}_2^{\mathrm{ODE}} \le \dots$。

以下是本小节的主要结果。在表述中，我们使用第 3.2 节中的记号，即 $0 > -a_1 > -a_2 > \dots$ 表示 Ai 的零点，而 $v_k (k\in\mathbb{N})$ 是艾里方程在 $(0,\ \infty)$ 上对应特征值 a_k（定义见 (3.6)）的 L^2-归一化特征函数。

命题 4.2 (艾里方程对模型常微分方程的逼近)。 对于所有满足 *(4.2)* 的 t_0、$\tau_0 > 0$ 以及 $k\in\mathbb{N}$，存在 $C>0$ 和 $\varepsilon_0>0$，使得对于所有 $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0]$，都有以下估计：

(i)（特征值）

$$\left|\tilde{\lambda}_k^{\mathrm{ODE}} - \delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\mu_1(t_0) - a_k\right| \le C\delta^{1/3}$$

(ii)（加权积分）

对于任意多项式 $Q\in\mathbb{R}[X]$

$$\int_0^{(t_0+\tau_0)\delta^{-1/3}} |Q|(x)\left|\tilde{h}_k^2(x) - v_k^2(x)\right|\,dx \le C_Q\delta^{1/3},$$

其中 C_Q 仅取决于 Q 的次数及其系数的一个上界（以及 t_0 和 k）。特别地，

$$\left|\int_0^{(t_0+\tau_0)\delta^{-1/3}} x\Big(\tilde{h}_2^2(x) - \tilde{h}_1^2(x)\Big)\,dx - \frac{2}{3}(a_2-a_1)\right| \le C\delta^{1/3}.$$

(iii)（H^1-估计）

$$\left\|\tilde{h}_k\right\|_{H^1(0,\delta^{-1/3}(t_0+\tau_0))} \le C$$

特别地，由命题 4.2(i)可得，对于所有足够小的 $\varepsilon>0$，

$$\tilde{\lambda}_{k+1}^{\mathrm{ODE}} - \tilde{\lambda}_k^{\mathrm{ODE}} = a_{k+1} - a_k + O(\delta^{1/3}). \tag{4.7}$$

在此以及下文中，我们对常数采用以下约定。

约定 4.3。 所有隐含常数 C 均可依赖于 t_0，$\tau_0>0$、$k\in\mathbb{N}$ 和底层度量 g（特别是其系数的局部 C^m-范数），但不 依赖于ε。此外，我们通常会在记号中省略这种依赖关系，例如，我们只说“存在一个常数 C”，而不说“存在一个常数 $C = C(t_0,\ \tau_0,\ k,\ g)$”。

我们首先注意到，在相差一个常数的意义下，特征值问题 (4.5) 所对应的微分算子是 Airy算子的一个小扰动。这一点将在下面的引理中精确表述。在该引理的表述中，$A_\circ := -\frac{d^2}{dx^2} + x$ 表示 Airy算子。

引理 4.4. 定义

$$\tilde{A} := -\frac{\mathrm{jac}_\circ(t_0)}{\mathrm{jac}_\circ}\frac{d}{dx}\left(\frac{\mathrm{jac}_\circ}{\mathrm{jac}_\circ(t_0)}\frac{d}{dx}\right) + \delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\Big(\mu_1\big(t_0-\delta^{1/3}x\big)-\mu_1(t_0)\Big)$$

并且，对所有 $i\in\mathbb{N}$,

$$\tilde{\alpha}_i := \tilde{\lambda}_i^{\mathrm{ODE}} - \delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\mu_1(t_0).$$

~~ ~于是，对所有 $i\in\mathbb{N}$，有 $A\tilde{h}_i = \tilde{\alpha}_i\tilde{h}_i$，并且

$$\tilde{A} - A_\circ = O\big(\delta^{1/3}\big)\frac{d}{dx} + O\big(\delta^{1/3}x^2\big)\mathrm{id}.$$

注意到，采用这一记号后，命题 4.2(i) 等价于 $|\tilde{\alpha}_k - a_k| \le C\delta^{1/3}$。

~~ ~ ~证明。 </style}由 (4.5) 可知，对所有 $i\in\mathbb{N}$， $A\tilde{h}_i = \tilde{\alpha}_i\tilde{h}_i$ 显然成立。为了估计 $A-A$，注意，根据泰勒公式，

$$\delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\Big(\mu_1\big(t_0-\delta^{1/3}x\big)-\mu_1(t_0)\Big) = \delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\big(-\mu_1'(t_0)\delta^{1/3}x + O\big(\delta^{2/3}x^2\big)\big) = x + O\big(\delta^{1/3}x^2\big),$$

其中在第二个等式中，我们使用了 δ 的定义 (4.3)。此外，

$$-\frac{\mathrm{jac}_\circ(t_0)}{\mathrm{jac}_\circ(t_0-\delta^{1/3}x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{\mathrm{jac}_\circ(t_0-\delta^{1/3}x)}{\mathrm{jac}_\circ(t_0)}\frac{d}{dx}\right) = -\frac{d^2}{dx^2} + \delta^{1/3}\frac{\mathrm{jac}_\circ'}{\mathrm{jac}_\circ}\frac{d}{dx},$$

其中 $\mathrm{jac}_\circ' = {}^{d}$雅可比行列式$_{dt}{}^\circ$。由此可立即得到关于 $\tilde{A}-A_\circ$ 的所需估计。 □

命题 4.2 的证明与 [CJN25, 命题 3.3] 的证明类似。因此，我们只重点说明主要步骤和必要的调整；更多细节请参见 [CJN25] 。

命题 *4.2* 的证明。在整个证明过程中，我们会用到约定 4.3，例如，如果我们说“对所有 ε 足够小的情形”，应理解为“对所有 ε 足够小的情形（仅依赖于 t_0， τ_0， k 和度量 g）”。

我们还将使用以下记号。为简便起见，记 $R := (t_0+\tau_0)\delta^{-1/3}$。我们将 $(h_i^\circ)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(0,\ R)$ 记为 Airy 算子 $A_\circ := -\frac{d^2}{dx^2}+x$ 在 $(0,\ R)$ 上、满足狄利克雷边界条件的一组完备正交归一特征函数，并以 $\alpha_1^\circ \le \alpha_2^\circ \le \ldots$ 表示相应的特征值。利用 Airy 算子 $A_\circ$ 在 $(0,\ \infty)$ 上的特征函数 v_k $(k\in\mathbb{N})$ 指数衰减这一性质，可以很容易地证明（例如参见 [CJN25, 引理 3.2]），经过可能的特征函数符号调整后，对所有 $k\in\mathbb{N}$,

$$\lim_{R\to\infty}\alpha_k^\circ = a_k \quad \text{and} \quad \lim_{R\to\infty}\big\|h_k^\circ - v_k\big|_{[0,R]}\big\|_{L^2(0,R)} = 0, \tag{4.8}$$

并且在这两种情况下，收敛速度都是指数级的。

现在，我们可以通过一系列命题来证明命题 4.2。

命题*1*。存在 $x^*>0$ 和 $C>0$，使得对于所有足够小的 ε，都有

$$|h_k^\circ(x)|, \big|(h_k^\circ)'(x)\big| \le Ce^{-x} \quad \textit{for all} \quad x\in[x^*, R].$$

特别地，对于每个多项式 $Q\in\mathbb{R}[X]$，我们有

$$\int_0^R |Q|(x)h_k^\circ(x)^2\,dx \le C_Q \quad \textit{and} \quad \int_0^R |Q|(x)(h_k^\circ)'(x)^2\,dx \le C_Q$$

其中常数 C_Q 有限，且仅取决于 Q 的次数以及其系数绝对值的一个上界（还有 t_0、τ_0、k）。

按照约定 4.3，常数 x^* 允许依赖于 k。命题*1*的证明。 这很容易由斯图姆比较定理得出。更多细节请参见 [CJN25 中命题 3 证明里的命题1。3] ■断言 *2*。对于所有 $\varepsilon > 0$ 足够小的，

$$\tilde{\alpha}_k \le \alpha_k^\circ + C\delta^{1/3},$$

其中 $\tilde{\alpha}_k$ 如引理 *4.4* 所述。
命题*2*的证明。 由 $\cdot$，$\cdot_{\tilde{L}^2}$ 的定义 (4.6) 以及命题1可知 at
[CJN25 中引理 3.1] 的 (3.2) 在 $\varepsilon_k = O(\delta^{1/3})$ 下成立。因此，断言 2 可由 m
[CJN25 中引理 3.1]，的 (3.4) 的上界、引理 4.4 以及命题 1。我们参见 to
[CJN25 中命题 3.3] 的证明里断言 2 的证明，以了解更多细节。 ■
断言 *3.* 存在 $x^* > 0$ 和 $C > 0$，使得对所有足够小的 ε，我们都有

$$\left|\tilde{h}_k(x)\right| \le Ce^{-x} \quad \textit{for all} \quad x \in [x^*, R]$$

and

$$\int_x^R (\tilde{h}_k')^2(\zeta)\, d\zeta \le Ce^{-x} \quad \textit{for all} \quad x \in [x^*, R].$$

特别地，对每个多项式 $Q \in \mathbb{R}[X]$，我们都有

$$\int_0^R |Q|(x)\tilde{h}_k^2(x)\, dx \le C_Q \quad \textit{and} \quad \int_0^R |Q|(x)\big(\tilde{h}_k'(x)\big)^2\, dx \le C_Q.$$

˜稍加努力，我们还可以证明，对所有 $x \ge x^*$，均有 $|h_k'(x)| \le Ce^{-x}$。
断言 *3* 的证明。 由引理 4.4，我们有

$$\frac{\mathrm{jac}_\circ(t_0)}{\mathrm{jac}_\circ}\frac{d}{dx}\left(\frac{\mathrm{jac}_\circ}{\mathrm{jac}_\circ(t_0)}\tilde{h}_k'\right) = \left(\delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\Big(\mu_1\big(t_0 - \delta^{1/3}x\big) - \mu_1(t_0)\Big) - \tilde{\alpha}_k\right)\tilde{h}_k.$$

简记 $\tilde{c}_k(x) := \delta^{2/3}\varepsilon^{-2}(\mu_1(t_0 - \delta^{1/3}x) - \mu_1(t_0)) - \tilde{\alpha}_k$。我们断言，存在$x^* > 0$ 使得 $\tilde{c}_k(x) \ge 4$ 对所有 $x \in [x^*, R]$ 成立。为看出这一点，注意到由引理 4.1，$\tilde{c}_k$ 在$[0, \delta^{-1/3}t_0]$ 上递增。此外，由泰勒（参见引理 4.4 的证明），我们还有

$$\delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\Big(\mu_1\big(t_0 - \delta^{1/3}x\big) - \mu_1(t_0)\Big) = x + O\big(\delta^{1/3}x^2\big).$$

最后，由 (4.8) 和断言 2 可知，对所有足够小的 $\varepsilon > 0$ 都有 $\tilde{\alpha}_k \le a_k + 1$。因此，若令 $x^* := a_k + 10$，则对所有 $x \in [x^*, \delta^{-1/3}t_0]$ 以及所有足够小的 $\varepsilon > 0$

$$\tilde{c}_k(x) \ge \tilde{c}_k(x^*) = x^* + O\big(\delta^{1/3}(x^*)^2\big) - \tilde{\alpha}_k \ge 4.$$

注意到，由对称性可知，引理 4.1 也给出 $\mu_1'(t) > 0$ for $t \in [-\tau_0, 0)$。因此，根据我们对 τ_0 的选择 (4.2)，对于所有 $t \in [-\tau_0, 0)$，我们也有 $\mu_1(t) \ge \mu_1(t_0/4)$。由此很容易推出，对于所有 $x \in [\delta^{-1/3}t_0, R]$，$\tilde{c}_k(x) \ge 4$ 也成立。这就完成了对所有 $x \in [x^*, R]$，$\tilde{c}_k(x) \ge 4$ 的证明。

因此，

$$\tilde{h}_k''(x) = \tilde{c}_k(x)\tilde{h}_k(x) + \delta^{1/3}b(x)\tilde{h}_k'(x)$$

对于满足 $\|b\|_{C^0} = O(1)$的连续函数 b，且对 $x \in [x^*, R]$有 $\tilde{c}_k(x) \geq 4$。利用对所有足够小的 $\varepsilon > 0$ 均成立的不等式链,

$$\left(\frac{1}{2}\tilde{h}_k^2\right)'' = \left(\tilde{h}_k\tilde{h}_k'\right)' = \left(\tilde{h}_k'\right)^2 + \tilde{h}_k\left(\tilde{c}_k\tilde{h}_k + \delta^{1/3}b\tilde{h}_k'\right) \geq \frac{1}{2}\left(\tilde{h}_k'\right)^2 + \frac{\tilde{c}_k}{2}\tilde{h}_k^2 \geq \sqrt{\tilde{c}_k}|\tilde{h}_k\tilde{h}_k'|$$

可以很容易地推出所需的估计。事实上，我们首先注意到，由于 $(\frac{1}{2}\tilde{h}_k^2)'' \geq \frac{\tilde{c}_k}{2}\tilde{h}_k^2$和 $(\tilde{h}_k\tilde{h}_k')' \geq \sqrt{\tilde{c}_k}|\tilde{h}_k\tilde{h}_k'|$，$h_k$ 和 $|h_kh_k'|$在 $[x^*, R]$中呈指数衰减。因此，对 $(\tilde{h}_k\tilde{h}_k')' \geq \frac{1}{2}(\tilde{h}_k')^2$进行积分可得，$\int_x^R (\tilde{h}_k')^2(\zeta)\,d\zeta$ 呈指数衰减。更多细节请参见 [CJN25 第 4 节命题 3.3 证明中的断言 3 的证明。2] ■

命题*4.* 对所有足够小的 $\varepsilon > 0$，我们有

$$|\tilde{\alpha}_k - \alpha_k^\circ| \leq C\delta^{1/3},$$

其中 $\tilde{\alpha}_k$ 如引理 *4.4* 所述。

命题*4*的证明。用断言 3 替代命题1，即可由 [CJN25 中引理 3 的 (3.4)1] 以及引理 4.4 得出，具体过程与命题2的证明完全相同。■

断言*5.* 经过可能的变号后，对于所有足够小的 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\|\tilde{h}_k - h_k^\circ\|_{L^2(0,R)} \leq C\delta^{1/3}.$$

断言*5*的证明。由引理 4.4、命题1、断言 3 以及[CJN25 中引理 3 的 (3.5)1]可立即得出。更多细节请参阅证明命题 3.3]时对 [CJN25 中断言 5 的证明。■

有了命题1–5，我们现在可以轻松完成命题 4.2 的证明。

由 (4.8) 可知，$|\alpha_k^\circ - a_k|$在 $R = \delta^{-1/3}(t_0 + \tau_0)$ 中指数级小。因此，牢记 $\tilde{\alpha}_k$ 的定义（见引理 4.4），即可由断言 4 立即推出命题 4.2(i)。

同理，由 (4.8) 可知，$\|h_k^\circ - v_k\|_{L^2(0,R)}$在 $R = \delta^{-1/3}(t_0 + \tau_0)$ 中指数级小。因此，由断言5可得 $\|\tilde{h}_k - v_k\|_{L^2(0,R)} = O(\delta^{1/3})$。对于任意多项式 $Q \in \mathbb{R}[X]$，我们有

$$\int_0^R |Q|(x)\left|\tilde{h}_k^2(x) - v_k^2(x)\right| dx \leq \left(\left\|Q\tilde{h}_k\right\|_{L^2} + \|Qv_k\|_{L^2}\right)\left\|\tilde{h}_k - v_k\right\|_{L^2}$$

这是由第三个二项式公式、柯西-施瓦茨不等式和三角不等式得出的。注意，命题1对 v_k 也成立（证明相同）。因此，由关于 v_k 的命题1、断言 3 以及无权估计 $\|\tilde{h}_k - v_k\|_{L^2} = O(\delta^{1/3})$ 可得命题 4.2(ii) 中的第一个估计。命题 4.2(ii) 中的第二个估计由第一个估计和引理 3.3 得出。

最后，命题 4.2(iii) 是带有 $Q \equiv 1$ 的断言 3 的特例。 □

4.3. **近似变量分离**。本小节旨在说明，在误差足够小的意义下，Δ。的特征函数实际上可以通过变量分离假设，从模型常微分方程 (4.5) 的特征函数得到。

为表述这一结果，我们继续使用第 4.1 节中引入的记号，并回顾一下，$f_1^{(t)}$($t \in [-\tau_0, t_0]$) 表示下列算子的第一个 L^2-归一化狄利克雷特征函数:

$-\mathrm{div}_y(G_\circ^{-1}(t)\nabla_y)$，定义在 $B_1(0)\subseteq\mathbb{R}^{n-1}$ 上。根据变量替换 (2.7)，我们定义

$$\tilde{f}_1^{(x)} := f_1^{(t_0-\delta^{1/3}x)}.$$

注意，对于所有 $x\in[0,\delta^{-1/3}(t_0+\tau_0)],$，我们都有

$$\left\|\partial_x\tilde{f}_1^{(x)}\right\|_{L^2(B_1)}\le C\delta^{1/3}\quad\text{and}\quad\left\|\partial_{xx}^2\tilde{f}_1^{(x)}\right\|_{L^2(B_1)}\le C\delta^{2/3}\tag{4.9}$$

对于仅依赖于 t_0、τ_0 和（X、g）的常数 C。事实上，这直接源于 $t\mapsto f_1^{(t)}$ 作为一个取值于 L^2 的映射是光滑的这一事实。

回顾一下，$(\tilde{h}_i)_{i\in\mathbb{N}}\subseteq\tilde{L}^2(0、\ \delta^{-1/3}(t_0+\tau_0))$ 表示模型常微分方程 (4.5) 的特征函数完备正交归一基，而 $\tilde{L}^2$ 由加权 L^2-范数 (4.6) 定义。对于所有 $i\in\mathbb{N}$，我们通过下式定义 $\tilde{u}_i^{\mathrm{Guess}}\in H^2(\widetilde{\Omega})\cap H_0^1(\widetilde{\Omega})$

$$\tilde{u}_i^{\mathrm{Guess}}:\widetilde{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R},\,(x,y)\longmapsto\tilde{h}_i(x)\tilde{f}_1^{(x)}(y),\tag{4.10}$$

其中，$\widetilde{\Omega}\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$ 是 (2.9) 中定义的区域。

最后，我们用 $(\tilde{u}_i^\circ)_{i\in\mathbb{N}}\subseteq\tilde{L}_\circ^2(\widetilde{\Omega})$ 表示 Ω 中带狄利克雷边界条件的 $-\Delta_\circ$ 的特征函数 $\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$的完备正交归一基，并用 $\lambda_1^\circ\le\lambda_2^\circ\le\dots$ 表示其特征值。这里$\tilde{L}_\circ^2(\widetilde{\Omega})$ 表示 (2.11) 中定义的加权 L^2-空间。

现在我们可以陈述本小节的主要结果。

命题 4.5（近似变量分离）。对所有满足 *(4.2)* 的 t_0、$\tau_0>0$ 以及 $k\in\mathbb{N}$，存在 $C>0$ 和 $\varepsilon_0>0$，使得对所有 $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0]$，我们有如下估计：

(i)（特征值）

$$\left|\tilde{\lambda}_k^\circ-\tilde{\lambda}_k^{\mathrm{ODE}}\right|\le C\delta^{1/3}$$

(ii)（特征函数）

$$\left\|\tilde{u}_k^\circ-\tilde{u}_k^{\mathrm{Guess}}\right\|_{\tilde{L}_\circ^2(\widetilde{\Omega})}\le C\delta^{1/3}$$

命题 4.5 的策略如下。首先，我们证明每个 $\tilde{u}_i^{\mathrm{Guess}}$都是近似特征函数。由此可以推出，每个 $\tilde{\lambda}_i^{\mathrm{ODE}}$都接近某个 $\tilde{\lambda}_{j_i}^\circ$。然后我们证明，任意特征函数 $\tilde{u}_j^\circ$ 都会诱导模型常微分方程 (4.5) 的一个近似特征函数 $\tilde{h}_j^{\mathrm{Guess}}$，并且 $\tilde{h}_j^{\mathrm{Guess}}(j\in\mathbb{N})$ 近似正交归一。对于后者，我们需要证明“大部分” $\tilde{u}_j^\circ(x,\ \cdot)$ 在 $L^2(B_1)$ 中投影到 $\tilde{f}_{(x)\ 1}$上（这一想法在引理 4.9 之后加以说明）。由此我们可以推出命题 4.5。

我们现在通过一系列引理来恰当地实施这一策略。在整个过程中，我们继续采用约定 4.3，并在以下引理的表述中略去对 t_0,τ_0 的依赖。

引理 4.6。对于每个 $k\in\mathbb{N}$，都存在一个常数 $\varepsilon_0>0$，使其具有以下性质。对于所有 $\varepsilon\in$（0、ε_0] 以及 $i=1$、.....、k，我们有

$$\left\|(-\widetilde{\Delta}_\circ-\tilde{\lambda}_i^{\mathrm{ODE}})\tilde{u}_i^{\mathrm{Guess}}\right\|_{\tilde{L}_\circ^2(\widetilde{\Omega})}=O\left(\delta^{1/3}\right)\quad and\quad\left\|\tilde{u}_i^{\mathrm{Guess}}\right\|_{\tilde{L}_\circ^2(\widetilde{\Omega})}=1.$$

~ ~特别地，对于所有 $i=1$、……、k， $-\Delta_\circ$ 存在一个特征值 $\lambda^\circ_{j_i}$，满足

$$\left|\tilde\lambda_i^{\mathrm{ODE}}-\tilde\lambda^\circ_{j_i}\right| = O\big(\delta^{1/3}\big).$$

此外， $j_1<\cdots<j_k$。

事实上，这只需简单应用引理 3.1 即可得出。

证明。 由于 $\|\tilde h_i\|_{\tilde L^2(0,\delta^{-1/3}(t_0+\tau_0))}=1$，且 $\big\|\tilde f^{(x)}\big\|_{L^2(B_1)}=1$ 对所有 $x\in[0,\delta^{-1/3}(t_0+\tau_0)]$,均成立，我们很容易得到

$$\big\|\tilde u_i^{\mathrm{Guess}}\big\|_{\tilde L^2_\circ(\widetilde\Omega)}=1.$$

因此，只需给 $(-\widetilde\Delta_\circ-\tilde\lambda_i^{\mathrm{ODE}})\tilde u_i^{\mathrm{Guess}}$ 一个上界。为此，我们计算

$$\begin{aligned}\partial_x\left(\mathrm{jac}_\circ\,\partial_x\tilde u_i^{\mathrm{Guess}}\right)=&\frac{d}{dx}\left(\mathrm{jac}_\circ\,\tilde h_i'\right)\tilde f^{(x)}\\&+2\,\mathrm{jac}_\circ\,\tilde h_i'\partial_x\tilde f^{(x)}+\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{jac}_\circ\right)\tilde h_i\partial_x\tilde f^{(x)}+\mathrm{jac}_\circ\,\tilde h_i\partial_{xx}^2\tilde f^{(x)}.\end{aligned}$$

因此，由 (4.1) 可得，

$$\begin{aligned}\widetilde\Delta_\circ\tilde u_i^{\mathrm{Guess}}=&\frac{1}{\mathrm{jac}_\circ}\partial_x\left(\mathrm{jac}_\circ\,\partial_x\tilde u_i^{\mathrm{Guess}}\right)+\delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\,\mathrm{div}_y\left(G_\circ^{-1}(t_0-\delta^{1/3}x)\nabla_y\tilde u_i^{\mathrm{Guess}}\right)\\=&\left(\frac{1}{\mathrm{jac}(t_0)}\frac{d}{dx}\left(\mathrm{jac}_\circ\,\tilde h_i'\right)\right)\tilde f^{(x)}+\tilde h_i\delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\,\mathrm{div}_y\left(G_\circ^{-1}(t_0-\delta^{1/3}x)\nabla_y\tilde f_1^{(x)}\right)\\&+2\tilde h_i'\partial_x\tilde f^{(x)}+\frac{1}{\mathrm{jac}_\circ}\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{jac}_\circ\right)\tilde h_i\partial_x\tilde f^{(x)}+\tilde h_i\partial_{xx}^2\tilde f^{(x)}.\end{aligned}$$

记住，根据 $\tilde f_1^{(x)}$ 的定义，

$$-\,\mathrm{div}_y\left(G_\circ^{-1}(t_0-\delta^{1/3}x)\nabla_y\tilde f_1^{(x)}\right)=\mu_1(t_0-\delta^{1/3}x)\tilde f_1^{(x)},$$

~并且，由 h_i 的特征值问题 (4.5),

$$\frac{1}{\mathrm{jac}_\circ}\frac{d}{dx}\left(\mathrm{jac}_\circ\,\frac{d}{dx}\tilde h_i\right)=\left(\delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\mu_1-\tilde\lambda_i^{\mathrm{ODE}}\right)\tilde h_i,$$

我们得到

$$\widetilde\Delta_\circ\tilde u_i^{\mathrm{Guess}}=-\,\tilde\lambda_i^{\mathrm{ODE}}\tilde u_i^{\mathrm{Guess}}+2\tilde h_i'\partial_x\tilde f^{(x)}+\frac{1}{\mathrm{jac}_\circ}\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{jac}_\circ\right)\tilde h_i\partial_x\tilde f^{(x)}+\tilde h_i\partial_{xx}^2\tilde f^{(x)}.$$

因此，关于 $(-\widetilde\Delta_\circ-\tilde\lambda_i^{\mathrm{ODE}})\tilde u_i^{\mathrm{Guess}}$ 的所需估计可由命题 4.2(iii)、$\left|\frac{d}{dx}\right.$ 雅可比行列式$_\circ\big|=O($ $\delta^{1/3})$ 以及 (4.9) 得出。

每个 $\tilde\lambda_i^{\mathrm{ODE}}$ 都与 $-\widetilde\Delta_\circ$ 的某个特征值 $\tilde\lambda^\circ_{j_i}$ 相距 $O(\delta^{1/3})$，这一事实可直接由引理 3.1 中的 (3.1) 得出。最后，对于所有 $i=1$，……，$k-1$， $j_i<j_{i+1}$ 都成立；这是因为根据 (4.7),

$$\tilde\lambda_{i+1}^{\mathrm{ODE}}-\tilde\lambda_i^{\mathrm{ODE}}=a_{i+1}-a_i+O(\delta^{1/3})\geq(a_{i+1}-a_i)/2>0$$

当 $\varepsilon>0$ 足够小时，它有一致的下界。 □

特别地，我们容易得到如下上界。

推论 4.7. 对所有 $k \in \mathbb{N}$，存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得对所有 $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0]$，我们有

$$\tilde{\lambda}_k^{\circ} \le \tilde{\lambda}_k^{\mathrm{ODE}} + O\big(\delta^{1/3}\big).$$

证明。采用引理 4.6 中的记号，注意到 $k \le j_k$ 由于 $j_1 < \cdots < j_k$，因此 $\tilde{\lambda}_k^{\circ} \le \lambda_{j_k}^{\circ}$。所需的上界由引理 4.6 立即得出。□

单凭引理 4.6 中的界，尚不足以推出命题 4.5(i)。事实上，先验地说，$-\Delta_{\circ}$ 的多个特征值可能聚集在模型常微分方程 (4.5) 的每个特征值 $\tilde{\lambda}_i^{\mathrm{ODE}}$ 附近。为了排除这种情况，我们还需要证明，$-\widetilde{\Delta}_{\circ}$ 的每个特征函数 $\tilde{u}_j^{\circ}$ 都会导出模型常微分方程 (4.5) 的一个近似特征函数 $\tilde{h}_j^{\mathrm{Guess}}$，并且这些 $\tilde{h}_j^{\mathrm{Guess}} (j \in \mathbb{N})$ 近似正交。于是，命题 4.5 可由引理 3.1 得出。

我们定义 $\tilde{h}_j^{\mathrm{Guess}}$ 对所有 $j \in \mathbb{N}$，定义为

$$\tilde{h}_j^{\mathrm{Guess}} : \big(0, \delta^{-1/3}(t_0+\tau_0)\big) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \Big\langle \tilde{u}_j^{\circ}(x,\cdot), \tilde{f}_1^{(x)}(\cdot) \Big\rangle_{L^2(B_1)}. \tag{4.11}$$

我们先给出以下观察。为便于阅读，在表述中我们仍简写为 $\mathrm{jac}_{\circ}$ 和 μ_1，而不写作 $\mathrm{jac}_{\circ}(t_0 - \delta^{1/3}x)$ 和 $\mu_1(t_0 - \delta^{1/3}x)$。我们还回顾一下，$\tilde{L}^2(0, \delta^{-1/3}(t_0+\tau_0))$ 表示式 (4.6) 中定义的加权 L^2-空间。

引理 4.8。 对每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在一个常数 $\varepsilon_0 > 0$，具有以下性质。对所有 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ 以及 $j = 1, \dots, k$，均有

$$\left\| \left(-\frac{1}{\mathrm{jac}_{\circ}} \frac{d}{dx} \left(\mathrm{jac}_{\circ} \frac{d}{dx} \right) + \delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\mu_1 - \tilde{\lambda}_j^{\circ} \right) \tilde{h}_j^{\mathrm{Guess}} \right\|_{\tilde{L}^2(0, \delta^{-1/3}(t_0+\tau_0))} = O\big(\delta^{1/6}\big).$$

稍加努力，就可以将上界改进为 $O(\delta^{1/3})$。由于这对我们的目的并非必要，我们不再进一步改进。

为了推导出 $\tilde{h}_j^{\mathrm{Guess}}$ 是 (4.5) 的近似特征函数，我们还需要 $\| \tilde{h}_j^{\mathrm{Guess}} \|_{\tilde{L}^2}$ 具有一致的正下界。这将在下文的引理 4.9 中证明。

证明。根据 $\tilde{h}_j^{\mathrm{Guess}}$ 的定义 (4.11)，直接计算可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathrm{jac}_{\circ}} \frac{d}{dx} \left(\mathrm{jac}_{\circ} \frac{d}{dx} \tilde{h}_j^{\mathrm{Guess}} \right)(x) = {} & \left\langle \frac{1}{\mathrm{jac}_{\circ}} \partial_x \big(\mathrm{jac}_{\circ}\, \partial_x \tilde{u}_j^{\circ} \big)(x,\cdot), \tilde{f}_1^{(x)}(\cdot) \right\rangle_{L^2(B_1)} \\ & + 2 \left\langle \partial_x \tilde{u}_j^{\circ}(x,\cdot), \partial_x \tilde{f}_1^{(x)}(\cdot) \right\rangle_{L^2(B_1)} \\ & + \frac{1}{\mathrm{jac}_{\circ}} \frac{d\,\mathrm{jac}_{\circ}}{dx} \left\langle \tilde{u}_j^{\circ}(x,\cdot), \partial_x \tilde{f}_1^{(x)}(\cdot) \right\rangle_{L^2(B_1)} \\ & + \left\langle \tilde{u}_j^{\circ}(x,\cdot), \partial_{xx}^2 \tilde{f}_1^{(x)}(\cdot) \right\rangle_{L^2(B_1)}. \end{aligned}$$

注意到 $-\Delta_\circ \tilde{u}_j^\circ = \lambda_j^\circ \tilde{u}_j^\circ$ 以及 $-\Delta_\circ$ 的公式 (4.1)，我们可以将右侧的第一项化简为

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{\mathrm{jac}_\circ}\partial_x\big(\mathrm{jac}_\circ\,\partial_x\tilde{u}_j^\circ\big)(x,\cdot), \tilde{f}_1^{(x)}(\cdot)\right\rangle_{L^2(B_1)} &= \left\langle -\tilde{\lambda}_j^\circ \tilde{u}_j^\circ(x,\cdot), \tilde{f}_1^{(x)}(\cdot)\right\rangle_{L^2(B_1)}\\ &\quad + \left\langle -\delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\,\mathrm{div}_y\left(G_\circ^{-1}\nabla_y \tilde{u}_j^\circ(x,\cdot)\right), \tilde{f}_1^{(x)}(\cdot)\right\rangle_{L^2(B_1)}\\ &= -\tilde{\lambda}_j^\circ \tilde{h}_j^{\mathrm{Guess}}\\ &\quad + \delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\left\langle \tilde{u}_j^\circ(x,\cdot), -\mathrm{div}_y\left(G_\circ^{-1}\nabla_y \tilde{f}_1^{(x)}(\cdot)\right)\right\rangle_{L^2(B_1)}\\ &= -\tilde{\lambda}_j^\circ \tilde{h}_j^{\mathrm{Guess}} + \delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\left\langle \tilde{u}_j^\circ(x,\cdot), \mu_1 \tilde{f}_1^{(x)}(\cdot)\right\rangle_{L^2(B_1)}\\ &= \big(-\tilde{\lambda}_j^\circ + \delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\mu_1\big)\tilde{h}_j^{\mathrm{Guess}}.\end{aligned}$$

结合 $\left|{}^{d}_{dx}\text{雅可比行列式}^{\circ}\right| = O(\delta^{1/3})$ 和 (4.9)，我们得到

$$\begin{aligned}&\left|\left(-\frac{1}{\mathrm{jac}_\circ}\frac{d}{dx}\left(\mathrm{jac}_\circ\frac{d}{dx}\right) + \delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\mu_1 - \tilde{\lambda}_j^\circ\right)\tilde{h}_j^{\mathrm{Guess}}\right|(x)\\ &\qquad \le C\delta^{1/3}\|\partial_x \tilde{u}_j^\circ(x,\cdot)\|_{L^2(B_1)} + C\delta^{2/3}\|\tilde{u}_j^\circ(x,\cdot)\|_{L^2(B_1)}.\end{aligned}$$

这意味着，只要我们能够证明以下结论，就能得到所需的估计

$$\|\partial_x \tilde{u}_j^\circ\|_{\tilde{L}^2_\circ(\widetilde{\Omega})} = O\big(\delta^{-1/6}\big). \tag{4.12}$$

为此，代入 $-\widetilde{\Delta}_\circ \tilde{u}_j^\circ = \tilde{\lambda}_j^\circ \tilde{u}_j^\circ$ 到雅可比行列式°雅可比行列式$_\circ(t_0)$ $\tilde{u}_j^\circ \in H_0^1(\tilde{\Omega})$ 中，得到

$$\int_{\widetilde{\Omega}} \frac{\mathrm{jac}_\circ}{\mathrm{jac}_\circ(t_0)}\left(|\partial_x \tilde{u}_j^\circ|^2 + \delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\left\langle G_\circ^{-1}\nabla_y \tilde{u}_j^\circ, \nabla_y \tilde{u}_j^\circ\right\rangle_{\mathbb{R}^{n-1}}\right) dxdy = \tilde{\lambda}_j^\circ \int_{\widetilde{\Omega}} \frac{\mathrm{jac}_\circ}{\mathrm{jac}_\circ(t_0)}|\tilde{u}_j^\circ|^2\, dxdy = \tilde{\lambda}_j^\circ.$$

此外，利用推论 4.7、命题 4.2(i) 以及 δ 的定义 (4.3)，我们可以估计

$$\tilde{\lambda}_j^\circ \le \tilde{\lambda}_j^{\mathrm{ODE}} + O\big(\delta^{1/3}\big) = \delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\mu_1(t_0) + a_j + O\big(\delta^{1/3}\big) = O\big(\delta^{-1/3}\big).$$

这就证明了 (4.12)，从而完成了证明。 □

接下来我们证明，$(\tilde{h}_j^{\mathrm{Guess}})_{j\in\mathbb{N}}$ 几乎是正交归一的。这反映出这样一个事实：“大部分” $\tilde{u}_j^\circ(x,\cdot)$都投影到 $\tilde{f}_{(x)1}$上，且位于 $L^2(B_1)$中。

引理 4.9. 对于每个 $k\in\mathbb{N}$，都存在一个常数 $\varepsilon_0>0$，使其具有以下性质。对于所有 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ 以及 $i,j\in\{1,\dots,k\}$，我们有

$$\left|\left\langle \tilde{h}_i^{\mathrm{Guess}}, \tilde{h}_j^{\mathrm{Guess}}\right\rangle_{\tilde{L}^2} - \delta_{ij}\right| = O\big(\delta^{1/3}\big),$$

其中$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\tilde{L}^2}$ 是式 *(4.6)* 中定义的加权 L^2内积。

思路如下。若结论不成立，即若 $\tilde{u}_j^\circ(x,\cdot)$ 中相当大的一部分投影到 $(\tilde{f}_1^{(x)})^\perp$ 上，那么根据 $\widetilde{\Delta}_\circ$的表达式 (4.1)，特征值 $\tilde{\lambda}_j^\circ$ 就必须显著大于 $\delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\mu_1(t_0)$。然而，这与推论 4.7 和命题 4.2(i) 矛盾。

证明。将 $\tilde{u}_j^\circ = (\tilde{u}_j^\circ)^\top + (\tilde{u}_j^\circ)^\perp$ 分解，其中 $(\tilde{u}_j^\circ)^\top$，$(\tilde{u}_j^\circ)^\perp$ 的定义使得对所有 $x \in [0, \delta^{-1/3}(t_0+\tau_0)]$，都有

$$\tilde{u}_j^\circ(x,\cdot) = (\tilde{u}_j^\circ)^\top(x,\cdot) + (\tilde{u}_j^\circ)^\perp(x,\cdot) \in \operatorname{span}\left\{\tilde{f}_1^{(x)}\right\} + \operatorname{span}\left\{\tilde{f}_1^{(x)}\right\}^\perp = L^2(B_1).$$

Then

$$\left\langle \tilde{h}_i^{\mathrm{Guess}}, \tilde{h}_j^{\mathrm{Guess}} \right\rangle_{\tilde{L}^2(0,\delta^{-1/3}(t_0+\tau_0))} = \left\langle (\tilde{u}_i^\circ)^\top, (\tilde{u}_j^\circ)^\top \right\rangle_{\tilde{L}^2_\circ(\widetilde{\Omega})}.$$

由于

$$\delta_{ij} = \left\langle \tilde{u}_i^\circ, \tilde{u}_j^\circ \right\rangle_{\tilde{L}^2_\circ(\widetilde{\Omega})} = \left\langle (\tilde{u}_i^\circ)^\top, (\tilde{u}_j^\circ)^\top \right\rangle_{\tilde{L}^2_\circ(\widetilde{\Omega})} + \left\langle (\tilde{u}_i^\circ)^\perp, (\tilde{u}_j^\circ)^\perp \right\rangle_{\tilde{L}^2_\circ(\widetilde{\Omega})},$$

因此，只需证明对于所有 $j = 1, \dots, k$，我们有

$$\left\| (\tilde{u}_j^\circ)^\perp \right\|^2_{\tilde{L}^2_\circ(\widetilde{\Omega})} = O\left(\delta^{1/3}\right). \tag{4.13}$$

为证明 (4.13)，我们再次将 $\tilde{\lambda}_j^\circ \tilde{u}_j^\circ = -\widetilde{\Delta}_\circ \tilde{u}_j^\circ$ 与 雅可比行列式°~~雅可比行列式~~$_\circ(t_0)$ $\tilde{u}_j^\circ$进行比较，并利用 $\|\tilde{u}_j^\circ\|_{\tilde{L}^2_\circ(\widetilde{\Omega})} = 1$，推得

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda}_j^\circ &= \int_{\widetilde{\Omega}} \frac{\mathrm{jac}_\circ}{\mathrm{jac}_\circ(t_0)} \left(|\partial_x \tilde{u}_j^\circ|^2 + \delta^{2/3}\varepsilon^{-2} \left\langle G_\circ^{-1} \nabla_y \tilde{u}_j^\circ, \nabla_y \tilde{u}_j^\circ \right\rangle_{\mathbb{R}^{n-1}} \right) dxdy \\
&\geq \int_0^{(t_0+\tau_0)\delta^{-1/3}} \frac{\mathrm{jac}_\circ}{\mathrm{jac}_\circ(t_0)} \delta^{2/3}\varepsilon^{-2} \left\langle G_\circ^{-1} \nabla_y \tilde{u}_j^\circ(x,\cdot), \nabla_y \tilde{u}_j^\circ(x,\cdot) \right\rangle_{L^2(B_1)} dx.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

记 $\mu_2(t)$ 为 $B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ 中 $-\mathrm{div}\,(G_\circ^{-1}(t)\nabla)$ 的第二个狄利克雷特征值。则

$$\left\langle G_\circ^{-1} \nabla_y \tilde{u}_j^\circ(x,\cdot), \nabla_y \tilde{u}_j^\circ(x,\cdot) \right\rangle_{L^2(B_1)} \geq \mu_1 \|(\tilde{u}_j^\circ)^\top(x,\cdot)\|^2_{L^2(B_1)} + \mu_2 \|(\tilde{u}_j^\circ)^\perp(x,\cdot)\|^2_{L^2(B_1)}.$$

存在 $\mu_{\mathrm{gap}} = \mu_{\mathrm{gap}}(t_0,\tau_0) > 0$，使得对于所有 $t \in [-\tau_0, t_0]$，都有 $\mu_2(t) \geq \mu_1(t) + \mu_{\mathrm{gap}}$。事实上，这可由 $\mu_1(t)$ 是单重的这一事实，以及 $[-\tau_0, t_0]$ 的紧致性得出。因此

$$\left\langle G_\circ^{-1} \nabla_y \tilde{u}_j^\circ(x,\cdot), \nabla_y \tilde{u}_j^\circ(x,\cdot) \right\rangle_{L^2(B_1)} \geq \mu_1 \|(\tilde{u}_j^\circ)(x,\cdot)\|^2_{L^2(B_1)} + \mu_{\mathrm{gap}} \|(\tilde{u}_j^\circ)^\perp(x,\cdot)\|^2_{L^2(B_1)}.$$

根据引理 4.1 以及对 τ_0 的选择 (4.2)，我们知道对所有 $t \in [-\tau_0, t_0]$，$\mu_1(t) \geq \mu_1(t_0)$。将其代入 (4.14)，并注意到 $\|\tilde{u}_j^\circ\|_{\tilde{L}^2_\circ(\widetilde{\Omega})} = 1$，可得

$$\tilde{\lambda}_j^\circ \geq \delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\mu_1(t_0) + \delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\mu_{\mathrm{gap}} \left\| (\tilde{u}_j^\circ)^\perp \right\|^2_{\tilde{L}^2_\circ(\widetilde{\Omega})}. \tag{4.15}$$

然而，我们还知道

$$\tilde{\lambda}_j^\circ \leq \tilde{\lambda}_j^{\mathrm{ODE}} + O\left(\delta^{1/3}\right) = \delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\mu_1(t_0) + a_j + O\left(\delta^{1/3}\right) \tag{4.16}$$

这要归功于推论 4.7 和命题 4.2(i)。最后，根据 δ 的定义 (4.3)，我们有 $\delta^{-2/3}\varepsilon^2 = O(\delta^{1/3})$。因此，结合 (4.15) 和 (4.16) 即可得到 (4.13)。证明完毕。□

有了这些引理，我们现在可以轻松推出命题 4.5。

命题 *4.5* 的证明。 由引理 4.8 和引理 4.9 可知，我们可以将引理 3.1 应用于模型常微分方程 (4.5) 中的微分算子 $-\frac{1}{\text{雅可比行列式}_\circ}\frac{d}{dx}(\text{雅可比行列式}_\circ\frac{d}{dx})+\delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\mu_1$，其中 $\varepsilon_{\text{Guess}}=O(\delta^{1/6})$。因此，对于所有 $j=1,\dots,k$，都存在 $i_j\in\mathbb{N}$ 使得

$$\left|\tilde\lambda_j^\circ-\tilde\lambda_{i_j}^{\text{ODE}}\right|=O\big(\delta^{1/6}\big)\quad\text{and}\quad\big\|\tilde h_j^{\text{Guess}}-\tilde h_{i_j}\big\|_{\tilde L^2}=O\big(\delta^{1/6}\big),$$

其中，对于第二个估计，我们还利用了：当 $\varepsilon>0$ 足够小时，由于 (4.7)，特征值间隙 $\tilde\lambda_{i+1}^{\text{ODE}}-\tilde\lambda_i^{\text{ODE}}$有一致的正下界。

我们断言，对于所有 $j=1,\dots,k$，都有 $i_j=j$。事实上，由推论 4.7 可知

$$\tilde\lambda_{i_j}^{\text{ODE}}=\tilde\lambda_j^\circ+O\big(\delta^{1/6}\big)\le\tilde\lambda_j^{\text{ODE}}+O\big(\delta^{1/6}\big),$$

因此，由 (4.7) 可得 $i_j\le j$。此外，根据引理 4.9，对于所有$j\neq j'$，我们还知道 $\|\tilde h_j^{\text{Guess}}-\tilde h_{j'}^{\text{Guess}}\|_{\tilde L^2}^2=2+O(\delta^{1/3})$。这意味着 $j\mapsto i_j(j=1,\dots,k)$ 是单射。结合这两个观察可知，对于所有 $j=1,\dots,k$，都有 $i_j=j$，如所述。

到目前为止，我们已经证明了 $\tilde\lambda_j^{\text{ODE}}$ 与 $\tilde\lambda_j^\circ$ 的$j=1,\dots,k$ 上$O(\delta^{1/6})$接近程度。我们现在将证明，对于所有 $j\neq j'$，$\tilde\lambda_j^\circ\neq\tilde\lambda_{j'}^\circ$，$j=1,\dots,k$ 均成立。结合特征值间隙 (4.7)，并采用引理 4.6 中的记号，可得 $j_i=i$。因此，再次将引理 3.1 应用于引理 4.6，可得对所有 $i=1,\dots,k$，

$$\left|\tilde\lambda_i^{\text{ODE}}-\tilde\lambda_i^\circ\right|=O\big(\delta^{1/3}\big)\quad\text{and}\quad\big\|\tilde u_i^{\text{Guess}}-\tilde u_i^\circ\big\|_{\tilde L^2_\circ(\widetilde\Omega)}=O\big(\delta^{1/3}\big),$$

这里我们利用了如下事实：由 $|\tilde\lambda_j^\circ-\tilde\lambda_j^{\text{ODE}}|=O(\delta^{1/6})$ 和 (4.7) 可知，对于所有足够小的 $\varepsilon>0$，$-\Delta_\circ$ 的特征值间隙 $\lambda_{i+1}^\circ-\lambda_i^\circ$ 也一致地有正下界。证明至此完成。□

5. Δ 的特征函数

现在我们终于转而讨论 Δ 的特征函数。具体而言，我们将在第 5.1 节证明，Δ 的特征函数是 $\Delta_\circ$ 的特征函数的小扰动。结合第 4 节的结果，我们便能证明定理 1。相关论证将在第 5.2 节展开。

5.1. 对 $\widetilde\Delta$ 用 $\widetilde\Delta_\circ$ 所作的近似。

我们用 $(\tilde u_i)_{i\in\mathbb{N}}\subseteq\tilde L^2(\widetilde\Omega)$ 表示 $-\Delta$ 在 Ω 中带狄利克雷边界条件的特征函数的一组完备标准正交基，并用 $\lambda_1\le\lambda_2\le\dots$ 表示其特征值。这里 $\tilde L^2(\widetilde\Omega)$ 表示 (2.10) 中定义的加权 L^2空间。我们回顾第 4.3 节可知，$(\tilde u_i^\circ)_{i\in\mathbb{N}}\subseteq\tilde L^2_\circ(\widetilde\Omega)$ 与 $(\tilde\lambda_i^\circ)_{i\in\mathbb{N}}$ 表示 $-\Delta_\circ$。在 Ω 中的狄利克雷特征函数及其特征值。

以下是本小节的主要结果。

命题 5.1。 对所有满足 *(4.2)* 和 $k\in\mathbb{N}$ 的 t_0、$\tau_0>0$，存在 $C>0$ 和 $\varepsilon_0>0$，使得对所有 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$，我们有如下估计：

(i)（特征值）

$$\left|\tilde\lambda_k-\tilde\lambda_k^\circ\right|\le C\delta^{1/6}$$

(ii)（特征函数）

$$\|\tilde u_k-\tilde u_k^\circ\|_{L^2(\widetilde\Omega)}\le C\delta^{1/12}$$

特别地，结合 (4.7)、命题 4.5(i) 和命题 5.1(i)，我们得到，对于所有足够小的 $\varepsilon > 0$，

$$\tilde{\lambda}_{k+1} - \tilde{\lambda}_k = a_{k+1} - a_k + O\big(\delta^{1/6}\big), \tag{5.1}$$

其中，$0 > -a_1 > -a_2 > \dots$ 是艾里函数 Ai 的零点。特别地，对于所有足够小的 ε（取决于 k），Δ 的前 $k^{\sim}$ 个特征值因而也是 Δ 的前 $k^{\sim}$ 个特征值，均为单重特征值。

我们指出，在命题 5.1(ii) 中，可以将通常的 L^2-范数替换为加权 L^2-范数 $\|\cdot\|_{\tilde{L}^2(\tilde{\Omega})}$ 或 $\|\cdot\|_{\tilde{L}^2_\circ(\tilde{\Omega})}$ 中的任意一种，因为这些范数都一致等价（等价常数仅取决于 t_0、τ_0 和度量 g）。

命题 5.1 将由引理 3.2 推出，因为 Δ 和 $\Delta_\circ$ 的系数非常接近。为明确说明这一点，我们需要以下基本断言。在其表述中，∇_y 表示 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的标准梯度。我们还提醒读者，根据注记 2.6，对于所有 $i \in \mathbb{N}$，$\tilde{u}_i$，$\tilde{u}_i^\circ \in H^2(\tilde{\Omega}) \cap H_0^1(\tilde{\Omega})$。

引理 5.2。对于所有 $\tilde{u} \in H^2(\tilde{\Omega}) \cap H_0^1(\tilde{\Omega})$，有

$$\begin{aligned}\left|\left\langle\left(\widetilde{\Delta} - \widetilde{\Delta}_\circ\right)\tilde{u}, \tilde{u}\right\rangle_{\tilde{L}^2(\widetilde{\Omega})}\right| \le C\Big[&\delta^{2/3}\varepsilon^{-1}\|\nabla_y u\|^2_{\tilde{L}^2(\widetilde{\Omega})} + \delta^{1/3}\|\partial_x\tilde{u}\|_{\tilde{L}^2(\widetilde{\Omega})}\|\nabla_y\tilde{u}\|_{\tilde{L}^2(\widetilde{\Omega})} \\ &+ \left(\delta^{1/3}\|\partial_x u\|_{\tilde{L}^2(\widetilde{\Omega})} + \delta^{2/3}\varepsilon^{-1}\|\nabla_y u\|_{\tilde{L}^2(\widetilde{\Omega})}\right)\|u\|_{\tilde{L}^2(\widetilde{\Omega})}\Big].\end{aligned}$$

用 $\tilde{L}^2_\circ(\tilde{\Omega})$ 代替 $\tilde{L}^2(\tilde{\Omega})$ 时，同样的估计仍然成立。

证明只是一个直接的计算。

证明。利用（2.4）和（2.6），可写为

$$\begin{aligned}\Delta =& \frac{1}{\operatorname{jac}}\left(\partial_t\Big(\operatorname{jac}\partial_t\Big) + \partial_{s_i}\Big(\operatorname{jac} g^{ij}\partial_{s_j}\Big) + \partial_t\Big(\operatorname{jac} g^{ti}\partial_{s_i}\Big) + \partial_{s_i}\Big(\operatorname{jac} g^{ti}\partial_t\Big)\right) \\ =& \partial^2_{tt} + g^{ij}\partial^2_{s_i s_j} + 2g^{ti}\partial^2_{s_i t} + \frac{\partial_t \operatorname{jac}}{\operatorname{jac}}\partial_t + \frac{\partial_{s_i}\left(\operatorname{jac} g^{ij}\right)}{\operatorname{jac}}\partial_{s_j} + \frac{\partial_t\left(\operatorname{jac} g^{ti}\right)}{\operatorname{jac}}\partial_{s_i} + \frac{\partial_{s_i}\left(\operatorname{jac} g^{ti}\right)}{\operatorname{jac}}\partial_t.\end{aligned}$$

结合 $\Delta_\circ$ 的定义（2.5），得到

$$\Delta - \Delta_\circ = \left(g^{ij} - g^{ij}_\circ\right)\partial^2_{s_i s_j} + 2g^{ti}\partial^2_{s_i t} + O(1)\partial_t + O(1)\partial_{s_i}.$$

回顾（2.7）中的变量替换 $x := \delta^{-1/3}(t_0 - t)$ 和 $y := s/\varepsilon$，于是 $\partial_x = -\delta^{1/3}\partial_t$ 且 $\partial_{y_i} = \varepsilon\partial_{s_i}$。因此，根据 Δ 和 $\Delta_\circ$ 的定义（2.8），

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta} - \widetilde{\Delta}_\circ =& \delta^{2/3}\Delta - \delta^{2/3}\Delta_\circ \\ =& \delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\left(g^{ij} - g^{ij}_\circ\right)\partial^2_{y_i y_j} - 2\delta^{1/3}\varepsilon^{-1}g^{ti}\partial^2_{y_i x} + O\big(\delta^{1/3}\big)\partial_x + O\big(\delta^{2/3}\varepsilon^{-1}\big)\partial_{y_j},\end{aligned} \tag{5.2}$$

其中 g_{ij} 仍表示 $g(\partial_{s_i}, \partial_{s_j})$，而非 $g(\partial_{y_i}, \partial_{y_j})$。

现在，利用分部积分，得到

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{\Omega}} \left(g^{ij}-g_\circ^{ij}\right)\partial^2_{y_iy_j}(\tilde{u})\tilde{u}\,\mathrm{jac}\,dxdy &= -\int_{\widetilde{\Omega}} \partial_{y_j}(\tilde{u})\partial_{y_i}\Big(\left(g^{ij}-g_\circ^{ij}\right)\tilde{u}\,\mathrm{jac}\Big)dxdy\\ &= -\int_{\widetilde{\Omega}} \partial_{y_j}(\tilde{u})\partial_{y_i}(\tilde{u})\left(g^{ij}-g_\circ^{ij}\right)\mathrm{jac}\,dxdy\\ &\quad -\int_{\widetilde{\Omega}} \partial_{y_j}(\tilde{u})\tilde{u}\partial_{y_i}\Big(\left(g^{ij}-g_\circ^{ij}\right)\mathrm{jac}\Big)dxdy.\end{aligned}$$

然而，由于 g_{ij} 和雅可比行列式在（s，t）$\in B_\varepsilon(0)\times[-\tau_0,t_0]$上光滑，我们有

$$\left(g^{ij}-g_\circ^{ij}\right)=O(\varepsilon)\quad\text{and}\quad\partial_{y_i}\Big(\left(g^{ij}-g_\circ^{ij}\right)\mathrm{jac}\Big)=\varepsilon\partial_{s_i}\Big(\left(g^{ij}-g_\circ^{ij}\right)\mathrm{jac}\Big)=O(\varepsilon)$$

因为根据定义，$(g_\circ)_{ij}(t)=g_{ij}(0,t)$。因此

$$\left|\left\langle\left(g^{ij}-g_\circ^{ij}\right)\partial^2_{y_iy_j}(\tilde{u}),\tilde{u}\right\rangle_{\tilde{L}^2(\widetilde{\Omega})}\right|\le C\varepsilon\|\nabla_y\tilde{u}\|_{\tilde{L}^2(\widetilde{\Omega})}\left(\|\nabla_y\tilde{u}\|_{\tilde{L}^2(\widetilde{\Omega})}+\|\tilde{u}\|_{\tilde{L}^2(\widetilde{\Omega})}\right)\tag{5.3}$$

记住，对于所有 $t\in[-\tau_0,t_0]$，$g_{ti}(0,t)=0$，用同样的论证可得

$$\left|\left\langle g^{ti}\partial^2_{y_ix}(\tilde{u}),\tilde{u}\right\rangle_{\tilde{L}^2(\widetilde{\Omega})}\right|\le C\varepsilon\|\partial_x\tilde{u}\|_{\tilde{L}^2(\widetilde{\Omega})}\left(\|\nabla_y\tilde{u}\|_{\tilde{L}^2(\widetilde{\Omega})}+\|\tilde{u}\|_{\tilde{L}^2(\widetilde{\Omega})}\right)\tag{5.4}$$

结合 (5.2)、(5.3) 和 (5.4)，引理 5.2 的证明即告完成。 □

反复应用引理 3.2 即可轻松得出命题 5.1。

命题 *5.1* 的证明。我们将证明分解为一系列命题。

命题*1*。对于所有 $i=1$、……、k，以及所有足够小的 $\varepsilon>0$，我们有：

$$\left\|\partial_x\tilde{u}_i^\circ\right\|_{\tilde{L}^2_\circ(\widetilde{\Omega})}=O\left(\delta^{-1/6}\right)\quad and\quad\left\|\nabla_y\tilde{u}_i^\circ\right\|_{\tilde{L}^2_\circ(\widetilde{\Omega})}=O(1).$$

可以将 $\partial_x\tilde{u}_i^\circ$ 的界改进为 $\|\partial_x\tilde{u}_i^\circ\|_{\tilde{L}^2_\circ(\tilde{\Omega})}=O(1)$（见引理 5.3）。

命题*1*的证明。$\partial_x\tilde{u}_i^\circ$ 的界已在 (4.12) 中证明。利用如下观察：存在 $c\in(0,1)$，使得对于所有 $\xi\in\mathbb{R}^{n-1}$ 和所有 $t\in[-\tau_0,t_0]$，均有 $G_\circ^{-1}(t)\xi,\xi\ge c|\xi|^2$，同一证明也能推出 $\nabla_y\tilde{u}_i^\circ$ 所需的界。■

断言 *2.* 对所有足够小的 $\varepsilon>0$，

$$\tilde{\lambda}_k\le\tilde{\lambda}_k^\circ+C\delta^{1/6}.$$

特别地，$\tilde{\lambda}_i=O\left(\delta^{-1/3}\right)$ 对所有 $i=1,\ldots,k$。

命题*2*的证明。由于 jac 光滑，因此是利普希茨连续的，对于 $(t,s)\in[-\tau_0,t_0]\times B_\varepsilon(0)$，我们有 $|\mathrm{jac}-\mathrm{jac}_\circ|=O(\varepsilon)$。因此，$\cdot,\cdot_\circ:=\cdot,\cdot_{\tilde{L}^2_\circ(\tilde{\Omega})}$ 以及 $\cdot,\cdot:=\cdot,\cdot_{\tilde{L}^2(\tilde{\Omega})}$ 对某个 $\varepsilon_{\mathrm{comp}}=O(\varepsilon)$ 满足 (3.3)。因此，(3.4) 中的上界意味着

$$\tilde{\lambda}_k-\tilde{\lambda}_k^\circ\le C\varepsilon\tilde{\lambda}_k^\circ+\max_{\tilde{u}\in S_k^\circ}\frac{\left|\left\langle\left(\widetilde{\Delta}-\widetilde{\Delta}_\circ\right)\tilde{u},\tilde{u}\right\rangle_{\tilde{L}^2(\widetilde{\Omega})}\right|}{\|\tilde{u}\|^2_{\tilde{L}^2(\widetilde{\Omega})}},$$

其中 $S_k^\circ := \mathrm{span}\{\tilde{u}_1^\circ, \dots, \tilde{u}_k^\circ\}$。由三角不等式可知，命题1对所有满足 $\|\tilde{u}\|_{\tilde{L}^2_\circ(\tilde{\Omega})} = 1$ 的 $\tilde{u} \in S_k^\circ$ 也成立。因此，由引理 5.2 可知，对于所有满足 $\|\tilde{u}\|_{\tilde{L}^2_\circ(\tilde{\Omega})} = 1$ 的 $\tilde{u} \in S_k^\circ$，我们有

$$\left|\left\langle \left(\widetilde{\Delta} - \widetilde{\Delta}_\circ\right)\tilde{u}, \tilde{u}\right\rangle_{\tilde{L}^2(\Omega)}\right| = O\left(\delta^{2/3}\varepsilon^{-1} + \delta^{1/3}\delta^{-1/6} + \delta^{1/3}\delta^{-1/6} + \delta^{2/3}\varepsilon^{-1}\right) = O\left(\delta^{1/6}\right), \quad (5.5)$$

其中我们还用到了 $\|\cdot\|_{\tilde{L}^2(\Omega)}$ 和 $|\cdot\|_{\tilde{L}^2_\circ(\Omega)}$ 是一致等价的。由命题 4.5(i) 和命题 4.2(i)可得 $\tilde{\lambda}_k^\circ = O(\delta^{-1/3})$，因此命题2的证明完成。 ■

现在我们可以证明，命题1的类似结论对 Δ 的特征函数也成立。命题*3*。对于所有 $i = 1, \dots\dots, k$ 以及所有 $\varepsilon > 0$ 足够小的，

$$\left\|\partial_x \tilde{u}_i\right\|_{\tilde{L}^2(\widetilde{\Omega})} = O\left(\delta^{-1/6}\right) \quad and \quad \left\|\nabla_y \tilde{u}_i\right\|_{\tilde{L}^2(\widetilde{\Omega})} = O(1).$$

命题*3*的证明。将 $-\widetilde{\Delta}\tilde{u}_i = \tilde{\lambda}_i \tilde{u}_i$ 与 雅可比行列式 雅可比行列式$_\circ(t_0)\,\tilde{u}_i$ 进行测试，得到（因为 $\|\tilde{u}_i\|_{\tilde{L}^2(\tilde{\Omega})} = 1$），

$$\int_{\widetilde{\Omega}} \frac{\mathrm{jac}}{\mathrm{jac}_\circ(t_0)} \left(|\partial_x \tilde{u}_i|^2 + \delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\langle G^{-1}\nabla_y \tilde{u}_i, \nabla_y \tilde{u}_i\rangle + 2\delta^{1/3}\varepsilon^{-1} g^{ti}\partial_{y_i}(\tilde{u}_i)\partial_x(\tilde{u}_i)\right) dxdy = \tilde{\lambda}_i,$$

其中 $G = (g_{ij}) \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$。请注意，对于所有 $t \in [-\tau_0, t_0]$，$g_{ti}(0,t) = 0$，因此

$$g^{ti} = O(\varepsilon). \quad (5.6)$$

此外，存在 $c = c(t_0, \tau_0) \in (0,1)$，使得对于所有 $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$，$G^{-1}\xi, \xi \geq c|\xi|^2$。因此，对于所有充分小的 $\varepsilon > 0$，我们得到

$$\frac{1}{2}\int_{\widetilde{\Omega}} \frac{\mathrm{jac}}{\mathrm{jac}_\circ(t_0)} \left(|\partial_x \tilde{u}_i|^2 + \delta^{2/3}\varepsilon^{-2} c|\nabla_y \tilde{u}_i|^2\right) dxdy \leq \tilde{\lambda}_i.$$

最后，由断言 2可知 $\tilde{\lambda}_i = O(\delta^{-1/3})$，由 (4.3) 可知 $\varepsilon^2\delta^{-2/3} = (\delta^{1/3})$。这就得到了所需的估计。■

命题*4*。对于所有充分小的 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\left|\tilde{\lambda}_k - \tilde{\lambda}_k^\circ\right| = O\left(\delta^{1/6}\right).$$

请注意，这就是命题 5.1(i)。

命题*4*的证明。 用断言 3代替命题1，并用断言 2代替上界 $\tilde{\lambda}_k^\circ = O(\delta^{-1/3})$，按照与命题2的证明完全相同的论证，我们得到

$$\left|\left\langle \left(\widetilde{\Delta} - \widetilde{\Delta}_\circ\right)\tilde{u}, \tilde{u}\right\rangle_{\tilde{L}^2_\circ(\widetilde{\Omega})}\right| = O\left(\delta^{1/6}\right), \quad (5.7)$$

对于所有 $\tilde{u} \in \mathrm{span}\{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_k\}$，满足 $\|\tilde{u}\|_{\tilde{L}^2(\tilde{\Omega})} = 1$。因此，与命题2的证明相同，命题4由 (3.4) 中的下界推出。■

注意到，对于所有足够小的 $\varepsilon > 0$，$\lambda_{i+1}^\circ - \lambda_i^\circ$对所有 $i = 1$、……、k都一致有下界。事实上，这由命题 4.5(i) 和 (4.7) 得出。我们还回顾一下，可以选择引理 3.2 的假设 (3.3) 中的 $\varepsilon_{\mathrm{comp}}$，使得 $\varepsilon_{\mathrm{comp}} = O(\varepsilon)$（见断言 2 的证明）。因此，引理 3.2 中的 (3.5) 以及 (5.5)、(5.7) 蕴含

$$\|\tilde{u}_k - \tilde{u}_k^\circ\|^2_{\tilde{L}^2_\circ(\widetilde{\Omega})} = O\left(\delta^{1/6}\right).$$

由于 $\|\cdot\|_{L^2(\widetilde{\Omega})}$ 和 $\|\cdot\|_{\tilde{L}^2_\delta(\widetilde{\Omega})}$ 一致等价，这正是命题 5.1(ii)，从而证明完成。□

证明定理 1 时，我们还需要以下指数衰减估计 .

引理 5.3 (指数衰减)。 对于满足 *(4.2)* 的所有 $t_0, \tau_0 > 0$ 以及 $k \in \mathbb{N}$，存在 $C > 0$, $x^* > 0$ 和 $\varepsilon_0 > 0$，使得对于所有 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$，均有

$$\int_{B_1(0)} \tilde{u}_k^2(x,y)\,dy \le Ce^{-x} \quad \textit{for all } x \in \big[x^*, \delta^{-1/3}(t_0+\tau_0)\big]. \tag{5.8}$$

特别地，对于每个多项式 $Q \in \mathbb{R}[X]$，存在常数 $C_Q < \infty$，使得 *at*

$$\int_{\widetilde{\Omega}} |Q|(x)\tilde{u}_k^2(x,y)\,dxdy \le C_Q \tag{5.9}$$

and

$$\int_{\widetilde{\Omega}} |Q|(x)\left|\tilde{u}_k^2 - (\tilde{u}_k^{\mathrm{Guess}})^2\right|(x,y)\,dxdy \le C_Q\delta^{1/12}, \tag{5.10}$$

其中 $\tilde{u}_k^{\mathrm{Guess}}$ 是 *(4.10)* 中定义的函数。

证明。 注意到 (5.9) 可由 (5.8) 直接推出；根据 (4.10) 中 $\tilde{u}_k^{\mathrm{Guess}}$ 的定义以及命题 4.2 证明中的断言 3，(5.9) 的类似结论对 $\tilde{u}_k^{\mathrm{Guess}}$ 也成立。此外，对于任意多项式 $Q \in \mathbb{R}[X]$，我们有

$$\int_{\widetilde{\Omega}} |Q|(x)\left|\tilde{u}_k^2 - (\tilde{u}_k^{\mathrm{Guess}})^2\right|(x,y)\,dxdy \le \left(\|Q\tilde{u}_k\|_{L^2} + \left\|Q\tilde{u}_k^{\mathrm{Guess}}\right\|_{L^2}\right)\left\|\tilde{u}_k - \tilde{u}_k^{\mathrm{Guess}}\right\|_{L^2}$$

这是由于第三个二项式公式、柯西-施瓦茨不等式和三角不等式。由命题 4.5(ii)和命题 5.1(ii)，我们已知 $\|\tilde{u}_k - \tilde{u}_k^{\mathrm{Guess}}\|_{L^2} \le C\delta^{1/12}$，因此加权的 L^2界 (5.10) 可由 (5.9) 得出，而 (5.9) 又可由 (5.8) 轻易推出。因此，只需证明 (5.8)。

考虑切片能量函数 $\mathfrak{e}_k$，其定义如下：对 $x \in [0, \delta^{-1/3}(t_0+\tau_0)]$,

$$\mathfrak{e}_k(x) := \frac{1}{2}\|\tilde{u}_k\|^2_{L^2(\{x\}\times B_1)} := \frac{1}{2}\|\tilde{u}_k(x,\cdot)\|^2_{L^2(B_1)} := \frac{1}{2}\int_{B_1(0)} \tilde{u}_k^2(x,y)\,dy.$$

下面我们将通过直接但繁琐的计算证明

$$\mathfrak{e}_k''(x) \ge \Big(\big(1+O(\varepsilon)\big)\delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\mu_1\big(t_0-\delta^{1/3}x\big) - \tilde{\lambda}_k\Big)2\mathfrak{e}_k(x). \tag{5.11}$$

我们先说明如何由 (5.11) 推出 (5.8)。

具体而言，由命题 4.2(i)、命题 4.5(i)和命题 5.1(i)，我们知道 w

$$\tilde{\lambda}_k = \delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\mu_1(t_0) + a_k + O(\delta^{1/6}).$$

此外，由泰勒公式以及 δ 的定义 (4.3)，我们知道（细节见引理 4.4 的证明）

$$\delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\mu_1\big(t_0-\delta^{1/3}x\big) = \delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\mu_1(t_0) + x + O\big(\delta^{1/3}x^2\big).$$

最后，由引理 4.1，$x \mapsto \mu_1(t_0-\delta^{1/3}x)$ 在 $x \in [0, \delta^{-1/3}t_0]$ 上单调递增，并且由于对 τ_0 的选取 (4.2)，对 $t \in [-\tau_0, 0]$ 有 $\mu_1(t) \ge \mu_1(t_0/4)$。因此，若我们令$x_0 := a_k + 10$，则对所有 $x \in [x_0, \delta^{-1/3}(t_0+\tau_0)]$ 以及足够小的 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\big(1+O(\varepsilon)\big)\delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\mu_1(t_0-\delta^{1/3}x) - \tilde{\lambda}_k \ge \big(1+O(\varepsilon)\big)\delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\mu_1(t_0-\delta^{1/3}x_0) - \tilde{\lambda}_k \ge 2,$$

从而由 (5.11)，对所有 $x \in [x_0, \delta^{-1/3}(t_0+\tau_0)]$ 有 $\mathfrak{e}_k''(x) \geq 4\mathfrak{e}_k(x)$。借助斯图姆比较定理，对所有 $x_0 \leq x^* \leq x \leq \delta^{-1/3}(t_0+\tau_0)$，我们得到

$$\mathfrak{e}_k(x^*) \geq \cosh(2(x-x^*))\mathfrak{e}_k(x) \geq \frac{1}{2}e^{2(x-x^*)}\mathfrak{e}_k(x)$$

因为 $\mathfrak{e}_k(\delta^{-1/3}(t_0+\tau_0)) = 0$，这是由狄利克雷边界条件导致的。最后，存在 $x^* \in [x_0, x_0+1]$ 使得

$$\mathfrak{e}_k(x^*) \leq \int_{x_0}^{x_0+1} \mathfrak{e}_k(x)\,dx \leq \frac{1}{2}\|\tilde{u}_k\|^2_{L^2(\widetilde{\Omega})} \leq C.$$

结合前面的两个估计可得，对所有 $x \in [x^*, \delta^{-1/3}(t_0+\tau_0)]$，都有 $\mathfrak{e}(x) \leq Ce^{-2x}$，这正是所需的衰减估计 (5.8)。

剩下只需证明 (5.11)。下文中，所有积分均指在 $\{x\} \times B_1(0)$ 上进行，但为简便起见，我们只写 $B_1(0)$。

显然，对所有 $x \in [0, \delta^{-1/3}(t_0+\tau_0)]$,，我们有

$$\begin{aligned}\mathfrak{e}_k''(x) &= \int_{B_1(0)} \left(\partial^2_{xx}(\tilde{u}_k)\tilde{u} + |\partial_x\tilde{u}_k|^2\right) dy \\ &= -2\tilde{\lambda}_k\mathfrak{e}_k(x) + \int_{B_1(0)} \left(\left(\partial^2_{xx}(\tilde{u}_k) - \widetilde{\Delta}\tilde{u}_k\right)\tilde{u}_k + |\partial_x\tilde{u}_k|^2\right) dy, \end{aligned} \tag{5.12}$$

其中，在第二个等式中我们使用了 $\Delta\tilde{u}_k = -\lambda_k\tilde{u}_k$。回忆

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta} = \frac{1}{\mathrm{jac}}\Bigg(&\mathrm{jac}\,\partial^2_{xx} + \partial_x(\mathrm{jac})\partial_x + \delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\partial_{y_i}\left(\mathrm{jac}\,g^{ij}\partial_{y_j}\right) \\ &+ \delta^{1/3}\varepsilon^{-1}\partial_x\left(\mathrm{jac}\,g^{ti}\partial_{y_i}\right) + \delta^{1/3}\varepsilon^{-1}\partial_{y_i}\left(\mathrm{jac}\,g^{ti}\partial_x\right)\Bigg),\end{aligned} \tag{5.13}$$

其中 g_{ij} 表示 $g(\partial_{s_i}, \partial_{s_j})$，而并非 $g(\partial_{y_i}, \partial_{y_j})$。

现在我们将估计若干积分。以下过程中，我们将利用

$$\partial_x(\mathrm{fct}) = O\left(\delta^{1/3}\right) \quad \text{and} \quad \partial_{y_i}(\mathrm{fct}) = O(\varepsilon) \tag{5.14}$$

其中 fct 为函数 jac、g^{ij}、g^{it} 之一，或它们的乘积。事实上，这直接源于以下事实：根据变量替换的定义 (2.7)，它们在 $(s,\ t) \in B_\varepsilon(0)\times[-\tau_0, t_0]$ 上均为光滑函数，且 $\partial_x = -\delta^{1/3}\partial_t$ 和 $\partial_{y_i} = \varepsilon\partial_{s_i}$。

首先，由 (5.14) 结合 $B_1(0)$ 上的庞加莱不等式，立即可得

$$\begin{aligned}\left|-\int_{B_1(0)} \frac{\partial_x(\mathrm{jac})}{\mathrm{jac}}\partial_x(\tilde{u}_k)\tilde{u}_k\,dy\right| &\leq C\delta^{1/3}\|\nabla_y\tilde{u}_k\|_{L^2(B_1)}\|\partial_x\tilde{u}_k\|_{L^2(B_1)} \\ &\leq C\delta^{2/3}\|\nabla_y\tilde{u}_k\|^2_{L^2(B_1)} + \frac{1}{4}\|\partial_x\tilde{u}_k\|^2_{L^2(B_1)},\end{aligned} \tag{5.15}$$

其中，对于第二个不等式，我们还用到了 $2ab \leq a^2+b^2$ 对所有 $a,\ b \in \mathbb{R}$。

其次，由乘积法则和分部积分，我们得到

$$-\int_{B_1(0)}\frac{1}{\mathrm{jac}}\partial_x\Big(\mathrm{jac}\,g^{ti}\partial_{y_i}(\tilde{u}_k)\Big)\tilde{u}_k\,dy=-\int_{B_1(0)}\frac{\partial_x\big(\mathrm{jac}\,g^{ti}\big)}{\mathrm{jac}}\partial_{y_i}(\tilde{u}_k)\tilde{u}_k\,dy+\int_{B_1(0)}\partial_x(\tilde{u}_k)\partial_{y_i}\left(g^{ti}\tilde{u}_k\right)dy.$$

结合 (5.14)、 $g^{it}=O(\varepsilon)$（见 (5.6)）以及庞加莱不等式，我们可推得 ce

$$\begin{aligned}\left|-\int_{B_1(0)}\frac{1}{\mathrm{jac}}\partial_x\Big(\mathrm{jac}\,g^{ti}\partial_{y_i}(\tilde{u}_k)\Big)\tilde{u}_k\,dy\right|\le&C\delta^{1/3}\|\nabla_y\tilde{u}_k\|^2_{L^2(B_1)}\\&+C\varepsilon\|\nabla_y\tilde{u}_k\|_{L^2(B_1)}\|\partial_x\tilde{u}_k\|_{L^2(B_1)}\\\le&C\delta^{1/3}\|\nabla_y\tilde{u}_k\|^2_{L^2(B_1)}+\frac{\delta^{-1/3}\varepsilon^2}{4}\|\partial_x\tilde{u}_k\|^2_{L^2(B_1)}.\end{aligned}\tag{5.16}$$

类似地，利用散度定理、 $g^{it}=O(\varepsilon)$ 和庞加莱不等式，我们可以估计

$$\begin{aligned}\left|-\int_{B_1(0)}\frac{1}{\mathrm{jac}}\partial_{y_i}\Big(\mathrm{jac}\,g^{ti}\partial_x(\tilde{u}_k)\Big)\tilde{u}_k\,dy\right|\le&C\varepsilon\|\nabla_y\tilde{u}_k\|_{L^2(B_1)}\|\partial_x\tilde{u}_k\|_{L^2(B_1)}\\\le&C\delta^{1/3}\varepsilon\|\nabla_y\tilde{u}_k\|^2_{L^2(B_1)}+\frac{\delta^{-1/3}\varepsilon}{4}\|\partial_x\tilde{u}_k\|^2_{L^2(B_1)}.\end{aligned}\tag{5.17}$$

最后，再次由散度定理可得，

$$\begin{aligned}-\int_{B_1(0)}\frac{1}{\mathrm{jac}}\partial_{y_i}\Big(\mathrm{jac}\,g^{ij}\partial_{y_j}(\tilde{u}_k)\Big)\tilde{u}_k\,dy=&\int_{B_1(0)}\Big(\mathrm{jac}\,g^{ij}\partial_{y_j}(\tilde{u}_k)\Big)\partial_{y_i}\left(\frac{1}{\mathrm{jac}}\tilde{u}_k\right)dy\\=&\int_{B_1(0)}g^{ij}\partial_{y_j}(\tilde{u}_k)\partial_{y_i}(\tilde{u}_k)\,dy\qquad(5.18)\\&-\int_{B_1(0)}\frac{\partial_{y_i}(\mathrm{jac})}{\mathrm{jac}}g^{ij}\partial_{y_j}(\tilde{u}_k)\tilde{u}_k\,dy.\qquad(5.19)\end{aligned}$$

由于 $g_{ij}=(g_\circ)_{ij}+O(\varepsilon)$，我们还可以将第一项 (5.18) 估计为

$$\int_{B_1(0)}g^{ij}\partial_{y_j}(\tilde{u}_k)\partial_{y_i}(\tilde{u}_k)\,dy\ge\int_{B_1(0)}g^{ij}_\circ\partial_{y_j}(\tilde{u}_k)\partial_{y_i}(\tilde{u}_k)\,dy-C\varepsilon\|\nabla_y\tilde{u}_k\|^2_{L^2(B_1)}.\tag{5.20}$$

由 (5.14) 和庞加莱不等式，第二项 (5.19) 可估计为 y

$$\left|-\int_{B_1(0)}\frac{\partial_{y_i}(\mathrm{jac})}{\mathrm{jac}}\,\mathrm{jac}\,g^{ij}\partial_{y_j}(\tilde{u}_k)\tilde{u}_k\,dy\right|\le C\varepsilon\|\nabla_y\tilde{u}_k\|^2_{L^2(B_1)}.\tag{5.21}$$

结合 (5.13) 和 (5.15)-(5.21) 可得

$$\begin{aligned}\int_{B_1(0)}\big(\partial^2_{xx}(\tilde{u}_k)-\widetilde{\Delta}\tilde{u}_k\big)\tilde{u}_k\,dy\ge&\,\delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\int_{B_1(0)}g^{ij}_\circ\partial_{y_j}(\tilde{u}_k)\partial_{y_i}(\tilde{u}_k)\,dy\\&-C\big(\delta^{2/3}+\delta^{2/3}\varepsilon^{-1}+\delta^{2/3}+\delta^{2/3}\varepsilon^{-1}\big)\|\nabla_y\tilde{u}_k\|^2_{L^2(B_1)}\\&-\left(\frac{1}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{1}{4}\right)\|\partial_x\tilde{u}_k\|^2_{L^2(B_1)}.\end{aligned}$$

由于 $G_\circ^{-1}=(g_\circ^{ij})$ 是一致椭圆的，我们可以将其简化为

$$\begin{aligned}\int_{B_1(0)}\left(\partial_{xx}^2(\tilde{u}_k)-\widetilde{\Delta}\tilde{u}_k\right)\tilde{u}_k\,dy \geq &(1-C\varepsilon)\delta^{2/3}\varepsilon^{-2}\int_{B_1(0)}\langle G_\circ^{-1}\nabla_y\tilde{u}_k,\nabla_y\tilde{u}_k\rangle\,dy\\ &-\frac{3}{4}\|\partial_x\tilde{u}_k\|_{L^2(B_1)}^2.\end{aligned}\tag{5.22}$$

然而，根据定义， $\mu_1(t)$ 是 $-\mathrm{div}_y(G_\circ^{-1}(t)\nabla_y)$ 的第一特征值。因此，记住由 (2.7) 可知的 $t=t_0-\delta^{1/3}x$ ，所需的估计 (5.11) 可由 (5.12) 和 (5.22) 得出。证明完毕。□

5.2. **定理 1 的证明**。现在我们终于可以证明定理 1 了。按照定理 1 的表述，令 X 为一个负曲率 Hadamard 流形，并将定义 2.1 中定义的区域记为 $\Omega_\varepsilon:=\Omega(\varepsilon;-\tau_0,\ t_0)\subseteq X$。最后，我们将 $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}\subseteq L^2(\Omega_\varepsilon)$ 记为 $-\Delta$ 在 $\Omega_\varepsilon\subseteq X$ 中具有狄利克雷边界条件的一组完备正交归一基（标记方式使得相应的特征值序列 $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 非递减）。

我们从积分（1.1）的以下渐近展开开始。

推论 5.4。 对于所有满足（*4.2*）的 $t_0,\tau_0>0$，以及满足 $P'(t_0)>0$ 的 $P\in C^2(\mathbb{R})$，存在 $C>0$ 和 $\varepsilon_0>0$，使得对于所有 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$，积分

$$\mathrm{I}_\varepsilon:=\int_{\Omega_\varepsilon}P(t)\left(u_2^2(s,t)-u_1^2(s,t)\right)\,d\mathrm{vol}_g(s,t)$$

满足

$$\left|\frac{\delta^{-1/3}\mathrm{I}_\varepsilon}{P'(t_0)}+\frac{2}{3}(a_2-a_1)\right|\leq C\delta^{1/12},$$

其中 $0>-a_1>-a_2>\dots$ 是艾里函数 艾里函数 的零点。特别地，对于所有足够小的 $\varepsilon>0$，$\mathrm{I}_\varepsilon<0$。

特别地，这对于定义 2.4 中定义的势 P 也成立。

证明。 注意，对于所有 $i\in\mathbb{N}$, $\tilde{u}_i,\ (x,y):=n_iu_i(\varepsilon y,t_0-\delta^{1/3}x)$ 是 Ω_ε 中 $-\widetilde{\Delta}$ 的一个特征函数，且满足狄利克雷边界条件。这里 $n_i\in\mathbb{R}_{>0}$ 是一个归一化常数。根据变量替换的定义（2.7），我们有

$$dt=-\delta^{1/3}dx\quad\text{and}\quad ds=\varepsilon^{n-1}dy.$$

由此，根据 $\tilde{L}^2(\widetilde{\Omega}_\varepsilon)$ 的定义 (2.10) 容易得出：若我们通过要求对所有 $i\in\mathbb{N}$ 选取归一化常数，则 $(\tilde{u}_i)_{i\in\mathbb{N}}\subseteq\tilde{L}^2(\widetilde{\Omega}_\varepsilon)$ 构成特征函数的完备正交归一基，

$$n_i^2=\mathrm{jac}_\circ(t_0)\delta^{1/3}\varepsilon^{n-1}.$$

利用 $u_i \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ 是 L^2-归一化的，我们因此可以将积分 I_ε 改写为

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_\varepsilon &= \int_{\Omega_\varepsilon} P(t)\left(u_2^2(s,t)-u_1^2(s,t)\right)\mathrm{jac}(t,s)\,dsdt\\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} \left(P(t)-P(t_0)\right)\left(u_2^2(s,t)-u_1^2(s,t)\right)\mathrm{jac}(t,s)\,dsdt\\
&= \delta^{1/3}\varepsilon^{n-1}\int_{\widetilde{\Omega}_\varepsilon} \left(P(t_0-\delta^{1/3}x)-P(t_0)\right)\left(\frac{\tilde{u}_2^2(x,y)}{n_2^2}-\frac{\tilde{u}_1^2(x,y)}{n_1^2}\right)\mathrm{jac}(\varepsilon y, t_0-\delta^{1/3}x)\,dxdy\\
&= \int_{\widetilde{\Omega}_\varepsilon} \left(P(t_0-\delta^{1/3}x)-P(t_0)\right)\left(\tilde{u}_2^2(x,y)-\tilde{u}_1^2(x,y)\right)\frac{\mathrm{jac}(\varepsilon y, t_0-\delta^{1/3}x)}{\mathrm{jac}_\circ(t_0)}\,dxdy.
\end{aligned}$$

现在，根据泰勒公式，

$$P(t_0-\delta^{1/3}x)-P(t_0) = -P'(t_0)\delta^{1/3}x + O\big(\delta^{2/3}x^2\big).$$

同样，由于雅可比行列式是光滑的，因而是利普希茨的，对于 $(s,\ t) \in B_\varepsilon(0)\times[-\tau_0,t_0]$，我们有

$$\frac{\mathrm{jac}(\varepsilon y, t_0-\delta^{1/3}x)}{\mathrm{jac}_\circ(t_0)} = 1 + O\big(\varepsilon+\delta^{1/3}x\big).$$

Thus

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^{-1/3}\mathrm{I}_\varepsilon}{P'(t_0)} &= \int_{\widetilde{\Omega}_\varepsilon}\Big(-x+O\big(\delta^{1/3}x^2\big)\Big)\left(\tilde{u}_2^2(x,y)-\tilde{u}_1^2(x,y)\right)\Big(1+O\big(\varepsilon+\delta^{1/3}x\big)\Big)\,dxdy\\
&= \int_{\widetilde{\Omega}_\varepsilon}(-x)\left(\tilde{u}_2^2(x,y)-\tilde{u}_1^2(x,y)\right)\,dxdy + O\big(\delta^{1/3}\big),
\end{aligned}$$

其中在第二个等式中，我们使用了引理 5.3 中的 (5.9)，以及由 δ的定义 (4.3) 可知的 $\varepsilon = O(\delta^{1/2})$。由引理 5.3 中的 (5.10)、$\tilde{u}_i^{\mathrm{Guess}}$的定义 (4.10) 和命题 4.2(ii)，我们最终得到

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{\Omega}_\varepsilon}(-x)\left(\tilde{u}_2^2-\tilde{u}_1^2\right)(x,y)\,dxdy &= \int_{\widetilde{\Omega}_\varepsilon}(-x)\left((\tilde{u}_2^{\mathrm{Guess}})^2-(\tilde{u}_1^{\mathrm{Guess}})^2\right)(x,y)\,dxdy + O\big(\delta^{1/12}\big)\\
&= \int_0^{(t_0+\tau_0)\delta^{-1/3}}(-x)\left(\tilde{h}_2^2(x)-\tilde{h}_1^2(x)\right)\,dx + O\big(\delta^{1/12}\big)\\
&= -\frac{2}{3}(a_2-a_1) + O\big(\delta^{1/12}\big),
\end{aligned}$$

其中 $\tilde{h}_1$ 和 $\tilde{h}_2$ 是模型常微分方程 (4.5) 的前两个特征函数。证明至此完成。□

定理 1 现在显然成立。

定理 *1* 的证明。取一条直径 $D_0 > 0$。令 $t_\pm := \frac{10\pm1}{10}D_0$，并固定某个

$$\tau_0 \in \left(0, \frac{1}{10}D_0\right) \quad \text{such that} \quad \mu_1(-\tau_0) \geq \mu_1(t_-/4),$$

因此，由引理 4.1 可知，对于所有 $t_0 \in [t_-,t_+]$，条件 (4.2) 均成立（回想一下，得益于引理 4.1，存在这样的 τ_0）。于是，存在 $\varepsilon_0 > 0$（仅依赖于D_0），使得引理 2.2 中定义的区域 $\Omega(\varepsilon;-\tau_0,\ t_0)$ 对所有 $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0]$ 都是凸的

以及所有 $t_0 \in [t_-, t_+]$（见注 2.3）。我们还固定 $t_P := \frac{D_0}{3}$，并令 P 为定义 2.4 中针对该 t_P 定义的势。然后，适当减小 ε_0 后，由于引理2.5，对于所有 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ 和所有 $t_0 \in [t_-, t_+]$，P 在 $\Omega(\varepsilon; -\tau_0, t_0)$ 上是凸的。最后，由推论 5.4 可知，再次适当减小 ε_0 后，对于所有 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ 和所有 $t_0 \in [t_-, t_+]$，(1.1) 中的积分为负。因此，对于所有 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ 和所有 $t_0 \in [t_-, t_+]$，存在一个定义在 $\Omega(\varepsilon; -\tau_0, t_0)$ 上的凸势，其基本间隙严格小于常势的基本间隙；这是 Hellmann– Feynman 恒等式的推论（见 (1.1) 后的讨论）。

仍需证明，区域 $\Omega(\varepsilon; -\tau_0, t_0)$ 之一的直径恰好为 D_0。为看出这一点，注意到

$$t_0 + \tau_0 \le \operatorname{diam}\big(\Omega(\varepsilon; -\tau_0, t_0)\big) \text{ for all } \varepsilon > 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{diam}\big(\Omega(\varepsilon; -\tau_0, t_0)\big) = t_0 + \tau_0.$$

因此，根据 $t_\pm$ 与 τ_0 的定义，在可能减小 ε_0 之后，我们有

$$\operatorname{diam}\big(\Omega(\varepsilon_0; -\tau_0, t_-)\big) < D_0 \quad \text{and} \quad \operatorname{diam}\big(\Omega(\varepsilon_0; -\tau_0, t_+)\big) > D_0.$$

由于映射 $t \mapsto \operatorname{diam}(\Omega(\varepsilon; -\tau_0, t))$ 显然连续，我们可找到 $t_0 \in (t_-, t_+)$，使得 $\operatorname{diam}(\Omega(\varepsilon; -\tau_0, t_0)) = D_0$。至此证明完成。□

参考文献

[AAHK24] M. Ahrami, Z. E. Allali, E. M. Harrell II, J. B. Kennedy. 优化量子图的基本特征值间隙。《物理学杂志A：数学与理论》，57(38): 385202（26页），2024。[AC11] B. Andrews, J. Clutterbuck. 基本间隙猜想的证明。《美国数学会杂志》，24(3):899–916，2011。[BO99] C. Bender 和 S. Orszag.《科学家与工程师的高级数学方法：渐近方法与微扰理论》。Springer New York，1999。[BCN+22] T. Bourni, J. Clutterbuck, X. H. Nguyen, A. Stancu, G. Wei, V.-M. Wheeler. $\mathbb{H}^n$ 23 2 595 614, 中凸域的基2022本间隙消失。《亨利·庞加莱年刊》，( ): – 。[CWY25] G. Cho, G. Wei, G. Yang. 球面上基本间隙问题的概率方法。《美国数学会汇刊》，378(1):317–337，2025。[CJN25] J. Clutterbuck, F. Jäckel, X. H. Nguyen. 常数势在双曲空间的凸域上并非基本间隙的最小化势。预印本，，2025。[DSW21] X. Dai, S. Seto, G. Wei. 球面上凸域的基本间隙估计——基本结果 $n = 2$。《分析与几何通讯》，29(5):1095–1125，2021。[HWZ20] C. He, G. Wei, Q. S. Zhang. 球面上凸域的基本间隙。《美国数学杂志》，142(4):1161–1191，2020。[KN24] G. Khan, X. H. Nguyen. 负曲率使凸域的基本间隙缩小。《亨利·庞加莱年刊》，25(11):4855–4887，2024。[KST25] G. Khan, S. Saha, M. Tuerkoen. 共形变形下椭圆方程解的凹性性质。《数学杂志》，310，文章编号70，2025。[KT24] G. Khan, M. Tuerkoen. 共形平坦流形上的谱隙估计。预印本，arXiv:2404.15645，2024。[Ka95] T. Kato.《线性算子的微扰理论》。数学经典。Springer，1995。1980年版重印。[SWW19] S. Seto, L. Wang, G. Wei. 球面上凸域的尖锐基本间隙估计。《微分几何杂志》，112(2):347–389，2019。

[WX25] G.Wei, L.Xiao. 视界凸域上第一特征函数的超对数凹性在双曲空间。预印本，arXiv:2510.13072，2025。

布鲁塞尔自由大学数学系，普兰校区，CP 210，凯旋大道，B-1050 布鲁塞尔，比利时电子邮箱：frieder.jackel@ulb.be