arXiv:2602.01877v1 [cs.LG] 2 Feb 2026

自相关的估计优化：先预测后优化与有限样本最优

ZichunWang[1*]，**Gar Goei Loke**[2*]，**Ruiting Zuo**[1†]香港科技大学（广州）[2]杜伦大学商学院

摘要

在数据驱动优化中，直接针对有限样本情形下的样本外性能进行优化的模型，已成为传统先估计后优化方法的一种有前景的替代方案。在本研究中，我们比较了这些模型在自相关不确定性背景下的性能，具体而言，是在向量自回归移动平均 VARMA(p, q)过程下的性能。我们提出了一种自相关的经由估计优化（A-OVE）模型，该模型根据充分统计量获得样本外最优解，并提出了一种用于计算其充分统计量的递归形式。我们在包含交易成本的投资组合优化问题上评估了这些模型。相较于完全信息预言机，A-OVE 实现了较低的后悔值，其性能优于先预测后优化的机器学习基准。值得注意的是，准确率更高的机器学习模型可能具有更差的决策质量，这与数据驱动优化领域不断增长的文献相呼应。在模型设定错误较小的情况下，其性能仍能保持。

1 引言

1.1 数据驱动优化

数据驱动优化是一个具体但重要的不确定性下决策问题实例 [den Hertogand Postek, 2016, Miši´c and Perakis, 2020], 通常表述为以下随机规划：

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{B}} \rho(\boldsymbol{x}; D) := \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{B}} \mathbb{E}_{\boldsymbol{y}\sim D}[\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})], \tag{1}$$

其中，决策 $\boldsymbol{x}$ 在可行集 $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ 中优化成本函数 $\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 的期望值，该函数受不确定变量 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^n$ 影响，而该变量服从真实分布 D。在实践中，真实 D 未知，但可以获得从 D中抽样得到的 K 历史观测值数据集，记作 $\boldsymbol{Y}:= \{\boldsymbol{y}_i\}_{i=1}^K$。这种情形的一个变体是上下文设定：在历史数据集 $\{(\boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{y}_i)\}_{i=1}^K$ 中观测到与未观测的不确定性 $\boldsymbol{y}$相关的特征（也称为辅助信息或协变量），记作 $\boldsymbol{z}$；并且在决策之前也能观测到这些特征。这使得 (i) 能够通过 $\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}$ 更精确地估计$\boldsymbol{y}$，以及 (ii) 能够使决策 $\boldsymbol{x}:= \boldsymbol{x}(\boldsymbol{z})$ 适应上下文 $\boldsymbol{z}$。

一种常见的方法是序贯学习与优化：使用数据集 $\{(\boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{y}_i)\}_{i=1}^K$ 来学习关系 $\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}$，例如通过机器学习，然后利用该关系求解优化模型。具体有两种变体，即先预测后优化（PTO）和先估计后优化（ETO） [例如 Ferreira 等，2016年，Liu 等，2021年，Qi 等， 2021]。PTO 使用学习到的关系 $\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}$ 为不确定性构造点估计 $\hat{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z})$，并优化确定性成本 $\min_{\boldsymbol{x}} \pi(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z}))$。毫无疑问，当 π 关于 $\boldsymbol{y}$ [Gupta 和

*共同第一作者
†通讯作者

预印本。

Rusmevichientong, 2021]。ETO 则通过估计条件分布 $\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}$ 本身，针对每个上下文 $\boldsymbol{z}$优化期望成本：

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{z}) \in \arg\min_{\boldsymbol{x}} \rho^{C}(\boldsymbol{x}) := \mathbb{E}_{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}}[\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})]. \tag{2}$$

许多学习方案仅返回预测而非分布作为输出，因而与（2）不一致。为解决这一问题，Bertsimas 和 Kallus [2020] 设计了一种方法，从机器学习模型为（2）生成分布。

这一两阶段范式可能是次优的 [Liyanage 和 Shanthikumar，2005；Mundru，2019；Hu 等人， 2022]。令人费解的是，学习阶段的高预测准确率未必转化为良好的决策质量 [Loke 等人， 2022]；反之，使用准确率较差的估计也能获得高质量的决策 [Elmachtoub 和 Grigas， 2022]。这推动了越来越多的文献研究如何协同开展学习与优化，该方法被称为集成学习与优化（ILO）[全面综述参见 Sadana 等人，2024]。
关于集成学习与优化的文献提出了广泛的方法，从基于任务的学习 [Donti 等人，2017] 到鲁棒优化 [Kannan 等人，2024，Sim 等人， 2024], 从显式建模学习阶段的方法 [Elmachtoub 和 Grigas， 2022] 到不这样做的方法 [Esteban-Pérez 和 Morales， 2022]。最关键的是，尽管已有一些尝试在标准化设定下比较不同模型的性能 [Tang 和 Khalil， 2024], 但尚未有跨范式的结论性比较，因而缺乏关于各范式所针对的问题以及它们为何有效的理论解释。

与此同时，近期关于有限样本最优性的研究 [Feng 和 Shanthikumar，2023年，Besbes 和 Mouchtaki，2023年，Loke 等人， 2023] 在数据驱动优化中提出了新的问题。这些研究认为，数据驱动优化中的决策是数据集的函数，即*i.e.*， $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{Y})$，因此，其性能应根据样本外 期望进行评估，该期望取自如下定义的抽样分布：

$$\sigma(\boldsymbol{x}(\cdot); D) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}\left[\rho\left(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{Y}); D\right)\right]. \tag{3}$$

令人惊讶的是，这一样本外目标可以直接且轻松地进行优化！在数值实验中，与最先进的替代方法相比，该方法表现出色。
本文旨在研究有限样本最优方法在现实问题中的潜力，尤其是与采用 PTO 或 ETO 方式实现的机器学习模型进行比较；后者可能具有更低的预测误差。我们重点关注 Loke 等人 [2023], 如 Besbes 和 Mouchtaki [2023]针对报童问题提出了具体方法，而 Feng 和 Shanthikumar [2023] 限制了用于 $\boldsymbol{x}(\cdot)$ 的函数空间，以获得相应的解。不幸的是，Loke 等人 [2023] 尚未将其方法扩展到上下文设定。为此，我们选取不确定 $\boldsymbol{y}$为时间序列的设定。这样，便可以将 Loke 等人的参数化方法 [2023] 与机器学习方法进行比较，并将过去时段的数据作为协变量。

具体而言，我们考察一个考虑交易成本的投资组合优化问题。交易成本对于实际投资组合实施至关重要 [Kyle，1985年，Gârleanu和Pedersen， 2016], 然而，由于交易成本取决于交易规模和交易者特定的特征，因此难以直接建模。一种常见做法是使用交易量来近似交易成本 [Frazzini等人，2018年，Goyenko等人， 2024], 而交易量具有很强的时间依赖性，因此可以用时间序列建模。在这种设定下，Goyenko等人 [2024] 提出了一个投资组合优化框架，在跟踪误差与扣除成本后的绩效之间进行权衡。他们表明，通过机器学习预测交易量所带来的经济价值与股票收益可预测性相当，其方法属于PTO范式。

1.2 贡献与发现

最重要的是，我们针对时间序列场景，具体而言是向量自回归移动平均（VARMA）过程，提出了 Loke 等人 [2023] (A-OVE) 的自相关模型。由于不确定性具有自相关性，这一扩展并非易事。随后，我们推导了含交易成本的投资组合优化问题中 A-OVE 的最优解。在数值实验中，我们基于合成和现实世界的股票市场数据集，在 PTO 和 ETO 范式下将 A-OVE 与机器学习模型进行比较。我们的主要贡献和发现如下：

1. 在理论方面，我们推导出 A-OVE 的样本外最优解，并将其表示为充分统计量的函数；此外，我们提出了一种递归形式，用于计算一般 VARMA(p, q) 模型的 Fisher-Neyman 分解。据我们所知，文献中尚未对此进行描述。2. 相较于完美信息预言机，A-OVE模型的后悔值较低，并且在 PTO 和 ETO 两种范式下，始终优于机器学习基准，包括神经网络、梯度提升和随机森林。在一定程度的模型设定错误下，这些结果依然稳健。3. 我们的数值结果进一步验证，预测准确度更高的机器学习模型可能导致较差的决策质量，这进一步凸显了使学习目标与下游优化任务相一致的重要性。

2 预备知识与记号

2.1 数据驱动优化范式

我们介绍本文将探讨的数据驱动优化范式。

先预测后优化（PTO）。在上下文设定中，PTO 会针对每个上下文 $\boldsymbol{z}$ 学习不确定量 $\boldsymbol{y}$ 的点预测器 $\hat{}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{z})$，以通过以下方式优化决策 $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{z}) \in \arg\min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{B}} \pi(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z})). \tag{PTO}$$

即使预测器 $\hat{}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{z}) = \mathbb{E}[\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}]$ 无偏，若 π 关于不确定性 $\boldsymbol{y}$ 是非线性的，则通常用 $\pi(\boldsymbol{x}, \hat{}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{z}))$ 替代 $\mathbb{E}_{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}}[\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})]$ 也会产生偏差。我们根据 PTO 方法所采用的预测模型来命名。例如，PTO-RNN 指的是使用循环神经网络生成预测器的 PTO 模型。

先估计后优化（ETO）。ETO 使用历史数据估计给定上下文时不确定性的条件分布，记作 $D(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z})$，并求解

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{z}) \in \arg\min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{B}} \mathbb{E}_{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\sim\hat{D}}[\pi(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{y})]. \tag{ETO}$$

我们约定使用记号“ETO”来指代这样一种模型：该模型使用参数时间序列学习器来学习 $\hat{}D(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z})$。

从预测到处方（FPtP）。机器学习模型无法直接应用于 ETO 框架，因为它们主要输出预测结果，而不是条件分布。为此，Bertsimas 和 Kallus [2020] 提出“从预测到处方”（FPtP）框架，该框架为（ETO）中的条件期望构造一个替代模型。具体而言，该框架从机器学习模型生成M 预测样本 $\{\hat{}\boldsymbol{y}^{(m)}(\boldsymbol{z})\}_{m=1}^{M}$，随后为其分配权重 $\{w_m(\boldsymbol{z})\}_{m=1}^{M}$，以求解

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{z}) \in \arg\min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{B}} \sum_{m=1}^{M} w_m(\boldsymbol{z})\pi(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{y}}_m(\boldsymbol{z})). \tag{FPtP}$$

预测样本和权重的生成方式取决于学习器（每种学习器的实现细节见附录D。我们根据底层学习器来命名 FPtP模型。例如，FPtP-RF 表示在随机森林学习器下对 ETO 的 FPtP 近似。

经由估计优化（OVE）。Loke 等人提出的 OVE 范式 [2023], 通过优化样本外性能（3），确定数据集 $\boldsymbol{Y}$ 的决策函数 $\boldsymbol{x} := \boldsymbol{x}(\boldsymbol{Y})$。该范式采用参数化设定，假设 D 属于一个具有密度函数的参数族$\mathcal{H} := \{f(\boldsymbol{y};\ \boldsymbol{\xi}) :\ \boldsymbol{\xi} \in \Xi \subseteq \mathbb{R}^q\}$。因此，我们将（3）写作 $\sigma(\boldsymbol{x}(\cdot);\ \boldsymbol{\xi}) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}[\rho(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{Y});\ \boldsymbol{\xi})],$，其中期望是基于 $\boldsymbol{Y}$的抽样分布计算的，其密度记为 $L(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{\xi})$。此时，$\sigma$ 定义不明确，因为 $\boldsymbol{\xi}$ 仍然未知。OVE 范式提出一种类似贝叶斯的方法，为未知参数 $\boldsymbol{\xi}$设定先验分布 $u(\boldsymbol{\xi})$，以优化后验期望样本外成本

$$\boldsymbol{x} \in \arg\min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{B}} \Psi(\boldsymbol{x}(\cdot); u) := \mathbb{E}_{\boldsymbol{\xi}\sim u}\left[\sigma\left(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{Y}); \boldsymbol{\xi}\right)\right]. \tag{OVE}$$

Ass假设 2.1。可行集 $\mathcal{B}$ 是凸集。对于所有 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}$，成本函数 $\pi(\cdot,\ \boldsymbol{y})$ 都是凸函数。

假设 2.2。 $\rho(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})$ 对所有 $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$, $\mathcal{B}$ 均严格凸且连续可微，为凸闭集； $\rho(\cdot;\boldsymbol{\xi})$ 在 $\mathcal{B}$ 上有下界，且 $\lim_{\|x\|\to\infty} \rho(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{\xi}) = \infty$。

定理 2.3。 *[Loke 等人 [2023]]*设 $\boldsymbol{\xi} \in \Xi \subseteq \mathbb{R}^r$ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 的任意充分统计量，具有 *Fisher-Neyman* 因子分解 $L(\boldsymbol{Y};\ \boldsymbol{\xi}) = g_0(\boldsymbol{Y})g_1(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{Y}) \boldsymbol{\xi})$，其中 g_0 和 g_1 非负。令 $\mathcal{X}(\boldsymbol{\xi})$ 为可行函数的集合，这些函数可表示为充分统计量 $\boldsymbol{\xi}$ 的函数：

$$\mathcal{X}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) := \left\{ \boldsymbol{x} \,\middle|\, \exists\, \tilde{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{Y}) = \tilde{\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{Y})), \forall \boldsymbol{Y} \in \mathcal{Y}^K \right\}. \tag{4}$$

在假设 *2.1* 下，若存在一个重新参数化 $\mathcal{Y}^K \ni \boldsymbol{Y} \mapsto (\hat{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{Y}|\hat{\boldsymbol{\xi}}) \in \hat{\Xi} \times \mathcal{Y}^K$，其雅可比行列式非负，则对于固定的先验分布 u,

i. 若 (OVE) 存在最优解，则可在 $\mathcal{X}(\boldsymbol{\xi})$中找到一个。

ii. 若函数 $\boldsymbol{x}_{OVE}(\cdot)$存在，并在 $\boldsymbol{\xi}$上逐点定义，则它是 (OVE) 的最优解，即

$$\boldsymbol{x}_{OVE}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) \in \arg\min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{B}} \beth(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}),\ \textit{where}\ \beth(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\xi}\sim u}\left[\rho(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi}) g_1(\hat{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\xi})\right]. \tag{5}$$

iii. 此外，若假设 *2.2* 成立，则 $\boldsymbol{x}_{OVE}(\cdot)$ 存在，且是 (OVE) 的唯一最优解。

定理 2.3 表明，最优决策可以表示为族 $\mathcal{H}$ 的充分统计量的函数，并通过式 (5) 显式求得。这是在 $\boldsymbol{x}$ 中的一个凸优化问题，可以高效求解。

2.2 向量自回归移动平均过程下的问题构建

设 $\boldsymbol{Y} := (\boldsymbol{Y}_t)_{t=1}^T$ 表示零均值多元时间序列 $\{\boldsymbol{Y}_t\}$的一个长度为-T 实现，其中$\boldsymbol{Y}_t = (Y_{1,\ t},\ \ldots\ldots, Y_{n,\ t})^\top \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^n$。每个分量 $Y_{i,\ t}$ 均表现出跨时间 t和分量 i的依赖性。我们使用向量自回归移动平均（VARMA）过程对这种自相关不确定性建模。具体而言， $\boldsymbol{Y}$服从零均值 VARMA($p,\ q$) 过程，即对每个 t,

$$\boldsymbol{Y}_t - \sum_{i=1}^{p} \Phi_i \boldsymbol{Y}_{t-i} = \boldsymbol{\epsilon}_t + \sum_{i=1}^{q} \Theta_i \boldsymbol{\epsilon}_{t-i}, \tag{6}$$

其中， $\{\boldsymbol{\epsilon}_t\}$ 是独立同分布白噪声创新序列，满足 $\boldsymbol{\epsilon}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0},\ \Sigma_\epsilon)$，而 $\Phi_i,\ \Theta_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是系数矩阵。在向量自回归移动平均的背景下，自然会假设因果性和可逆性，以确保该过程具有定义良好的无限阶表示。

假设 2.4 （因果性与可逆性）。 对于所有满足 $|z| \le 1$ 的 $z \in \mathbb{C}$， $\Phi(z)$ 和 $\Theta(z)$ 均满足

$$\det \Phi(z) \neq 0 \quad \text{and} \quad \det \Theta(z) \neq 0, \tag{7}$$

where $\Phi(z) := I_n - \sum_{i=1}^{p} \Phi_i z^i$ and $\Theta(z) := I_n + \sum_{i=1}^{q} \Theta_i z^i$.

因此，自相关不确定性由系数矩阵 $\boldsymbol{\Phi} = \{\Phi_i\}_{i=1}^p$、$\boldsymbol{\Theta} = \{\Theta_i\}_{i=1}^q$ Σ_ϵ $\boldsymbol{\xi}$ = 和协方差矩阵刻画。我们将这些参数统称为 : ($\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Theta}$, Σ_ϵ)，它们均为未知参数。随后，可将这一自相关设定纳入 OVE 框架。我们将所提出的模型称为自相关 *OVE* (A-OVE)，根据定理 2.3，最优样本外解可通过式 (5) 作为 $\boldsymbol{\xi}$ 充分统计量的函数求得。在第 3 节中，我们将进一步讨论向量自回归移动平均($p,\ q$) 的充分统计量；由于存在自相关，这些统计量并不容易推导。值得注意的是，我们无需显式计算充分统计量，而是证明可以通过似然函数高效地求得 A-OVE 解。

2.3 记号

我们采用记号 $[T] = \{1, \ldots, T\}$，并且对于 $i < T$, $[i, T] = i,\ \ldots\ldots,\ T$。Diag(·) 表示将向量构造成对角矩阵的运算符，而 diag(·) 则提取矩阵的对角元素。

3 模型与理论

本节首先讨论向量自回归移动平均(p, q)模型的充分统计量。接着，我们建立包含交易成本的投资组合优化模型，并提出一个自相关 OVE 模型来确定最优投资组合决策。

3.1 向量自回归移动平均的充分统计量

由于自相关，推导一般向量自回归移动平均(p, q)模型的充分统计量并非易事。据我们所知，文献中尚未对此加以描述。Esa 和 Boshnakov [1998], 推导了单变量 ARMA 过程的充分统计量，而 Kharrati-Kopaei 等人[2009] 在固定参数下推导了多元向量自回归移动平均(1,1)情形的显式形式，并提出了高阶 VARMA 过程的近似充分统计量。

如定理 2.3 所示，充分统计量对 OVE 至关重要。它们也出现在 (5) 中 ⊐ 里对g_1 的定义中。然而，请注意，为了求解 (5)，充分统计量本身并不需要按 ˆ ˆ 顺序计算。首先，充分统计量 $\boldsymbol{\xi} := \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{Y})$ 是数据集 $\boldsymbol{Y}$的函数，因此 OVE ˆ 解 $\boldsymbol{x}_{\text{OVE}}(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{Y})) = \boldsymbol{x}_{\text{OVE}}(\boldsymbol{Y})$ 可以用数据集 $\boldsymbol{Y}$本身来表示。其次，更为关键的是， g_1 隐式地等于 $g_1(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\xi})$。因此，只要能够针对给定的数据集 $\boldsymbol{Y}$和参数 $\boldsymbol{\xi}$计算 g_1 ，(5) 仍然可以被优化。

为推导向量自回归移动平均过程的似然函数，通常会作出以下结构性假设。

假设 3.1 (对称协方差)。 过程 $\boldsymbol{Y}$具有对称协方差，即对于所有满足 $|z| = 1$的$z \in \mathbb{C}$， $\Phi(\cdot)$ 和 $\Theta(\cdot)$ 满足

$$\Phi^{-1}(z)\Theta(z)\Sigma_\epsilon\Theta^\top(z^{-1})\Phi^{\top-1}(z^{-1}) = \Phi^{-1}(z^{-1})\Theta(z^{-1})\Sigma_\epsilon\Theta^\top(z)\Phi^{\top-1}(z). \tag{8}$$

在此假设下，该过程存在时间反向表示，由此可以构造前向变换过程 $\{\boldsymbol{W}_t\}$ ，进而得到精确似然的表达式。以下定理总结了由此得到的 Fisher-Neyman 分解。

定理 3.2 (一般 向量自回归移动平均(p, q) 的 Fisher-Neyman 分解)。 设向量自回归移动平均(p, q) 过程 $\boldsymbol{Y}$的参数为 $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Theta}, \Sigma_\epsilon)$，且满足假设 *2.4* 和 *3.1*。ˆ则存在一个前向变换 $\{\boldsymbol{W}_t\}$ 及其对应的一步预测器 $\{\boldsymbol{W}_t\}$ ，使得 $\boldsymbol{Y}$的精确似然具有 *Fisher–Neyman* 分解

$$L(\boldsymbol{Y}; \boldsymbol{\xi}) = g_0(\boldsymbol{Y})g_1(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\xi}), \tag{9}$$

其中 $g_0(\boldsymbol{Y}) = (2\pi)^{-\frac{nT}{2}}$和

$$g_1(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\xi}) = \left(\prod_{t=1}^{T} \det(\Sigma_t)\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{h(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\xi})}{2}\right\}. \tag{10}$$

这里， $h(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{t=1}^{T}(\boldsymbol{W}_t - \hat{\boldsymbol{W}}_t)^\top\Sigma_t^{-1}(\boldsymbol{W}_t - \hat{\boldsymbol{W}}_t)$，预测ˆ误差 $\boldsymbol{W}_t - \boldsymbol{W}_t$ 的协方差矩阵 Σ_t 见附录 $\boldsymbol{A}$。

3.2 含交易成本的投资组合优化

正如引言中所述，我们旨在比较不同模型在投资组合优化问题上的表现，该问题需要在风险调整后收益与交易成本之间取得平衡。

问题定义。 考虑一个包含 n种资产的资产集合，以及一位在初始时拥有资产、资产价值为 A 的基金经理。在时间 $T + 1$，经理观察截至时间 T 的历史信息 $\boldsymbol{Y}:=(\boldsymbol{Y}_t)_{t=1}^{T}$ 后，决定投资组合头寸 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$。目标是最大化

$$A(1 + r^f) + \boldsymbol{e}^\top\boldsymbol{x} - \frac{\gamma}{2A}\boldsymbol{x}^\top\Sigma\boldsymbol{x} - c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y}_{T+1}), \tag{11}$$

其中四项分别对应：(i) 利率为 r^f 的无风险收益，(ii) 超额收益率为 $\boldsymbol{e}$ 的预期超额收益，(iii) 风险厌恶系数为

γ、收益协方差矩阵为 Σ 的均值—方差风险惩罚，以及 (iv) 交易成本项 $c(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{Y}_{T+1})$，该项取决于投资组合决策和下一期对数美元交易量 $\boldsymbol{Y}_{T+1}$。这里允许卖空，因此投资组合决策 $\boldsymbol{x}$ 不受约束（允许$\boldsymbol{x}<0$）。

我们特别采用 Goyenko等人 [2024], 的设定，其中假设不确定性存在于交易量 $\boldsymbol{Y}$而非超额收益 $\boldsymbol{e}$中。此处，交易成本采用二次型建模:

$$c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y}_{T+1}) := \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)^\top \Lambda(\boldsymbol{Y}_{T+1})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0), \tag{12}$$

其中， $\boldsymbol{x}^0$ 表示初始投资组合头寸。成本矩阵 $\Lambda(\boldsymbol{Y}_{T+1}) := \bar{\lambda}\text{Diag}(\exp\{-\boldsymbol{Y}_{T+1}\})$ 捕捉了交易量与交易成本之间的反比关系，其中包含一个缩放参数 $\lambda>0$。

求解模型。 在详细说明各个模型的求解方法之前，为简化分析，我们进一步假设 $\Sigma=\delta^2 I_n$。在此假设下，最大化 (11) 等价于求解以下最小化问题

$$\min_{\boldsymbol{x}} \pi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{Y}_{T+1}) := (\boldsymbol{x}-\mu_0\boldsymbol{e})^\top D_1(\boldsymbol{x}-\mu_0\boldsymbol{e}) + (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)^\top D_2(\boldsymbol{Y}_{T+1})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0), \tag{13}$$

其中 $D_1=\mu_1\boldsymbol{I}_n$ 且

$$D_2(\boldsymbol{Y}_{T+1}) = \mu_2\text{Diag}(\exp\{-\boldsymbol{Y}_{T+1}\}) \tag{14}$$

其中 $\mu_0=\frac{A}{\gamma\delta^2}$、 $\mu_1=\frac{\gamma\delta^2}{-2A}$ 和 $\mu_2=\frac{\lambda}{2}$。

PTO。 给定点预测 $\hat{\boldsymbol{Y}}_{T+1} := \hat{\boldsymbol{Y}}_{T+1}(\boldsymbol{Y})$，最优决策为

$$\boldsymbol{x}_{\text{PTO}} = (D_1+D_2^{\text{PTO}})^{-1}\left(\mu_0 D_1\boldsymbol{e} + D_2^{\text{PTO}}\boldsymbol{x}^0\right), \tag{15}$$

其中 $D_2^{\text{PTO}} = D_2(\hat{\boldsymbol{Y}}_{T+1})$。

ETO。 根据（13），期望成本可简化为

$$\rho(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi}) = (\boldsymbol{x}-\mu_0\boldsymbol{e})^\top D_1(\boldsymbol{x}-\mu_0\boldsymbol{e}) + \left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0\right)^\top \mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}_{T+1}|\boldsymbol{\xi}}[D_2(\boldsymbol{Y}_{T+1})]\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0\right). \tag{16}$$

因此，对于给定的一组估计参数 $\boldsymbol{\xi}_{\text{ETO}} := (\Phi,\ \Theta,\ \Sigma_\epsilon)$，最优决策为

$$x_{\text{ETO}} = (D_1+D_2^{\text{ETO}})^{-1}\left(\mu_0 D_1\boldsymbol{e} + D_2^{\text{ETO}}\boldsymbol{x}^0\right), \tag{17}$$

其中 $D_2^{\text{ETO}} = \mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}_{T+1}|\hat{\boldsymbol{\xi}}_{\text{ETO}}}[D_2(\boldsymbol{Y}_{T+1})]$。此外，注意到对于所有时间$t\in[T+1]$，$\boldsymbol{Y}_t \sim N(\boldsymbol{0},\ \Gamma_{\boldsymbol{Y}_t|\boldsymbol{\xi}}(0))$。记 $\boldsymbol{\gamma}^2(\boldsymbol{\xi}) = \text{diag}\left(\Gamma_{\boldsymbol{Y}_{T+1}|\boldsymbol{\xi}}(0)\right)$。因此

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}_{T+1}|\boldsymbol{\xi}}[D_2(\boldsymbol{Y}_{T+1})] = \mu_2\text{Diag}\left(\exp\left\{\frac{\boldsymbol{\gamma}^2(\boldsymbol{\xi})}{2}\right\}\right). \tag{18}$$

关于估计$\Gamma_{\boldsymbol{Y}_{T+1}}(0)$的详细信息见附录 C。

基于 FPtP 的 ETO。 FPtP 方法生成 M 预测样本 $\hat{\boldsymbol{Y}}_{T+1} := (\hat{\boldsymbol{Y}}^{(m)}{}_{T+1})_{m=1}^M$ 及权重 $\boldsymbol{w} := (w_m)_{m=1}^M$，从而得到最优决策

$$\boldsymbol{x}_{\text{FPtP}} = (D_1+D_2^{\text{FPtP}})^{-1}\left(\mu_0 D_1\boldsymbol{e} + D_2^{\text{FPtP}}\boldsymbol{x}^0\right), \tag{19}$$

其中 $D_2^{\text{FPtP}} = \sum_{m=1}^M w_m D_2(\hat{\boldsymbol{Y}}^{(m)}{}_{T+1})$.

A-OVE. 我们针对由参数 $\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Theta},\Sigma_\epsilon)$ 指定的向量自回归移动平均(p,q)模型下的投资组合优化问题，提出了一种 OVE 模型。在假设 2.4 和 3.1 下，我们可以应用定理 2.3。

Cor推论 3.3. 对于任意先验分布 $u\sim\boldsymbol{\xi}$，(OVE) 的唯一优化器具有闭式解 *solution*

$$\boldsymbol{x}_{OVE}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) = \left(\bar{D}_1^{OVE}+\bar{D}_2^{OVE}\right)^{-1}\left(\mu_0\bar{D}_1^{OVE}\boldsymbol{e} + \bar{D}_2^{OVE}\boldsymbol{x}^0\right), \tag{A-OVE}$$

其中

$$\bar{D}_1^{OVE} = c_1(\hat{\boldsymbol{\xi}};u)D_1 \quad \textit{and} \quad \bar{D}_2^{OVE} = C_2(\hat{\boldsymbol{\xi}};u), \tag{20}$$

with

$$\begin{aligned} c_1(\hat{\boldsymbol{\xi}};u) &:= \int u(\boldsymbol{\xi})g_1(\hat{\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} \\ C_2(\hat{\boldsymbol{\xi}};u) &:= \int u(\boldsymbol{\xi})\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}_{T+1}|\boldsymbol{\xi}}[D_2(\boldsymbol{Y}_{T+1})]g_1(\hat{\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}. \end{aligned} \tag{21}$$

注意，通过式（18）可以针对每个 $\boldsymbol{\xi}$ 计算 $\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}_{T+1}|\boldsymbol{\xi}}[D_2(\boldsymbol{Y}_{T+1})]$ 。量 c_1 和 C_2 可以根据先验分布 u进行蒙特卡洛抽样近似，而加权函数 g_1 可由式（10）获得。算法1给出了求解（A-OVE）的伪代码；PTO、ETO和FPtP的实现细节见附录D。我们指出，所提出的求解A-OVE算法可以扩展到向量自回归移动平均（VARMA）(p, q)过程下的其他优化设定。

算法1 METHODSOLVE：A-OVE

要求： 先验分布 u； $\boldsymbol{\xi}$的采样参数数量，N_{ove}；样本长度 T；样本 $\boldsymbol{Y}$；常数 $\mu_0, D_1, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{x}^0$

为 $i = 1, ..., N_{\text{ove}}$生成参数 $\boldsymbol{\xi}_i \sim u$
对 $i = 1$ **到** N_{ove} **do**
  $D_2^i \leftarrow \mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}_{T+1}|\boldsymbol{\xi}_i}[D_2(\boldsymbol{Y}_{T+1})]$ ▷ via (18)
  $g_1^i \leftarrow g_1(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\xi}_i)$ ▷ via (10)
  $C_2^i \leftarrow D_2^i \cdot g_1^i$
结束循环
$c_1 \leftarrow \frac{1}{N_{\text{ove}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{ove}}} g_1^i$ ▷在 (21) 中近似 c_1
$C_2 \leftarrow \frac{1}{N_{\text{ove}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{ove}}} C_2^i$ ▷近似 C_2 见式 (21)
$\bar{D}_1^{\text{OVE}} \leftarrow c_1 D_1$
$\bar{D}_2^{\text{OVE}} \leftarrow C_2$
$\boldsymbol{x}_{\text{OVE}} \leftarrow \left(\bar{D}_1^{\text{OVE}} + \bar{D}_2^{\text{OVE}}\right)^{-1} \left(\mu_0 \bar{D}_1^{\text{OVE}} \boldsymbol{e} + \bar{D}_2^{\text{OVE}} \boldsymbol{x}^0\right)$
返回 $\boldsymbol{x}_{\text{OVE}}$

4 数值实验

我们针对投资组合优化问题 (16)，评估所提出的 A-OVE 模型与若干基准方法的表现。首先，我们在合成数据上测试这些模型，此时数据生成过程是受控的。下一小节中，我们使用真实世界金融数据，此时建模假设仅近似成立。为简单起见，我们在实验中假设 VARMA(1,1)。

基准方法。我们考虑四种 PTO 模型：PTO-RNN（循环神经网络）、PTO-LSTM（长短期记忆网络）、PTO-RF（随机森林）和 PTO-XGB（XGBoost）。此外，我们还针对基于树的模型实现了 FPtP 实现下的 ETO 变体，即 FPtP-RF 和 FPtP-XGB。我们还纳入了一个参数化 ETO 基线，该方法通过最大似然估计 VARMA 模型。在所有方法中，只有 A-OVE 和参数化 ETO 显式利用了假设的 VARMA 结构。对于所有机器学习模型，均允许使用最多 $S = 10 > p$ 个时期的历史数据作为协变量。完美信息预言机掌握真实的 $\boldsymbol{\xi}$，用作计算相对遗憾的基准。

4.1 合成数据上的数值结果

实验设计。我们考虑两种设置。在正确设定 的设置中，数据由与 A-OVE 和 ETO 所用假设一致的 VARMA(1，1) 模型生成。在模型设定错误 的设置中，数据由高阶 VARMA(p, q) 过程生成，而 A-OVE 和 ETO 仍假设数据符合 VARMA(1，1) 设定。

为评估不同参数范围内的性能，我们从参数空间上的先验分布中独立抽取 N_o 个 $\boldsymbol{\xi}_o$预言机参数向量。对于每个预言机参数，我们生成 N_s 个长度为 T 的独立时间序列样本 $\boldsymbol{Y}_i^o$。每个模型针对每个样本生成一个投资组合决策 $\boldsymbol{x}_i^o(\boldsymbol{Y}_i^o)$，并将其与预言机的决策 $\boldsymbol{x}_*^o$进行比较评估。具体而言，我们计算相对遗憾值， $r_i^o = (\rho(\boldsymbol{x}_i^o(\boldsymbol{Y}_i^o); \boldsymbol{\xi}_o) - \rho(\boldsymbol{x}_*^o; \boldsymbol{\xi}_o))/\rho(\boldsymbol{x}_*^o; \boldsymbol{\xi}_o)$。给定真实参数 $\boldsymbol{\xi}_o$ 时的平均相对遗憾，随后可在各数据集之间取平均： $R_o = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} r_i^o$。对于每个预言机，我们通过对各样本的实现成本取平均来近似样本外性能，从而得到经验估计值 $\hat{\sigma}_{\text{syn}}^o$。再将其与预言机基准成本 ρ_*^o 进行比较；该基准成本定义为完美信息下的最优成本。总体性能以各预言机参数下的平均相对遗憾来概括。算法 2详细描述了评估流程。

算法 2 合成数据评估

要求： 预言机数量 N_o；每个预言机的样本数 N_s；预言机参数集 Ξ^{ora}；样本长度 T；
样本集 $\{\mathcal{Y}_o\}_{o=1}^{N_o}$；常数 $\mu_0, D_1, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{x}^0$

对 $\boldsymbol{\xi}_o$ **中的每个** Ξ^{ora} **执行**
  $\boldsymbol{x}_*^o \leftarrow \arg\min_{\boldsymbol{x}} \rho(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi}_o)$
  $\rho_*^o \leftarrow \rho(\boldsymbol{x}_*^o; \boldsymbol{\xi}_o)$
  对于 $\boldsymbol{Y}_i^o$**属于** $\mathcal{Y}_o$ **执行**
    $\boldsymbol{x}_i^o \leftarrow$ 方法S求解$(\boldsymbol{Y}_i^o)$
    $\rho_i^o \leftarrow \rho(\boldsymbol{x}_i^o;\ \boldsymbol{\xi}_o)$ ▷ via (16)
    $r_i^o \leftarrow (\rho_i^o - \rho_*^o)/\rho_*^o$
  结束循环
  $\hat{\sigma}^o_{\text{同步}} \leftarrow \frac{1}{N_s}\sum_{i=1}^{N_s} \rho_i$ ▷ (3) 的近似
  $R_o \leftarrow \frac{1}{N_s}\sum_{i=1}^{N_s} r_i^o$
结束循环

返回 $\frac{1}{N_o}\sum_{o=1}^{N_o} R_o$

除决策性能外，我们还使用均方误差（MSE）评估预测准确度，该指标通过滚动评估方案计算。有关模拟设置和实验结果的更多详情，请参阅附录 E.2。

表1：设定正确情形的汇总结果。

模型	时间（秒）			MSE			相对遗憾（%）		
	$n=2$	$n=5$	$n=10$	$n=2$	$n=5$	$n=10$	$n=2$	$n=5$	$n=10$
A-OVE	1.56	3.18	3.37	-	-	-	**0.21**	**0.18**	**0.08**
ETO	1.20	4.45	13.44	**20.05**	**21.21**	59.56	0.33	0.31	0.41
PTO-RNN	**0.25**	**0.27**	0.43	23.14	21.32	**20.86**	38.85	27.00	16.95
PTO-LSTM	0.31	0.31	**0.33**	23.80	22.36	21.99	15.02	18.23	10.55
PTO-RF	0.43	0.44	0.45	26.22	27.90	26.96	47.53	34.62	17.15
PTO-XGB	1.30	3.06	5.25	30.29	31.68	30.50	69.46	49.27	28.81
FPTP-RF	0.43	0.44	0.45	26.22	27.90	26.96	14.66	14.58	5.33
FPTP-XGB	1.30	3.06	5.25	30.29	31.68	30.50	36.69	28.14	17.15

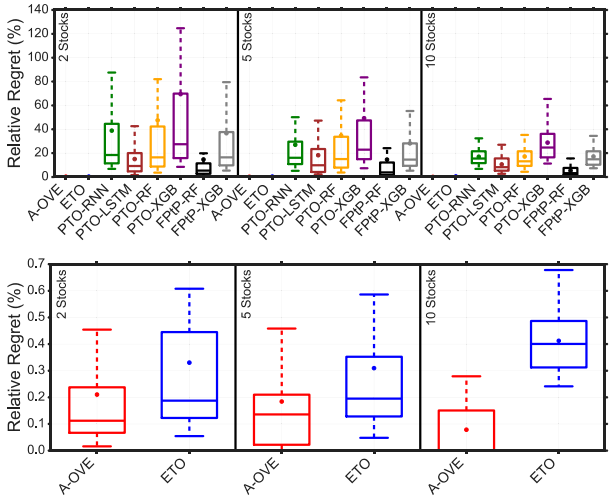

图 1：设定正确的情形下的相对遗憾。

设定正确的情形。我们首先考虑投资组合问题（13），其中包含 $n = 2$、5和10种资产，预言机参数为 $\boldsymbol{\xi} = (\Phi、\ \Theta、\ \Sigma_\epsilon)$，由一个 VARMA(1、1) 过程生成。图1报告了不同预言机参数下相对遗憾的箱线图，表1总结了结果。在所有

维度下，A-OVE始终实现最低的平均相对遗憾，且波动最小，表现接近预言机性能。由于设定正确，ETO的性能良好，其后悔值与A-OVE处于同一数量级。然而，VARMA模型的参数估计方法向来以不稳定著称 [Dufour和Pelletier，2002]。当股票数量达到10只时，这类不准确性的影响便显现出来：我们可以看到ETO的性能显著下降。模型运行时间也大幅增加。

无论采用 PTO 还是 FPtP 实现，基于机器学习的方法产生的后悔值都显著高于 A-OVE 和 ETO。随着资产数量增加，这一差距会缩小，因为更高的信息维度提升了它们的预测准确度。我们还再次观察到 Bertsimas 和 Kallus [2020] 所指出的结果：FPtP 的表现显著优于相应的 PTO 方法，这证实了在 π 中基于点估计进行优化，相较于优化期望成本 ρ会引入显著偏差。

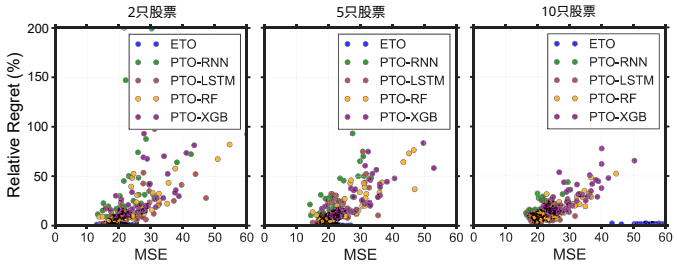

图2：设定正确的情形下，相对遗憾与均方误差的关系。

图2展示了不同问题维度下相对遗憾与预测准确度之间的关系。对于每种机器学习方法，相对遗憾往往会随着预测误差的降低而减小，并且也会随着维度增加而减小，这表明提高准确度确实有助于降低后悔值。不过，值得注意的是，后悔值最低的方法未必具有最高的准确度。这一观察凸显了最小化预测误差与优化下游决策表现之间存在根本性的错位。

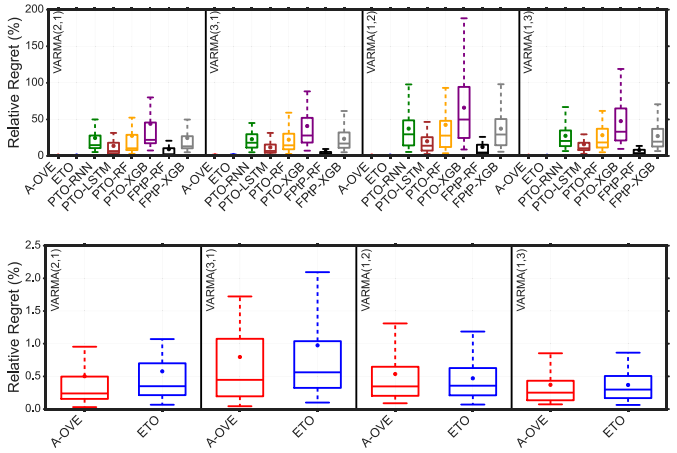

图3：模型设定错误下的相对遗憾。

设定错误的情形。 接下来，我们评估模型轻微设定错误时的稳健性。我们将股票数量固定为 $n = 5$，因为在 $n = 10$时，ETO 在数值上会变得不稳定。我们通过改变 p 或 q中的一个，同时将另一个固定为 1，从假设的 VARMA(1, 1) 类之外的 VARMA(p, q) 过程中生成数据。图3报告了模型设定错误情况下的相对遗憾。在大多数情形下，A-OVE 仍然实现了最低的后悔值，ETO 的后悔值则与之相近。有趣的是，不受 VARMA 设定约束、因而不会受到模型设定错误影响的机器学习方法，也未能赶上 A-OVE 和 ETO。我们进一步确认，这些方法的准确率确实有所提升，在某些情况下显著优于 ETO；因此，仅凭更高的准确率不足以弥合决策质量方面的差距。

即使在设定错误的情形下，ETO 仍表现出不寻常的稳定性，这一点也反映在文献中 [Elmachtoub 和 Grigas, 2022]。由于 A-OVE 在计算过程中非常依赖 VARMA 设定所提供的信息（通过 g_1 和 ρ），因此可以预期，模型设定错误对 A-OVE 的影响将超过其本身的程度。当参数 q存在模型设定错误时，这种影响比参数 p存在设定错误时更大。我们推测，当 q 较大时，移动平均成分带来的降噪效果更明显，从而使 ETO 表现更好；而 A-OVE 则不会因此退化，因为它通过抽样效应将噪声纳入考量。有关模型设定错误情况下结果的更多细节，请参阅附录 E.2。

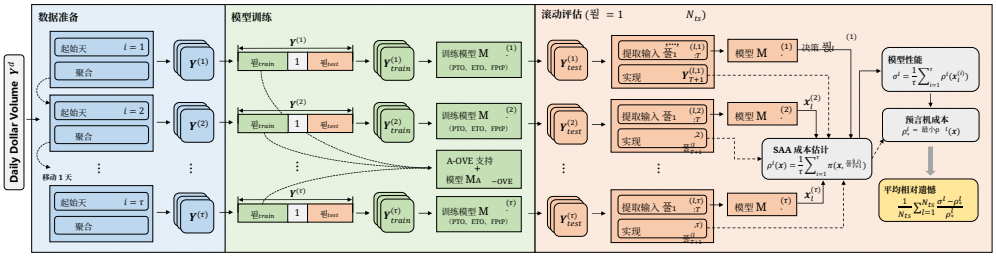

图 4：在真实世界数据上的评估。

4.2 真实世界数据上的数值结果 a

我们使用世界股票价格数据集，将所提出的框架应用于真实世界金融数据。我们的分析聚焦于2010年1月1日至2019年1月1日期间，并排除 COVID-19 时期，以避免极端波动。在此实验中，我们将每个时间段设为 2 周。我们考虑由 $n = 4$ 只股票组成的投资组合——GOOGL、HMC、AXP 和 BAMXF，其双周美元交易量对数可由 VARMA(1，1) 过程很好地描述。

评估流程。 与合成数据的情形不同，我们无法通过生成多个 N_s 数据集来控制抽样效应。相反，我们通过改变汇总 2 周窗口内总交易量时所用的起始日期，为同一参数人为构造不同的数据集；同时假设在这 2 周内生成数据的底层真实参数保持不变。这样一来，我们便可以向模型提供多个被假定为由同一真实参数生成的数据集，并计算其在期望成本 ρ 下的性能，而不是依赖确定性成本 π。

数据准备、模型训练和滚动样本外评估的实现细节见图 4。具体而言，使用滚动窗口将每日美元交易量 $\boldsymbol{Y}^d$ 汇总为τ 移位对数双周序列。对于每个汇总序列 $(\boldsymbol{Y}^{(i)})_{i=1}^{\tau}$，使用训练数据训练一组模型 $\mathcal{M}$，而 A-OVE 则使用所有可用的训练数据构建其参数支持集。样本外性能采用滚动窗口方案进行评估。在每个评估步骤 $l = 1, \ldots\ldots, N_{ts}$，我们从测试数据中提取 τ 个输入–输出对 $(\boldsymbol{Y}_{(l,i)1:T}, \boldsymbol{Y}_{(l,i)T+1})_{i=1}^{\tau}$。基于这些实现值，我们定义经验成本函数 $\rho^l(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{\tau} \pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y}_{(l,i)T+1})$，它作为评估步骤 l处真实期望成本的样本平均近似。每个训练好的模型根据输入 $\boldsymbol{Y}_{(l,i)1:T}$ 生成一个决策 $\boldsymbol{x}_l^{(i)}$。随后，对所有 τ 个汇总序列上的实现成本取平均，以衡量模型的性能。此外，通过直接最小化 $\rho^l(\boldsymbol{x})$ 计算出预言机决策 $\boldsymbol{x}_*^l$。我们报告所有滚动评估窗口 $\frac{1}{N_{ts}}\sum_{l=1}^{N_{ts}} \frac{\sigma^l - \rho_*^l}{\rho_*^l}$ 上的平均相对遗憾，作为各模型相对于预言机的样本外性能。

结果。表 2 报告了不同方法在真实世界金融数据上的预测准确度、计算时间和相对遗憾。A-OVE 始终能实现较低的相对遗憾，表现与最强的基于预测的方法相当或更佳。有趣的是，PTO方法的性能如今会因预测模型的选择而出现较大差异。在 PTO 情形下，神经网络模型相较于其他机器学习模型表现强劲，不过 FPtP-RF 在机器学习模型中仍表现最佳。与其他学习器相比，神经网络模型的均方误差也显著更低，但其遗憾值未必低于某些

预测误差是其两倍的模型；这再次印证了这样一种认识：即使在真实世界数据设定下，预测准确度也不能保证决策质量。

表2：真实世界测试的汇总结果。

方法	时间（秒）	MSE	相对遗憾（%）
A-OVE	0.19	-	**0.02**
ETO	**0.00**	0.53	**0.02**
PTO-RNN	**0.00**	0.25	0.04
PTO-LSTM	**0.00**	**0.23**	0.03
PTO-RF	0.18	0.44	1.89
PTO-XGB	0.03	1.36	327.82
FPTP-RF	0.18	0.44	**0.02**
FPTP-XGB	0.03	1.36	1.94

5 结论与更广泛影响

我们的结果表明了情境优化中的几项重要原则。首先，预测准确度并不能保证良好的决策。通常，最准确的模型并不能给出最低的后悔值，有时决策最优的模型的预测误差甚至可能是最准确模型的两倍。这一点不仅在仿真中得到验证，即便在真实世界数据的实验中也同样如此。这确实对当前机器学习以预测准确度为核心的发展方向提出了质疑。现实世界中的许多决策并非预测任务。虽然预测有助于决策，但二者的关系可能是非线性的。与此同时，相对于对学习模型的探索，关注情境学习与端到端学习的社群相对较小。

其次，我们认为，实验更清晰地呈现了求解PTO（而非ETO）时所引入偏差的证据。在我们的所有实验中，FPtP显著降低了其对应PTO方法的后悔值，且计算时间并未受到显著惩罚。今后，我们建议在不确定性下进行决策时，默认使用FPtP来替代PTO。

第三，我们的实验表明样本外方法具有明显潜力，例如 Feng 和 Shanthikumar [2023]，Besbes 和 Mouchtaki [2023]以及 Loke 等人 [2023]。可以想见，若赋予 OVE 对上下文作出反应的能力，其表现会更好。我们希望本文工作能让人们更加关注这一类方法及其相关技术。

本研究引出了若干未来研究方向。在理论方面，现有关于样本外方法的文献仍有很大拓展空间。基于我们的实验，我们认为若能设计出 OVE 的情境版本，将具有重要价值。此外，OVE 确实因模型设定错误而出现性能下降。若能开发 OVE 的非参数版本，这类缺陷有望得到缓解，从而使其摆脱对参数假设的依赖。值得注意的是，定理 3.2 已经表明，Loke 等人 [2023] 的理论对充分统计量的依赖在一定程度上有可能被减弱。

从实践角度来看，我们的工作只是对投资组合优化问题中的样本外最优方法进行的一项单独检验。值得探讨的是，我们的结论是否适用于当前设定以外的情形。

参考文献

D. den Hertog 和 K. Postek。弥合预测分析与处方分析之间的差距：需要新的优化方法。可见于 Optimization Online，2016年。

Velibor V Miši´c 和 Georgia Perakis。运营管理中的数据分析：综述。《*Manufacturing & Service Operations Management*》，22(1)：158–169，2020年。

Kris Johnson Ferreira、Bin Hong Alex Lee 和 David Simchi-Levi。在线零售商的数据分析：需求预测与价格优化。《*Manufacturing & service operations management*》，18(1)：69–88，2016年。

Sheng Liu、Long He 和 Zuo-Jun Max Shen。准时最后一公里配送：利用行程时间预测器进行订单分配。《管理科学》，67(7)：4095–4119，2021年。

Meng Qi、Paul Grigas 和 Zuo-Jun Max Shen。集成条件估计-优化。*arXiv* 预印本 *arXiv:2110.12351*，2021年。

Vishal Gupta 和 Paat Rusmevichientong。具有不确定目标的小样本、大规模线性优化。《管理科学》，67(1):220–241，2021年。D. Bertsimas 和 N. Kallus。从预测到处方分析。《管理科学》，66 1044，2020 3 1025( ): – 。Laksiri H. Liyanage 和 J. George Shanthikumar。基于运营统计的实用库存控制策略。《运筹学快报》，33(4):341–348，2005年。Nishanth Mundru。运筹学与机器学习中的预测和处方方法：一种优化方法。博士论文，麻省理工学院，2019年。Yichun Hu、Nathan Kallus 和 Xiaojie Mao。情境线性优化的快速收敛率。《管理科学》，68(6):4236–4245，2022年。G.G. Loke、Q. Tang 和 Y. Xiao。决策驱动正则化：一种先预测后优化的融合模型。可见于 *SSRN 3623006*，2022年。A.N. Elmachtoub 和 P. Grigas。智能“先预测，后优化”。《管理科学》，68(1):9–26，2022年。Utsav Sadana、Abhilash Chenreddy、Erick Delage、Alexandre Forel、Emma Frejinger 和 Thibaut Vidal。面向不确定性下决策的情境优化方法综述。《欧洲运筹学杂志》，315(2):475–492，2024。Priya L. Donti、Brandon Amos 和 J. Zico Kolter。随机优化中的基于任务的端到端模型学习。载于《神经信息处理系统进展》，第30卷，2017年。Rohit Kannan、Güzin Bayraksan 和 James R Luedtke。结合协变量信息的基于残差的分布鲁棒优化。《数学规划》，207(1):369–425，2024。Melvyn Sim、Qinshen Tang、Minglong Zhou 和 Taozeng Zhu。稳健满意化的分析：预测、优化、满意化，再加固。第《运筹学》页，2024。Adrián Esteban-Pérez 和 Juan M Morales。基于修剪的、结合辅助信息的分布鲁棒随机规划。《数学规划》，195(1):1069–1105，2022年。Bo Tang 和 Elias B Khalil。PyEPO：基于 PyTorch 的线性与整数规划端到端先预测后优化库。《数学规划计算》，16(3):297–335，2024年。Q. Feng 和 J.G. Shanthikumar。参数化与非参数化运营数据分析框架。《生产与运营管理》，32(9):2685–2703，2023年。O. Besbes 和 O. Mouchtaki。你的数据究竟需要多大规模？数据驱动的报童问题：逐个样本学习。《管理科学》，69(10):5848–5865，2023年。Gar Goei Loke、Taozeng Zhu 和 Ruiting Zuo。经由估计优化：如何修正数据驱动优化中抽样不确定性导致的有限样本偏差。可见于 SSRN：https://ssrn.com/abstract 4561006 10 2139 4561006, 2023

or http://dx.doi.org/ 。 /ssrn。9月。网址 https://ssrn.com/ abstract=4561006。Albert S Kyle。连续竞价与内幕交易。《计量经济学：计量经济学会杂志》，第1315–1335页，1985年。Nicolae Gârleanu 和 Lasse Heje Pedersen。考虑摩擦的动态投资组合选择。《经济理论杂志》，165:487–516，2016年。Andrea Frazzini、Ronen Israel 和 Tobias J Moskowitz。交易成本，第3229719卷。SSRN，2018年。Ruslan Goyenko、Bryan T Kelly、Tobias J Moskowitz、Yinan Su 和 Chao Zhang。交易量阿尔法。技术报告，美国国家经济研究局，2024年。Sahib Esa 和 Georgi Boshnakov。具有若干固定参数的 ARMA 模型的充分统计量。《统计学通讯：理论与方法》，27(5):1083–1099，1998年。M Kharrati-Kopaei、AR Nematollahi 和 Z Shishebor。关于多元 ARMA 模型的充分统计量：近似方法。《统计论文》，50:261–276，2009年。Jean-Marie Dufour 和 Denis Pelletier。用于估计 VARMA 模型的线性方法及其宏观经济应用。载于联合统计会议——商业与经济统计分会，第2659–2664页，2002年。Peter J Brockwell 和 Richard A Davis。时间序列：理论与方法。施普林格科学与商业媒体，1991年。Helmut Lütkepohl。多元时间序列分析新导论。施普林格科学与商业媒体，2005年。

A 补充材料：延后证明

本节给出第 2 节和第 3 节中所述结果的证明。为方便读者，每个结果都在其证明之前重述。

定理 2.3。设 $\boldsymbol{\xi} \in \Xi \subseteq \mathbb{R}^r$ 是关于 $\boldsymbol{\xi}$ 的任意充分统计量，其费舍尔–内曼因子分解为 $L(\boldsymbol{Y}; \boldsymbol{\xi}) = g_0(\boldsymbol{Y}) g_1(\hat{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{Y}), \boldsymbol{\xi})$，其中 g_0 和 g_1 非负。设 $\mathcal{X}(\hat{\boldsymbol{\xi}})$ 为可行函数集合，其中的函数可表示为充分统计量 $\boldsymbol{\xi}$ 的函数：

$$\mathcal{X}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) := \left\{ \boldsymbol{x} : \mathcal{Y}^K \to \mathcal{B} \,\middle|\, \exists \tilde{\boldsymbol{x}} : \hat{\Xi} \to \mathcal{B}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{Y}) = \tilde{\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{Y})), \forall \boldsymbol{Y} \in \mathcal{Y}^K \right\}.$$

若存在从 $\boldsymbol{Y} \in \mathcal{Y}^K$ 到 $(\hat{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{Y} | \hat{\boldsymbol{\xi}}) \in \hat{\Xi} \times \mathcal{Y}^K$ 的重新参数化，其雅可比行列式非负，记为 $J(\hat{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{Y} | \hat{\boldsymbol{\xi}})$，对所有 $\hat{\boldsymbol{\xi}} \in \hat{\Xi}$ 和 $\boldsymbol{Y} | \hat{\boldsymbol{\xi}} \in \mathcal{Y}^K$ 均成立，则对于固定先验分布 u，在假设 *2.1* 下，

1. 若（OVE）存在最优解，则可在 $\mathcal{X}(\hat{\boldsymbol{\xi}})$ 中找到一个。*2.* 函数 $\boldsymbol{x}_{OVE}$（若存在）在 $\hat{\boldsymbol{\xi}}$上逐点定义，且为先验最优，即：

$$\boldsymbol{x}_{OVE}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) \in \arg\min_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}} \beth(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}), \quad \textit{where} \quad \beth(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\xi} \sim u} \left[\rho(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi}) g_1(\hat{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\xi}) \right].$$

3. 此外，若假设 *2.2*成立，则 $\boldsymbol{x}_{OVE}$ 存在且唯一。

定理 2.3 的证明。证明见 Loke 等人 [2023]。 □

定理 3.2。考虑一个向量自回归移动平均(p, q) 过程 $\boldsymbol{Y}$，其参数为 $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Theta}, \Sigma_\epsilon)$，并满足假设 *2.4* 和 *3.1*。则存在一个前向变换 $\{\boldsymbol{W}_t\}$ 及其对应的一步预测器 $\{\hat{\boldsymbol{W}}_t\}$，使得 $\boldsymbol{Y}$的精确似然具有费舍尔–内曼分解：

$$L(\boldsymbol{Y}; \boldsymbol{\xi}) = g_0(\boldsymbol{Y}) g_1(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\xi}),$$

其中

$$g_0(\boldsymbol{Y}) = (2\pi)^{-\frac{nT}{2}}, \quad g_1(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\xi}) = \left(\prod_{t=1}^{T} \det(\Sigma_t) \right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{ -\frac{h(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\xi})}{2} \right\}.$$

这里，

$$h(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{t=1}^{T} (\boldsymbol{W}_t - \hat{\boldsymbol{W}}_t)^\top \Sigma_t^{-1} (\boldsymbol{W}_t - \hat{\boldsymbol{W}}_t),$$

预测误差 $\boldsymbol{W}_t - \hat{\boldsymbol{W}}_t$ 的协方差矩阵 Σ_t 可见附录 *A*。

定理 3.2 的证明。 按照 Brockwell 和 Davis [1991], 提出的将 VARMA(p, q) 模型应用于后向变换过程的创新算法，我们采用 Esa 和 Bosh- nakov [1998] 以及 Kharrati-Kopaei 等人 [2009] 的方法，为前向变换过程推导创新算法。由此，我们可以得到 VARMA(p, q) 模型的似然函数。

我们从一个满足假设 2.4 和 3.1 的 VARMA(p, q) 过程开始。在这些条件下，该过程具有等价的前向表示：

$$\boldsymbol{Y}_t - \sum_{i=1}^{p} \Phi_i \boldsymbol{Y}_{t+i} = \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_t + \sum_{i=1}^{q} \Theta_i \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{t+i},$$

其中，$\{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_t\} \sim \mathrm{WN}(\boldsymbol{0}, \Sigma_\epsilon)$ 与 $\{\boldsymbol{\epsilon}_t\}$具有相同的分布。为简化记号，我们仍将该白噪声序列记为 $\boldsymbol{\epsilon}_t$。

令 $l = \max\{p, q\}$，并定义变换 $\boldsymbol{W}_t$ 如下：

$$\boldsymbol{W}_t = \begin{cases} \boldsymbol{Y}_t - \sum_{i=1}^{p} \Phi_i \boldsymbol{Y}_{t+i} & t \in [T - l], \\ \boldsymbol{Y}_t & t \in [T - l + 1, T]. \end{cases}$$

引理 A.1 刻画其协方差结构，利用这一结果，我们可以推导出前向变换过程的创新算法，该算法陈述于引理 A.2。值得注意的是，从 $\boldsymbol{Y}_t$ 到 $\boldsymbol{W}_t$ 的变换的雅可比行列式等于 1。因此，序列 $\{\boldsymbol{W}_t\}$ 保留了 $\boldsymbol{Y}$ 中包含的全部概率信息。变换过程 $\{\boldsymbol{W}_t\}$ 的精确似然函数因此为

$$L(\boldsymbol{Y}; \boldsymbol{\xi}) = (2\pi)^{-\frac{nT}{2}} \left(\prod_{t=1}^{T} \det(\Sigma_t) \right)^{-\frac{1}{2}} \times \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{R}_t^\top \Sigma_t^{-1} \boldsymbol{R}_t \right\}$$

其中 $\boldsymbol{R}_t = \boldsymbol{W}_t - \hat{}\boldsymbol{W}_t$。应用费舍尔–内曼因子分解定理，似然函数可以表示为分解形式

$$L(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{\xi}) = g_0(\boldsymbol{Y})g_1(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\xi}),$$

其中

$$g_0(\boldsymbol{Y}) = (2\pi)^{-\frac{nT}{2}}, \quad g_1(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\xi}) = \left(\prod_{t=1}^{T}\det(\Sigma_t)\right)^{-\frac{1}{2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{R}_t^\top \Sigma_t^{-1}\boldsymbol{R}_t\right\}.$$

□

引理 A.1. 令 $\Gamma_{\boldsymbol{W}}(t,t-h)$ 表示 $\boldsymbol{W}_t$ 与其滞后 h 期值之间的协方差，其中 $h \geq 0$。*Th en*

$$\Gamma_{\boldsymbol{W}}(t,t-h) = \begin{cases} \Gamma_{\boldsymbol{Y}}(h), & 0 \leq h < l,\ T-l < t \leq T, \\ \Gamma_{\boldsymbol{Y}}(h) - \sum_{i=1}^{p}\Phi_i\,\Gamma_{\boldsymbol{Y}}(h-i), & t+l-T \leq h < t+2l-T,\ T-l < t \leq T, \\ \sum_{i=0}^{q-h}\Theta_i\Sigma_\epsilon\Theta_{i+h}^\top, & 0 \leq h \leq q,\ 1 \leq t \leq T-l, \\ \mathbf{0}_{n\times n}, & \textit{otherwise.} \end{cases} \tag{22}$$

其中 $\Gamma_{\boldsymbol{Y}}(h)$ 是 $\boldsymbol{Y}_t$ 在滞后 h 期的协方差矩阵。

引理 A.1 的证明。我们通过考察以下几种情况来计算 $\Gamma_{\boldsymbol{W}}(t,t-h)$:

- If $T-l < t-h \leq t \leq T$, then $\Gamma_{\boldsymbol{W}}(t,t-h) = Cov(\boldsymbol{Y}_t, \boldsymbol{Y}_{t-h}) = \Gamma_{\boldsymbol{Y}}(h)$.
- If $T-2l < t-h \leq T-l < t \leq T$, then

$$\Gamma_{\boldsymbol{W}}(t,t-h) = Cov(\boldsymbol{Y}_t, \boldsymbol{Y}_{t-h} - \sum_{i=1}^{p}\Phi_i\boldsymbol{Y}_{t-h+i}) = \Gamma_{\boldsymbol{Y}}(h) - \sum_{i=1}^{p}\Phi_i\Gamma_{\boldsymbol{Y}}(h-i)$$

- If $t-q \leq t-h \leq t \leq T-l$, then

$$\begin{aligned}\Gamma_{\boldsymbol{W}}(t,t-h) &= Cov(\boldsymbol{Y}_t - \sum_{i=1}^{p}\Phi_i\boldsymbol{Y}_{t+i}, \boldsymbol{Y}_{t-h} - \sum_{i=1}^{p}\Phi_i\boldsymbol{Y}_{t-h+i}) \\ &= Cov(\boldsymbol{\epsilon}_t + \sum_{i=1}^{q}\Theta_i\boldsymbol{\epsilon}_{t+i}, \boldsymbol{\epsilon}_{t-h} + \sum_{i=1}^{q}\Theta_i\boldsymbol{\epsilon}_{t-h+i}) \\ &= \sum_{i=0}^{q-h}\Theta_i\Sigma_\epsilon\Theta_{i+h}^\top\end{aligned}$$

  where $\Theta_0 = \mathbf{I}_{n\times n}$

- Otherwise, $\Gamma_{\boldsymbol{W}}(t,t-h) = \mathbf{0}_{n\times n}$

重新整理上述各情况的取值范围后，即可得到引理 A.1 中所述的表达式。 □

引理 A.2 ($\{\boldsymbol{W}_t\}$的创新算法**)**。变换后的过程 $\{\boldsymbol{W}_t\}$的一步预测器为

$$\hat{\boldsymbol{W}}_t = \begin{cases} 0 & t = 1, \\ \sum_{j=1}^{t-1}\Theta_{t-1,j}(\boldsymbol{W}_{t-j} - \hat{\boldsymbol{W}}_{t-j}) & t \in [2,T], \end{cases} \tag{23}$$

$\hat{}$，预测误差的协方差矩阵 Σ_t $\boldsymbol{R}_t = \boldsymbol{W}_t - \boldsymbol{W}_t$ 由下式给出

$$\Sigma_t = \begin{cases} \Gamma_{\boldsymbol{W}}(1,1) & t = 1, \\ \Gamma_{\boldsymbol{W}}(t,t) - \sum_{j=1}^{t-1}\Theta_{t-1,j}\Sigma_{t-j}\Theta_{t-1,j}^\top & t \in [2,T], \end{cases} \tag{24}$$

其中，系数 $\Theta_{t,j}$ 由以下递推关系确定

$$\Theta_{t,j} = \left(\Gamma_{\boldsymbol{W}}(t+1,t-j+1) - \sum_{k=0}^{t-j-1}\Theta_{t,t-k}\Sigma_{k+1}\Theta_{t-j,t-j-k}^\top\right)\Sigma_{t-j+1}^{-1}, \quad \textit{for } j \in [t],\ t \in [2,T] \tag{25}$$

引理 A.2 的证明。将其应用于前向变换过程 $\{\boldsymbol{W}_t\}$，即可直接由 Brockwell 和 Davis [1991] 中的命题 11.4.2 得出该结果。 □

B 补充材料：向量自回归移动平均(1,1)的充分统计量

正如我们所提到的，Esa 和 Boshnakov [1998], 推导出了单变量 ARMA 过程的充分统计量，而 Kharrati-Kopaei 等人 [2009] 则在固定参数下推导出了多变量 VARMA(1, 1) 情形的显式形式。我们通过直接将定理 3.2 应用于 VARMA(1,1)，扩展了他们的结果；该模型可为 $\boldsymbol{\xi} = (\Phi, \Theta, \Sigma_\epsilon)$ 的充分统计量提供闭式递归表示。

在假设 2.4 和 3.1 下，存在白噪声序列 $\{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_t\} \sim \text{WN}(\mathbf{0}, \Sigma_\epsilon)$，使得

$$\boldsymbol{Y}_t - \Phi \boldsymbol{Y}_{t+1} = \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_t + \Theta \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{t+1}.$$

该表示可用于构造前向变换过程 $\{\boldsymbol{W}_t\}$，其定义为

$$\boldsymbol{W}_t = \begin{cases} \boldsymbol{Y}_t - \Phi \boldsymbol{Y}_{t+1}, & t \in [T-1], \\ \boldsymbol{Y}_T, & t = T, \end{cases}$$

过程 $\{\boldsymbol{W}_t\}$ 具有递归创新表示，该表示在推导似然与充分统计量时起着核心作用。令 $\Gamma_{\boldsymbol{W}}(t, t-h)$ 表示 $\boldsymbol{W}_t$ 的 h 阶滞后协方差，则

$$\Gamma_{\boldsymbol{W}}(t, t-h) = \begin{cases} \Theta \Sigma_\epsilon \Theta^\top + \Sigma_\epsilon, & h = 0,\ t \in [T-1], \\ \Gamma_{\boldsymbol{Y}}(0), & h = 0,\ t = T, \\ \Sigma_\epsilon \Theta^\top, & h = 1,\ t \in [T], \\ \mathbf{0}_{n \times n}, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

其中 $\Gamma_{\boldsymbol{Y}}(0)$ 表示 $\boldsymbol{Y}_t$ 的零阶滞后协方差。将创新定义为 $\boldsymbol{R}_t = \boldsymbol{W}_t - \hat{\boldsymbol{W}}_t$，其协方差为 Σ_t。于是 $\{\boldsymbol{W}_t\}$ 的一步预测器由下式给出

$$\hat{\boldsymbol{W}}_t = \begin{cases} \mathbf{0}, & t = 1, \\ \Theta_{t-1,1} \boldsymbol{R}_{t-1}, & t \in [2, T], \end{cases}$$

其可由 $\{\Theta_{t,1}\}$ 与 $\{\Sigma_t\}$ 递归计算，其中 $\Theta_{t,1} = \Sigma_\epsilon \Theta^\top \Sigma_t^{-1}$，对于 $t \in [T-1]$ 以及

$$\Sigma_t = \begin{cases} \Theta \Sigma_\epsilon \Theta^\top + \Sigma_\epsilon, & t = 1, \\ \Theta \Sigma_\epsilon \Theta^\top + \Sigma_\epsilon - \Theta_{t-1,1} \Sigma_{t-1} \Theta_{t-1,1}^\top, & t \in [2, T-1], \\ \Gamma_{\boldsymbol{Y}}(0) - \Theta_{T-1,1} \Sigma_{T-1} \Theta_{T-1,1}^\top, & t = T. \end{cases}$$

创新 $\{\boldsymbol{R}_t\}$ 可以用 $\{\boldsymbol{\alpha}_t\}$ 和 $\{\boldsymbol{\beta}_t\}$表示。具体而言，我们有

$$\boldsymbol{R}_t = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 - \Phi \boldsymbol{\beta}_1 & t = 1, \\ \boldsymbol{\alpha}_t - \Phi \boldsymbol{\beta}_t + \sum_{j=0}^{t-2} C_{j,t} \Phi \boldsymbol{\beta}_{t-1-j} & t \in [2, T-1], \\ \boldsymbol{\alpha}_T + \Theta_{T-1,1} \Phi \boldsymbol{\beta}_{T-1} - \Theta_{T-1,1} \sum_{j=0}^{T-3} C_{j,T-1} \Phi \boldsymbol{\beta}_{T-2-j} & t = T, \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{Y}_1, \quad \boldsymbol{\alpha}_t = \boldsymbol{Y}_t - \Theta_{t-1,1} \boldsymbol{\alpha}_{t-1}, && \text{for } t \in [2, T], \\ &\boldsymbol{\beta}_t = \boldsymbol{Y}_{t+1}, && \text{for } t \in [T-1], \\ &C_{j,t} = (-1)^{2t-j} \Theta_{t-1,1} \times \cdots \times \Theta_{t-j-1,1}, && \text{for } j \in [0, T-3], t \in [2, T-1]. \end{aligned}$$

在假设 2.4 和 3.1 下，似然函数具有如下分解：

$$L(\boldsymbol{Y}; \boldsymbol{\xi}) = g_0(\boldsymbol{Y}) g_1(\hat{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{Y}), \boldsymbol{\xi}),$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{Y}) = \left((\boldsymbol{Y}_t \boldsymbol{Y}_{t-j}^\top)_{j=0}^{t-1} \right)_{t=1}^{T}$$

构成 $\boldsymbol{\xi}$ 的一组充分统计量，并且

$$g_0(\boldsymbol{Y}) = (2\pi)^{-\frac{nT}{2}}, \quad g_1(\hat{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\xi}) = \left(\prod_{t=1}^{T} \det(\Sigma_t) \right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{ -\frac{h(\hat{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\xi})}{2} \right\}.$$

其中 $h(\hat{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{R}_t^\top \Sigma_t^{-1} \boldsymbol{R}_t$。

C 补充材料：$\Gamma_{\boldsymbol{Y}_t}(0)$的估计

考虑一个参数为 $\boldsymbol{\xi}=(\{\Phi_i\}_{i=1}^p,\ \{\Theta_i\}_{i=1}^q,\ \Sigma_\epsilon)$ 的向量自回归移动平均$(p,\ q)$ 模型，其定义如下：

$$\boldsymbol{Y}_t=\Phi_1\boldsymbol{Y}_{t-1}+\cdots+\Phi_p\boldsymbol{Y}_{t-p}+\boldsymbol{\epsilon}_t+\Theta_1\boldsymbol{\epsilon}_{t-1}+\Theta_q\boldsymbol{\epsilon}_{t-q}.$$

定义增广状态向量 $\boldsymbol{y}_t$ 如下

$$\boldsymbol{y}_t=P\boldsymbol{y}_{t-1}+U_t,$$

其中

$$\boldsymbol{y}_t=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_t,\\ \boldsymbol{Y}_{t-1},\\ \vdots\\ \boldsymbol{Y}_{t-p+1},\\ \boldsymbol{\epsilon}_t,\\ \boldsymbol{\epsilon}_{t-1},\\ \vdots\\ \boldsymbol{\epsilon}_{t-q+1}\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}\Phi_1 & \cdots & \Phi_{p-1} & \Phi_p & \Theta_1 & \cdots & \Theta_{q-1} & \Theta_q\\ I_n & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \mathbf{0} & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \mathbf{0} & \cdots & I_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_n & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & I_n & \mathbf{0}\end{pmatrix},\quad U_t=\begin{pmatrix}\epsilon_t\\ \mathbf{0}\\ \vdots\\ \mathbf{0}\\ \epsilon_t\\ \mathbf{0}\\ \vdots\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}.$$

令 $\Sigma_U=B\Sigma_\epsilon B^\top$，其中 $B=(I_n,\ \mathbf{0},\ .....,\ \mathbf{0},\ I_n,\ \mathbf{0},\ .....,\ \mathbf{0})^\top$。于是，增广状态的平稳协方差矩阵记为 $S=\mathbb{E}[\boldsymbol{y}_t\boldsymbol{y}_t^\top]$，它满足

$$\operatorname{vec}(S)=\left(I_{(p+q)^2n^2}-P\otimes P\right)^{-1}\operatorname{vec}(\Sigma_U),$$

则协方差矩阵 $\Gamma_{\boldsymbol{Y}_t}(0)$ 由 S 的左上角 $n\times n$ 块矩阵给出。

对 $\Gamma_{\boldsymbol{Y}_t}(0)$ 的估计，适用于 向量自回归移动平均(1，1)。对于向量自回归移动平均(1，1)模型这一特殊情形，可以通过考虑一个包含 $\boldsymbol{Y}_t$ 的第二阶滞后且 $\Phi_2=\mathbf{0}$ 的增广过程来得到协方差矩阵 $\Gamma_{\boldsymbol{Y}_t}(0)$；例如参见 Lütkepohl [2005]。具体而言，考虑过程

$$\boldsymbol{Y}_t=\Phi_1\boldsymbol{Y}_{t-1}+\Phi_2\boldsymbol{Y}_{t-2}+\Theta_1\boldsymbol{\epsilon}_{t-1}+\boldsymbol{\epsilon}_t.$$

定义

$$\boldsymbol{y}_t=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_t\\ \boldsymbol{Y}_{t-1}\\ \boldsymbol{\epsilon}_t\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}\Phi_1 & \mathbf{0} & \Theta_1\\ I_n & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix},\quad U_t=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\epsilon}_t\\ \mathbf{0}\\ \boldsymbol{\epsilon}_t\end{pmatrix},\quad \Sigma_U=\begin{pmatrix}\Sigma_\epsilon & \mathbf{0} & \Sigma_\epsilon\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \Sigma_\epsilon & \mathbf{0} & \Sigma_\epsilon\end{pmatrix}.$$

那么，$\Gamma_{\boldsymbol{Y}_t}(0)$ 的特征为

$$\operatorname{vec}\begin{pmatrix}\Gamma_{\boldsymbol{Y}_t}(0) & \Gamma_{\boldsymbol{Y}_t}(1) & \Sigma_\epsilon\\ \Gamma_{\boldsymbol{Y}_t}(-1) & \Gamma_{\boldsymbol{Y}_t}(0) & \mathbf{0}\\ \Sigma_\epsilon & \mathbf{0} & \Sigma_\epsilon\end{pmatrix}=(I_{9n^2}-P\otimes P)^{-1}\operatorname{vec}(\Sigma_U).$$

D 补充材料：PTO、ETO 和 FPtP 的实现

PTO。 PTO 方法遵循经典两阶段范式：首先训练预测模型，以预测不确定参数在下一时期的实现值；随后将所得点预测作为代入估计值，用于优化问题。我们实现了四种预测学习器：循环神经网络（RNN）、长短期记忆网络（LSTM）、随机森林（RF）和 XGBoost（XGB）。我们的实现依托标准机器学习库，并采用固定的超参数，具体如下所述。

- PTO-RNN / PTO-LSTM：使用 PyTorch 实现，隐藏层维度设为 32。模型使用 Adam优化器进行训练，学习率为 10^{-3}，损失函数为均方误差损失。
- PTO-RF：使用 scikit-learn 的随机森林回归器实现，包含 100 棵树，最大深度为 10，并启用所有核心。

- PTO-XGB：使用XGBRegressor实现，配置参数为（tree_method="hist"，objective="reg:squarederror"，eval_metric="rmse"，n_estimators=100，max_depth=6，learning_rate=0.1，subsample=0.8，colsample_bytree=0.8，min_child_weight=1，seed=42）。

算法 3 METHODSOLVE：PTO

要求：样本长度 T；样本 $\boldsymbol{Y}_{1:T}$；序列长度 S；学习器 f_θ（例如，循环神经网络/长短期记忆网络）；学习率 η；常数 μ_0、 D_1、 $\boldsymbol{e}$、 $\boldsymbol{x}^0$1：初始化模型参数 θ。2：对于 $t = S$ 到 T 执行 3：构造输入输出对（$\boldsymbol{Y}_{t-S:t-1}$， $\boldsymbol{Y}_t$）。 4 θ $\left\|f_\theta\ \boldsymbol{Y}_{t-S:t-1}\ -\boldsymbol{Y}_t\right\|_2^2$**：使用Adam优化器根据** 5 **损失（ ）进行更新：结束循环 ˆ6： $\boldsymbol{Y}_{T+1} \leftarrow f_\theta$（$\boldsymbol{Y}_{T-S+1:T}$）ˆ 7： $D_2^{\text{PTO}} \leftarrow D_2$（$\boldsymbol{Y}_{T+1}$）8： $\boldsymbol{x}_{\text{PTO}} \leftarrow$ $(D_1 + D_2^{\text{PTO}})^{-1}\left(\mu_0 D_1 \boldsymbol{e} + D_2^{\text{PTO}} \boldsymbol{x}^0\right)$9：返回 $\boldsymbol{x}_{\text{PTO}}$**

▷ via (14)

算法 4 METHODSOLVE：ETO

要求： 样本长度 T； 样本 $\boldsymbol{Y}_{1:T}$； 常数 $\mu_0, D_1, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{x}^0$

1: $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{\text{ETO}} \leftarrow \arg\max_{\boldsymbol{\xi}} L(\boldsymbol{Y}_{1:T}; \boldsymbol{\xi})$ ▷ via (**??**)
2: $D_2^{\text{ETO}} \leftarrow \mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}_{T+1}|\hat{\boldsymbol{\xi}}_{\text{ETO}}}[D_2(\boldsymbol{Y}_{T+1})]$ ▷ via (18)
3: $x_{\text{ETO}} = (D_1 + D_2^{\text{ETO}})^{-1}\left(\mu_0 D_1 \boldsymbol{e} + D_2^{\text{ETO}} \boldsymbol{x}^0\right)$
4: **返回** $\boldsymbol{x}_{\text{ETO}}$

ˆ 给定已训练的预测器 f_θ，PTO 决策通过计算点预测 $\boldsymbol{Y}_{T+1}$ $=f_\theta(\boldsymbol{Y}_{T-S+1:T})$、构造相应矩阵 D_2 (ˆ$\boldsymbol{Y}_{T+1}$)，并求解所得确定性优化问题而得到。算法 3 总结了该过程。

ETO. ETO 方法首先通过最大似然估计来估计底层数据生成过程，然后针对估计分布进行优化。算法 4 总结了该过程。

FPtP. 我们研究使用两种基于树的学习器的 FPtP 方法：随机森林（下文简称“FPtP-RF”）和 XGBoost（下文简称“FPtP-XGB”）。我们没有针对神经网络架构（例如循环神经网络或长短期记忆网络）实现 FPtP，因此不考虑相应的 ETO 模型。原因在于方法论而非计算方面：Bertsimas 和 Kallus [2020] 没有提供超越 PTO框架生成多个预测结果的系统性策略。尽管文献中讨论过几种启发式方法（例如向协变量中注入噪声），但目前尚未就理论依据充分的策略达成共识。为避免得出可能具有误导性的结论，我们有意将这些模型排除在分析之外。算法 5 总结了本文所考虑的 FPtP流程。

FPtP-RF。对于随机森林， M 预测样本对应于各单棵树的输出，记为 ˆ$\boldsymbol{Y}^{(m)}{}_{T+1}$；在伪代码中，这些输出由新观测值 $\boldsymbol{z}$ 或历史窗口 $\boldsymbol{Y}_{T-S+1:T}$ 给出。在这种设置下，每个基学习器 $f^{(m)}$ 对应一棵决策树。Bertsimas 和 Kallus [2020] 提出了两种加权方案：（i）均匀权重，其中 $w_m(\boldsymbol{z}) = 1/M$ 对所有 m 均成立，我们将这一变体记为“FPtP-RF-U”；（ii）投票权重，根据每棵树对标准集成预测的贡献确定，我们将其记为“FPtP-RF-V”（“V”代表投票）。

FPtP-XGB。我们采用 XGBoost 作为具有代表性的提升方法。遵循 Bertsimas 和 Kallus [2020]„ 通过考虑在前 m 轮提升后获得的前缀模型，生成多个预测样本。相应地，ˆ$\boldsymbol{Y}^{(m)}{}_{T+1}$ 表示第 m 次迭代生成的预测，我们采用均匀权重 $w_m(\boldsymbol{z}) = 1/M$。在这种情况下， $f^{(m)}$ 表示包含前 m 棵提升树的前缀模型。

E 补充材料：实验设置详情

E.1 计算策略

关于 $\boldsymbol{\xi}$ 的假设。对于参数为 $\boldsymbol{\xi} = (\{\Phi_i\}_{i=1}^p,\ \{\Theta_i\}_{i=1}^q,\ \Sigma_\epsilon)$ 的向量自回归移动平均(p, q)模型，我们假设 $\boldsymbol{\xi}$ 满足假设 2.4 和 3.1。假设 2.4 中的平稳性和可逆性条件，可通过要求伴随矩阵 M_Φ 和 M_Θ 的所有特征值均严格位于单位圆内来保证，即

算法 5 METHODSOLVE：FPtP

要求： 样本长度 T；样本 $\boldsymbol{Y}_{1:T}$；序列长度 S；基于树的学习器 f_θ（例如，随机森林/XGBoost）；集成数量 M；常数 μ_0，D_1，$\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{x}^0$

$\mathcal{D} \leftarrow \{(\boldsymbol{Y}_{t-S:t-1}, \boldsymbol{Y}_t)\}_{t=S}^{T}$
$\theta \leftarrow \arg\min_\theta \sum_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\in\mathcal{D}} \left\| f_\theta(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{v} \right\|_2^2$
$f_\theta \leftarrow \{f^{(m)}\}_{m=1}^{M}$
for $m = 1$ **to** M **do**
    $\hat{\boldsymbol{Y}}_{T+1}^{(m)} \leftarrow f^{(m)}(\boldsymbol{Y}_{T-S+1:T})$
end for
$D_2^{\text{FPtP}} \leftarrow \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} D_2(\hat{\boldsymbol{Y}}_{T+1}^{(m)})$ ▷ via (14)
$\boldsymbol{x}_{\text{FPtP}} \leftarrow (D_1 + D_2^{\text{FPtP}})^{-1}\left(\mu_0 D_1 \boldsymbol{e} + D_2^{\text{FPtP}} \boldsymbol{x}^0\right)$
Return $\boldsymbol{x}_{\text{FPtP}}$

$|\lambda_i(M_\Phi)| < 1$ 和 $|\lambda_i(M_\Theta)| < 1$，其中

$$M_\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \cdots & \Phi_p \\ I_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_k & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad M_\Theta = \begin{pmatrix} -\Theta_1 & -\Theta_2 & -\Theta_3 & \cdots & -\Theta_q \\ I_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_k & 0 \end{pmatrix}.$$

为保证假设 3.1，我们进一步要求 $\boldsymbol{\xi}$ 的所有分量均为对称且彼此可交换。

引理E.1。若参数 $\boldsymbol{\xi}$ 为对称且可交换，则假设 *3.1* 成立；即

$$\Phi^{-1}(z)\Theta(z)\Sigma_\epsilon\Theta^\top(z^{-1})\Phi^{\top-1}(z^{-1}) = \Phi^{-1}(z^{-1})\Theta(z^{-1})\Sigma_\epsilon\Theta^\top(z)\Phi^{\top-1}(z).$$

引理E.1 的证明。由于 $\boldsymbol{\xi}$ 为对称且可交换，因此可以通过正交矩阵 P同时对角化，使得

$$\Lambda_{\Phi_j} = P^\top \Phi_j P, \quad \Lambda_{\Theta_i} = P^\top \Theta_i P, \quad \Lambda_{\Sigma_\epsilon} = P^\top \Sigma_\epsilon P.$$

定义

$$P^\top\Phi(z)P = I - \sum_{j=1}^{p}\Lambda_{\Phi_j} z^j := D_\Phi(z), \quad P^\top\Theta(z)P = I + \sum_{i=1}^{q}\Lambda_{\Theta_i} z^i := D_\Theta(z).$$

Then

$$\Phi(z) = PD_\Phi(z)P^\top, \quad \Phi^{-1}(z) = (PD_\Phi(z)P^\top)^{-1} = PD_\Phi^{-1}(z)P^\top$$

and

$$\Theta(z) = PD_\Theta(z)P^\top, \quad \Theta(z^{-1}) = PD_\Theta(z^{-1})P^\top.$$

利用这些表示，左端变为

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \Phi^{-1}(z)\Theta(z)\Sigma\Theta^\top(z^{-1})\Phi^{\top-1}(z^{-1}) \\ &= PD_\Phi^{-1}(z)P^\top PD_\Theta(z)P^\top P\Lambda_{\Sigma_\epsilon}P^\top PD_\Theta(z^{-1})P^\top PD_\Phi^{-1}(z^{-1})P^\top \\ &= P\left(D_\Phi^{-1}(z)D_\Theta(z)\Lambda_{\Sigma_\epsilon}D_\Theta(z^{-1})D_\Phi^{-1}(z^{-1})\right)P^\top, \end{aligned}$$

而右端为

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \Phi^{-1}(z^{-1})\Theta(z^{-1})\Sigma\Theta^\top(z)\Phi^{\top-1}(z) \\ &= PD_\Phi^{-1}(z^{-1})P^\top PD_\Theta(z^{-1})P^\top P\Lambda_{\Sigma_\epsilon}P^\top PD_\Theta(z)P^\top PP^\top \\ &= P\left(D_\Phi^{-1}(z^{-1})D_\Theta(z^{-1})\Lambda_{\Sigma_\epsilon}D_\Theta(z)D_\Phi^{-1}(z)\right)P^\top. \end{aligned}$$

Sinc由于括号内的所有矩阵都是对角矩阵，因此可交换，我们得出 LHS $=$ RHS。 □

Lik对称且可交换 $\boldsymbol{\xi}$ 下的似然。这里，我们专门考虑向量自回归移动平均(1,1) 过程，且 h para参数 $\boldsymbol{\xi} = (\Phi,\ \Theta,\ \Sigma_\epsilon)$。假设 $\boldsymbol{\xi}$ 具有对称且可交换的形式

$$\Theta = \theta I_n, \quad \Phi = P\Lambda_\Phi P^\top, \quad \Sigma_\epsilon = P\Lambda_{\Sigma_\epsilon}P^\top \tag{26}$$

其中 P 是一个正交矩阵 .

在该限制条件下，附录 B 中的似然可表示为一个简化形式。

命题 E.2。 在限制条件 (26) 下，附录 B 中的似然 $L(\boldsymbol{Y};\ \boldsymbol{\xi})$ 可写为

$$L(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{\xi}) = g_0(\boldsymbol{Y})g_1(\hat{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{Y}),\boldsymbol{\xi}),$$

其中

$$g_0(\boldsymbol{Y}) = (2\pi)^{-\frac{nT}{2}}, \quad g_1(\hat{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{Y}),\boldsymbol{\xi}) = \left(\prod_{t=1}^{T}\det(\tilde{\Sigma}_t)\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}h(\hat{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{Y}),P,\theta,\Lambda_\Phi,\Lambda_{\Sigma_\epsilon})\right\}.$$

更具体地说，

$$\begin{aligned}
h(\hat{\boldsymbol{\xi}},P,\theta,\Lambda_\Phi,\Lambda_{\Sigma_\epsilon}) &= (\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1 - \Lambda_\Phi\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1)^\top\tilde{\Sigma}_1^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1 - \Lambda_\Phi\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1) \\
&+ \sum_{t=2}^{T-1}\left(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t - \Lambda_\Phi\tilde{\boldsymbol{\beta}}_t + \sum_{j=0}^{t-2}C_{j,t}\Lambda_\Phi\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{t-1-j}\right)^\top\tilde{\Sigma}_t^{-1}\left(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t - \Lambda_\Phi\tilde{\boldsymbol{\beta}}_t + \sum_{j=0}^{t-2}C_{j,t}\Lambda_\Phi\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{t-1-j}\right) \\
&+ \left(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_T + \Theta_{T-1,1}\Lambda_\Phi\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{T-1} - \Theta_{T-1,1}\sum_{j=0}^{T-3}C_{j,T-1}\Lambda_\Phi\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{T-2-j}\right)^\top\tilde{\Sigma}_T^{-1} \\
&\qquad\left(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_T + \Theta_{T-1,1}\Lambda_\Phi\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{T-1} - \Theta_{T-1,1}\sum_{j=0}^{T-3}C_{j,T-1}\Lambda_\Phi\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{T-2-j}\right).
\end{aligned}$$

协方差行列式及其逆由下式给出

$$\det(\tilde{\Sigma}_t) = \begin{cases}\det(s_t\Lambda_{\Sigma_\epsilon}), & t\in[T-1]\\ \det(\Lambda_{\Gamma_{\boldsymbol{Y}}(0)} - \frac{\theta^2}{s_{T-1}}\Lambda_{\Sigma_\epsilon}), & t=T\end{cases} \text{ and } \tilde{\Sigma}_t^{-1} = \begin{cases}\frac{1}{s_t}\Lambda_{\Sigma_\epsilon}^{-1}, & t\in[T-1]\\ (\Lambda_{\Gamma_{\boldsymbol{Y}}(0)} - \frac{\theta^2}{s_{T-1}}\Lambda_{\Sigma_\epsilon})^{-1}, & t=T.\end{cases}$$

此处，

$$\begin{aligned}
&s_1 = 1+\theta^2, \quad s_t = s_1 - \theta d_t, \quad d_t = \frac{\theta}{s_{t-1}}, \quad \Theta_{t-1,1} = d_tI_n, && \text{for } t\in[2,T],\\
&\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{Y}_1, \quad \boldsymbol{\alpha}_t = \boldsymbol{Y}_t - d_t\boldsymbol{\alpha}_{t-1}, \quad \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t = P^\top\boldsymbol{\alpha}_t, && \text{for } t\in[2,T],\\
&\boldsymbol{\beta}_t = \boldsymbol{Y}_{t+1}, \quad \tilde{\boldsymbol{\beta}}_t = P^\top\boldsymbol{\beta}_t, && \text{for } t\in[T-1],\\
&C_{j,t} = (-1)^{2t-j}d_t\times\cdots\times d_{t-j}I_n, && \text{for } j\in[0,T-3], t\in[2,T-1].
\end{aligned}$$

Pro命题 E.2 的。 将 (26) 代入附录 B 中的创新协方差矩阵 Σ_t，得到 s
$\Theta_{t-}{}_{1,1} = d_tI_n$ 和

$$\Sigma_t = \begin{cases}s_t\Sigma_\epsilon, & t\in[T-1]\\ \Gamma_{\boldsymbol{Y}}(0) - \frac{\theta^2}{s_{T-1}}\Sigma_\epsilon, & t=T\end{cases}$$

由于正交变换保持行列式和二次型不变，我们将 $P^\top(\cdot)P$ 应用于 Σ_t、 $\boldsymbol{\alpha}_t$和$\boldsymbol{\beta}_t$，并得到

$$\tilde{\Sigma}_t = P^\top\Sigma_tP = \begin{cases}s_t\Lambda_{\Sigma_\epsilon}, & t\in[T-1],\\ \Lambda_{\Gamma_{\boldsymbol{Y}}(0)} - \dfrac{\theta^2}{s_{T-1}}\Lambda_{\Sigma_\epsilon}, & t=T.\end{cases}$$

于是， $\tilde{\Sigma}_t^{-1}$ 、det($\tilde{\Sigma}_t$)以及二次型 $h(\cdot)$的所述表达式便可直接得出。 □

E.2 合成数据上的评估

生成预言机参数 $\boldsymbol{\xi}$ 和样本 $\boldsymbol{Y}$。

Well-指定设定。每个预言机参数 $\boldsymbol{\xi}=(\Phi,\ \Theta,\ \Sigma_\epsilon)$按以下过程生成 e:

- 构造一个特征值为 $|\theta|\le 0.9$的可逆移动平均矩阵 $\Theta=\theta I_n$。
- 均匀随机采样一个正交矩阵 P。
- 构造一个特征值为 $|\lambda_\Phi|<0.9$的平稳自回归矩阵 $\Phi = P\Lambda_\Phi P^\top$。
- 构造一个特征值为$\lambda_{\Sigma_\epsilon}\in(0.1,0.9)$的正定协方差矩阵$\Sigma_\epsilon = P\Lambda_{\Sigma_\epsilon}P^\top$。

为生成一组多样化的预言机参数，我们初始化一个参考参数 $\boldsymbol{\xi}^0$，并构造以 $\boldsymbol{\xi}^0$ 为中心的对称先验分布。候选参数的权重根据其与 $\boldsymbol{\xi}^0$ 之间的弗罗贝尼乌斯距离的平方确定。具体而言，我们定义

$$u_k = \frac{\exp(-d_k)}{\sum_j\exp(-d_j)}, \qquad d_k = \|\Theta_k-\Theta^0\|_F^2 + \|\Phi_k-\Phi^0\|_F^2 + \|\Sigma_{\epsilon,k}-\Sigma_\epsilon^0\|_F^2.$$

为构造此先验分布，我们首先在 $\boldsymbol{\xi}^0$ 的邻域内抽取 $N_t = 10,000$ 个候选参数（$\boldsymbol{\xi}_1$，……，$\boldsymbol{\xi}_{N_t}$），仅保留满足假设 2.4 和 3.1 的参数。随后，归一化权重 $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots\ldots, u_{N_t})$ 定义了候选集上的离散先验分布。

在评估中，我们从该先验分布中独立抽取 $N_o = 50$ 个预言机参数。此外，OVE 方法需要从同一先验分布进行蒙特卡洛抽样。为避免测试参数与蒙特卡洛样本重叠，我们另外抽取一组 N_{ove} 个参数（$\boldsymbol{\xi}_1^{\text{OVE}}, \ldots\ldots, \boldsymbol{\xi}_{N^{\text{OVE}}_{\text{ove}}}^{\text{OVE}}$），专门用于 OVE 估计。

给定一个预言机参数 $\boldsymbol{\xi}$，我们生成 N_s 条相互独立、长度为 $T = 25$ 的样本路径 $\boldsymbol{Y}_{1:T}$。

表 3：配置参数设置。

设定	n	N_t	N_o	N_{OVE}	N_{SOVE}	N_s	N_{ts}	T
正确设定	2	10,000	50	500	-	200	-	25
	5	10,000	50	1,000	-	200	-	25
	10	10,000	50	1,000	-	200	-	25
设定错误	5	10,000	50	1,000	5	200	-	25
现实世界	4	910	1	200	-	-	114	10

模型设定错误。预言机参数 $\boldsymbol{\xi} = (\{\Phi_i\}_{i=1}^p, \{\Theta_i\}_{i=1}^q, \Sigma_\epsilon)$ 是通过与 VARMA(1，1) 情形类似的步骤，从 VARMA(p，q) 过程中生成的：

- 构造可逆移动平均矩阵 $\Theta_i = \theta_i I_n$，使其满足 $|\theta_i| \le 0.9$。
- 均匀随机地抽取一个正交矩阵 P。
- 构造平稳自回归矩阵 $\Phi_i = P\Lambda_{\Phi_i}P^\top$，使其满足 $|\lambda_{\Phi_i}| < 0.9$。
- 构造一个正定协方差矩阵 $\Sigma_\epsilon = P\Lambda_{\Sigma_\epsilon}P^\top$，其特征值为 $\lambda_{\Sigma_\epsilon} \in (0.1, 0.9)$。

先验权重定义如下

$$u_k = \frac{\exp(-d_k)}{\sum_j \exp(-d_j)}, \qquad d_k = \sum_{i=1}^q \|\Theta_{k,i} - \Theta^0\|_F^2 + \sum_{i=1}^p \|\Phi_{k,i} - \Phi^0\|_F^2 + \|\Sigma_{\epsilon,k} - \Sigma_\epsilon^0\|_F^2.$$

给定一个预言机参数 $\boldsymbol{\xi}$，我们再次生成 N_s 条长度为 $T = 25$ 的独立样本路径 $\boldsymbol{Y}_{1:T}$。

由于我们关注的是较小程度的模型设定错误，学习模型仍假设采用 VARMA(1，1) 结构。为了构造 OVE 参数的先验分布，对于每个权重为 u_k 的 VARMA(p，q) 预言机，我们首先生成 N_{sove} 条长度为 $T = 25$ 的样本路径。然后，我们通过最大似然估计来估计相应的 VARMA(1，1) 参数，并为每个估计值赋予 u_k/N_{sove} 的先验权重。

表 4：模型设定错误情况下的汇总结果。

模型	时间（秒）				MSE				相对遗憾（%）			
	(2，1)	(3，1)	(1，2)	(1，3)	(2，1)	(3,1)	(1,2)	(1，3)	(2,1)	(3，1)	(1，2)	(1，3)
A-OVE	5.66	5.49	5.42	5.21	-	-	-	-	**0.50**	**0.80**	0.54	**0.37**
ETO	4.47	4.53	4.39	4.27	28.79	31.46	26.00	25.97	0.58	0.98	**0.47**	**0.37**
PTO-RNN	**0.25**	**0.27**	**0.27**	**0.27**	**20.16**	**20.18**	**23.45**	**23.09**	24.59	22.94	37.41	27.55
PTO-LSTM	0.28	0.31	0.33	0.32	22.41	22.67	26.47	25.24	13.80	11.80	20.13	16.01
PTO-RF	0.45	0.42	0.44	0.44	25.29	23.84	30.94	30.11	27.56	22.28	42.57	28.40
PTO-XGB	3.69	3.19	3.06	2.86	28.13	26.54	35.46	34.14	44.06	40.93	66.01	47.60
FPTP-RF	0.45	0.42	0.44	0.44	25.29	23.84	30.94	30.11	9.25	5.75	12.33	7.90
FPTP-XGB	3.69	3.19	3.06	2.86	28.13	26.54	35.46	34.14	24.58	23.50	37.36	27.23

投资组合优化设置。对于所有合成实验，总资金规模设为 $A = 1$，初始投资组合头寸 $\boldsymbol{x}^0 \in (0, 1)^n$ 独立地服从均匀分布。预期超额收益向量 $\boldsymbol{e}$ 独立生成，其每个分量均从 $[0.05, 0.15]$ 中均匀抽取。风险厌恶参数固定为 $\gamma = 0.1$，收益方差设为 $\delta^2 = 0.1$。此外，在所有合成实验中，我们始终设定 $\mu_2 = 0.1$。除非另有说明，这些参数在正确设定和设定错误的情形下均保持不变。

结果讨论。 表1和表4分别总结了所有方法在正确设定和设定错误的情形下的性能，评价指标包括计算时间、预测准确度（均方误差）和决策质量（相对遗憾）。

在设定正确的情形（表1）中，对于情形 $n = 10$，若直接最大化 OVE 中定义的似然以得到最大似然估计，ETO 的计算成本将变得过高。因此，对于 $n = 10$ 下的 ETO，我们改为使用 statsmodels 包中的 VARMAX 实现来估计模型参数。

E.3 真实数据上的评估

真实数据实验设置。 我们使用来自世界股票价格（每日更新） 数据集的真实世界金融数据评估所提出的方法，该数据集获取自 https://www.kaggle.com/ datasets/nelgiriyewithana/world-stock-prices-daily-updating。我们的分析聚焦于四只股票——GOOGL、HMC、AXP 和 BAMXF——样本期为2010年1月1日至2019年1月1日，并排除 COVID-19 时期，以避免极端市场波动性的影响。

对于每只股票，我们将美元交易量定义为报告的交易量与 OHLC4 价格的乘积，其中 OHLC4 按开盘价、最高价、最低价和收盘价的平均值计算。数据使用长度为 $\tau = 10$ 的滚动窗口按双周频率进行汇总，并施加对数变换，以得到实证分析中使用的双周美元交易量对数序列。

投资组合由 $n = 4$ 种资产组成，初始配置 $\boldsymbol{x}^0 \in$ 在$(\mathbf{0},\ \mathbf{1})^n$ 范围内随机均匀抽取。我们将资金总规模设为 $A = 1$ ，并考虑长度为 $T = 10$的观测期。超额收益均值向量 $\boldsymbol{e}$ 和收益方差根据历史数据估算，平均方差记为 δ^2。在所有实验中，风险厌恶参数固定为 $\gamma = 0.1$ 。

平稳性与VARMA模型验证。为验证VARMA框架所要求的平稳性假设，我们对每个变换后的序列进行了增广迪基–富勒（ADF）检验和KPSS检验。如结果所示，所有四只股票在常规显著性水平下均通过ADF检验拒绝单位根原假设，同时在KPSS检验下均未能拒绝平稳性原假设。这些结果共同表明，双周美元交易量对数序列是平稳的。

表5：基于信息准则的VARMA模型比较

模型	p	q	AIC	BIC	HQIC
向量自回归移动平均(0，1)	0	1	879.96	982.44	921.32
向量自回归移动平均(1，0)	1	0	822.96	**925.45**	864.33
向量自回归移动平均(1，1)	1	1	**784.23**	941.37	**847.65**
向量自回归移动平均(2，0)	2	0	817.26	974.41	880.69
向量自回归移动平均(2，1)	2	1	798.92	1010.72	884.40
向量自回归移动平均(3，0)	3	0	801.14	1012.94	886.62
向量自回归移动平均(3，1)	3	1	805.14	1071.59	912.68

我们进一步通过标准信息准则（包括赤池信息准则、贝叶斯信息准则和汉南–奎因信息准则），将 VARMA(1，1) 设定与其他 VARMA(p，q) 模型进行比较，以评估该设定是否恰当。在所考察的候选模型中，VARMA(1，1) 的赤池信息准则值最低，并在模型拟合度与复杂度之间取得了良好平衡。这一实证证据支持正文采用的建模假设：对数双周美元交易量聚合序列这一多元时间序列可由平稳的 VARMA(1，1) 过程良好描述。

真实数据上的滚动评估。我们使用现实金融时间序列评估所有方法，采用滚动样本外流程，旨在尽可能贴近实际决策场景。整体评估流程见算法 6，包含四个主要组成部分：时间序列聚合、模型训练、滚动测试和遗憾计算。

首先，我们按照算法 7 所述，对原始每日美元交易量数据进行预处理，将其聚合为 τ 个平移对数双周时间序列。其次，对于每个聚合序列，我们按照算法 8 的详细说明，使用固定训练时域训练所有基准模型，包括 PTO、ETO 和 FPtP。对于 OVE，我们将 ETO 应用于滚动训练窗口以构建其参数支持集，然后通过交叉验证核密度估计，基于所得参数候选项生成先验分布（算法 9）。第三，使用滚动测试窗口评估模型性能。在每个测试步骤中，所有方法均基于长度为 T 的历史观测值生成决策，并使用真实目标的样本平均近似（SAA）评估其实现成本。通过直接最小化相同的 SAA 目标计算预言机决策，将其作为基准。最后，使用所有滚动测试窗口上的平均相对遗憾来概括性能，该指标定义为各方法的实现成本与预言机成本之间的相对差距。

算法 6真实数据评估

要求： 每日美元成交量 $\boldsymbol{Y}^d$；聚合窗口大小 τ；训练时域 T_{train}；测试期 T_{test}；样本长度 T

准备聚合时间序列 $\mathcal{Y}_{\text{agg}} \leftarrow$ 聚合时间序列$(\boldsymbol{Y}^d)$

训练模型 $\mathcal{M} \leftarrow$ 训练模型$(\mathcal{Y}_{\text{agg}})$

对 $\boldsymbol{Y}^{(i)}$ **执行** $\mathcal{Y}_{\text{agg}}$ **do**

  $\boldsymbol{Y}_{\text{test}}^{(i)} \leftarrow \boldsymbol{Y}^{(i)}_{T_{\text{train}}+1:T_{\text{train}}+T_{\text{test}}+1}$

结束循环

测试样本数量 $N_{ts} \leftarrow T_{\text{test}} - (T+1) + 1$

对于 $l = 1$**到** N_{ts} **执行**

  对于 $i = 1$**到** τ **执行**

    $\boldsymbol{Y}_{(l,\ i)} \leftarrow (\boldsymbol{Y}^{(i)}$ 检验$)_{\ l:l+T-1}$

    $\boldsymbol{Y}^{1:T}_{(l,\ i)\,T+1} \leftarrow (\boldsymbol{Y}^{(i)}$ 测试$)_{\ l+T}$

  结束循环

  定义 $\rho^l(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{\tau} \pi\left(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{Y}_{(l,\ i)\ T+1}\right)$ ▷对第 l个真实成本的样本平均近似估计

  对于 $\cdot$**，在** $\mathcal{M}$ **中执行**

    对于 $i = 1$ **到** τ **执行**

      在 $\boldsymbol{Y}$ 上执行模型 $\mathcal{M}_{\cdot}^{(i)}{}_{(l,i)\ 1:T}$ 并获得决策 $\boldsymbol{x}_l^{(i)}$

      $\rho^{l,\ \cdot\ i} \leftarrow \rho^l(\boldsymbol{x}_l^{(i)})$ ▷模型性能的样本平均近似估计

    结束循环

    $\sigma_{\cdot}^l \leftarrow \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{\tau} \rho^{l,}_{\ \cdot\ i}$ ▷平均模型性能

  循环结束

  $\boldsymbol{x}_*^l \leftarrow \arg\min_{\boldsymbol{x}} \rho^l(\boldsymbol{x})$ ▷预言机决策

  $\rho_*^l \leftarrow \rho^l(\boldsymbol{x}_*^l)$ ▷ 预言机成本

结束循环

返回 $\left\{ \frac{1}{N_{ts}} \underline{\sum_{l=1}^{N_{ts}} \frac{\sigma_{\cdot}^l - \rho_*^l}{\rho_*^l}} \right\}_{\cdot \in \mathcal{M}}$

算法 7 AGGTIMESERIES

要求： 每日美元成交量 $\boldsymbol{Y}^d$；聚合窗口大小 τ；目标聚合时域 T_{agg}；均值对数聚合成交量的均值 $\boldsymbol{\mu}$

对于 $i = 1$**到** τ **执行**

  对于 $t = 1$**到** T_{agg} **do**

    $\boldsymbol{Y}_t^{(i)} \leftarrow \text{对数}\left(\sum_{s=\tau(t-1)+i}^{\tau t+i-1} \boldsymbol{Y}_s\right) - \boldsymbol{\mu}$ 从班次 i 开始的▷ τ天销量汇总

  结束循环

结束循环

返回 $\mathcal{Y}_{\text{a}\ \ \text{gg}} = \{\boldsymbol{Y}^{(i)}\}_{i=1}^{\tau}$

算法 8 训练模型 要求：聚合时间序列 $\mathcal{Y}_{\text{agg}}$；聚合窗口大小 τ；训练时域 T_{train}；样本长度 T；OVE 参数数量 N_{ove}1：对于 $\boldsymbol{Y}(i)$ 中的每个 $\mathcal{Y}_{\text{agg}}$，执行 2：$\boldsymbol{Y}(i)$ 训练 $\leftarrow \boldsymbol{Y}_1^{(i)}:_{T_{\text{train}}}$3：通过在 $\boldsymbol{Y}(i)$ 上训练 ▷ 获得模型 $\mathcal{M}^{(i)}$，适用于 PTO、ETO 和 FPtP 4：$\Xi^{(i)} \leftarrow \emptyset$ ▷ 生成 OVE 参数支撑集 5：对于 $k = 1$ 到 $T_{\text{train}} - T + 1$，执行 6：$\boldsymbol{Y}(i,k) \leftarrow \boldsymbol{Y}(i)\, k{:}k+T-1$7：通过将 ETO 应用于 $\boldsymbol{Y}(i,k)$ 获得 $\boldsymbol{\xi}^{(i,k)}$ 8：$\Xi^{(i)} \leftarrow \Xi^{(i)} \cup \boldsymbol{\xi}^{(i,k)}$9：结束循环 10：结束循环$\tau$11：$\Xi_{\text{OVE}} \leftarrow \bigcup \Xi^{(i)}{}_{i=1}$12：$u \leftarrow$ GENPRIOR(Ξ_{OVE}) 13：根据先验分布 u 从 Ξ_{OVE} 中选择 N_{ove} 个候选项，并获得 $\mathcal{M}_{\text{OVE}}$ 14：返回 $\mathcal{M} = \left\{\{\mathcal{M}^{(i)}\,\text{PTO}\}_{i=1}^{\tau}、\ \{\mathcal{M}^{(i)}\,\text{ETO}\}_{i=1}^{\tau}、\ \{\mathcal{M}^{(i)}\,\text{FPtP}\}_{i=1}^{\tau}、\ \mathcal{M}_{\text{OVE}}\right\}$

算法 9 生成先验

需要： 支撑集 Ξ_{OVE}；候选带宽 $\mathcal{B}$；交叉验证的折数 K

$N_t \leftarrow |\Xi_{\text{OVE}}|$

$\Lambda_{\boldsymbol{\xi}} \leftarrow \emptyset$ ▷ $\boldsymbol{\xi}$ 的特征值集合

对于 $\boldsymbol{\xi}$ 属于 Ξ_{OVE}，执行 $\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\xi}} \leftarrow (\boldsymbol{\lambda}_\Theta, \boldsymbol{\lambda}_\Phi, \boldsymbol{\lambda}_{\Sigma_e})$

$\Lambda_{\boldsymbol{\xi}} \leftarrow \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\xi}}$ **循环结束** **初始化** $J^* \leftarrow -\infty, b^* \leftarrow 0$

对于 b 属于 $\mathcal{B}$，执行 将 $\{1, \ldots, N_t\}$ 划分为 K 个互不相交的折 $\{\mathcal{D}_k\}_{k=1}^K$ 对 $k = 1$至 K 执行

$\mathcal{D}_{-k} \leftarrow \bigcup_{r \neq k} \mathcal{D}_r$ $\hat{u}_b^{(-k)}(\boldsymbol{\lambda})$

$\leftarrow \frac{1}{|\mathcal{D}_{-k}|} \frac{1}{b^{|\boldsymbol{\lambda}|}} \sum_{j \in \mathcal{D}_{-k}} K\left(\frac{\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_j}{b}\right)$ $L_k(b)$

$\leftarrow \frac{1}{|\mathcal{D}_k|} \sum_{i \in \mathcal{D}_k} \log \hat{u}_b^{(-k)}(\boldsymbol{\lambda}_i)$ 循环结束 CV(b)

$\leftarrow \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K L_k(b)$ ~~如果 CV(b)~~ $> J^\star$，~~则~~

$J^\star \leftarrow$CV(b) $b^\star \leftarrow b$ 如果结束 循环结束

$d_{\boldsymbol{\xi}} \leftarrow \hat{u}_{b^\star}(\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\xi}}) \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{S}_o$ $u_{\boldsymbol{\xi}} \leftarrow \frac{d_{\boldsymbol{\xi}}}{\sum_{\boldsymbol{\xi}' \in \mathcal{S}_o} d_{\boldsymbol{\xi}'}}$，

$\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{S}_o$ 返回 $\{u_{\boldsymbol{\xi}}\}_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{S}_o}$