期刊名称

Crossmark

收稿日期dd Month yyyy修订日期dd Month yyyy

arXiv:2602.01888v1 [math.NA] 2 Feb 2026

文章类型

采用有限差分法求解复杂几何中的多重网格泊松方程

Deepak Gautam[1], Bhooshan Paradkar[1]

[1]物理科学学院、UM-DAE基础科学卓越中心、孟买大学 - 400098，印度 a

*如需联系作者，请发送电子邮件至：deepak.gautam@cbs.ac.in

电子邮件： deepak.gautam@cbs.ac.in, bhooshan.paradkar@cbs.ac.in

关键词： 示例术语，示例术语，示例术语

摘要

我们提出了一种受变换光学启发的高效数值方法，用于求解复杂且形状任意的几何区域中的泊松方程。该方法通过坐标变换将物理域映射到均匀计算域，可应用于整个计算域，也可选择性地应用于域内特定边界。这种灵活性使得均匀（拉普拉斯方程）和非均匀（泊松方程）问题均可通过迭代求解器或快速直接求解器高效求解，只需根据变换修改材料参数和源项。该方法基于有限差分框架构建，其中修改后的材料属性根据坐标变换方程解析或数值计算得出。这使得该方法能够准确处理任意几何形状，同时保留均匀网格求解器的简便性。数值实验验证了该方法可达到二阶精度，$\mathcal{O}(\Delta x^2)$，并为在均匀计算网格上集成多重网格方法等快速求解器提供了直接途径。

1 引言

高效且准确地求解泊松方程是计算物理中诸多问题的基础 [1, 2, 3]。在计算等离子体物理中，泊松方程求解器对于等离子体的动理学建模和流体建模尤为重要。这类求解器是静电粒子网格（PIC）代码的核心，用于等离子体的动理学建模。同样，在不可压缩流体建模中，压力泊松方程用于计算压力场，同时保持速度场无散。在大规模实际模拟中，由于物理边界复杂或采用自适应网格细化策略，求解区域往往具有非均匀几何或网格分布。对于这类情况，高性能求解器不仅必须保持精度，还必须具备较高的计算效率。

多重网格方法长期以来一直被认为是求解椭圆方程最有效的方法之一，对于各种离散化方案都能提供最优或近乎最优的复杂度 [4, 5, 6]。尤其是，几何多重网格方法能够利用底层网格的层次结构实现快速收敛。然而，当计算网格不均匀时，直接应用几何多重网格会面临挑战。在这种情况下，通常采用有限元方法（FEM），因为它能够自然地适应非结构网格 [7, 8], ，但其实现可能较为复杂，而且与结构化有限差分格式相比，所得矩阵运算往往需要更高的计算成本。

相比之下，有限差分方法实现简单，在均匀网格上效率很高，因此非常适合求解具有结构化几何的大规模问题。遗憾的是，对于非均匀物理域，直接应用有限差分多重网格并不简单，否则可能会降低精度或收敛效率。一种替代策略受到变换光学的启发 [9, 10, 11]，其做法是将非均匀物理域映射到一个均匀

计算域中，这需要进行适当的坐标变换。在变换光学中，弯曲或梯度介质中的麦克斯韦方程组可以等效地表述为均匀空间中材料属性（介电常数和磁导率）随空间变化的方程。这些理念广泛用于设计新型材料，通常称为超材料。类似地，对于泊松方程，进行类似的变换会改变计算域中的介电常数分布，从而保留原有的物理规律。

在本研究中，我们利用这一概念开发了一种有限差分几何多重网格求解器，即使底层物理域为非均匀几何，该求解器也能完全在均匀计算网格上运行。通过将物理坐标变换为计算坐标，我们推导出一个等效的泊松方程，其中包含空间变化的介电常数张量。这种方法无需进行有限元组装，从而能够直接应用高效的结构网格多重网格算法。该方法保持二阶精度，维持几何多重网格的最优复杂度，并且易于集成到现有的结构网格求解器中。

我们通过具有解析已知解的基准问题以及具有实际物理意义的非均匀几何，对所提出的方法进行了验证。与基于逐次超松弛（SOR）的标准迭代方法，以及我们基于有限差分求解器、针对非均匀网格的多重网格泊松求解器进行的时间效率对比测试表明，变换域有限差分法在实现显著加速的同时，能够达到相当的精度。

本文的结构安排如下：第 2 节将介绍方法的 formulation、变换光学的基本思想及其在计算物理中的实现。第 3 节详细介绍均匀计算网格上的几何多重网格实现算法。第 4 节将使用广为人知的解析解，对采用我们方法获得的数值解进行验证，并介绍其相较于 SOR方法的计算时间效率。

2 问题 formulation

考虑一个可微坐标变换 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$，并令 $\mathcal{J}$定义为 3×3 雅可比矩阵，如下所示

$$\mathcal{J}_{ij} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j}. \tag{1}$$

麦克斯韦方程组可以写成这样一种形式，使方程的微分形式在坐标变换下保持不变 [12]。可以对麦克斯韦方程组应用以下向量变换，使其形式在坐标变换下保持不变，如下所示：

$$\mathbf{E}' = (\mathcal{J}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \mathcal{J}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{E}' \tag{2}$$

$$\mathbf{B}' = (\mathcal{J}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mathcal{J}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{B}' \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\nabla}' = \boldsymbol{\mathcal{J}}^{-1}\boldsymbol{\nabla} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\mathcal{J}}\,\boldsymbol{\nabla}' \tag{4}$$

$$\rho' = \frac{\rho}{\det(\boldsymbol{\mathcal{J}})} \quad \Rightarrow \quad \rho = \det(\boldsymbol{\mathcal{J}})\,\rho' \tag{5}$$

$$\phi' = \phi \tag{6}$$

这里，$\mathbf{B}'$，$\mathbf{E}'$，∇'，ρ'，ϕ' 分别表示变换后的非均匀域中的磁场、电场、微分算子、电荷密度和电势，而相应的未加撇量定义在均匀域上。我们将非均匀域（加撇域）称为物理域，将均匀域（未加撇域）称为计算域。

在本文中，我们将仅讨论涉及泊松方程/高斯定律的静电情形的应用。让我们考虑均匀计算网格上如下形式的方程

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{E}) = \rho, \tag{7}$$

其中 ρ 为自由电荷密度，$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ 为 3×3 相对介电常数张量，且 $\mathbf{E}$ 为均匀计算网格中的电场矢量。若将式（2）–（6）中给出的矢量变换应用于式（7），即可将该方程简单地变换到非均匀网格上，即

$$\nabla' \cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{E}'\right) = \rho', \tag{8}$$

前提是两个系统中的介电常数按下式变换

$$\boldsymbol{\varepsilon'} = \frac{\boldsymbol{\mathcal{J}}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\mathcal{J}}^T}{det(\boldsymbol{\mathcal{J}})} \tag{9}$$

在涉及复杂几何的物理域中，我们选择 ε' =I，即单位矩阵。因此，计算域上的介电常数计算如下：

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \det(\boldsymbol{\mathcal{J}})\boldsymbol{\mathcal{J}}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}'(\boldsymbol{\mathcal{J}}^T)^{-1}. \tag{10}$$

计算域上的相应电荷密度由式（5）计算如下：

$$\rho = \rho' det(\boldsymbol{\mathcal{J}}). \tag{11}$$

在均匀网格上计算出电势和场之后，可以分别使用式（6）和（2）将这些量变换回物理网格。

2.1 二维空间中的表述

为便于说明，本文仅考虑二维物理网格。推广到三维情况是显然的。包含坐标变换的 2×2 雅可比矩阵可写为

$$\boldsymbol{\mathcal{J}_{ij}} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{xx} & \mathcal{J}_{xy} \\ \mathcal{J}_{yx} & \mathcal{J}_{yy}. \end{pmatrix}$$

利用式（10），可以将均匀计算空间中的介电常数张量分量写为

$$\varepsilon_{\mathrm{xx}} = \frac{\mathcal{J}_{\mathrm{yy}}^2 + \mathcal{J}_{\mathrm{xy}}^2}{\det(\mathcal{J})}, \tag{12}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{xy}} = \frac{-\mathcal{J}_{\mathrm{yy}}\mathcal{J}_{\mathrm{yx}} - \mathcal{J}_{\mathrm{xy}}\mathcal{J}_{\mathrm{xx}}}{\det(\mathcal{J})}, \tag{13}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{yx}} = \frac{-\mathcal{J}_{\mathrm{yx}}\mathcal{J}_{\mathrm{yy}} - \mathcal{J}_{\mathrm{xx}}\mathcal{J}_{\mathrm{xy}}}{\det(\mathcal{J})}, \tag{14}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{yy}} = \frac{\mathcal{J}_{\mathrm{yx}}^2 + \mathcal{J}_{\mathrm{xx}}^2}{\det(\mathcal{J})}. \tag{15}$$

显然，均匀计算网格上的修正介电常数为 $\varepsilon \neq$I。

现在可以将广义泊松方程写成如下形式：$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{E}) = \rho$，其中 $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}$ 为 2×2 修正介电常数张量。

上述方程可以展开为

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon_{xx}E_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon_{xy}E_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon_{yx}E_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon_{yy}E_y) = \rho \tag{16}$$

在静电考虑下，将 $E_x = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x}$ 和 $E_y = -\dfrac{\partial \phi}{\partial y}$ 代入上述方程，得到

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{xx}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial x} + \varepsilon_{xy}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial x} + \varepsilon_{yx}\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} \\ &+ \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\varepsilon_{yx}}{\partial y} + \varepsilon_{yy}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\varepsilon_{yy}}{\partial y} = -\rho \end{aligned} \tag{17}$$

使用 c 采用二阶中心有限差分法，可以将方程离散并重排为

$$\begin{aligned} \phi_{n+1}[i,j] = {} & k_1\phi_n[i+1,j] + k_3\phi_{n+1}[i-1,j] + k_4\phi_n[i,j+1] \\ & + k_5\phi_{n+1}[i,j-1] + k_6\big(\phi_n[i+1,j+1] - \\ & \phi_{n+1}[i-1,j+1] - \phi_n[i+1,j-1] + \phi_{n+1}[i-1,j-1]\big) \\ & - \rho[i,j]/k_2 \end{aligned} \tag{18}$$

其中，i、j 为网格索引，且

$$k_2 = 2\left(\frac{\epsilon_{xx}[i,j]}{\Delta x^2} + \frac{\epsilon_{yy}[i,j]}{\Delta y^2}\right),$$

$$k_1 = \frac{\epsilon_{xx}[i,j]}{\Delta x^2} + \frac{\epsilon_{xx}[i+1,j] - \epsilon_{xx}[i-1,j]}{4\Delta x^2} + \frac{\epsilon_{yx}[i,j+1] - \epsilon_{yx}[i,j-1]}{4\Delta x \Delta y},$$

$$k_3 = \frac{\epsilon_{xx}[i,j]}{\Delta x^2} - \frac{\epsilon_{xx}[i+1,j] - \epsilon_{xx}[i-1,j]}{4\Delta x^2} - \frac{\epsilon_{yx}[i,j+1] - \epsilon_{yx}[i,j-1]}{4\Delta x \Delta y},$$

$$k_4 = \frac{\epsilon_{yy}[i,j]}{\Delta y^2} + \frac{\epsilon_{yy}[i,j+1] - \epsilon_{yy}[i,j-1]}{4\Delta y^2} + \frac{\epsilon_{xy}[i+1,j] - \epsilon_{xy}[i-1,j]}{4\Delta x \Delta y},$$

$$k_5 = \frac{\epsilon_{yy}[i,j]}{\Delta y^2} - \frac{\epsilon_{yy}[i,j+1] - \epsilon_{yy}[i,j-1]}{4\Delta y^2} - \frac{\epsilon_{xy}[i+1,j] - \epsilon_{xy}[i-1,j]}{4\Delta x \Delta y},$$

$$k_6 = \frac{\epsilon_{xy}[i,j]}{2\Delta x \Delta y}.$$

于是，余项可写为

$$b[i,j] = \Phi_{n+1}[i,j] - \Phi_n[i,j]$$

最终解可写为

$$\Phi_{n+1}[i,j] = \Phi_n[i,j] + \omega \times b[i,j]$$

这里， ω 是一个松弛因子，且 $1 < \omega < 2$ 。当 $\omega = 1$时，该方法简化为高斯-赛德尔方法，该方法用于多重网格算法中解的平滑。下一节将详细讨论多重网格算法的实现。

总之，该算法的核心思想是应用坐标变换 $\mathbf{x} \to \mathbf{x}'$ 以从均匀计算网格获得所需的非均匀网格（$\mathbf{x}'$），计算网格为（$\mathbf{x}$）。根据式（1）计算得到的相应雅可比矩阵用于根据式（ϵ）和电荷密度（ρ），分别利用式（10）和（11）计算介电常数张量分量和电荷密度。利用均匀网格上修正后的 ϵ 和 ρ，我们采用有限差分法求解广义泊松方程。最后，利用逆变换将均匀网格上得到的解变换回物理网格。

3 几何多重网格方法的实现

几何多重网格（GMG）方法是一种成熟的迭代技术，用于求解由偏微分方程离散化产生的大型稀疏方程组。GMG 基于一系列网格进行运算，这些网格通过对原始计算网格进行系统性粗化而生成，并通过限制算子和延拓算子在细层与粗层之间传递信息。对于结构化网格以及几何形状简单、定义明确的问题，这种方法效率很高，因为可以通过将网格间距减半来自然地构造较粗网格。然而，GMG 依赖规则的几何层级，因此在非规则区域中的适用性有限；在这些区域生成一致的较粗层级可能需要复杂的重新网格划分，并可能导致曲线边界或高度不均匀边界附近的精度下降。

相比之下，代数多重网格（AMG）方法直接由系统矩阵构建其网格层次，从而无需显式的几何信息。这使得代数多重网格天然适用于非结构网格、复杂几何以及强非均匀系数。然而，若插值算子无法准确捕捉光滑误差分量，代数多重网格在非规则区域上可能出现性能下降——尤其是在

存在强各向异性、急剧的系数突变或畸变网格单元的情况下。在此类情形中，可采用平滑聚合或自适应代数多重网格等先进的代数多重网格变体，以保持收敛效率。虽然代数多重网格每次迭代的计算成本通常高于几何多重网格，但其稳健性与灵活性往往使其成为涉及复杂几何构型问题的首选。

在本研究中，上一节所述算法非常适用于GMG方法，因为所有计算都在均匀网格上进行。因此，在结构化网格上预先计算好介电常数张量的各分量后，便可消除AMG中通常会遇到的额外插值开销。这使得GMG能够直接应用于传统上需要非均匀网格的问题。此外，结构化均匀网格便于对问题进行并行化。下面简要介绍GMG的实现。

考虑在间距为 h的规则（均匀）网格上对连续问题进行离散化后得到的离散系统：

$$\mathbf{A}_h \Phi_h = \mathbf{b}_h, \tag{19}$$

其中$\mathbf{A}_h$ 是离散算子， Φ_h 是未知解向量，$\mathbf{b}_h$ 是源项。

设 $\bar{\Phi}_h$ 为通过某种迭代方法得到的当前近似解。由于 $\bar{\Phi}_h$ 并非精确解，因此会产生残差

$$\mathbf{r}_h = \mathbf{b}_h - \mathbf{A}_h \bar{\Phi}_h, \tag{20}$$

w它仅在找到精确解时才会消失。多重网格方法的目标是
c计算一个修正量 Ψ_h ，使得

$$\Phi_h = \bar{\Phi}_h + \Psi_h. \tag{21}$$

将其代入 (19)，并利用 $\mathbf{A}_h$ 的线性性可得

$$\mathbf{A}_h \Psi_h = \mathbf{r}_h. \tag{22}$$

$\bar{\Phi}_h$ 中的高频误差通过在细网格上进行平滑迭代而减小。剩余的光滑误差 Ψ_h 可以在网格尺寸为 $H > h$ 的较粗网格上，通过求解以下方程更高效地近似

$$\mathbf{A}_H \Psi_H = \mathbf{r}_H, \tag{23}$$

其中，粗网格残差由细网格残差经限制得到：

$$\mathbf{r}_H = \mathbf{I}_h^H \mathbf{r}_h,$$

其中 $\mathbf{I}_h^H$ 表示限制算子。随后，将粗网格修正量 Ψ_H 插值（延拓）回细网格，以更新解：

$$\bar{\Phi}_h^{\text{new}} = \bar{\Phi}_h + \mathbf{I}_H^h \Psi_H, \tag{24}$$

其中$\mathbf{I}_H^h$ 是延拓算子。在细网格上增加光滑步，可以减少插值引入的高频误差。这一系列操作构成一个多重网格循环，并重复执行直至收敛。

4 结果与基准测试

为进行基准测试，我们将结果与广为人知的解析解进行验证，并比较GMG方法与逐次超松弛（SOR）迭代法的计算时间。结果分为两部分：(i) 通过解析变换生成的网格，以及(ii) 通过数值变换生成的网格。对于直接SOR模拟

，

我们使用 $\omega = 1.875$ ，容差为 10^{-10}。

为简化起见，我们在 x 和 y 方向上选择相同数量的点，即 $\mathrm{N_x}$ =$\mathrm{N_y}$ =N。通过计算二维区域上的以下误差范数进行误差分析：

$$\mathrm{L}_\infty = \max_{(\mathrm{x_i},\mathrm{y_j})\in \mathrm{D}} \left|\phi_{\text{exact}}(\mathrm{x_i},\mathrm{y_j}) - \phi_{\text{numerical}}(\mathrm{x_i},\mathrm{y_j})\right|, \tag{25}$$

$$\mathrm{L}_2 = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{N}^2} \sum_{(\mathrm{x_i},\mathrm{y_j})\in \mathrm{D}} \left|\phi_{\text{exact}}(\mathrm{x_i},\mathrm{y_j}) - \phi_{\text{numerical}}(\mathrm{x_i},\mathrm{y_j})\right|^2}, \tag{26}$$

$$\mathrm{L}_1 = \frac{1}{\mathrm{N}^2} \sum_{(\mathrm{x_i},\mathrm{y_j})\in \mathrm{D}} \left|\phi_{\text{exact}}(\mathrm{x_i},\mathrm{y_j}) - \phi_{\text{numerical}}(\mathrm{x_i},\mathrm{y_j})\right|. \tag{27}$$

4.1 通过解析网格生成得到的结果

对于物理学和工程学中的某些问题，从计算网格到物理网格的解析映射显而易见。在这种情况下，可根据该映射得到介电常数张量的精确表达式。为作演示，我们考虑图 1所示的半环域。计算网格和物理网格分别如图 1 (a) 和 (b) 所示。在该圆柱体的内壁 ($r = a$) 上施加有限电势 Φ_0 。外壁 ($r = R$) 接地，且两壁之间的区域设为无电荷 ($\rho' = 0$)。

这些边界条件表示如下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{n}} &= 0 \quad \text{at} \quad \theta = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{n}} &= 0 \quad \text{at} \quad \theta = \pi \\ \Phi &= 0 \quad \text{at} \quad \mathrm{r} = \mathrm{R} \\ \Phi &= \Phi_0 \quad \text{at} \quad \mathrm{r} = \mathrm{a} \end{aligned} \tag{28}$$

该问题的精确解 $\Phi(\mathrm{r}\ \theta)$ 可写为：

$$\Phi(\mathrm{r}, \theta) = \frac{\Phi_0 \ln\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{r}}\right)}{\ln\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{a}}\right)} \tag{29}$$

从均匀计算域（图1(a)）到半环域（图1(b)）的映射由坐标变换描述 [13]:

$$\begin{aligned} \mathrm{x}' &= \mathrm{x}\cos\mathrm{y} \\ \mathrm{y}' &= \mathrm{x}\sin\mathrm{y} \end{aligned} \tag{30}$$

我们将内、外半径分别设为 $= 2$ 和 $\mathrm{R} = 5$，并采用网格分辨率 $\mathrm{n_x} = \mathrm{n_y} = 201$，对应的网格间距为 $\Delta\mathrm{x} = \left(\mathrm{R} - \right.$ $\left._{\mathrm{x}} - 1\right)$ a n 和 $\Delta\mathrm{y} = \left(\frac{\pi}{\mathrm{n_y} - 1}\right)$。内边界上的电势设为 $\Phi_0 = 1$。介电常数张量的对角分量，即 $\varepsilon_{\mathrm{xx}}$ 和 $\varepsilon_{\mathrm{yy}}$，由公式 12-15得出，分别如图 1(c) 和 (d) 所示。注意 e 该变换的非对角分量为零，即 $\varepsilon_{\mathrm{xy}} = \varepsilon_{\mathrm{yx}} = \mathbf{0}$。

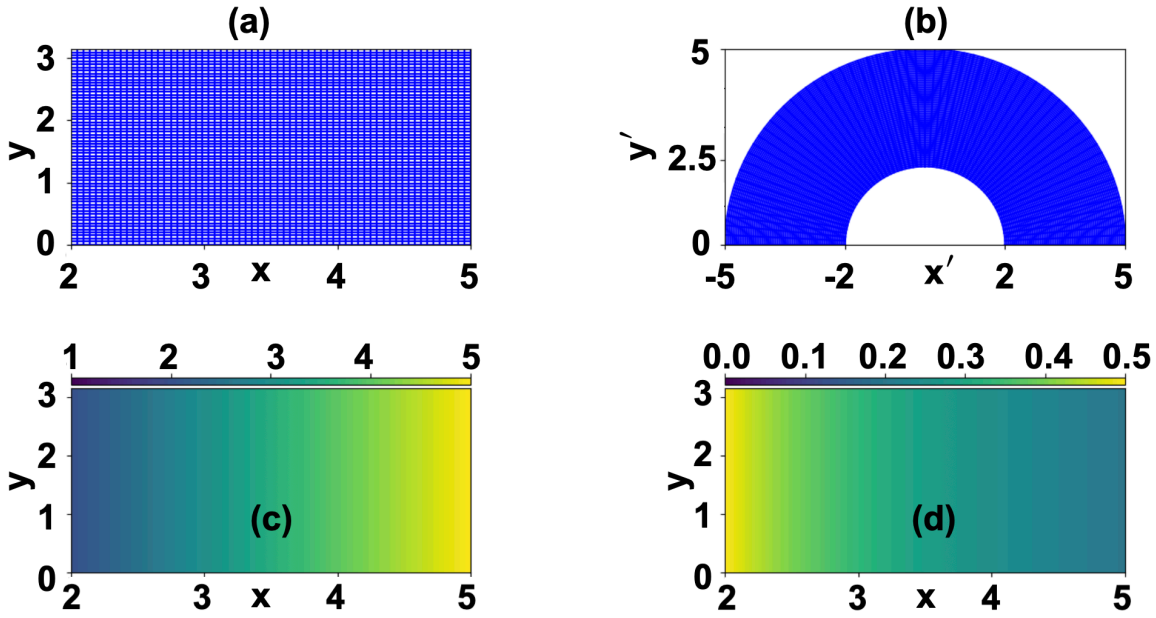


图 1. (a) 计算网格，(b) 物理网格，(c) ε_{xx} ，(d) ε_{yy} 。

图中对比了解析解与数值解2 （a）和（b）。图2（d）所示的误差分析表明，局部（L^{∞}）范数和全局（L^1, L^2）范数均达到二阶精度。参考虚线分别表示误差与一阶（$\propto \Delta x$）和二阶（$\propto \Delta x^2$）精度的关系。由此可见，三个范数均落在二阶精度线上。此外，图2（c）表明，与逐次超松弛方法相比，多重网格求解器的速度提升约两个数量级。因此，该算法只需对标准教科书中的泊松方程求解器进行少量修改，便能显著提升速度。请注意，论文中报告的所有运行时间均是在配备 Intel Core i7-1165G7 和 16 GB 内存的笔记本电脑上运行代码所得。

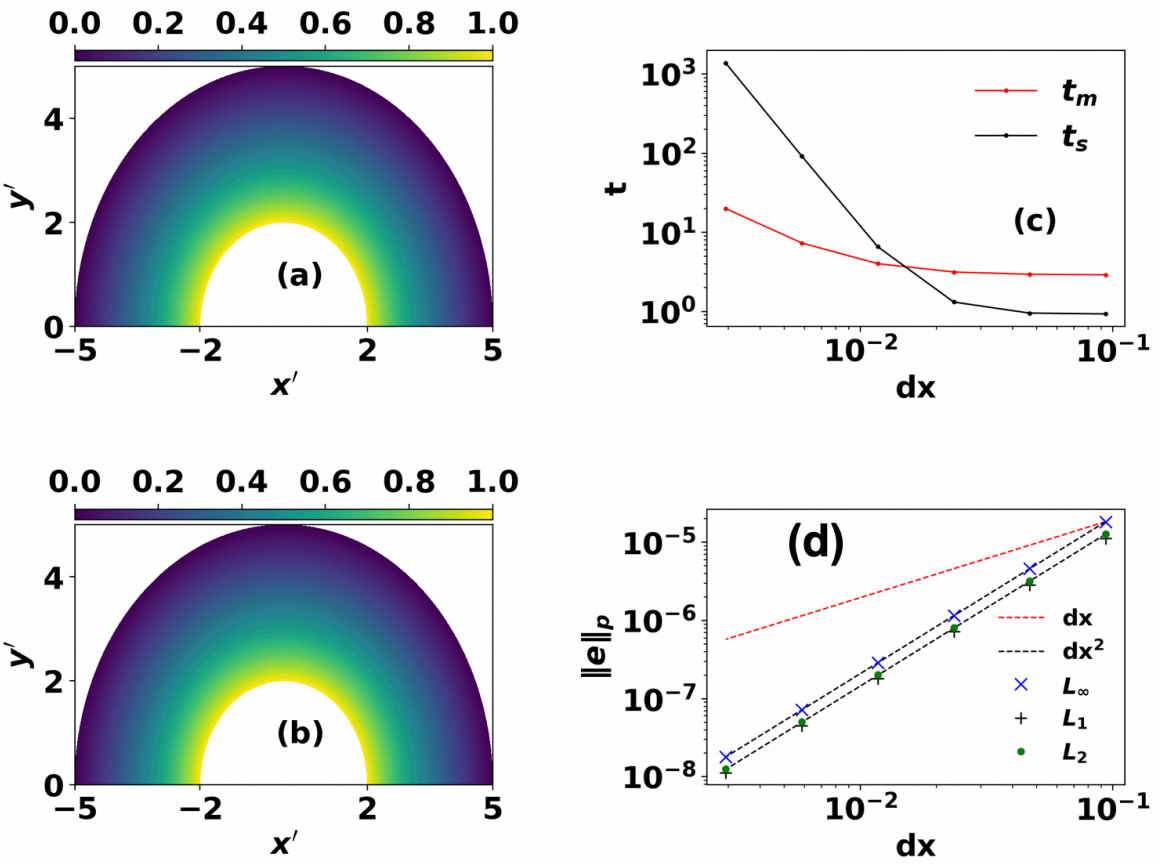


图 2. (a) 解析解，(b) 数值解，(c) 多重网格与 SOR方法的加速效果比较，(d) 误差分析。从子图 (d) 可以看出，该格式具有二阶精度。

4.2 通过数值网格生成得到的结果

当缺少用于将物理域映射到计算域的明显解析映射时，必须通过数值方法生成物理网格空间。本节将通过一些需要数值网格生成的示例，展示该算法的扩展应用。数值网格生成广泛应用于许多领域，例如计算流体力学 [14, 15, 16] 和电磁学中的保角映射 [17]。这种方法可以通过将任意网格映射到笛卡尔网格，处理复杂几何。最常见的方法基于求解拉普拉斯方程 [16, 18] 来获得变换后的坐标，因为它生成的坐标呈线性变化。给定从 (x,y, z) 到 (x′, y′, z′) 的任意坐标变换的边界条件，可使用拉普拉斯方程通过以下方程求解变换后的坐标。

$$\nabla^2 x' = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) x' = 0 \tag{31}$$

$$\nabla^2 y' = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) y' = 0 \tag{32}$$

$$\nabla^2 \mathrm{z}' = \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{z}^2} \right) \mathrm{z}' = 0 \tag{33}$$

在某些情况下，反向变换的拉普拉斯方程可表示为

$$\nabla^2 \mathrm{x} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}'^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}'^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{z}'^2} \right) \mathrm{x} = 0 \tag{34}$$

$$\nabla^2 \mathrm{y} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}'^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}'^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{z}'^2} \right) \mathrm{y} = 0 \tag{35}$$

$$\nabla^2 \mathrm{z} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}'^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}'^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{z}'^2} \right) \mathrm{z} = 0 \tag{36}$$

对于二维情形，我们可以求解变换后的系统：

$$\nabla^2 \mathrm{x}' = \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}^2} \right) \mathrm{x}' = 0, \tag{37}$$

$$\nabla^2 \mathrm{y}' = \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}^2} \right) \mathrm{y}' = 0, \tag{38}$$

满足形式为 $\mathrm{x}' = \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ 和 $\mathrm{y}' = \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ 的适当边界条件。现在，我们可以按照第 3 节所述，通过应用几何多重网格算法，利用方程（37）、（38）计算数值生成网格的坐标。雅可比矩阵的各元素可通过以下二阶有限差分公式进行数值预计算：

$$\mathcal{J}_{\mathrm{xx}}[\mathrm{i},\mathrm{j}] = \frac{\partial \mathrm{x}'}{\partial \mathrm{x}} \cong \frac{\mathrm{x}'(\mathrm{i}+1,\mathrm{j}) - \mathrm{x}'(\mathrm{i}-1,\mathrm{j})}{2\Delta \mathrm{x}}, \tag{39}$$

$$\mathcal{J}_{\mathrm{xy}}[\mathrm{i},\mathrm{j}] = \frac{\partial \mathrm{x}'}{\partial \mathrm{y}} \cong \frac{\mathrm{x}'(\mathrm{i},\mathrm{j}+1) - \mathrm{x}'(\mathrm{i},\mathrm{j}-1)}{2\Delta \mathrm{y}}, \tag{40}$$

$$\mathcal{J}_{\mathrm{yx}}[\mathrm{i},\mathrm{j}] = \frac{\partial \mathrm{y}'}{\partial \mathrm{x}} \cong \frac{\mathrm{y}'(\mathrm{i}+1,\mathrm{j}) - \mathrm{y}'(\mathrm{i}-1,\mathrm{j})}{2\Delta \mathrm{x}}, \tag{41}$$

$$\mathcal{J}_{\mathrm{yy}}[\mathrm{i},\mathrm{j}] = \frac{\partial \mathrm{y}'}{\partial \mathrm{y}} \cong \frac{\mathrm{y}'(\mathrm{i},\mathrm{j}+1) - \mathrm{y}'(\mathrm{i},\mathrm{j}-1)}{2\Delta \mathrm{y}}. \tag{42}$$

将雅可比矩阵的这些分量代入方程（12）-（15），即可计算任意网格位置 (i,j) 处的介电常数张量。下面通过具体示例演示该方法。

4.2.1 含源项的圆形区域

在本例中，我们考虑圆形区域上的泊松方程解（见图 3(b)），其半径为 b，均匀源项为 $\rho' = 1$。边界上的电势值设为 $b^2/4$。该问题的解析解表示为

$$\phi_{\mathrm{exact}}(x', y') = \frac{x'^2 + y'^2}{4} \tag{43}$$

为了将矩形计算区域映射到圆形物理区域，我们考虑以下变换：

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad y' = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{2b^2}} \quad (-b \le x \le b\,;\, y = -b),\\
x' &= \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad y' = \;\; b\sqrt{1 - \frac{x^2}{2b^2}} \quad (-b \le x \le b\,;\, y = b),\\
x' &= -b\sqrt{1 - \frac{y^2}{2b^2}}, \quad y' = \frac{y}{\sqrt{2}} \quad (x = -b\,;\, -b \le y \le b),\\
x' &= \;\; b\sqrt{1 - \frac{y^2}{2b^2}}, \quad y' = \frac{y}{\sqrt{2}} \quad (x = b\,;\, -b \le y \le b).
\end{aligned} \tag{44}$$

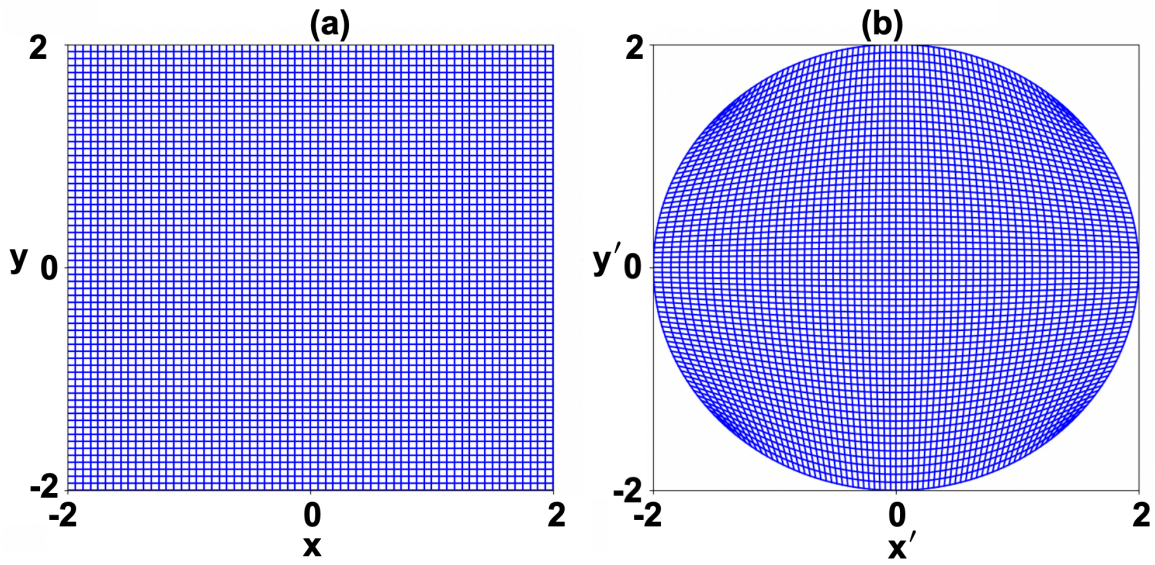


图 3. 圆形区域映射：(a) 均匀计算网格和 (b) 变换后的物理网格。

注意，此变换将正方形的各边映射到圆的各个象限。将这些条件作为方程 37 和38的边界条件，我们便可从笛卡尔物理网格得到物理网格，如图 3所示。此处，我们取 $b = 2$，并将网格分辨率设为 $\mathrm{N_x} = \mathrm{N_y} = 257$，对应的均匀间距为 $\Delta x = \Delta y = 0.015625$。物理域中的均匀源项根据方程 5转变为非均匀源。数值计算得到的介电常数张量分量如图4所示。

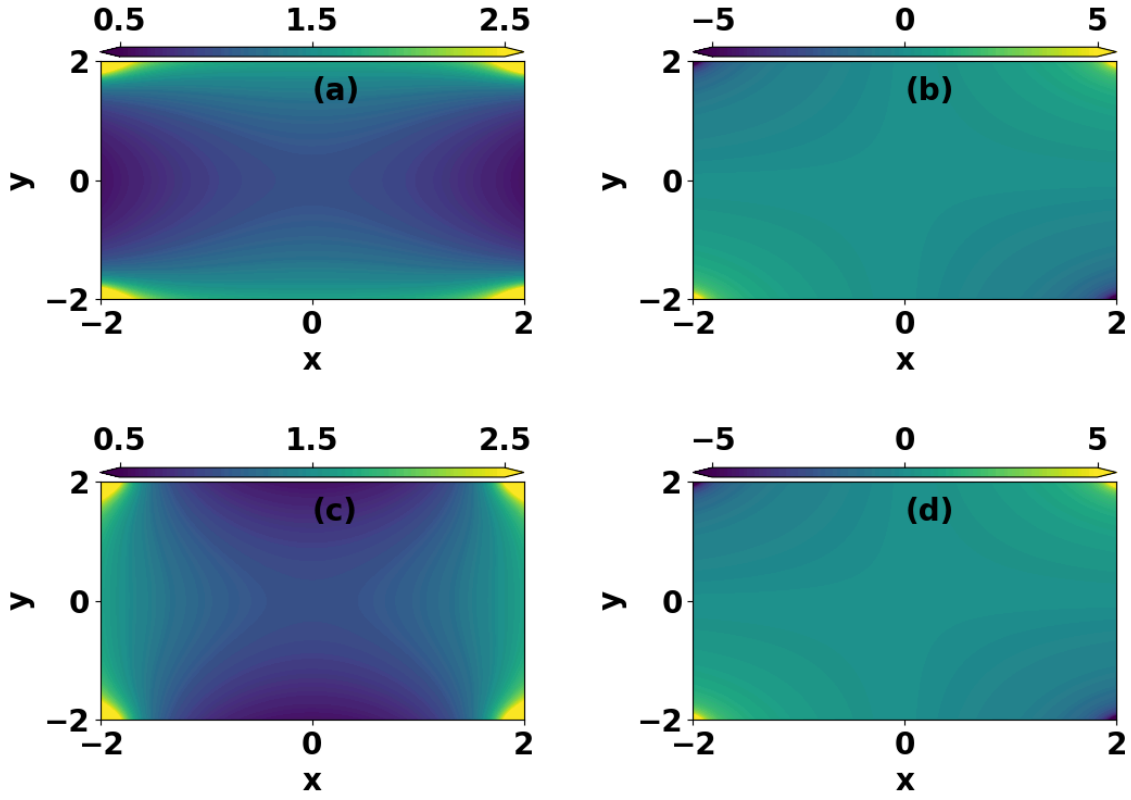


图 4. 介电常数张量的分量：(a) ε_{xx}、(b) ε_{xy}、(c) ε_{yy} 和 (d) ε_{yx}。

数值解与解析解的对比见图5 （a）和（b）。子图（d）所示的网格分辨率扫描证实了

L_1, L_2, 和 L_∞ 范数。此外，子图（c）凸显了几何多重网格方法的计算效率，其速度约为通用SOR方法的三倍。

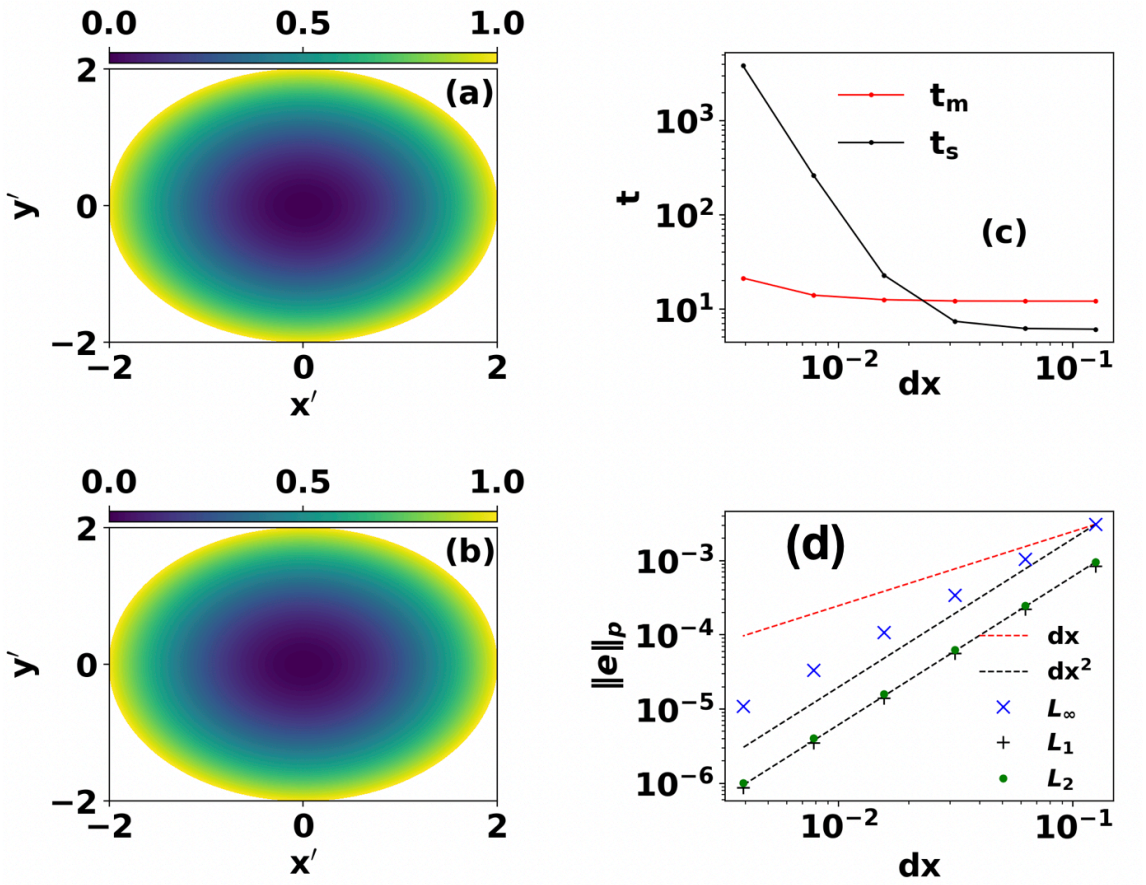


图 5. 圆形区域的结果：(a) 解析解，(b) 使用 GMG 的数值解，(c) 逐次超松弛和 GMG 方法的运行时间比较，以及 (d) L_1, L_2，和 L_∞ 范数下的网格收敛。

4.2.2 圆形区域上的拉普拉斯方程求解

现在考虑单位圆（$b = 1$）上的拉普拉斯方程（$\rho' = 0$）的解。我们采用如下形式的狄利克雷边界条件

$$\phi(b, \theta) = \sin(n\theta). \tag{45}$$

区域内部的解析解（$r \leq 1$）可写成如下形式

$$\phi_{\text{exact}}(r, \theta) = r^n \sin(n\theta) \tag{46}$$

在本研究中，我们选择 $n = 8$。采用方程44中给出的相同映射，我们生成了与图3类似的物理网格和计算网格。计算域的大小设为 $L_x = L_y = 2$，分辨率为 $N_x = N_y = 257$。图6 显示，电势的解析表达式（子图 a）与采用几何多重网格方法得到的数值结果（子图 b）吻合良好。误差随网格分辨率的变化（子图 d）清楚地表明，该方法具有二阶全局精度和局部精度。值得注意的是，Rapaka 等人使用边界元法（BEM）求解了相同的问题 [19]。边界元法的解在局部（L_∞）范数下呈现一阶精度，在全局（L_1, L_2）范数下则呈现近似二阶精度（见 Rapaka 等人的图 6 [19]）。相比之下，我们的方法在局部和全局范数下均表现出精确的二阶精度。此外，子图 (c) 展示了几何多重网格方法更高的计算效率，其速度约为经典逐次超松弛法的三倍。

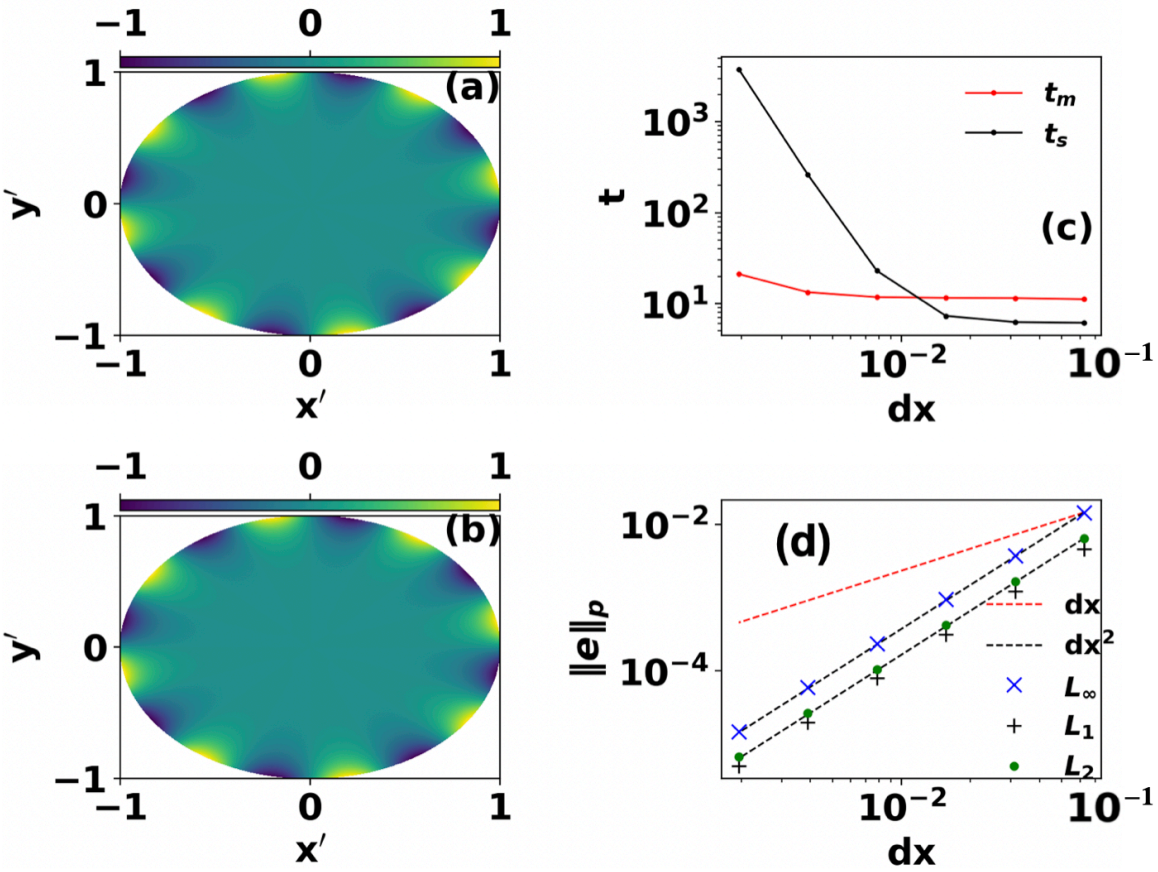


图 6. 单位半径圆的结果：(a) 解析解，(b) 使用几何多重网格得到的数值解，(c) 逐次超松弛与 GMG 方法的运行时间比较，以及 (d) L_1, L_2，和 L_∞ 范数下的网格收敛。

5 该方法的一些应用

在使用具有已知解析解的标准问题对算法进行基准测试后，我们现在展示该方法在等离子体物理和流体动力学若干问题中的应用。

5.1 用于提高计算效率的拉伸/非均匀网格模拟

许多物理系统都存在强场变化区域或源项梯度较大的局部区域，需要较高的空间分辨率才能获得准确的数值解。例如带电粒子束、等离子体鞘层、流体流动中的尖锐界面，以及热传导中的局部热点。若使用间距足够小的均匀网格来解析整个计算域中的这些特征，计算成本可能会很高，导致内存使用量过大、执行时间过长。为解决这一问题，我们采用基于变换的方法设计非均匀网格，仅在需要的区域进行加密，而在解变化缓慢的区域保持较粗的网格。

在本示例中，我们考虑电荷密度集中于计算域中心的高斯电荷密度对应的二维泊松方程。计算域最初定义为边长为 $L_x = L_y = 6$、包含 $N_x = N_y = 129$ 个网格点的均匀正方形网格。随后，通过以下坐标映射将此均匀网格转换为非均匀物理网格：

$$\begin{aligned} x' &= s\sinh(\alpha x), \\ y' &= s\sinh(\alpha y), \end{aligned} \tag{47}$$

其中，参数 $s = 5$ 和 $\alpha = 0.6$ 分别控制整体拉伸尺度和加密速率。双曲正弦变换具有一个理想特性：在原点附近（$x,\ y \to 0$）产生更高的网格密度，同时使远离中心的网格平滑变粗。

图7（a）和（b）显示了原始的均匀计算网格以及生成的非均匀物理网格。

在这个拉伸网格上，我们施加如下定义的高斯电荷密度束：

$$\rho' = -\rho_0 \exp\left(-\frac{(\mathrm{x}' - \mathrm{x}_0)^2}{2\sigma_\mathrm{x}^2} - \frac{(\mathrm{y}' - \mathrm{y}_0)^2}{2\sigma_\mathrm{y}^2}\right), \tag{48}$$

其中，$\mathrm{x}_0 = \mathrm{y}_0 = 0.0$ 将束流中心设在原点，$\rho_0 = 100$ 设定其峰值振幅，而$\sigma_\mathrm{x} = \sigma_\mathrm{y} = 0.5$ 控制束流宽度。非均匀网格会自然地在束流区域分配更多网格点，从而在不过度增加网格点总数的情况下提高分辨率。

作为比较，图 7(c) 展示了为达到与拉伸网格相同的最小网格间距所需的等效均匀网格。该分辨率要求计算如下：

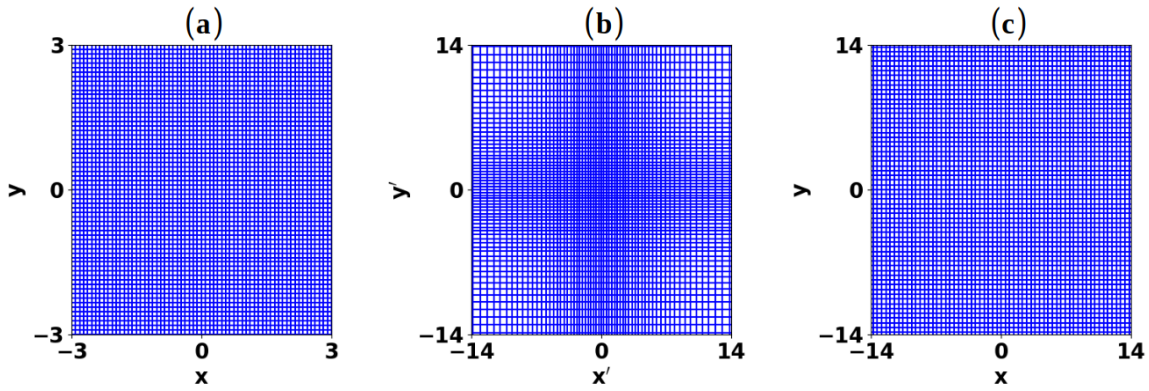
$$\mathrm{N}_\mathrm{equiv} \approx \frac{\text{Domain size of physical stretched grid}}{\text{Minimum grid spacing on physical stretched grid}},$$

在本例中，这对应于一个约有 513×513 个网格点的均匀网格——约为我们变换方法所需网格点数的 16 倍。

为求解泊松方程，我们计算了式 47中的坐标变换雅可比矩阵，从而可以计算变换后的公式中使用的各向异性介电张量 ε 。电荷密度通过以下方式映射回均匀计算网格：$\rho = \rho' \det(\mathcal{J})$，其中 $\mathcal{J}$为雅可比行列式。在这一特定变换中，非对角分量为零（$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 0$），对角项如图 8所示。

由于电势在坐标变换下保持不变，我们可以直接在原始 129×129 均匀计算网格上求解变换后的泊松方程，然后将所得解映射回物理网格。图 9(a) 展示了非均匀网格上的电势分布，而图 9(b) 展示了在大得多的 513×513 均匀网格上得到的等效解。

最后，图 10量化了该方法带来的计算优势，对比了网格规模不断增大时的执行时间。虽然在较低分辨率下性能差异较小，但对于较大的网格，优势则十分显著：我们的方法以约四分之一的计算成本实现了相近的精度。



F图 7。 (a) 初始均匀计算网格。(b) 使用公式 47 转换得到的非均匀物理网格。 (c)
E为匹配非均匀网格的最小间距所需的等效均匀网格分辨率。

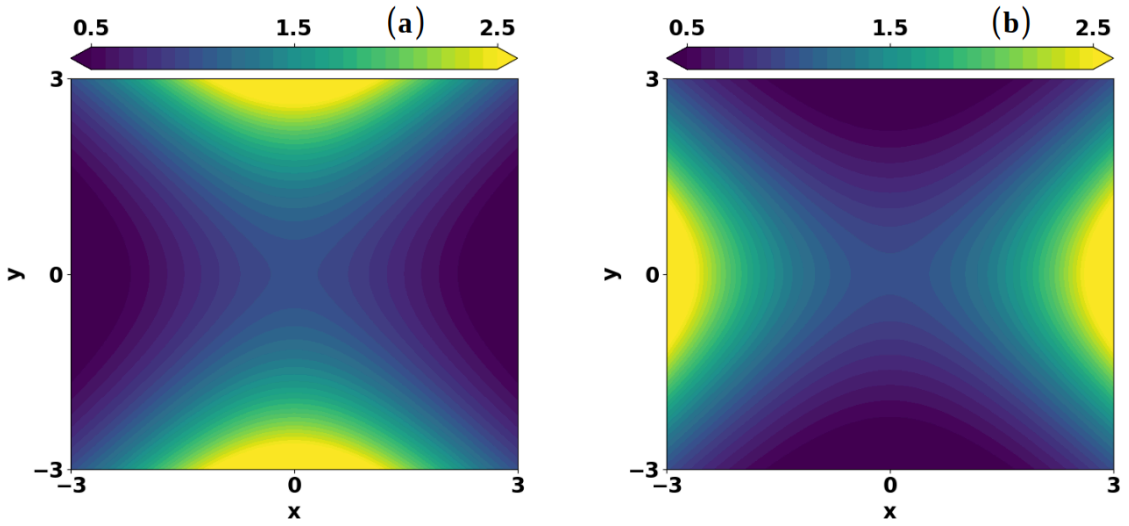


图 8. 通过坐标变换得到的各向异性介电张量的对角分量 .

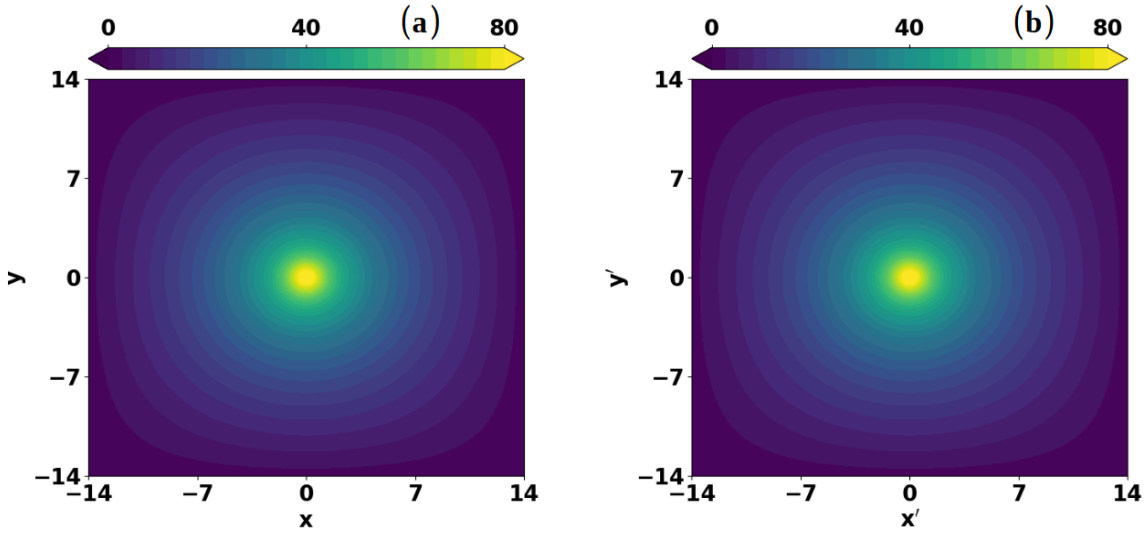


图 9. (a) 拉伸非均匀网格上的泊松方程解。(b) 在更大均匀网格上得到的等效解。

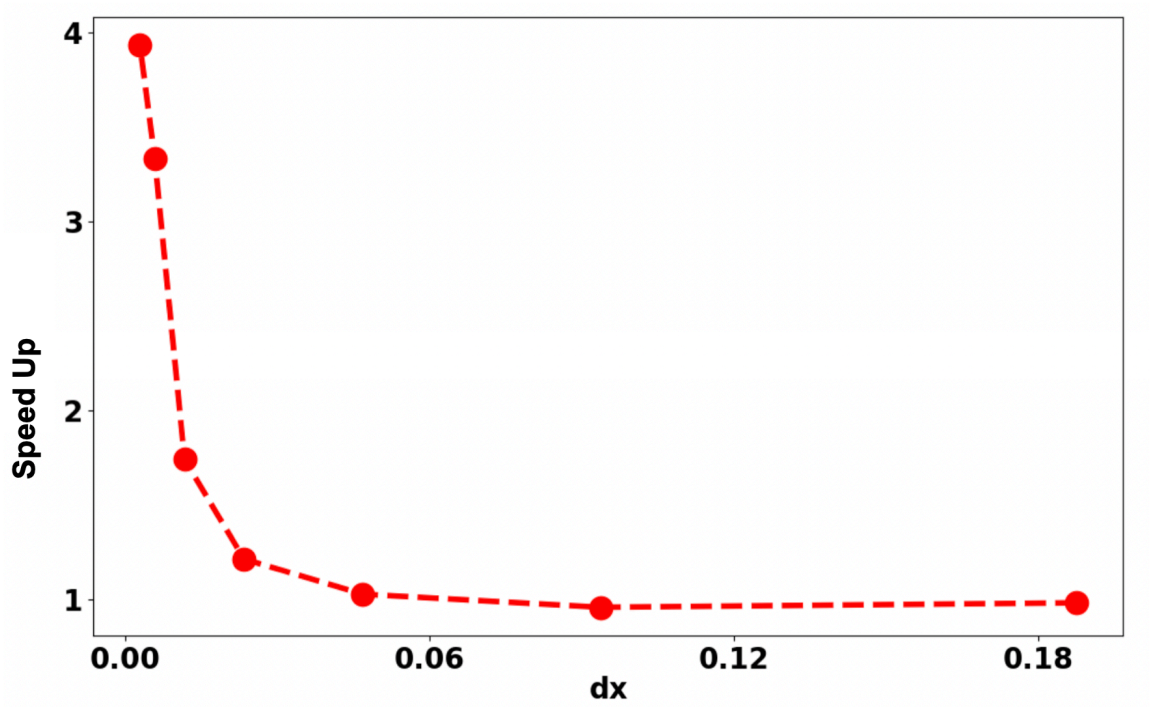


图 10. 变换后的非均匀方法与等效均匀网格解的执行时间比较。

5.2 浸没物体周围的势流

理想的（不可压缩、无黏且无旋）流体绕圆柱体流动，可用一个满足拉普拉斯方程的流函数来描述。该函数的等值面表示流场的流线。在本小节中，我们使用本方法给出此问题的流场等值线图。对于这类问题，需要在模拟主区域内部放置的不规则表面上施加边界条件。除了流体动力学之外，当研究任意形状电极周围的电场时，也会遇到类似情况。

作为演示的第一个案例，我们考虑一个经典问题：圆柱体周围的势流。我们使用式44 中采用的相同映射，将计算空间中的正方形区域转换为物理空间中的圆形区域。需要注意的是，如图11所示，本例中的正方形和圆都嵌置在更大的矩形区域内。图中以红色标出了这些嵌置形状的边界。请回想一下，物理网格（图11（b））是通过在计算网格（图11（a））上求解拉普拉斯方程得到的，其边界条件由映射式44给出。理想情况下，也可以使用更复杂的网格生成算法来实现这一目的。计算网格上所用的修正介电常数张量各分量见图12。边界条件对应于沿 $x-$ 方向的均匀入射/出射流。因此，流函数沿直线 $x=0$ 和 $x=L_x$呈线性变化。此外，模拟域的上边（$y=L_y$）和下边（$y=0$）上的流函数保持恒定，对应于远离圆柱体处不受扰动的流动。最后，圆柱体表面的流函数也保持恒定，这对应于不可穿透边界条件。注意，在计算域中，由于嵌入的红色正方形与网格完全对齐，因此可以直接在其上施加不可穿透边界条件。

这些边界条件总结如下：

$$\begin{aligned}
\phi(0,y) &= \phi_0 + \frac{\phi_1-\phi_0}{L_y}\,y,\\
\phi(L_x,y) &= \phi_0 + \frac{\phi_1-\phi_0}{L_y}\,y,\\
\phi(x,0) &= \phi_0,\\
\phi(x,L_y) &= \phi_1,\\
\phi(x,y) &= 0, \quad \text{for } (x,y)\in\Omega_{\text{cylinder}},
\end{aligned} \tag{49}$$

在本研究中，我们设定 $\phi_0=-1$ 和 $\phi_1=1$。所得流线如图 13所示。这些结果与圆柱绕流的理论结果一致。流场可以通过对流函数求导来构造。注意，对 Φ 采用经修改的边界条件后，相同的映射可用于计算从圆形电极发出的电场线。

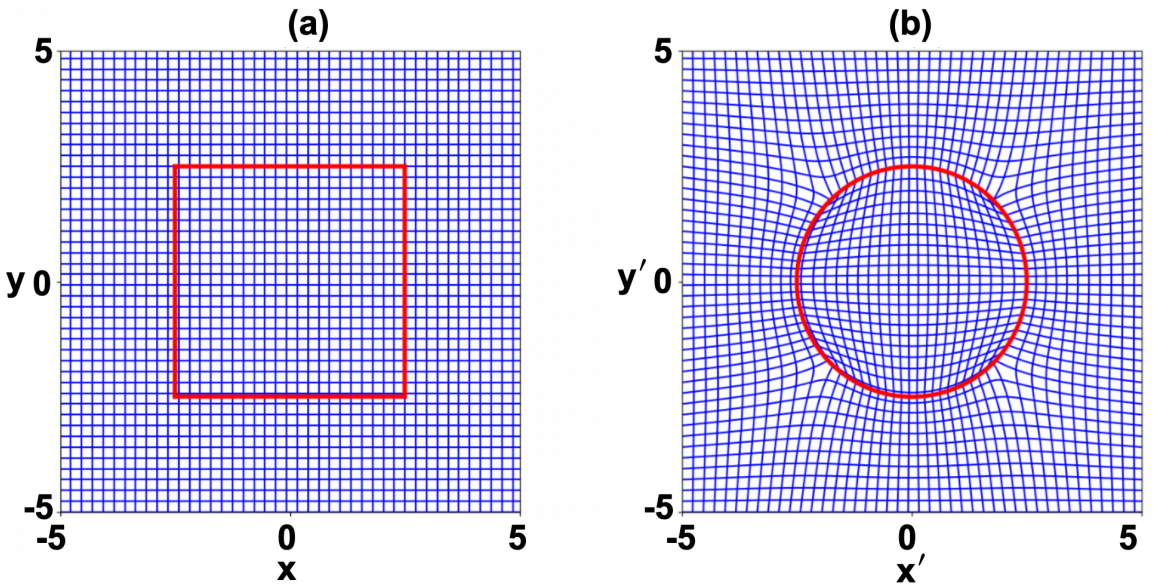


图 11. (a) 包含所选变换区域（红色轮廓）的计算域，以及 (b) 相应变换后的物理域。

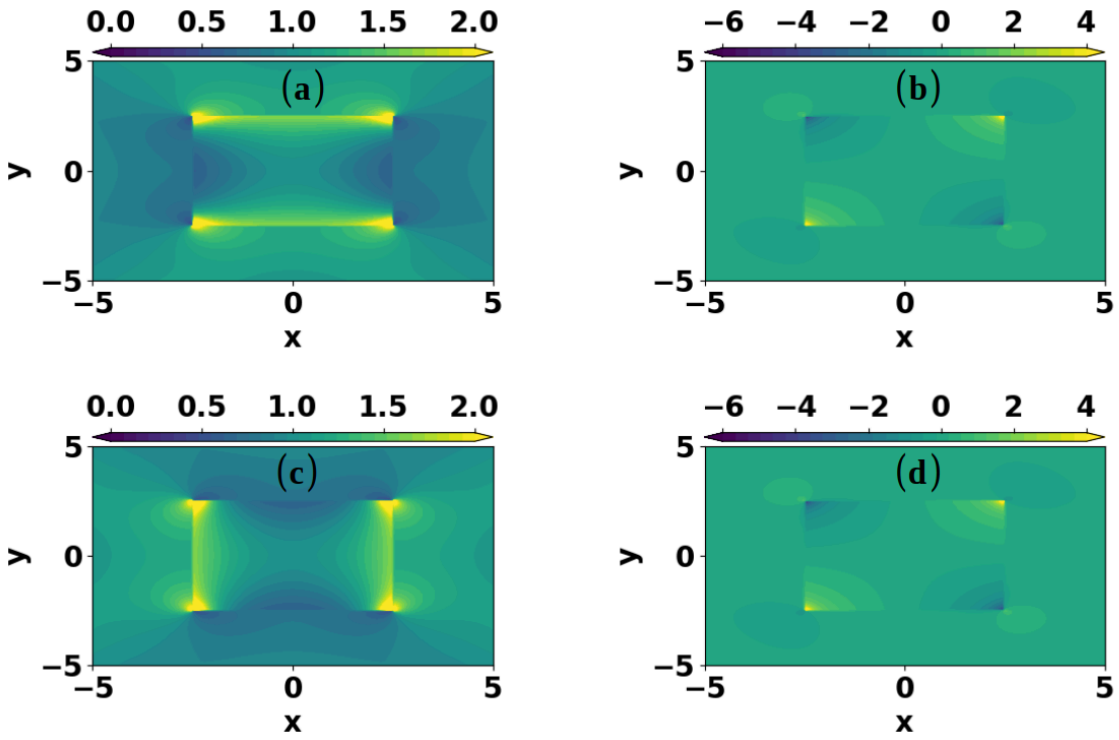


图12. 介电常数张量的分量：(a) ε_{xx}、(b) ε_{xy}、(c) ε_{yy}和(d) ε_{yx}。

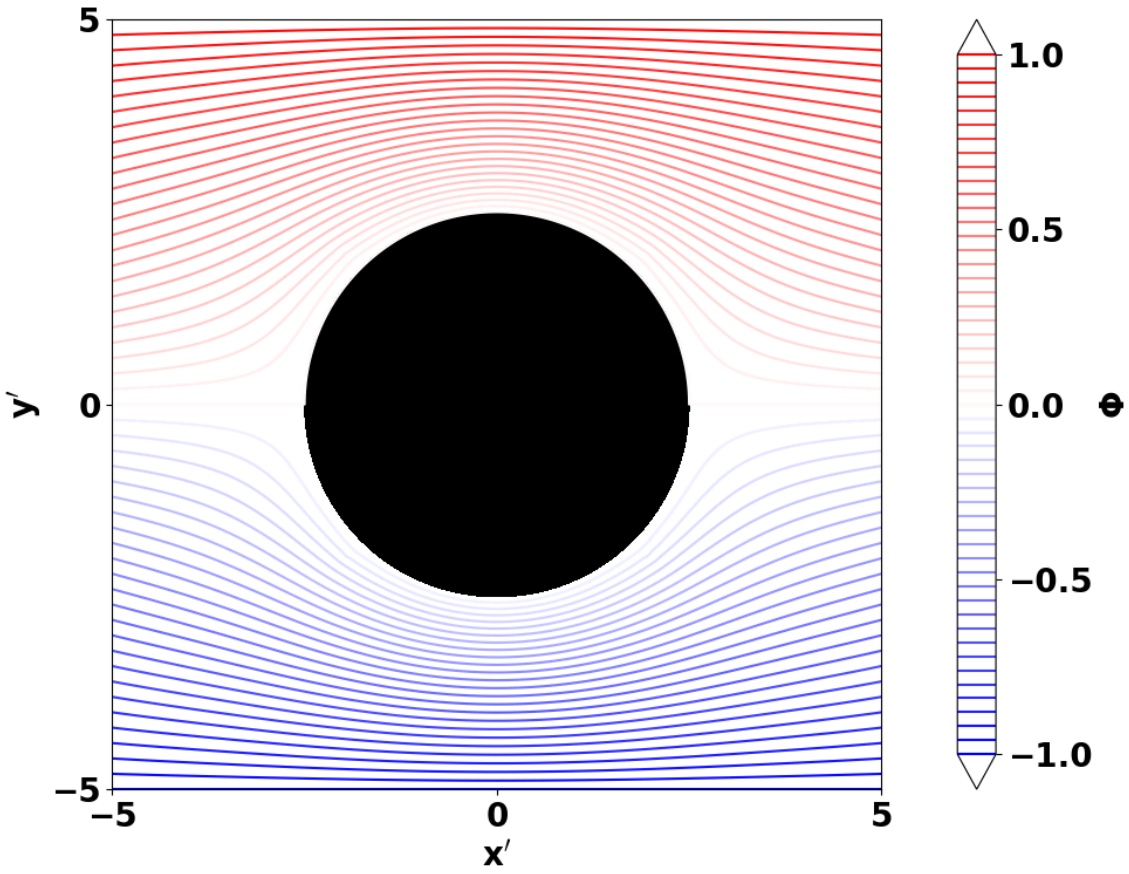


图13. 静止圆柱体周围的势流。

在许多工程学和物理应用中，障碍物并不符合圆或椭圆等简单几何图形。相反，必须适应复杂或不规则的边界，这些边界往往源于自然形态、经过优化的空气动力学外形或制造限制。为展示基于变换的方法的灵活性，我们在此考察通过受控边界变形生成的任意形状障碍物周围的二维势流。

通过沿选定矩形子域 $[x_0, x_c] \times [y_0, y_c] \subset \Omega$ 的边界施加正弦扰动，构造出任意几何形状。物理坐标（x'， y'）的变换定义如下：

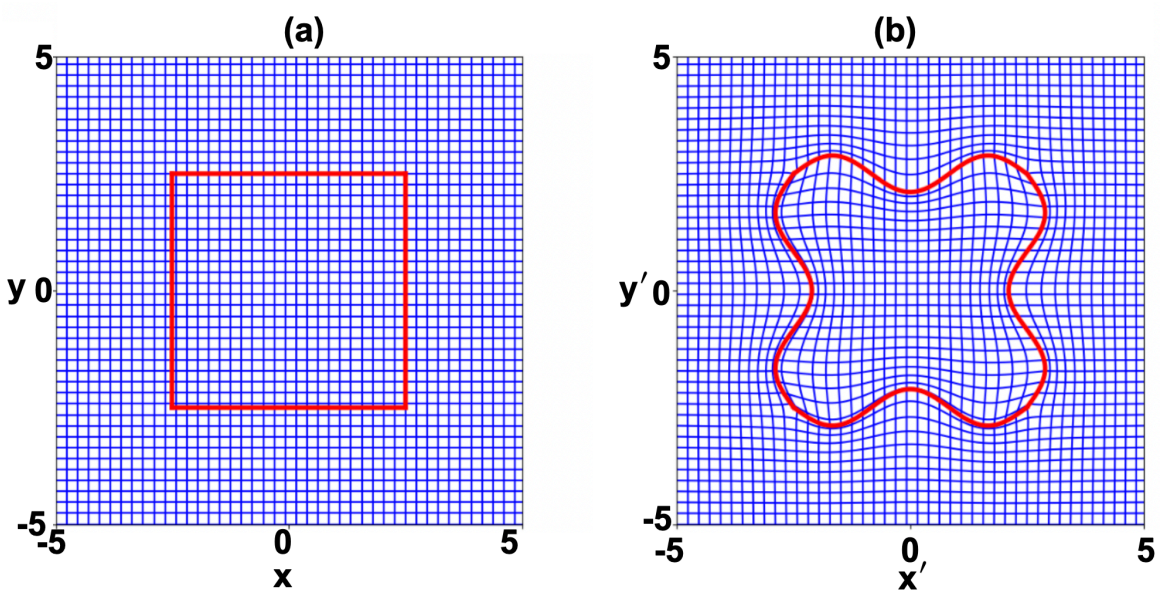
$$
\begin{aligned}
\mathrm{x}' &= \begin{cases} \mathrm{x} - \mathrm{a}\Delta\mathrm{x}\ \sin\left(\pi \mathrm{n} \dfrac{\mathrm{y}-\mathrm{y}_0}{\mathrm{y_c}-\mathrm{y}_0}\right), & \mathrm{x}=\mathrm{x}_0,\ \mathrm{y}_0 \le \mathrm{y} \le \mathrm{y_c}, \\ \mathrm{x} + \mathrm{a}\Delta\mathrm{x}\ \sin\left(\pi \mathrm{n} \dfrac{\mathrm{y}-\mathrm{y}_0}{\mathrm{y_c}-\mathrm{y}_0}\right), & \mathrm{x}=\mathrm{x_c},\ \mathrm{y}_0 \le \mathrm{y} \le \mathrm{y_c}, \\ \mathrm{x}, & \text{otherwise}, \end{cases} \\
\mathrm{y}' &= \begin{cases} \mathrm{y} - \mathrm{a}\Delta\mathrm{y}\ \sin\left(\pi \mathrm{n} \dfrac{\mathrm{x}-\mathrm{x}_0}{\mathrm{x_c}-\mathrm{x}_0}\right), & \mathrm{y}=\mathrm{y}_0,\ \mathrm{x}_0 \le \mathrm{x} \le \mathrm{x_c}, \\ \mathrm{y} + \mathrm{a}\Delta\mathrm{y}\ \sin\left(\pi \mathrm{n} \dfrac{\mathrm{x}-\mathrm{x}_0}{\mathrm{x_c}-\mathrm{x}_0}\right), & \mathrm{y}=\mathrm{y_c},\ \mathrm{x}_0 \le \mathrm{x} \le \mathrm{x_c}, \\ \mathrm{y}, & \text{otherwise}. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{50}
$$

在此表述中， a控制变形幅度， n 决定每条受扰动边上的振荡次数，而 Δx、 Δy 表示计算网格间距。正弦形式可确保波峰与波谷之间平滑过渡，同时保持边界周期性定义明确。该方法无需对整个形状进行显式参数化定义，即可系统地控制边界复杂度。

为生成与这些边界修改相对应的内部变形，在整个计算域内求解 $x'(x, y)$ 和 $y'(x, y$的拉普拉斯方程，并采用式 50给出的变换后的边界条件。该调和插值生成了从计算域到物理域的平滑、贴合网格的映射，即使边界发生强烈变形也不例外。

在模拟中，域尺寸设为 $\mathrm{L_x}$ =$\mathrm{L_y}$ = 10 ，均匀计算网格的分辨率为 $\mathrm{N_x}$ = N。变换参数选为 a = 10 和 n = 3，其中$\Delta x = \dfrac{L_x}{N_x - 1}$ 和 $\Delta y = \dfrac{L_y}{N_y - 1}$。内部变换域由 $\mathrm{x}_0 = -2.5$、$\mathrm{x_c} = 2.5$、$\mathrm{y}_0 = -2.5$和 $\mathrm{y_c} = 2.5$定义。计算网格和物理网格如图 14所示。内部区域的网格平滑变形，准确跟随预设的边界振荡，而外部网格则保持规则。

随后利用变换的雅可比行列式计算修正后的各向异性介电张量，如图所示：15。求解均匀计算网格上的泊松方程需要该张量。计算得到的介电常数张量各分量清楚地显示了变形边界附近网格拉伸和倾斜显著的区域。与前面的测试案例一样，采用了式 38 中所述的相同势流边界条件。最后，任意形状周围计算得到的势流如图所示：16，展示了该方法无需使用非结构网格或进行过度的局部加密，即可捕捉非标准几何形状周围复杂流动模式的能力。



Figu第 14 图。 任意形状障碍物的计算域和物理域。边界变形仅限于中心子区域，从而使远场网格保持不变形。

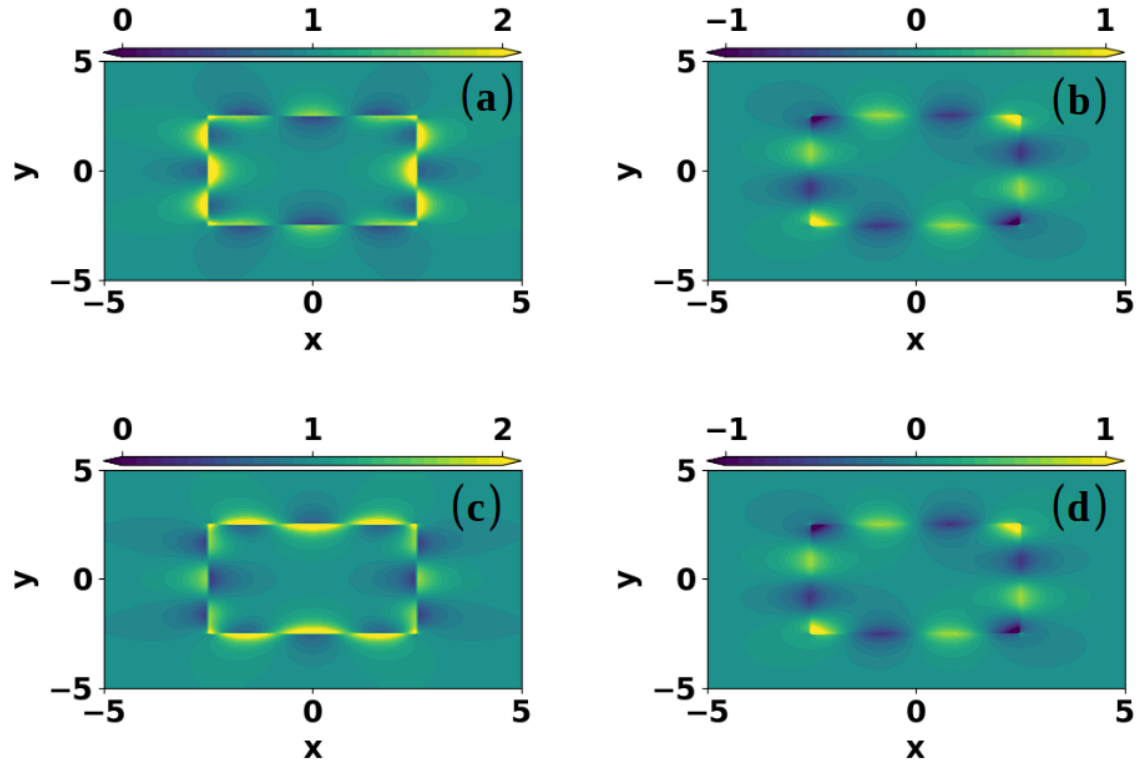


图 15。 任意形状变换的各向异性介电张量分量。扰动边界附近发生强烈变化。

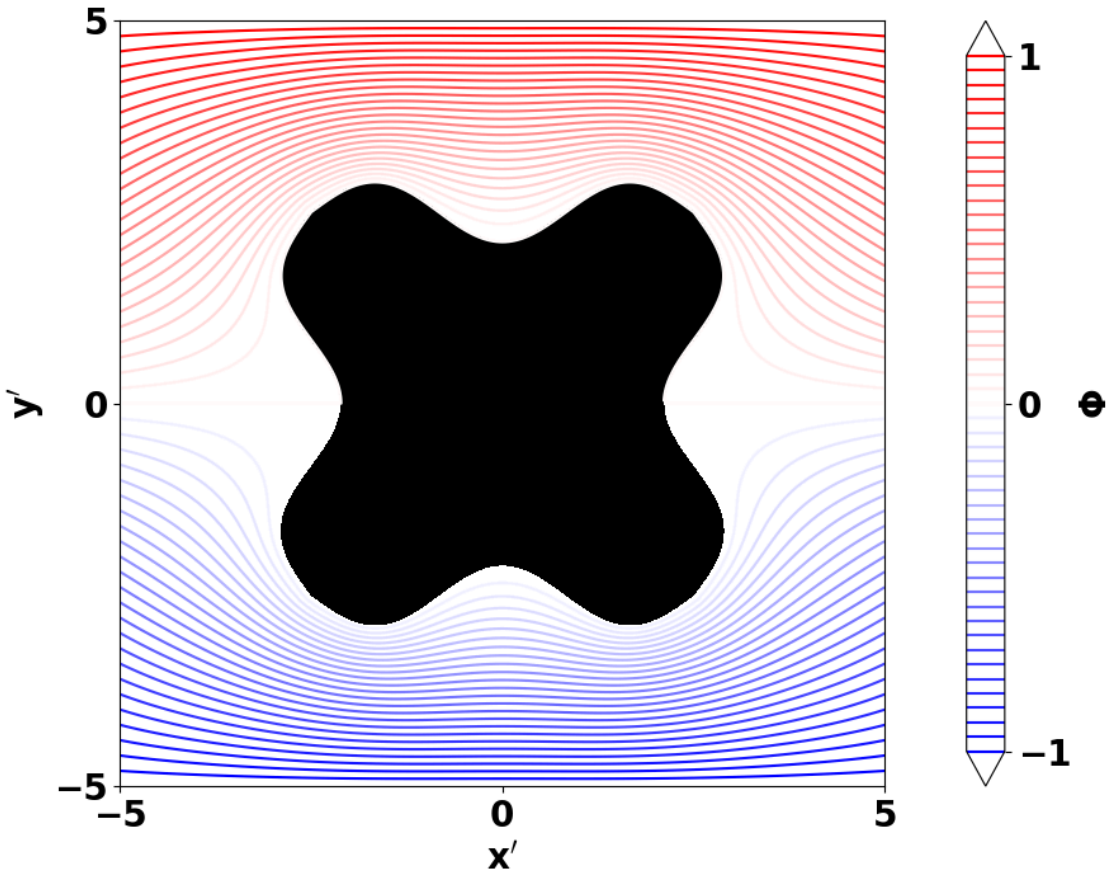


图 16. 任意形状障碍物周围的模拟势流。

6 结论

在本研究中，我们提出了一种通用且灵活的方法，利用有限差分框架求解复杂几何中的泊松/拉普拉斯方程。该方法在 L_1、 L_2和 L_∞ 范数下达到二阶精度，适用于解析定义和数值定义的坐标变换。通过将坐标映射的影响纳入等效的各向异性介电张量中，该问题可在均匀计算网格上高效求解，同时准确表示高度非均匀或不规则的物理域。这一公式也使得能够直接在均匀计算网格上应用几何多重网格（GMG）等高效求解器。

文中展示了若干应用，包括在拉伸网格上分辨局域电荷密度束。这些示例表明，所提出的方法能够达到远精细于均匀网格的分辨率——例如，以129×129 计算网格替代 513×513 均匀网格——同时显著降低计算成本。该技术并不限于静态几何，还可应用于各种复杂的域形状。

该方法可以从多个方向扩展。首先，通过计算由三维坐标变换产生的完整 3×3 介电常数张量，可将其应用于三维问题，例如具有狄利克雷边界条件的三维泊松方程。其次，将高阶有限差分格式融入变换后的公式，可以实现高阶精度。第三，当区域几何形状随时间演变时，只需在每个时间步更新变换及其相关的介电常数张量，该方法仍然适用。最后，通过在拉普拉斯方程中适当地定义源项来生成数值坐标变换，便可以设计出针对特定问题特征的、高度复杂且自适应的网格。

在未来的工作中，我们将把这一算法纳入二维静电粒子网格（PIC）程序。这将使我们能够使用简单的有限差分程序，在复杂几何中进行动理学等离子体模拟。目前，更复杂的程序，

需要采用有限元或有限体积方法来解决这类问题。

7 致谢

本文所述研究工作完全由孟买大学原子能系基础科学卓越中心（CEBS）提供经费支持。

参考文献

[1] Briggs W、Henson V 和 McCormick S，2000 年，多重网格教程 第 2 版（工业与应用数学学会）

[2] Trottenberg U、Oosterlee C与Sch¨uller A 2001 多重网格 （学术出版社）

[3] Hockney R与Eastwood J 1988 粒子计算机模拟 （CRC出版社 ）

[4] BrandtA 1977计算数学 **31** 333–390

[5] Hackbusch W1985多重网格方法及其应用 （施普林格）

[6] 徐 J 1992*SIAM*评论 **34**581–613

[7] Zienkiewicz O与Taylor R 2005 有限元方法 （Elsevier）

[8] Elman H, Silvester D 和 Wathen A 2014 有限元与快速迭代求解器 (牛津大学出版社)

[9] Pendry J, Schurig D 和 Smith D 2006 《科学》**312** 1780–1782

[10] Leonhardt U 2006《科学》**312** 1777–1780

[11] Li J 和 Pendry J 2008 《物理评论快报》**101** 203901

[12] JohnsonS G2007课程讲义 **18**

[13] Isshiki H 和 Kitazawa D 2017 *arXiv* 预印本 *arXiv:1711.07595*

[14] Sanmiguel-Rojas E, Ortega-Casanova J, Del Pino C 和 Fernandez-Feria R 2005《计算物理学杂志》**204**302–318

[15] EisemanP R 1985 《流体力学年度评论》**17**487–522

[16] Thompson J F, Warsi Z U 和 Mastin C W 1985 数值网格生成：基础与应用 (Elsevier North-Holland, Inc.)

[17] Landy N I 和 Padilla W J 2009 《光学快报》**17** 14872–14879

[18] Akcelik V, Jaramaz B 和 Ghattas O 2001 《计算物理学杂志》**171** 805–821

[19] Rapaka N R 和 Samtaney R 2020 《计算物理学杂志》**410** 109387