arXiv:2602.01878v1 [math.RT] 2 Feb 2026

# GORENSTEIN 铺砌序与偏序集关联代数之间的三角等价

OSAMU IYAMA 和 JUNYANG LIU

Abstract. 我们证明，对于任意 $\mathbb{N}$分次 Gorenstein 铺砌序 $A$，稳定范畴 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}A$ 与某个有限偏序集 $\mathbb{V}_A^{op}$ 的关联代数的完美导出范畴三角等价。此外，对于有限偏序集 $P$，我们证明， $P$的关联代数能够实现为一个标准倾斜对象的自同态代数，当且仅当 $P$为空或具有最大元。我们还研究了 Gorenstein 铺砌序在分次 Morita 等价和覆盖下相应偏序集的变化。最后，我们对满足 $|\mathbb{V}_A^{op}| \leq 3$的 Gorenstein 铺砌序 $A$ 进行分类。

## Contents

1. 引言 1致谢 42. 预备知识 42.1. Artin–Schelter Gorenstein 代数 42.2. Gorenstein 序 42.3. Gorenstein 铺砌序 53. 分次代数的优良性质 63.1. 分次 Morita 等价 63.2. 分次代数的覆盖 74. 标准倾斜对象及其自同态代数 94.1. 标准倾斜对象 94.2. 偏序集的实现 115. Gorenstein 铺砌序的分类 125.1. 类型 $A_n$ 及 $n \leq 2$ 125.2. 类型 $A_3$ 145.3. 小整体维数的自同态代数 $\Gamma_A$ 17参考文献 18

## 1. Introduction

（极大）Cohen–Macaulay 模的研究是交换代数和表示论的核心课题之一，参见 [1, 4, 26, 25, 20]。它与代数几何、奇点理论和数学物理密切相关；通过对与交换及非交换 Gorenstein 环相关的奇点范畴应用倾斜理论，已取得许多重要成果，参见 [15, 6, 19, 10, 22, 21, 3,12, 11, 9, 16, 13]。对于交换 Gorenstein 环 $A$，Cohen–Macaulay 模的范畴 $\mathrm{CM}\,A$ 是一个 Frobenius 范畴。其稳定范畴与由 Buchweitz [2] 和 Orlov [23]引入的、与 $A$ 相关的奇点范畴三角等价。

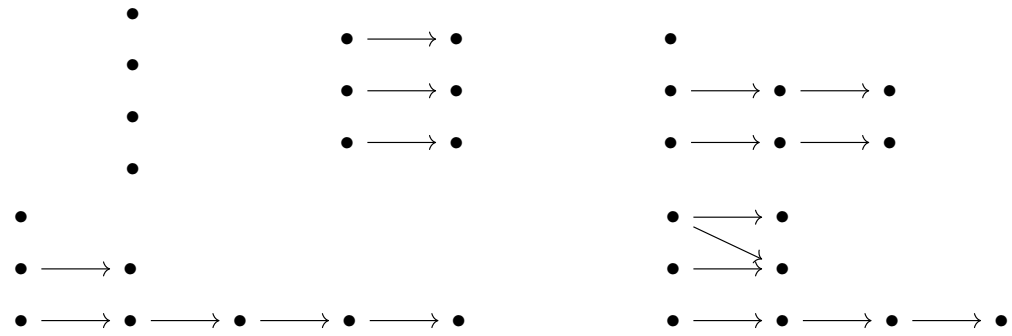
*Date*：2026年2月3日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 18G80, 18G65, 16G50, 16G20。
*Key words and phrases.* 奇点范畴，Cohen–Macaulay 模，倾斜理论，戈伦斯坦铺砌序，偏序集的关联代数，Artin–Schelter Gorenstein 代数。

序是 Cohen–Macaulay 表示理论研究的主要对象之一。铺砌序是一类序，其表示论和同调代数均已得到充分发展 [27, 25, 17]。记 $R = k[x]$ 和 $K = k[x, x^{-1}]$。对于有限集 $\mathbb{I}$，一个铺砌序（在 $R$上）是形如 $R$的一个-子代数

$$A = [Rx^{d(i,j)}] \subseteq \mathrm{M}_{\mathbb{I}}(K)\,,$$

其中，$d\colon \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{Z}$是一个拟度量，其满足 $d(i,i) = 0$且$d(i,k) + d(k,j) \geq d(i,j)$，对所有的 $i, j, k \in \mathbb{I}$ 均成立。我们将 $A$视为一个 $\mathbb{Z}$-分次代数，其分次由 $\deg x = 1$确定。一个基本铺砌序 $A$ 是 Gorenstein 的，当且仅当存在一个双射 $\nu\colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}$，满足 $d(\nu i, j) + d(j, i) = d(\nu i, i)$，对所有的 $i, j \in \mathbb{I}$ 均成立。

众所周知，[27, 25]铺砌序 $A$ 的 Cohen–Macaulay 表示与偏序集的表示密切相关。更具体地，设 $\mathbb{P}_A$ 为 $\begin{bmatrix} K & \cdots & K \end{bmatrix}$的投射分次$A$-子模所构成的偏序集。那么，Cohen–Macaulay $\mathbb{Z}$-分次$A$-模的范畴 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}A$ 等价于 $\mathbb{P}_A$的有限生成单态表示范畴。特别地，铺砌序 $A$ 具有有限 Cohen–Macaulay 表示类型，当且仅当 $\mathbb{P}_A$ 不包含临界偏序集，其哈斯箭图如下所示，参见 [18]。



本文的首要目标是通过完成文献[13]中的一项结果，进一步确立 Cohen– Macaulay $\mathbb{Z}$ 分次 $A$-模与偏序集表示之间的另一种紧密联系。更具体地说，对于一个 $\mathbb{N}$分次 Gorenstein 铺砌序 $A$，稳定范畴 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}A$具有一个标准倾斜对象 $V = V_A$，其自同态代数 $\Gamma = \Gamma_A$ 同构于一个经过明确构造的有限偏序集 $\mathbb{V}_A^{op}$ 的关联代数。

**定理 A** (=定理4.1)。 设 $A$ 是一个 $\mathbb{N}$-分次 *Gorenstein* 铺砌序。

*a)* 对象 $V$ 在 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}A$ 中是倾斜的。 *b)* 标准倾斜对象 $V$ 在 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}A$ 中的自同态代数同构于 $k\mathbb{V}_A^{op}$ 。 *c)* 偏序集 $\mathbb{V}_A$ 要么为空，要么是具有最小元的有限偏序集。

特别地，它通过偏序集给出了大量稳定等价的 Gorenstein 铺砌序。为了研究这类偏序集，自然会提出以下问题。

**问题 1.1**。 设 $P$ 是一个有限偏序集。

*a)* $kP$ 何时可以实现为基本 $\mathbb{N}$-分次 *Gorenstein* 铺砌序 $A$ 的代数 $\Gamma_A$ ？ *b)* 对于满足代数 $\Gamma_A$ 同构于关联代数 $kP$ 的基本 $\mathbb{N}$-分次 *Gorenstein* 铺砌序 $A$，给出其分类。 *c)* 对于满足稳定范畴 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}A$ 与 $\mathrm{per}\ kP$ 三角等价的基本 $\mathbb{N}$-分次 *Gorenstein* 铺砌序 $A$，给出其分类？

---

为了回答问题 1.1的 a) 部分，我们给出以下简单判据。

**定理 B** （详见定理4.5）。设 $P$ 是一个有限偏序集。那么，存在一个$\mathbb{N}$-分次 *Gorenstein* 铺砌序 $A$，使得代数 $\Gamma_A$ 同构于关联代数 $kP$，当且仅当 $P$ 是空偏序集或具有最大元。

有限偏序集 $\mathbb{I}$ 导出一个拟度量 $d$ 于 $\mathbb{I}$ 定义为 $d(i,j) = 0$，若 $i \leq j$，否则$d(i,j) = 1$。我们在定理B中的构造由拟度量空间所确定的 $\mathbb{N}$-分次 Gorenstein 铺砌序给出

$$(\mathbb{I} \sqcup \mathbb{I}, \begin{bmatrix} d & \mathbf{1} - d^t \\ \mathbf{2} - d^t & d \end{bmatrix}),$$

其中我们用 $P \setminus \{0\}$ 表示 $\mathbb{I}$，并用$\mathbf{1}$表示所有元素均为 1 的矩阵。

由于对象 $V$ 是基本的，下面的命题D 表明，偏序集 $\mathbb{V}_A$ 在对 $A$取覆盖时保持不变。要研究问题1.1的 b) 部分，只需对$A$ 按覆盖分类。命题3.2 表明，偏序集 $\mathbb{V}_A$ 在对 $A$取共轭时会略有变化。要研究问题1.1的 c) 部分，只需对 $A$ 按共轭分类。对于适当的有限偏序集 $P$，我们给出问题1.1 的 b) 和 c) 两部分的答案。注意，c) 部分的答案可由 b) 部分的答案推出。

**定理 C** （详情见定理5.1和5.5 ）。基本的 $\mathbb{N}$-分次 *Gorenstein* 铺砌序 $A$，使得代数 $\Gamma_A$ 为零或同构于 $kA_1$，$kA_2$，$kA_3$，分别可得到完整分类。

在命题 5.8 中，我们证明，对于一类特殊的循环 Gorenstein 序，$\Gamma_A$ 的整体维数至多为 2。引理5.9 表明，由基数为 3 的拟度量空间给出的 Gorenstein 铺砌序必为这种形式。在此情形下，我们对满足 $\Gamma_A$ 为遗传代数的 Gorenstein 铺砌序进行分类，参见命题 5.10。

为证明我们的结果，我们给出关于分次 Morita 等价以及 $\mathbb{Z}$-分次代数上的覆盖理论的一些预备结果，其中包括 Artin–Schelter Gorenstein 代数。在第 3.1 节，我们回顾分次 Morita 等价。在第3.2 节，我们研究$\mathbb{Z}$-分次环的覆盖。它们建立了数值半群代数与铺砌序之间的联系，参见例子 3.3。我们给出与铺砌序的覆盖相关联的指数矩阵的显式公式，参见例子 3.4。在命题3.5 中，我们证明 Artin–Schelter Gorenstein 代数的覆盖也是 Artin–Schelter Gorenstein 代数，并给出其中山置换和戈伦斯坦参数的显式公式。对于一个 $\mathbb{Z}$-分次环 $A$，众所周知 [7, 5]存在等价

$$F\colon \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}} A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}} A^{[m]}.$$

若 $A$ 是 Iwanaga–Gorenstein $\mathbb{Z}$分次代数，则范畴 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}A$ 具有一个 Frobenius 子范畴 $\mathrm{CM}_0^{\mathbb{Z}}A$，该子范畴满足 Auslander–Reiten–Serre 对偶 [1]。等价 $F$限制在 $\mathrm{CM}_0^{\mathbb{Z}}A \xrightarrow{\sim} \mathrm{CM}_0^{\mathbb{Z}}A^{[m]}$ 上，并诱导出一个稳定等价

$$\underline{\mathrm{CM}}_0^{\mathbb{Z}} A \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{CM}}_0^{\mathbb{Z}} A^{[m]}.$$

更明确地说，我们证明了这种稳定等价在相差直和项的意义下保持标准半倾斜对象。

**命题 D** (=命题3.7)。设 $A$ 是一个环不可分解的 $\mathbb{N}$-分次 *Artin– Schelter Gorenstein* 代数，其维数为 1，且 $A_0$ 的整体维数有限。记 $\mathrm{CM}_0^{\mathbb{Z}}A$*(*分别，$\mathrm{CM}_0^{\mathbb{Z}}A^{[m]}$*)* 中的标准倾斜对象为 $V_A$*(*分别为，$V_{A^{[m]}}$*)*。

*a)* $\mathrm{CM}_0^{\mathbb{Z}}A^{[m]}$ 中由 $FV_A$ 和$V_{A^{[m]}}$ 生成的加性子范畴相同。 *b)* $\mathrm{CM}_0^{\mathbb{Z}}A$ 和$\mathrm{CM}_0^{\mathbb{Z}}A^{[m]}$中的标准半倾斜对象的自同态代数 *Morita* 等价。

在命题 3.8中，我们证明了分次 Morita 等价与覆盖相容。本节最后给出以下记号。

**记号 1.2.** 本文通篇使用如下记号：设 $k$ 为一个域。代数具有单位元，且代数态射保持单位元。模均为含幺右模。对于一个 $\mathbb{Z}$-分次环 $A$，我们将 $\mathbb{Z}$-分次 $A$-模的范畴记为$\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}A$。我们将 $\mathbb{Z}$-分次向量空间的移位函子记为$(1)$，从而有$V(1)_n = V_{n+1}$。我们将 $\mathbb{Z}$-分次向量空间 $V$ 在非负次数上的截断记为 $V_{\geq 0}$。对于一个 $\mathbb{Z}$-分次代数 $A$，我们固定 $A$ 的本原正交幂等元在等价关系 $\sim$下的代表元的一个完全集 $\mathbb{I}$，其中 $i \sim j$ 当且仅当 $e_iA$ 与 $e_jA$ 作为非分次 $A$-模同构。

**致谢.** 第一作者得到 JSPS 科学研究费补助金（B）23K22384 的资助。第二作者得到 JSPS 研究员补助金 25KF0130 的资助。

## 2. Preliminaries

2.1. **Artin–Schelter Gorenstein 代数。** 设 $A = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} A_j$ 是一个基本的 Noetherian $\mathbb{Z}$-分次代数 $A$，使得对所有 $j \in \mathbb{Z}$， $A_j$ 都是有限维的，且对所有 $j \ll 0$， $A_j$ 都为零。对于任意 $i \in \mathbb{I}$，我们将分次 $A$-模 $e_iA$ （分别为 $A^{op}$-模 $Ae_i$）的顶记作 $S_i$（分别记作 $S_i^{op}$）。若满足以下条件，则称 $\mathbb{Z}$-分次代数 $A$ 为维数为 $d$ 的 Artin–Schelter Gorenstein 代数:

a) 作为自身上的左模和右模，其内射维数均为 $d$； b) 存在一个双射 $\nu$: $\mathbb{I} \to \mathbb{I}$ 以及整数 $p_i$，使得当 $l = d$ 时，存在分次 $A^{op}$-模的同构 $\mathrm{Ext}^l_A(S_i, A) \simeq S^{op}_{\nu i}(p_i)$；当 $l \neq d$、$i \in \mathbb{I}$ 时，$\mathrm{Ext}^l_A(S_i, A)$ 为零。

双射 $\nu$ 称为中山置换，整数 $p_i$ 称为戈伦斯坦参数，属于 $A$。这些是 Artin–Schelter Goren- stein 代数的基本不变量。

设 $A$ 是一个 Artin–Schelter Gorenstein 代数。有限生成的分次 $A$-模$M$ 若对所有正整数 $i$，$\mathrm{Ext}^i_A(M, A)$ 均消失，则称为（极大）*Cohen–Macaulay* 。我们用 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}A$ 表示一个范畴，其对象是 Cohen–Macaulay 的 $\mathbb{Z}$-分次 $A$-模，态射是次数为 0 的齐次 $A$-同态。记 $A$ 的分次全商代数为 $Q$。范畴 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}_0A$ 定义为 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}A$ 的满子范畴，其对象是满足以下条件的 $\mathbb{Z}$-分次 $A$-模 $M$：$\mathbb{Z}$-分次 $Q$-模 $M \otimes_A Q$ 是投射的。范畴 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}A$ 和 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}_0A$ 都是 Frobenius 范畴。当且仅当 $A$ 至多有孤立奇点时，它们才相同。

2.2. **Gorenstein 序。** 从现在起，我们始终用 $\deg x = 1$ 表示 $R = k[x]$ 和 $K = k[x, x^{-1}]$。模有限的 $\mathbb{N}$-分次 $R$-代数 $A$ 若作为 $R$-模是投射的，则称为 $R$-序。此时，分次 $A$-双模 $\omega = \mathrm{Hom}_R(A, R(-1))$ 称为 $A$ 的分次典范模。若 $R$- 序 $A$ 的 $\omega$ 是投射分次 $A$- 模，则称其为$Gorenstein$ $R$-序。基本 Gorenstein $R$-序是 Artin–Schelter Gorenstein 代数。基本 Gorenstein$R$-序 $A$ 的中山置换和戈伦斯坦参数由分次 $A$-模 $i \in \mathbb{I}$ 的同构 $e_i\omega \simeq e_{\nu i}A(-p_i)$ 决定。如果 $\nu$ 在 $\mathbb{I}$ 上的作用是传递的，则称 $A$ 为循环 *Gorenstein* 序。

设 $A$ 是一个 Gorenstein $R$-序。当且仅当有限生成的分次 $A$-模 $M$ 是作为 $R$-模的投射模时，它才是 Cohen–Macaulay 模。对象 $M \in \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}A$ 属于 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}_0A$，当且仅当 $\mathbb{Z}$-分次 $A \otimes_R K$-模 $M \otimes_R K$ 是投射模。

2.3. **Gorenstein 铺砌序。** 沿用第8节中的 [13], 一个 铺砌序(在 $R$上）是一个$R$-子代数

$$A = \begin{bmatrix} Rx^{d(1,1)} & \cdots & Rx^{d(1,n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Rx^{d(n,1)} & \cdots & Rx^{d(n,n)} \end{bmatrix} \subseteq \mathrm{M}_n(K)$$

对于正整数 $n$，其中对所有 $1 \leq i$、 $j \leq n$， $d(i,j)$ 均为整数。代数 $\mathrm{M}_n(K)$ 具有由 $\mathrm{M}_n(K)_j = \mathrm{M}_n(k)x^j$ 给出的 $\mathbb{Z}$-分次。显然，代数 $A$ 继承了这一$\mathbb{Z}$-分次。注意， $A$ 是 $\mathrm{M}_n(K)$ 的 $R$-子代数，当且仅当对所有 $1 \leq i$、 $j$、 $k \leq n$，我们有 $d(i,i) = 0$以及 $d(i,k) + d(k,j) \geq d(i,j)$，也就是说，映射 $d$是$\{1,\dots,n\}$上的拟度量。在此情形下，我们将 $A$ 的指数矩阵定义为

$$\mathrm{v}(A) = [d(i,j)] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}) .$$

它是基本的，当且仅当对所有 $i \neq j$，我们有 $d(i,j) + d(j,i) > 0$。基本铺砌序 $A$是 Gorenstein 序，当且仅当存在双射 $\nu\colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}$，使得对所有 $i$、 $j \in \mathbb{I}$，我们有$d(\nu i, j) + d(j,i) = d(\nu i, i)$。在此情形下，双射 $\nu$是中山置换，而整数 $p_i = 1 - d(\nu i, i)$ 是 $A$ 的戈伦斯坦参数。为方便起见，我们将项 $d(\nu i, i) = 1 - p_i$ 称为 $A$ 的 $b$-不变量，沿用将 $-p_i$ 称为 $A$ 的 $a$-不变量的惯例。注意，若此外 $A$ 是 $\mathbb{N}$-分次的，则某项为 $b$-不变量意味着它是 $\mathrm{v}(A)$ 同一行与同一列中的最大项。

设 $A$ 是一个 $\mathbb{N}$-分次 Gorenstein 铺砌序。将其替换为一个分次 Morita 等价的基本 $\mathbb{N}$-分次 Gorenstein 铺砌序后，由 [13], 的定理 5.1 第 (1) 部分可推得，稳定范畴 $\underline{\mathrm{CM}}^{\mathbb{Z}} A$ 含有一个标准倾斜对象

$$V = V_A = \begin{bmatrix} R & \cdots & R \end{bmatrix} \oplus \bigoplus_{i \in \mathbb{I}} \bigoplus_{j=1}^{-p_i} e_{\nu i} A(j)_{\geq 0} .$$

注意，我们的 $V$ 是基本的，但 [13] 中的对象一般并非基本的。对于任意 Cohen–Macaulay 分次 $A$-模

$$M = \mathrm{L}(v) = \begin{bmatrix} Rx^{v_1} & \cdots & Rx^{v_n} \end{bmatrix}$$

其整数为 $v_1, \dots, v_n$，我们将 $\mathrm{v}(M)$ 记为 $= (v_1, \dots, v_n)$。我们定义子偏序集

$$\mathbb{V}_A = \{\mathrm{v}(e_i A(j)_{\geq 0}) \mid i \in \mathbb{I}, j \geq 1\} \setminus \{\mathrm{v}(e_i A) \mid i \in \mathbb{I}\} \subseteq \mathbb{Z}^n .$$

若 $A$ 的所有 $b$-不变量均为正，则有

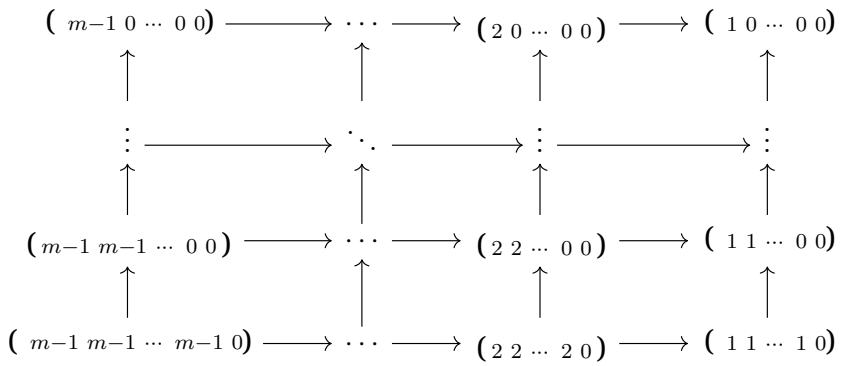
$$\mathbb{V}_A = \{\mathrm{v}(e_i A(j)_{\geq 0}) \mid i \in \mathbb{I}, j \geq 1\} .$$

在此情形下，标准倾斜对象 $V$ 是倾斜对象，且其自同态代数$\Gamma = \Gamma_A = \mathrm{End}_{\underline{\mathrm{CM}}^{\mathbb{Z}} A}(V)$ 同构于关联代数 $k\mathbb{V}_A^{op}$，参见 [13] 的定理 8.2。若 $A$ 的某个 $b$-不变量为零，则无法应用该定理。但在下文的定理 4.1 中，我们将证明结论仍然成立。下面的例子将说明在此情形下如何构造 $\mathbb{V}_A^{op}$ 。

例2.1。 </style}令 $m$ 和 $n$ 为正整数。令 $A$ 为由以下指数矩阵确定的铺砌序

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ m & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m & m & \cdots & 0 & 0 \\ m & m & \cdots & m & 0 \end{bmatrix}$$

其大小为 $n$。那么 $\mathbb{V}_A^{op}$ 的哈斯箭图如下所示。



## 3. On the virtues of graded algebras

为了研究 $\mathbb{Z}$-分次代数的表示，分次 Morita 等价和覆盖的概念至关重要。本节旨在研究中山置换、戈伦斯坦参数和标准半倾斜对象在这两种运算下的性质。

**3.1. 分次 Morita 等价。** 设 $A$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次代数，且 $\{e_1,\dots,e_n\}$ 是 $A_0$的一组完备本原正交幂等元。对于整数 $l_1,\dots,l_n$，我们定义一个分次 $A$-模 $P=\bigoplus_{i=1}^n e_iA(l_i)$。令 $B$ 为其分次自同态代数。作为非分次代数，它同构于 $A$。

**命题 3.1** ([8])。 设 $A$ 和 $B$ 如上所述。则存在一个等价$F\colon \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}B$，它与两侧的移位函子 $(1)$ 相容。

$\mathbb{Z}$-分次代数 $B$ 同构于 $(\sum_{i=1}^n e_i(l_i))A(\sum_{i=1}^n e_i(-l_i))$。任意分次 Morita 等价都是由分次 $A$-模 $P$ 所诱导的等价复合而成，其中恰有一个非零 $l_i$，其值为 1 或 $-1$。当 $A$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次 Gorenstein 铺砌序时，上述 $B$ 的构造由其共轭 $DAD^{-1}$给出，其中 $D$ 是对角矩阵 $\mathrm{diag}(x^{-l_1},\dots,x^{-l_n})$。若 $A$和 $B$是 $\mathbb{N}$-分次的，则 $\mathsf{CM}^{\mathbb{Z}}A$ 和 $\mathsf{CM}^{\mathbb{Z}}B$ 中标准倾斜对象的自同态代数一般仅导出等价，而非 Morita 等价。因此，偏序集 $\mathbb{V}_A$ 和 $\mathbb{V}_B$ 可能不同构。

**命题 3.2.** 设 $A$ 是一个 $\mathbb{N}$-分次 *Gorenstein* 铺砌序，且 $l_1$、……、$l_n$ 是整数。记 $D=\mathrm{diag}(x^{l_1}$、……、$x^{l_n})$。假设 $DAD^{-1}$ 也是 $\mathbb{N}$-分次的。

*a)* 若对所有 $j\neq i$，都有 $l_i=1$ 和 $l_j=0$，则偏序集 $\mathbb{V}_{DAD^{-1}}$ 同构于

$$(\mathbb{V}_A\setminus\{\mathrm{v}(e_{\nu i}A(1)_{\geq 0})\})\cup\{\mathrm{v}(e_iA)\}\,.$$

*b)* 若对所有 $j\neq i$，都有 $l_i=-1$ 和 $l_j=0$，则偏序集 $\mathbb{V}_{DAD^{-1}}$ 同构于

$$(\mathbb{V}_A\setminus\{\mathrm{v}(e_iA(1)_{\geq 0})\})\cup\{\mathrm{v}(e_{\nu i}A)\}\,.$$

证明。 a) 注意，相伴指数矩阵 $\mathrm{v}(DAD^{-1})$ 可由 $\mathrm{v}(A)$ 得到：将第 $i$ 行加 1，并从第 $i$ 列减去 1。此操作不改变偏序集 $\mathbb{V}_A$ 中元素之间的次序，但会移除与第 $i$ 列相伴的最大元 $\mathrm{v}(e_{\nu i}A(1)_{\geq 0})$，并添加与第 $i$ 行相伴的新最大元 $\mathrm{v}(e_iA)$。由此即可得到结论。

b) 与 a) 类似。 √

3.2. **分次代数的覆盖**。对于 $\mathbb{Z}$-分次环 $A$和正整数 $m$，其 $m$-次覆盖 $A^{[m]}$ 定义为 [7, 5] 如下的 $\mathbb{Z}$-分次子环

$$\begin{bmatrix} A_{m\mathbb{Z}} & A_{m\mathbb{Z}+1} & \cdots & A_{m\mathbb{Z}+m-1} \\ A_{m\mathbb{Z}-1} & A_{m\mathbb{Z}} & \cdots & A_{m\mathbb{Z}+m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m\mathbb{Z}-m+1} & A_{m\mathbb{Z}-m+2} & \cdots & A_{m\mathbb{Z}} \end{bmatrix} \subseteq \mathrm{M}_m(A)\,.$$

For 例如，覆盖建立了半群代数与铺砌序之间的联系 s.

**例 3.3.** 设 $S \subset \mathbb{N}$ 是一个余有限真子幺半群，$A = k[S] \subset k[x]$ 是数值半群代数。我们将 $A$ 视为一个 $\mathbb{Z}$-分次代数，其分次由 $\deg x = 1$确定。记其 $a$-不变量为 $a$。那么对于整数 $m \geq a+1$，第 $m$ 个覆盖$A^{[m]}$ 是一个铺砌序。

铺砌序的覆盖描述如下。

**例 3.4.** 设 $A$ 是一个铺砌序。那么覆盖 $A^{[m]}$ 同构于由指数矩阵确定的铺砌序

$$\begin{bmatrix} \lceil \frac{\mathrm{v}(A)}{m} \rceil & \lceil \frac{\mathrm{v}(A)-1}{m} \rceil & \cdots & \lceil \frac{\mathrm{v}(A)-m+1}{m} \rceil \\ \lceil \frac{\mathrm{v}(A)+1}{m} \rceil & \lceil \frac{\mathrm{v}(A)}{m} \rceil & \cdots & \lceil \frac{\mathrm{v}(A)-m+2}{m} \rceil \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lceil \frac{\mathrm{v}(A)+m-1}{m} \rceil & \lceil \frac{\mathrm{v}(A)+m-2}{m} \rceil & \cdots & \lceil \frac{\mathrm{v}(A)}{m} \rceil \end{bmatrix}.$$

证明。令 $P = \begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & xI & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x^{m-1}I \end{bmatrix}$，其中单位矩阵 $I$的大小与 $\mathrm{v}(A)$相同。将 $A^{[m]}$替换为 $PA^{[m]}P^{-1}$并将 $x^m$替换为 $x$后，我们得到所需的铺砌序。$\surd$

我们有如下等价

$$F\colon \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}} A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}} A^{[m]} \tag{3.2.1}$$

它将 $X$映射到 $\begin{bmatrix} X_{m\mathbb{Z}} & X_{m\mathbb{Z}+1} & \cdots & X_{m\mathbb{Z}+m-1} \end{bmatrix}$。类似地，我们有等价$F'\colon \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}} A^{op} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}(A^{[m]})^{op}$，它将 $X$映射到 $\begin{bmatrix} X_{m\mathbb{Z}} & X_{m\mathbb{Z}-1} & \cdots & X_{m\mathbb{Z}-m+1} \end{bmatrix}^t$。记 $A^{[m]}$ 的第 $j$ 个对角块中的幂等元 $e_i$ 为 $e_{i,j-1}$。我们有一个自然双射 $\mathbb{I}_{A^{[m]}} \simeq \mathbb{I}_A \times \{0, \ldots, m-1\}$。对于所有 $i \in \mathbb{I}_A$和整数$j$，令 $(i, j) = (i, j - \lfloor \frac{j}{m} \rfloor m)$。以下定理描述覆盖的中山置换和 Gorenstein 参数。

**命题 3.5**。设 $A$ 是一个维数为 $d$、中山置换为 $\nu$、*Gorenstein* 参数为 $p_i$, $i \in \mathbb{I}$的 *Artin–Schelter Gorenstein* 代数。那么，覆盖 $A^{[m]}$是一个维数为 $d$ 的 *Artin–Schelter Gorenstein* 代数，其中山置换由 $\nu^{[m]}(i, j) = (\nu i, p_i + j)$ 给出，*Gorenstein* 参数由 $\underline{p_i^{[m]}}_j = \lfloor \frac{p_i+j}{m} \rfloor$,$(i, j) \in \mathbb{I} \times \{0, \ldots, m-1\}$给出。

证明。由于 $A$是一个维数为 $d$的 Artin–Schelter Gorenstein 代数，分次 $A$-模$\bigoplus_{j=0}^{m-1} A(-j)$的内射维数为 $d$。因此，它在等价 $F$ 下的像的内射维数也为 $d$。根据 $F$的定义，此像与分次 $A^{[m]}$-模 $A^{[m]}$同构。因此，$A^{[m]}$ 作为右模的自内射维数为 $d$。类似地，$A^{[m]}$ 作为左模的自内射维数为 $d$。

现在我们证明中山置换 $\nu^{[m]}$ 以及 Gorenstein 参数 $p_i^{[m]}$ 、$_j$ 的公式。由于 $F$ （分别为 $F'$）在 $A$与 $A^{[m]}$ 之间（分别在 $A^{op}$ 与$(A^{[m]})^{op}$之间）诱导分次 Morita 等价，复合函子 $F' \circ F$ 在 $A$ 与 $A^{[m]}$ 上的分次双模范畴之间诱导一个等价，并将$A$映至 $A^{[m]}$。因此，对于所有 $i \in \mathbb{I}$、整数 $j$以及非负整数 $l$，我们有分次$(A^{[m]})^{op}$-模的同构 $\mathrm{Ext}^l_{A^{[m]}}(F(S_i(j))\ A^{[m]}) \xleftarrow{\sim} F'\mathrm{Ext}^l_A(S_i(j)\ A)$。若 $l \neq d$，则 $\mathrm{Ext}^l_{A^{[m]}}(F(S_i(j))\ A^{[m]})$ 为零。若 $l = d$，则我们有分次$(A^{[m]})^{op}$-模的同构 $\mathrm{Ext}^l_{A^{[m]}}(F(S_i(j))\ A^{[m]}) \xleftarrow{\sim} F'(S^{op}_{\nu i}(p_i - j))$。由对所有 $i \in \mathbb{I}$及整数 $j$ 均有 $F(S_i(j)) = S_{i,-j}(\lceil \frac{j}{m} \rceil)$以及$F'(S_i^{op}(j)) = S_i^{op}{}_{,j}(\lfloor \frac{j}{m} \rfloor)$这一事实，我们得出所需公式。√

因此，我们得到以下关于覆盖的性质。它们可用于判断一个 Artin–Schelter Gorenstein 代数是否是另一个代数的覆盖，例如定理5.5中的各个类。

**命题 3.6.** 设 $A$ 是一个 *Artin–Schelter Gorenstein* 代数。

*a)* $A$ 中等于$1$ 和 $-1$ 的 *Gorenstein* 参数个数在取覆盖时保持不变。*b)* 若 $(i, j)$ 和 $(i', j')$ 在 $A$ 的某个覆盖的中山置换作用下属于同一轨道，则 $i$ 和 $i'$ 在 $A$ 的中山置换作用下属于同一轨道。特别地，如果取覆盖后中山置换的作用是传递的，那么它本身也是传递的。

证明。 这些结论是命题3.5的推论。 √

若 $A$ 是一个 Artin–Schelter Gorenstein 代数，则等价 $F$ 限制为 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}_0 A \xrightarrow{\sim} \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}_0 A^{[m]}$，并诱导出等价 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}_0 A \xrightarrow{\sim} \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}_0 A^{[m]}$，仍记为$F$。

设 $A$ 是一个维数为 1 的环不可分解 $\mathbb{N}$-分次 Artin–Schelter Gorenstein 代数，且 $A_0$ 的整体维数有限。回忆一下，我们将 $A$ 的分次全商代数记为 $Q$。令 $q_A$ 为满足 $\bigoplus_{i=1}^{q_A} Q(i)$ 是有限生成分次 $Q$-模范畴的加性生成元的最小正整数。根据 [13]，的定理 5.1 的第 (1) 部分，稳定范畴 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}_0 A$ 含有一个标准倾斜对象

$$V_A = \bigoplus_{i \in \mathbb{I}} \bigoplus_{s=1}^{-p_i+q_A} e_{\nu i} A(s)_{\geq 0}\,.$$

下面的定理表明，等价 $F$ 将标准倾斜对象映到标准倾斜对象（相差直和项）。

**命题 3.7**。 设 $A$ 和 $V_A$ 如上所述。令 $F$ 为等价映射（*3.2.1*）。

*a)* 由 $FV_A$ 和 $V_{A^{[m]}}$ 生成的$\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}_0 A^{[m]}$ 的加性子范畴相同。*b)* $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}_0 A$ 和 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}_0 A^{[m]}$ 中标准倾斜对象的自同态代数 *Morita* 等价。

证明。 a）根据定义，我们有

$$FV_A = \bigoplus_{i \in \mathbb{I}} \bigoplus_{s=1}^{-p_i+q_A} e_{\nu i,-s} A^{[m]}(\lceil \frac{s}{m} \rceil)_{\geq 0}\,.$$

根据命题 3.5，我们有

$$V_{A^{[m]}} = \bigoplus_{i\in\mathbb{I}} \bigoplus_{j=0}^{m-1} \bigoplus_{s=1}^{-\lfloor \frac{p_i+j}{m} \rfloor + q_{A^{[m]}}} e_{\nu i, p_i+j} A^{[m]}(s)_{\geq 0} \,.$$

由于二者都是 $\mathsf{CM}_0^{\mathbb{Z}} A^{[m]}$ 中的 silting 对象，因此都是极大的 presilting 对象。另一方面，我们有 $mq_{A^{[m]}} \geq q_A$。这意味着对象 $FV_A$ 是 $V_{A^{[m]}}$的直和项。因此，由它们生成的加性子范畴相同。

b) 这是 a) 的直接推论。 √

正如我们在第 3.1 节中所述，任意分次 Morita 等价都可以表示为若干由将自由分次模的一个直和项平移 1 个次数或 $-1$所诱导的等价的复合。下面的命题给出了分次 Morita 等价与覆盖之间的相容性。

**命题 3.8.** 设 $A$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次代数，且 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 是 $A_0$ 的一组完备本原正交幂等元。设 $P$ 是分次 $A$-模 $(A/e_{i_0}A) \oplus e_{i_0}A(1)$，而 $B$ 是其分次自同态代数。那么，$\mathbb{Z}$-分次代数 $B^{[m]}$ 同构于分次 $A^{[m]}$-模 $(A^{[m]}/e_{i_0,m-1}A^{[m]}) \oplus e_{i_0,\ m-1}A^{[m]}(1)$ 的分次自同态代数。

证明。 该结论可由直接计算得出。 √

## 4. Standard tilting objects and their endomorphism algebras

我们证明，对于任意 $\mathbb{N}$ 分次的 Gorenstein 铺砌序 $A$，稳定范畴 $\underline{\mathsf{CM}}^{\mathbb{Z}} A$ 中存在倾斜对象，从而推广了 [13] 的定理 8.2。我们还证明，对于任意有限偏序集，其关联代数能够实现为某个 $\mathbb{N}$ 分次 Gorenstein 铺砌序 $A$ 的 $\mathsf{CM}^{\mathbb{Z}} A$ 中标准倾斜对象的自同态代数，当且仅当该偏序集为空或有最大元。

**4.1. 标准倾斜对象。** 本节证明，对于任意 $\mathbb{N}$ 分次的 Gorenstein 铺砌序 $A$，对象

$$V = \begin{bmatrix} R & \cdots & R \end{bmatrix} \oplus \bigoplus_{i\in\mathbb{I}} \bigoplus_{j=1}^{-p_i} e_{\nu i} A(j)_{\geq 0}$$

在 $\underline{\mathsf{CM}}^{\mathbb{Z}} A$ 中是倾斜对象。此外，其自同态代数同构于一个有限偏序集的关联代数，而该偏序集为空或有最大元。

**定理 4.1。** 设 $A$ 是一个 $\mathbb{N}$ 分次的 *Gorenstein* 铺砌序。

*a*）对象 $V$ 在 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}} A$ 中是倾斜对象。*b*）标准倾斜对象 $V$ 在 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}} A$ 中的自同态代数同构于 $k\mathbb{V}_A^{op}$。*c*）偏序集 $\mathbb{V}_A$ 要么为空，要么是具有最小元的有限偏序集。

例如，设 $A$ 如例 2.1中所述，则稳定范畴 $\mathsf{CM}^{\mathbb{Z}} A$与 $\mathsf{per}\, k(A_{m-1} \times A_{n-1})$ 三角等价。为证明定理 4.1，我们准备以下引理。

**引理 4.2.** 设 $A$ 是一个带有中山置换 $\nu$ 和戈伦斯坦参数 $p_i \leq 1, i \in \mathbb{I}$的 $\mathbb{N}$-分次 *Artin–Schelter Gorenstein* 代数。对于任意 $i \in \mathbb{I}, j > 0, 1 \leq j' \leq -p_i$ 和 $l > 0$，有

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{CM}}^{\mathbb{Z}} A}(A(j)_{\geq 0}, \Sigma^{-l} e_{\nu i} A(j')_{\geq 0}) = 0 \,.$$

证明。 记 $M = \Omega^{l-1}(e_{\nu i}A(j')_{\geq 0})$ 和 $N = (A(j)/A(j)_{\geq 0}) \otimes_A \omega$。 由 [13], 中引理 5.6 第 (2) 部分的证明可知，只需证明对所有 $i' \in \mathbb{I}$，都有 $\mathrm{Hom}_k(Me_{\nu i'}, Ne_{\nu i'})_0 = 0$。

我们首先考虑 $p_{i'} \leq 0$ 的情形。由于分次向量空间$e_{\nu i}A(j')_{\geq 0}e_{\nu i'}$ 集中在非负次数上，因此分次向量空间 $Me_{\nu i'}$ 也集中在非负次数上。根据 [13], 的命题 4.2 的第 (1) 部分，分次向量空间 $Ne_{\nu i'}$ 集中在负次数上。因此，在此情形下，我们有 $\mathrm{Hom}_k(Me_{\nu i'}, Ne_{\nu i'})_0 = 0$。

现在考虑 $p_{i'} = 1$ 的情形。根据 [13], 的命题 4.2 的第 (2) 部分，我们有分次向量空间的同构 $e_{\nu i}A(j')e_{\nu i'} \simeq e_iA(j' - 1 + p_i)e_{i'}$。这意味着分次向量空间 $e_{\nu i}A(j')_{\geq 0}e_{\nu i'}$ 集中在正次数上，因此分次向量空间 $Me_{\nu i'}$ 也集中在正次数上。根据 [13], 的命题 4.2 的第 (1) 部分，分次向量空间 $Ne_{\nu i'}$ 集中在非正次数上。因此，在此情形下我们同样有 $\mathrm{Hom}_k(Me_{\nu i'}, Ne_{\nu i'})_0 = 0$。证明完毕。$\surd$

**引理 4.3.** 设 $A$ 是一个基本的 $\mathbb{N}$-分次 *Gorenstein* 铺砌序，其中山置换为$\nu$。

$b$的 $A$ 至多有一个等于0。*b)* 对任意 $i \neq j$，整数 $d(\nu i, i)$、 $d(\nu i, j)$、 $d(\nu j, i)$、 $d(\nu j, j)$ 不可能全都相等。

证明。 a) 假设存在不同的 $i$ 和 $j$ 满足 $d(\nu i, i) = d(\nu j, j) = 0$，则有 $d(i, j) = d(\nu j, j) - d(\nu j, i) \leq d(\nu j, j) = 0$。这意味着 $d(i, j) = 0$。类似地，有 $d(j, i) = 0$。这与 $A$ 是基本的矛盾。

b) 若有 $d(\nu i, i) = d(\nu i, j) = d(\nu j, i) = d(\nu j, j)$，则可推出 $d(i, j) = d(\nu j, j) - d(\nu j, i) = 0$，且 $d(j, i) = d(\nu i, i) - d(\nu i, j) = 0$。这与$A$是基本的矛盾。$\surd$

**引理 4.4.** 设 $A$ 是一个基本的 $\mathbb{N}$-分次 *Gorenstein* 铺砌序。如果 $A$ 具有一个为零的 $b$-不变量，那么偏序集 $\mathbb{V}_A$ 要么为空，要么具有最大元和最小元。

证明. 记与铺砌序 $A$ 相关联的指数矩阵为 $\mathbf{v}(A) = [d(i, j)]$。假设偏序集 $\mathbb{V}_A$ 非空，且 $b$-不变量 $d(\nu i, i)$ 等于 0，我们证明它具有最大元和最小元。由于 $\mathbf{v}(A)$ 的第 $i$ 列所有元素都等于 0，因此有

$$d(i, j) = d(\nu j, j) - d(\nu j, i) = d(\nu j, j) \geq d(k, j)$$

对所有 $j$、 $k \in \mathbb{I}$ 都成立。这意味着元素 $\mathbf{v}(e_iA(1)_{\geq 0})$ 是 $\mathbb{V}_A$ 的最大元。由于 $\mathbf{v}(A)$ 的第 $\nu i$ 行所有元素都等于 0，因此有

$$d(\nu^2 i, \nu i) \geq d(j, \nu i) = d(j, \nu^{-1} j) - d(\nu i, \nu^{-1} j) = d(j, \nu^{-1} j)$$

对所有 $j \in \mathbb{I}$。这意味着 $d(\nu^2 i, \nu i)$ 是 $b$-不变量在 $A$上的最大值。如果它小于或等于 1，那么其他值也都如此。这与 $\mathbb{V}_A$ 非空矛盾。因此有$d(\nu^2 i, \nu i) \geq 2$。根据引理 4.3，对所有 $j \neq i$， $b$-不变量 $d(\nu j, j)$ 均为正。因此有

$$d(\nu^2 i, j) = d(\nu^2 i, \nu i) - d(j, \nu i) = d(\nu^2 i, \nu i) - d(j, \nu^{-1} j) < d(\nu^2 i, \nu i)$$

对所有 $j \neq \nu i$。我们推出 $\mathbf{v}(e_{\nu^2 i}A(d(\nu^2 i, \nu i) - 1)_{\geq 0}) = e_{\nu i}$。另一方面，由于对所有 $j$、 $k \in \mathbb{I}$ 都有 $d(j, \nu i) = d(j, \nu^{-1} j) \geq d(j, k)$，任一非零元 $\mathbf{v}(e_jA(l)_{\geq 0}) \in \mathbb{V}_A$ 都大于或等于 $e_{\nu i}$。这意味着 $\mathbf{v}(e_{\nu^2 i}A(d(\nu^2 i, \nu i) - 1)_{\geq 0})$ 是 $\mathbb{V}_A$ 的最小元。$\surd$

定理的证明 *4.1*。 在必要时将 $A$ 替换为一个分次 Morita 等价的$\mathbb{N}$-分次戈伦斯坦铺砌序后，我们可以并且将会假定它是基本的。

a) 如果所有 $b$-不变量（ $A$ 的）均为正，则该结论由 [13]的定理 8.2 的第 (1) 部分推出。现在我们假定 $A$具有一个为零的 $b$-不变量。因此我们有

$$V = \bigoplus_{i\in\mathbb{I}} \bigoplus_{j=1}^{-p_i} e_{\nu i} A(j)_{\geq 0} \, .$$

由于 $A$ 是一个 $\mathbb{N}$-分次戈伦斯坦铺砌序，其戈伦斯坦参数小于或等于 1。于是该陈述由定理 5.1 的第 (1) 部分（ [13] ）以及引理 4.2 得出。b) 这由定理 8.2 第 (3) 部分的证明（ [13]）得出。

c) 若所有 $b$-不变量（ $A$ 的）均为正，则 $\mathbb{V}_A$ 以 0 为最小元。若 $A$ 具有一个为零的$b$-不变量，则由引理4.4，偏序集 $\mathbb{V}_A$ 要么为空，要么具有最小元。√

4.2. **偏序集的实现**。 在本节中，我们证明：对于具有最大元的有限偏序集，其关联代数可以实现为某个 $\mathbb{N}$-分次戈伦斯坦铺砌序 $A$ 的标准倾斜对象 $V_A$ 的自同态代数。

**定理 4.5.** 设 $P$ 是一个有最大元的有限偏序集。则存在一个基本 $\mathbb{N}$-分次 *Gorenstein* 铺砌序 $A$ ，其所有 $b$-不变量均为$1$ 或$2$ ，使得标准倾斜对象 $V$ 在$\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}A$ 中的自同态代数与 $kP$同构。

---

**推论 4.6.** 设 $Q$ 是一个有限箭图。则以下条件等价。

*i)* 要么 $Q$ 为零，要么 $Q$ 的底层图是一棵树，且 $Q$ 有唯一汇点。 *ii)* 存在一个 $\mathbb{N}$-分次 *Gorenstein* 铺砌序 $A$ ，使得标准倾斜对象 $V$ 在$\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}A$ 中的自同态代数与 $kQ$同构。

---

证明. 我们证明 i) 蕴含 ii)：若 $Q$ 为零，则令 $A$ 为 $k[x]$。若 $Q$ 的底层图是一棵树，且 $Q$ 有唯一汇点，则由定理 4.5可得结论。

现在证明 ii) 蕴含 i)：若 $Q$不为零，由定理 4.1的 b) 和 c) 部分，存在一个有限偏序集 $P$，它有最大元，且 $kP$ 与 $kQ$同构。因此$kP$ 是遗传的，故 $P$ 的哈斯箭图的底层图是一棵树。 √

定理的证明 *4.5.* 将 $P$ 的最大元记为 0。我们将有限偏序集 $P\setminus\{0\}$ 扩展为全序集 $T$。定义矩阵 $d = [d(i,\ j)]_{i,\ j\in T}$为 $d(i,\ j) = 0$，若 $i \leq j$属于$P\setminus\{0\}$；否则，令 $d(i,\ j) = 1$。我们断言该矩阵

$$\mathrm{v}(A) = \begin{bmatrix} d & \mathbf{1} - d^t \\ \mathbf{2} - d^t & d \end{bmatrix}$$

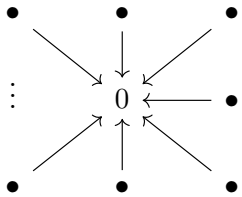
可导出一个铺砌序 $A$ ，且满足所需条件，其中$\mathbf{1}$ 表示所有元素均为 1 的矩阵。

我们首先验证 $A$ 是一个 $R$-代数。对于任意 $i$、 $j$、 $k \in T$，若 $d(i,k)$ 或 $d(k,j)$ 等于 1，则有 $d(i,k) + d(k,j) \geq 1 \geq d(i,j)$。若 $d(i,k)$ 和 $d(k,j)$ 均等于 0，则有$i \leq k$ 且 $k \leq j$ 属于 $P\setminus\{0\}$。因此有 $i \leq j$，进而 $d(i,j)$ 等于 0。因此，对于任意 $i$、 $j$、 $k \in T$，均有 $d(i,k) + d(k,j) \geq d(i,j)$。利用这一点以及 $\mathbf{2} - d^t$ 的所有元素均大于或等于 1 这一事实，我们推出矩阵 $\mathrm{v}(A)$ 满足三角不等式。

根据定义，当 $i > j$ 属于 $T$ 时，我们有 $d(i,i) = 0$ 和 $d(i,j) = 1$。由此可知， $d$ 的任意两行之差都不是常向量，因此矩阵 $\mathrm{v}(A)$ 也同样如此。这意味着 $A$ 是基本的。根据构造，块 $\mathbf{1} - d^t$ 和 $\mathbf{2} - d^t$ 对角线上的元素是 $A$ 的 $b$-不变量。因此， $A$ 是一个所有 $b$-不变量均为 1 或 2 的 Gorenstein 序。对于任意 $i, j \in T$，当且仅当对所有 $k \in T$，若 $i \geq j$ 属于 $P\setminus\{0\}$，则有 $e_i(\mathbf{2} - d^t) \geq e_j(\mathbf{2} - d^t)$，当且仅当 $d(k,i) \leq d(k,j)$。根据 [13]，的定理 8.2 第 (3) 部分，$\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}A$ 中 $V$ 的自同态代数与 $kP$ 同构。证明至此完成。√

以下例子旨在说明铺砌序 $A$ 的构造。

**例4.7.** 设 $Q$是一个具有如下形状的箭图。




那么 $Q \setminus \{0\}$ 没有箭头。根据定义，我们有 $d = \mathbf{1} - I$。因此，矩阵

$$\mathrm{v}(A) = \begin{bmatrix} 0&1&\cdots&1&1&1&0&\cdots&0&0 \\ 1&0&\cdots&1&1&0&1&\cdots&0&0 \\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots \\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots \\ 1&1&\cdots&0&1&0&0&\cdots&1&0 \\ 1&1&\cdots&1&0&0&0&\cdots&0&1 \\ 2&1&\cdots&1&1&0&1&\cdots&1&1 \\ 1&2&\cdots&1&1&1&0&\cdots&1&1 \\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots \\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots \\ 1&1&\cdots&2&1&1&1&\cdots&0&1 \\ 1&1&\cdots&1&2&1&1&\cdots&1&0 \end{bmatrix}$$

从而得到一个铺砌序 $A$ ，使得标准倾斜对象 $V$ 在 $\mathsf{CM}^{\mathbb{Z}}A$ 中的自同态代数同构于 $kQ$。

## 5. Classification of Gorenstein tiled orders

在定理 4.5中，我们已将有限偏序集的所有可能关联代数实现为一个基本 $\Gamma$ -分次 Gorenstein 铺砌序 $A$在 $\mathsf{CM}^{\mathbb{Z}}A$ 中的标准倾斜对象的自同态代数。一个自然的问题是，对给定的有限偏序集 $P$，分类满足下述条件的基本 $\mathbb{N}$-分次 Gorenstein 铺砌序：其自同态代数 $\Gamma$ 同构于 $kP$。我们给出了适用于某些有限偏序集 $P$的答案。

### 5.1. $A_n$ 类型（ $n \leq 2$）

**定理 5.1.** 设 $A$ 是一个基本的 $\mathbb{N}$-分次 *Gorenstein* 铺砌序。

*a)* 代数 $\Gamma$ 为零，当且仅当 $A$ 是遗传的；这又当且仅当 $A$ 共轭于由下方第一个任意大小的指数矩阵所确定的铺砌序。*b)* 代数 $\Gamma$ 同构于 $kA_1$ ，当且仅当 $A$共轭于由下方第二个偶数阶指数矩阵所确定的铺砌序。*c)* 代数 $\Gamma$ 同构于 $kA_2$ ，当且仅当 $A$ 共轭于由下方第三个大小大于或等于 2 的指数矩阵所确定的铺砌序。

$$\begin{bmatrix} 0&0&\cdots&0&0 \\ 1&0&\cdots&0&0 \\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots \\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots \\ 1&1&\cdots&0&0 \\ 1&1&\cdots&1&0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0&1&0&0&\cdots&0&0 \\ 1&0&0&0&\cdots&0&0 \\ 1&1&0&1&\cdots&0&0 \\ 1&1&1&0&\cdots&0&0 \\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots \\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots \\ 1&1&1&1&\cdots&0&1 \\ 1&1&1&1&\cdots&1&0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0&1&1&\cdots&1&2 \\ 1&0&1&\cdots&1&1 \\ 0&1&0&\cdots&1&1 \\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots \\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots \\ 0&0&0&\cdots&0&1 \\ 0&0&0&\cdots&1&0 \end{bmatrix}$$

为了证明定理 5.1，我们需要以下引理。

**引理 5.2**。 设 $A$是一个基本 *Gorenstein* 铺砌序。那么 $A$ 同构于一个铺砌序，其相伴指数矩阵可以划分为若干块，其中对角块是循环 *Gorenstein* 铺砌序的相伴指数矩阵。

证明。设 $\mathbb{I}$ 在中山置换下的轨道基数为 $n_1$、.....、$n_j$。在必要时用置换矩阵共轭 $A$ 后，我们可以且将假设 $\mathbb{I}$ 在中山置换下的轨道为

$$\{1, \ldots, n_1\}, \ \ldots, \ \{\sum_{i=1}^{j-1} n_i + 1, \ldots, \sum_{i=1}^{j} n_i\}.$$

于是，与 $A$ 相关联的指数矩阵满足所需条件。 √

**引理 5.3.** 设 $A$ 为一个基本 *Gorenstein* 铺砌序。假设矩阵$\mathrm{v}(A)$ 是分块大小为2 的分块矩阵，使得两个对角块分别是与 *Gorenstein* 铺砌序 $A_1$ 和 $A_2$ 相关联的指数矩阵，它们分别具有 $b$-不变量 $b_i$ $b'_j$。于是我们有 $\frac{1}{|\mathbb{I}_{A_1}|}\sum_{i\in\mathbb{I}_{A_1}} b_i = \frac{1}{|\mathbb{I}_{A_2}|}\sum_{j\in\mathbb{I}_{A_2}} b'_j$。

证明。 该结论由 [13]的命题 4.4 得出。 √

对于任意基本 $\mathbb{N}$-分次 Gorenstein 铺砌序 $A$ ，若它具有一个为零的 $b$-不变量 $d(\nu i, i)$，且偏序集 $\mathbb{V}_A$ 非空，则由引理 4.4 的证明可知，元素 $\mathbf{v}(e_i A(1)_{\geq 0})$ 是 $\mathbb{V}_A$ 中的最大元，并且我们有 $d(i, \nu^{-1}i) \geq 2$。因此，若将 $A$ 替换为 $DAD^{-1}$，其中$D$ 是对角矩阵，其第 $i$个对角元为 $x^{-1}$ ，其余均为 1，则所有 $b$-不变量都变为正，且 $\mathbb{V}_{DAD^{-1}}$ 由 $\mathbb{V}_A$ 通过去掉最大元并添加新的最小元 0 而得到，参见命题 3.2。特别地，若该偏序集是全序的，则它不发生改变。因此，为了在共轭意义下对基本 $\mathbb{N}$-分次 Gorenstein 铺砌序进行分类，使得标准倾斜对象的自同态代数 $\Gamma$ 同构于给定非空全序集的关联代数，不失一般性，我们可以假设 $A$ 的所有 $b$-不变量均为正。

**引理 5.4.** 设 $A$ 是一个基本的 $\mathbb{N}$-分次循环 *Gorenstein* 铺砌序，其稳定范畴 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}A$ 与 $\operatorname{per} kA_1$三角等价。那么， $A$ 共轭于由指数矩阵 $\left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right]$确定的铺砌序。

证明。 不失一般性，我们可以并且将假设 $A$ 的所有 $b$-不变量均为正。由于偏序集 $\mathbb{V}_A$ 只有一个元素 0， $A$ 的所有 $b$-不变量都必须为 1。这意味着 $\mathbf{v}(A)$ 的所有项均为 0 或 1。假设我们有 $\mathbb{I} = \{1, \ldots, n\}$。通过对所有 $i \in \mathbb{I}$和整数 $t$，将 $i + tn$与 $i$等同，我们把 $\mathbb{I}$ 的定义扩展到 $\mathbb{Z}$。只需证明 $n$等于 2。

假设我们有 $n \geq 3$。由于 $A$ 是一个循环 Gorenstein 铺砌序，在必要时用置换矩阵对 $A$ 作共轭后，我们可以并且将假设对所有 $i \in \mathbb{I}$都有 $\nu i = i + 1$。由于我们有 $\sum_{i=1}^{n-1} d(i, i+1) \geq d(1, n) = 1$，其中一个加数等于 1。若迭代使用等式 $d(i+1, j) + d(j, i) = d(i+1, i)$，便可推出对所有 $i \in \mathbb{I}$都有 $d(i, i+1) = 1$ 以及 $d(i+2, i) = 0$。如果 $n$等于 3，就会产生矛盾。如果 $n$等于 4，那么我们有 $d(1, 3) = d(3, 1) = 0$。这与 $A$的基本性矛盾。假设我们有 $n \geq 5$。由于对所有 $i \in \mathbb{I}$都有 $d(i+2, i) = 0$，由 $A$的基本性可知，对所有 $i \in \mathbb{I}$都有 $d(i, i+2) = 1$。如果 $n$ 等于 5，那么我们有$d(1, 5) = d(1, 3) + d(3, 5) = 2$。这与其等于 1 相矛盾。假设我们有$n \geq 6$。我们考虑对所有 $i \in \mathbb{I}$成立的等式 $d(i+3, i) = d(i+3, i+2) - d(i, i+2) = 0$。$_{n-1}$如果 $n$ 是奇数，那么我们有 $\sum_{i=1}^{2} d(2i+1, 2i-1) \geq d(n, 1)$。如果 $n$ 是偶数，那么我们有$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-2} d(2i+1, 2i-1) + d(n, n-3) \geq d(n, 1)$。因此我们推出 $d(n, 1)$ 必须为 0。这与其等于 1 相矛盾。证明完毕。√

定理 *5.1* 的证明。每一部分的充分性均由定理 4.1 的 b) 部分推出。下面证明必要性。假设我们有 $\mathbb{I} = \{1, \ldots, n\}$。我们将 $\mathbb{I}$ 的定义扩展到 $\mathbb{Z}$，令 $i + tn$与 $i$ 相等，对所有 $i \in \mathbb{I}$和整数 $t$。

a) 由于 $A$ 是一个 Gorenstein 分块 $k[x]$-序，且稳定范畴 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}A$ 消失，因此代数 $A$ 是遗传的。如果 $b$的所有不变量 $A$均为正，或者 $A$ 有一个大于 1 的 $b$不变量，那么根据 [13], 定理 8.2 的第 (3) 部分，稳定范畴 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}A$ 不会消失。这与 $A$的整体维数有限相矛盾。于是根据引理4.3， $b$的不变量恰有一个 $A$等于 0，其余均等于 1。根据引理5.2 和5.3，Gorenstein 序 $A$必定是循环的。经过可能的置换共轭后， $A$通过一个置换矩阵

矩阵，我们可以并且将假设，对于所有 $i \in \mathbb{I}$ 和 $d$，都有 $\nu i = i+1$ $\mathsf{v}(1, n) = 0$。这意味着，对于所有 $i \in \mathbb{I}$，都有 $d(1, i) = d(i, n) = 0$。如果我们迭代使用等式$d(i+1, j) + d(j, i) = d(i+1, i)$，矩阵 $\mathsf{v}(A)$ 的所有元素便都确定为所需的值。

b) 不失一般性，我们可以且将假设 $A$ 的所有 $b$-不变量均为正。由于偏序集 $\mathbb{V}_A$ 只有一个元素 0，$A$ 的所有 $b$-不变量都必须为 1。这意味着 $\mathsf{v}(A)$ 的所有元素都是 0 或 1。根据引理 5.2，我们可以且将假设指数矩阵 $\mathsf{v}(A)$ 是一个分块矩阵，其所有对角块均具有引理 5.4 中的形式。对于不同的 $i$ 和 $j$，由 $A$ 的戈伦斯坦性和基本性可知，$\mathsf{v}(A)$ 的 $(i, j)$-块与 $(j, i)$-块中，一个是常数矩阵 0，另一个是常数矩阵 1。我们通过对 $\mathsf{v}(A)$ 的分块大小进行归纳，证明 $A$ 共轭于所需形式。若 $\mathsf{v}(A)$ 的分块大小等于 1，则结论显然成立。假设当 $\mathsf{v}(A)$ 的分块大小等于 $m \geq 1$ 时结论成立。若 $\mathsf{v}(A)$ 的分块大小为 $m+1$，则由归纳法，我们可以且将假设其分块大小为 $m$ 的左上块具有所需形式。若第 $(m+1)$ 个分块列中的所有块都是常数矩阵 0，则结论成立。否则，假设第 $(m+1)$ 个分块列中第一个为常数矩阵 1 的块位于第 $i$ 个分块行。根据三角不等式，对于所有 $i < j \leq m$，$(j, m+1)$- 块也都是常数矩阵 1。若用一个置换矩阵共轭 $A$，我们可以交换 $\mathsf{v}(A)$ 的 $(i, m+1)$-块与 $(m+1, i)$-块，同时保持其他块不变。然后对 $i+1$，....., $m+1$ 依次进行此操作，以完成归纳。证明完毕。

c) 不失一般性，我们可以并且将假设 $A$ 的所有 $b$-不变量均为正。由于偏序集 $\mathbb{V}_A$ 只有两个元素，$A$ 的所有 $b$-不变量都必须小于或等于 2。若 $A$ 的两个 $b$-不变量 $d(\nu i, i)$ 和 $d(\nu j, j)$ 等于 2，那么 $\mathbb{V}_A$ 的两个元素 $\mathsf{v}(e_{\nu i}A(1)_{\geq 0})$ 和 $\mathsf{v}(e_{\nu j}A(1)_{\geq 0})$ 都非零，因此它们必定相同。由此可得，项 $d(\nu i, j)$ 和 $d(\nu j, i)$ 也等于 2。根据引理 4.3，这就产生矛盾。因此，$A$ 的 $b$-不变量中恰有一个等于 2，其余均等于 1。根据引理 5.2 和 5.3，Gorenstein 序 $A$ 必定是循环的。在对 $A$ 进行置换矩阵共轭后，我们可以并且将假设对所有 $i \in \mathbb{I}$ 和 $d(1, n) = 2$，均有 $\nu i = i+1$。由于其余所有 $b$-不变量都等于 1，因此对所有 $i \neq 1, n$，必有 $d(1, i) = d(i, n) = 1$。若我们迭代使用等式 $d(i+1, j) + d(j, i) = d(i+1, i)$，矩阵 $\mathsf{v}(A)$ 的所有项便都确定为所需的值。$\surd$

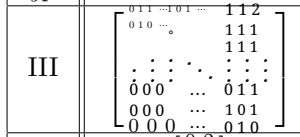
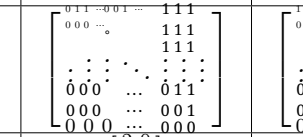
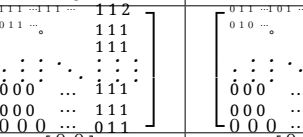
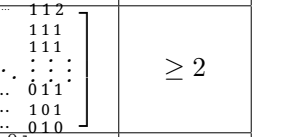
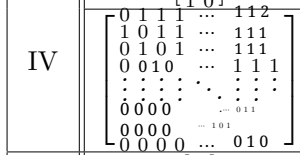
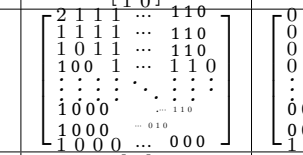
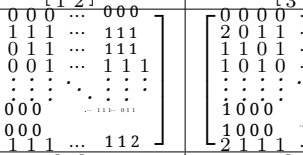
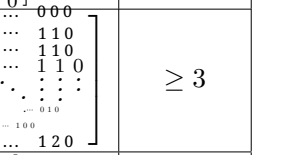
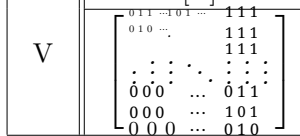
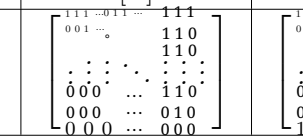
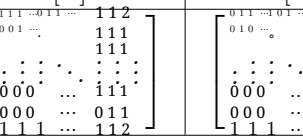
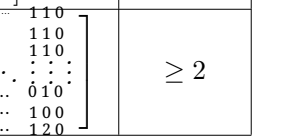
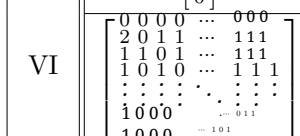
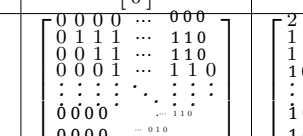
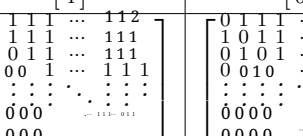
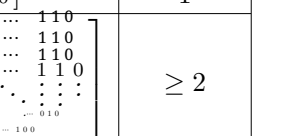
## 5.2. 类型 $A_3$。

**定理 5.5.** 设 $A$ 是一个基本的 $\mathbb{N}$-分次 *Gorenstein* 铺砌序 .

*a)* 代数 $\Gamma$ 同构于具有唯一汇点的非线性 $A_3$ 箭图的路径代数，当且仅当 $A$ 同构于由以下类型的指数矩阵 $\begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_2 & d_1 \end{bmatrix}$ 所确定的铺砌序。

| *type* | $d_1$ | $d_2$ | $d_i$的大小 |
|---|---|---|---|
| I | $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $\geq 2$ |
| II | $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$ | 1 |
| | $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $\geq 2$ |

***b)*** 代数 $\Gamma$ 同构于线性 $A_3$ 箭图的路径代数，当且仅当 $A$ 同构于由以下类型的指数矩阵 $\begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{bmatrix}$ 所确定的铺砌序。

| *type* | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $d_4$ | $d_i$的大小 |
|---|---|---|---|---|---|
| III |  |  |  |  | $\geq 2$ |
| IV | $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$  | 2<br>$\geq 3$ |
| V | $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$  | 1<br>$\geq 2$ |
| VI | $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$  | 1<br>$\geq 2$ |

为证明定理 5.5，我们使用以下引理来简化问题。

**引理 5.6**。设 $A$ 是一个基本的 $\mathbb{N}$-分次 *Gorenstein* 铺砌序，使得稳定范畴$\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}A$ 与 ~~per~~$kA_3$ 三角等价。那么 $A$ 共轭于一个满足以下条件的铺砌序 $B$ 。

***a)*** $B$ 的所有 $b$-不变量均为正。***b)*** $\mathrm{v}(B)$ 的所有元素均小于或等于2。***c)*** $\mathrm{v}(B)$ 中恰有两个元素等于2。

特别地，这两个值为2 的元素所在的同一行或同一列中的所有非对角元均等于1。

证明。不失一般性，我们可以并且将假设 $A$ 的所有 $b$-不变量均为正。由于偏序集 $\mathbb{V}_A$ 只有三个元素， $A$ 的所有 $b$-不变量都必须小于或等于 3。如果 $A$ 的一个 $b$-不变量 $d(\nu i, i)$ 等于 3，那么 $\mathrm{v}(A)$ 的第 $\nu i$ 行或第 $i$ 列中必有一个大于或等于 2 的项。在这两种情况下， $A$ 都有另一个大于或等于 2 的 $b$-不变量 $d(\nu j, j)$。如果 $d(\nu j, j)$ 等于 3，那么元素 $\mathrm{v}(e_{\nu j}A(1)\geq 0)$ 在 $\mathbb{V}_A$ 中必定等于 $\mathrm{v}(e_{\nu i}A(1)\geq 0)$。由此可得 $d(\nu i, j) = d(\nu j, i) = 3$。根据引理 4.3，这与假设矛盾。如果 $d(\nu j, j)$ 等于 2，那么元素 $\mathrm{v}(e_{\nu j}A(1)\geq 0)$ 在 $\mathbb{V}_A$ 中必定等于 $\mathrm{v}(e_{\nu i}A(2)\geq 0)$。由此可得 $d(\nu i, j) = 3 > d(\nu j, j)$。这就产生了矛盾。因此， $A$ 的所有 $b$-不变量都必须小于或等于 2。

如果 $\mathrm{v}(A)$ 中有三行或三列的元素等于 2，那么 $A$ 的三个 $b$-不变量 $d(\nu i, i)$、 $d(\nu j, j)$ 和 $d(\nu k, k)$ 都等于 2。因此， $\mathbb{V}_A$ 的元素 $\mathrm{v}(e_{\nu i}A(1)\geq 0)$ 、 $\mathrm{v}(e_{\nu j}A(1)\geq 0)$ 和 $\mathrm{v}(e_{\nu k}A(1)\geq 0)$ 都非零。但 $\mathbb{V}_A$ 只有两个非零元素。因此，这三个元素中有两个相同。不失一般性，我们可以并且将假设 $\mathrm{v}(e_{\nu i}A(1)\geq 0) = \mathrm{v}(e_{\nu j}A(1)\geq 0)$。由此得到 $d(\nu i, j) = d(\nu j, i) = 2$。根据引理 4.3，这导致矛盾。因此，$\mathrm{v}(A)$ 中等于 2 的元素

集中在一个大小为 2 的子矩阵中。特别地， $A$ 恰有两个 $b$-不变量 $d(\nu i,\ i)$ 和$d(\nu j,\ j)$ 等于 2。

如果条目 $d(\nu i, j)$ 等于 2，根据引理 4.3，条目 $d(\nu j, i)$ 不等于 2。因此，$\mathrm{v}(\nu i, i)$ 是 $\mathrm{v}(A)$ 的第 $i$ 列中唯一等于 2 的条目。由此可知，条目 $d(i, i)$ 是 $\mathrm{v}(A)$ 的第 $i$ 行中唯一等于 0 的条目。我们用 $B = DAD^{-1}$ 替换 $A$，其中 $D$ 是对角矩阵，其第 $\nu i$ 个对角线元素为 $x^{-1}$，其余元素均为 1。在新的矩阵 $\mathrm{v}(B)$ 中，等于 2 的条目仍集中在一个大小为 2 的子矩阵内，该子矩阵由包含 $(\nu j, j)$ 条目和 $(\nu^2 i, \nu i)$ 条目的行与列构成。由于有 $d(\nu j, \nu i) = d(\nu j, j) - d(\nu i, j) = 0$，$\mathrm{v}(B)$ 中的 $(\nu j, \nu i)$ 条目等于 1。因此，$\mathrm{v}(B)$ 中只有 $(\nu j, j)$ 条目和 $(\nu^2 i, \nu i)$ 条目等于 2。综上，铺砌序 $A$ 与一个铺砌序 $B$ 共轭，使得指数矩阵中恰有两个条目等于 2。最后一个结论显然。$\surd$

定理 5.5 的证明。 每一部分的充分性由定理 4.1 的 b) 部分推出。下面证明必要性。假设我们有 $\mathbb{I} = \{1, \dots, n\}$。我们通过将 $\mathbb{I}$ 的定义扩展到 $\mathbb{Z}$，并将 $i + tn$ 与 $i$ 对所有 $i \in \mathbb{I}$ 和整数 $t$ 进行等同。

a) 在可能的情况下将 $A$ 替换为一个共轭的 $\mathbb{N}$-分次 Gorenstein 铺砌序后，我们可以且将假设 $A$ 满足引理 5.6 中的所有条件。首先考虑 $A$ 是非循环Gorenstein镶嵌阶的情形。根据引理 5.3，集合 $\mathbb{I}$ 在中山置换下恰有两个轨道，并且每个轨道都包含一个相应的 $b$-不变量等于 2 的元素。此外，这两个轨道具有相同的基数。根据引理 5.2，我们可以且将假设指数矩阵 $\mathrm{v}(A)$ 是一个分块矩阵，其中每个块的大小为 $\frac{n}{2}$，且对角块是与循环 Gorenstein 铺砌序相关联的指数矩阵。根据定理 5.1 的c) 部分的证明，$\mathrm{v}(A)$ 的对角块在 I 型中必定具有形式 $d_1$。由于两个等于 2 的 $b$- 不变量在同一行或同一列中的所有非对角元均为 1，如果我们迭代使用等式 $d(i+1, j) + d(j, i) = d(i+1, i)$，则矩阵 $\mathrm{v}(A)$ 的所有元素都被确定为 I型中的元素。

现在考虑 $A$ 是循环 Gorenstein 铺砌序的情形。若 $n$ 等于 2，则结论显然成立。我们假设 $n$ 大于 2。经过可能的置换矩阵共轭后，我们可以且将假设对所有 $i \in \mathbb{I}$ 和 $d$ 都有 $\nu i = i + 1$ $(1,\ n) = d(i_0 + 1,\ i_0) = 2$。若 $i_0$ 等于 1，则有 $d(n,\ 1) = d(2,\ 1) - d(2,\ n) = 1$，因此有

$$d(n, n-1) = d(n, 1) + d(1, n-1) = 2\,.$$

但是我们有 $n - 1 \neq n,\ i_0$，这与只有 $(1,\ n)$ 项和 $(i_0 + 1,\ i_0)$ 项等于 2 矛盾。因此有 $i_0 \neq 1$。类似地，有 $i_0 \neq n - 1$。若 $2i_0$ 小于 $n$，则对所有 $n - i_0 + 1 \leq i \leq n - 1$ 都有 $d(i + 1,\ i) = 1$。由于 $d(i_0 + 1,\ n)$ 等于 1，因此有

$$\begin{aligned}
d(n, i_0) &= d(i_0 + 1, i_0) - d(i_0 + 1, n) = 1\,,\\
d(i_0, n-1) &= d(n, n-1) - d(n, i_0) = 0\,,\\
&\cdots\\
d(2, n - i_0 + 1) &= d(n - i_0 + 2, n - i_0 + 1) - d(n - i_0 + 2, 2) = 0\,,\\
d(n - i_0 + 1, 1) &= d(2, 1) - d(2, n - i_0 + 1) = 1\,,
\end{aligned}$$

分别地，我们推得

$$d(n - i_0 + 1, n - i_0) = d(n - i_0 + 1, 1) + d(1, n - i_0) = 2\,.$$

但是我们有 $n - i_0 \neq n,\ i_0$，这与只有 $(1, n)$-项和 $(i_0 + 1, i_0)$-项等于 2 矛盾。因此我们有 $2i_0 \geq n$。接着我们有 $d(i + 1, i) = 1$ 对于

所有 $1 \le i \le n - i_0 - 1$。由于 $d(1, i_0)$ 等于 1，我们有

$$\begin{aligned} d(i_0+1,1) &= d(i_0+1,i_0) - d(1,i_0) = 1\,, \\ d(2,i_0+1) &= d(2,1) - d(i_0+1,1) = 0\,, \\ &\cdots \\ d(n-i_0,n-1) &= d(n-i_0,n-i_0-1) - d(n-1,n-i_0-1) = 0\,, \\ d(n,n-i_0) &= d(n,n-1) - d(n-i_0,n-1) = 1\,, \end{aligned}$$

分别地。我们由此推出 $d(n-i_0+1, n-i_0) = d(n-i_0+1, n) + d(n, n-i_0) = 2$。但只有 $(1, n)$-元与 $(i_0+1, i_0)$-元等于 2，因此我们有 $n - i_0 = i_0$。若迭代使用等式 $d(i+1, j) + d(j, i) = d(i+1, i)$，则矩阵 $\mathrm{v}(A)$ 的所有元都被确定为 II 型中的元。

b) 由引理 5.6，铺砌序 $A$ 共轭于 a) 部分所给出的某一类。考虑对角矩阵 $D = \mathrm{diag}(x^{l_1}, \ldots, x^{l_n})$，它满足 $l_i = 1$ 以及 $l_j = 0$ 对所有 $j \neq i$。若 $DAD^{-1}$ 是 $\mathbb{N}$-分次的，则第 $i$ 列中 $\mathrm{v}(A)$ 的所有非对角元必须为正。若 $D^{-1}AD$ 是 $\mathbb{N}$-分次的，则第 $i$行中 $\mathrm{v}(A)$ 的所有非对角元必须为正。由此事实，容易验证类型 III 与 IV（分别地，V 与 VI）是仅有的与 I 型（分别地，II 型）共轭的类型。于是该结论成立。 $\surd$

我们以提出下面的问题来结束本节。

**问题 5.7**。对于任意基本的 $\mathbb{N}$-分次 *Gorenstein* 铺砌序 $A$，若 $\Gamma$是遗传的，那么存在大于 2 的 $b$- 不变量是否意味着 $\mathbb{V}_A$ 属于（不一定是线性的）类型 $A$?

5.3. **小整体维数的自同态代数** $\Gamma_A$。 **</style}设 , . . . , 为非负整数，且不全为零。令 (,** $i) = 0$; 若 $i < j$，则令 $d(i,j) = \sum_{k=i}^{j-1} m_k$; 若 $i > j$，则令 $d(i,j) = \sum_{k=i}^{n} m_k + \sum_{k=1}^{j-1} m_k$。根据 [13], 的第 8.2 节，这便给出一个基本 Gorenstein 铺砌序 $A(m_1, \ldots, m_n)$，它由指数矩阵 $[d(i,j)]$确定。

**命题 5.8.** 对于基本 *Gorenstein* 铺砌序 $A(m_1, \ldots, m_n)$，代数 $\Gamma$ 的整体维数小于或等于2。

证明。给定 $\mathbb{V}_A$ 的一个元素 $\mathrm{v}(e_i A(j)_{\ge 0})$。对于任意满足 $\mathrm{v}(e_{i'} A(j')_{\ge 0}) < \mathrm{v}(e_i A(j)_{\ge 0})$ in $\mathbb{V}_A$ 的 $\mathrm{v}(e_{i'} A(j')_{\ge 0}) \in \mathbb{V}_A$，若 $i'$ 等于 $i$，则有

$$\mathrm{v}(e_{i'} A(j')_{\ge 0}) \le \mathrm{v}(e_i A(j+1)_{\ge 0})\,.$$

若 $i'$ 不等于 $i$，则有

$$\mathrm{v}(e_{i'} A(j')_{\ge 0}) \le \mathrm{v}(e_{i-1} A(j+m_{i-1})_{\ge 0})\,.$$

这意味着 $\mathrm{v}(e_i A(j+1)_{\ge 0})$ 和 $\mathrm{v}(e_{i-1} A(j+m_{i-1})_{\ge 0})$ 是子偏序集 $\{x \in \mathbb{V}_A \mid x < \mathrm{v}(e_i A(j)_{\ge 0})\}$ 中唯一可能的极大元。另一方面，这两个元素在 $\mathbb{V}_A$ 中的唯一可能的交是 $\mathrm{v}(e_{i-1} A(j+1+m_{i-1})_{\ge 0})$。于是，由定理 4.1 的 b) 部分和定理 2.2 [14]可得所述结论。 $\surd$

**引理 5.9.** 任何基本的 $\mathbb{N}$ 分次 *Gorenstein* 铺砌序，只要满足 $|\mathbb{I}| = 3$，就具有如下形式 $A(m_1, m_2, m_3)$。

证明。设 $A$ 是一个具有 $|\mathbb{I}| = 3$的基本 $\mathbb{N}$-分次戈伦斯坦铺砌序。那么， $A$ 的中山置换没有不动点，因此 $A$ 是一个循环 Gorenstein 序。经过适当的置换矩阵共轭后，我们可以且将假设，对 $A$ 有

$$\mathrm{v}(A) = \begin{bmatrix} 0 & a & a+b \\ b+c & 0 & b \\ c & c+a & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $a$、 $b$和 $c$均为非负整数。由于 $A$ 是基本的， $a$、 $b$和 $c$ 不全为零。 √

**命题 5.10.** 设 $A$ 是一个带 $\mathbb{N}$ 分次的 *Gorenstein* 铺砌序，且 $|\mathbb{I}| = 3$ ，其中 $V$ 是 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}A$ 中的标准倾斜对象。

*a)* $\Gamma$ 的整体维数小于或等于 2。*b)* 若 $A$ 是基本的，则 $\Gamma$ 是遗传的，当且仅当 $A$ 与由指数矩阵确定的铺砌序共轭。

$$\begin{bmatrix} 0&0&0\\ 1&0&0\\ 1&1&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0\\ 2&0&0\\ 2&2&0 \end{bmatrix}, or \begin{bmatrix} 0&1&2\\ 2&0&1\\ 1&2&0 \end{bmatrix}.$$

证明. a) 经过可能的替换后， $A$ 换成一个分次 Morita 等价的 $\mathbb{N}$<style id='9}分次 Gorenstein 铺砌序，我们可以并且将假设它是基本的。于是结论由引理 5.9 和命题5.8得出。

b) 我们假设 v($A$具有引理 5.9 中的形式，且满足 $c \geq a$ 和 $c \geq b$。那么整数 $c$ 必为正数。若 $c$ 等于 1，则 $a$和 $b$等于 0 或 1。容易验证，在这种情况下， $A$ 与所需的某个铺砌序共轭。现在考虑 $c \geq 2$的情形。由于 $\Gamma$ 是遗传的，根据推论 4.6中从 ii) 到 i) 的蕴含，对于 $\mathbb{V}_A$ 中除最小元以外的任意元素 $x$ ， $\{y \in \mathbb{V}_A \mid y < x\}$ 这个子偏序集有唯一的极大元。由于元素 $\begin{bmatrix} c-2 & c+a-2 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} c-1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是该子偏序集中仅有的可能极大元

$$\{x \in \mathbb{V}_A \mid x < \begin{bmatrix} c-1 & c+a-1 & 0 \end{bmatrix}\}$$

但它们的第一分量不同，因此必有 $c + a - 2 \leq 0$。这意味着我们有 $c = 2$ 和 $a = 0$。若 $b$ 等于 0（分别地，1），则 $A$ 与所需的第二个（分别地，第三个）铺砌序共轭。若有 $b \geq 2$，则元素$\begin{bmatrix} b & 0 & b-2 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & b-1 \end{bmatrix}$ 是该子偏序集中唯一可能的极大元

$$\{x \in \mathbb{V}_A \mid x < \begin{bmatrix} b+1 & 0 & b-1 \end{bmatrix}\}$$

但它们的第三分量不同，因此必有 $b \leq 0$。这与假设矛盾。至此，证明完成。√

## References

[1] Maurice Auslander, *Functors and morphisms determined by objects*, 代数表示论（会议论文集，Temple University，费城，宾夕法尼亚州，1976年），纯粹与应用数学讲义，第37卷，Dekker，纽约-巴塞尔，1978年，第1–244页。[2] Ragnar-Olaf Buchweitz, *Maximal Cohen-Macaulay modules and Tate cohomology*, 数学调查与专著，第262卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州， [2021] ©2021年，附录及引言由Luchezar L. Avramov、Benjamin Briggs、Srikanth B. Iyengar和Janina C. Letz撰写。[3] Ragnar-Olaf Buchweitz, Osamu Iyama和Kota Yamaura, *Tilting theory for Gorenstein rings in dimension one* **8** 2020 36, 37 , Forum Math. Sigma（） ，论文编号e 。[4] Charles W. Curtis和Irving Reiner, *Methods of representation theory. Vol. I*, 纯粹与应用数学，John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1981年，附有关于有限群与序的应用，Wiley-Interscience出版物。[5] Hailong Dao、Osamu Iyama、Ryo Takahashi和Michael Wemyss, *Gorenstein modifications and $\mathbb{Q}$-Gorenstein rings* **29** 2020 4, 729 751 , J. Algebraic Geom.（） ，第–期。[6] Masahiro Futaki和Kazushi Ueda, *Homological mirror symmetry for Brieskorn-Pham singularities*, Selecta Math.（新系列）**17** （2011年），第2期，435–452。[7] P. Gabriel, *The universal cover of a representation-finite algebra*, 代数表示（普埃布拉，1980年），数学讲义，第903卷，Springer，柏林-纽约，1981年，第68–105页。[8] Robert Gordon和Edward L. Green, *Graded Artin algebras*, J. Algebra **76** （1982年），第1期，111–137。[9] Norihiro Hanihara和Osamu Iyama, *Enhanced Auslander-Reiten duality and Morita theorem for singularity categories* 2209 14090 [ ] , arXiv: . math.RT 。

[10] Martin Herschend、Osamu Iyama、Hiroyuki Minamoto和Steffen Oppermann, *Representation theory of Geigle-Lenzing complete intersections* **285** 2023 1412, +141 , Mem. Amer. Math. Soc.（），第vii期。[11] Yuki Hirano和Genki Ouchi, *Derived factorization categories of non-Thom-Sebastiani-type sums of potentials* 3 **126** 2023 1, 1 75 , Proc. Lond. Math. Soc.（） （），第–期。[12] Osamu Iyama, *Tilting Cohen-Macaulay representations*,《2018年国际数学家大会论文集——里约热内卢。第二卷：特邀报告》，World Sci. Publ.，新泽西州哈肯萨克，2018年，第125–162页。[13] Osamu Iyama、Yuta Kimura和Kenta Ueyama, *Cohen-Macaulay representations of Artin-Schelter Gorenstein algebras of dimension one* 2404 05925 [ ] , arXiv: . math.RT 。

[14] Osamu Iyama和Ren´e Marczinzik, *Distributive lattices and Auslander regular algebras*, Adv. Math. 398（2022年），论文编号108233，共27页。[15] Hiroshige Kajiura、Kyoji Saito和Atsushi Takahashi, *Triangulated categories of matrix factorizations for regular systems of weights with $\epsilon = -1$* **220** 2009 5, 1602 1654 , Adv. Math.（），第–期。[16] Yuta Kimura、Hiroyuki Minamoto和Kota Yamaura, *Tilting theory for finite dimensional 1-Iwanaga-Gorenstein algebras* **663** 2025 259 288 , J. Algebra（），–。

[17] V. Kirichenko、M. Khibina、L. Mashchenko、M. Plakhotnyk和V. Zhuravlev, *Gorenstein tiled orders*, Carpathian Math. Publ. 6（2014年），第2期，260–281。[18] M. M. Kleˇiner, *Partially ordered sets of finite type*, Zap. Nauˇcn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 28（1972年），32–41，表示论研究。[19] Dirk Kussin、Helmut Lenzing和Hagen Meltzer, *Triangle singularities ADE-chains and weighted , , , projective lines* **237** 2013 194 251 Adv. Math.（），–。[20] Graham J. Leuschke和Roger Wiegand, *Cohen-Macaulay representations*, 数学调查与专著，第181卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2012年。[21] Ming Lu和Bin Zhu, *Singularity categories of Gorenstein monomial algebras*, J. Pure Appl. Algebra 225（2021年），第8期，论文编号106651，共39页。[22] Izuru Mori和Kenta Ueyama, *Stable categories of graded maximal Cohen-Macaulay modules over noncommutative quotient singularities* **297** 2016 54 92 , Adv. Math.（），–。

[23] D. O. Orlov, *Triangulated categories of singularities and D-branes in Landau-Ginzburg models*, Tr. Mat. Inst. Steklova 246（2004年），240–262。[24] Klaus W. Roggenkamp, *Lattices over orders. II*, 数学讲义，第142卷，Springer-Verlag，柏林-纽约，1970年。[25] Daniel Simson, *Linear representations of partially ordered sets and vector space categories*, 代数、逻辑与应用，第4卷，Gordon and Breach Science Publishers，蒙特勒，1992年。[26] Yuji Yoshino, *Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings*, 伦敦数学会讲义系列，第146卷，剑桥大学出版社，剑桥，1990年。[27] A. G. Zavadskiˇi和V. V. Kiriˇcenko, *Semimaximal rings of finite type*, Mat. Sb.（新系列）103(145)（1977年），第3期，323–345，463。

Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1 KomabaMeguro-ku Tokyo 153-8914, Japan*Email address*: iyama@ms.u-tokyo.ac.jp*URL*: https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~iyama/

School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China

Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1 KomabaMeguro-ku Tokyo 153-8914, Japan*Email address*: liuj@imj-prg.fr*Email address*: liu@ms.u-tokyo.ac.jp*URL*: https://webusers.imj-prg.fr/~junyang.liu