arXiv:2602.01889v1 [cond-mat.quant-gas] 2 Feb 2026

量子涡旋通道作为约瑟夫森结

Natalia Masalaeva[1], * Wyatt Kirkby,[2, 3] Francesca Ferlaino ,[1, 4] 和 Russell N. Bisset[1], †

[1] *Universität Innsbruck, Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik,Institut für Experimentalphysik, 6020 Innsbruck, Austria*[2] *Kirchhoff-Institut für Physik, Universität Heidelberg,Im Neuenheimer Feld 227, 69120 Heidelberg, Germany*[3] *Physikalisches Institut, Universität Heidelberg, Im Neuenheimer Feld 226, 69120 Heidelberg, Germany*[4] *Institut für Quantenoptik und Quanteninformation, Osterreichische Akademie der Wissenschaften, Innsbruck 6020, Austria*(日期：2026年2月3日)

在量子气体中，弱连接通常通过外加光学势实现。我们表明，在旋转二元凝聚体中，一个组分里的量子化涡旋会形成空心通道，作为另一个组分的自生弱连接，使超流能够穿过原本不可穿透的相分离区域。这引入了一种新型势垒机制：量子压强会在涡旋通道内部产生有效势垒，其大小由收缩宽度决定，从而控制超流。调节种间相互作用强度，可推动系统从流体动力学输运交叉转变至约瑟夫森隧穿区间。长程偶极相互作用还能进一步调节弱连接的性质，实现短连接以及两个串联的耦合结。电路模型能够定量描述这两种构型的直流电流-相位关系。这些结果确立了涡旋作为超流体中可重构、受相互作用控制的约瑟夫森元件。

引言—通过弱连接进行的量子输运——例如两个超导或超流储库之间的局域收缩或势垒 [1, 2]——从根本上由电流-相位关系（CPR）表征，它描述了超电流对连接两侧相位差的依赖关系 [3]。传统上，超导体中的弱连接由薄绝缘势垒 [4, 5]或戴姆微桥 [6],构成；超流氦中的弱连接则通过微孔阵列 [7, 8],实现，超冷气体中的弱连接则采用光学势垒 [9–13]。这些平台揭示了约瑟夫森效应的典型特征，包括正弦型和多值电流-相位关系、滞回环以及量子化相位滑移 [14–18]。

在超冷气体中，光学势已被广泛用于构造各种几何形状的弱连接 [19–23], ，从而研究约瑟夫森物理，包括直流和交流约瑟夫森效应 [11, 24, 25], 、电流-相位关系 [26, 27] 以及夏皮罗台阶 [28, 29]。此外，带有局域排斥势垒的环形量子气体可用于产生长寿命的持续流 [30–32], ，研究其稳定性和相位滑移 [33–37], ，并测量电流-相位关系 [38]。

近来，研究者开始关注自生弱连接，它们源于内部相互作用，而非外部势。在偶极超固体中，自组织的密度调制会形成充当约瑟夫森结的势垒 [39–41], ，从而无需施加结构化势就能实现相干隧穿。

在本文中，我们证明，旋转诱导涡旋会在二元玻色-爱因斯坦凝聚体（BEC）中形成自组织弱连接，从而无需外加光学势。在无旋转的情况下 [图1(a,b)], ，组分间的排斥相互作用会驱动相分离：红色组分形成一个不可穿透的区域，阻挡蓝色组分的流动

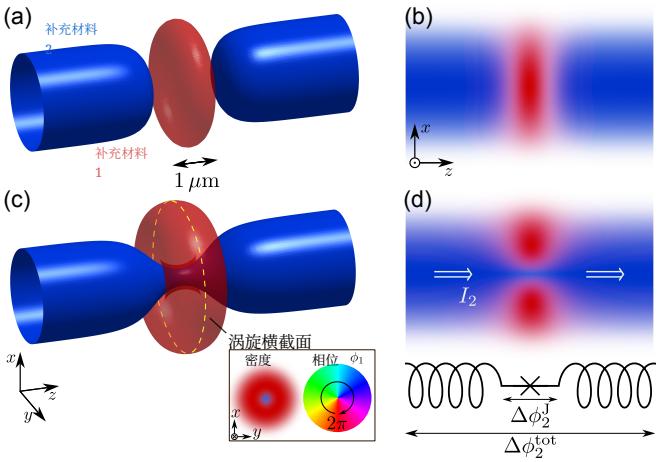

图 1. 涡旋介导的弱连接。(a,b) 无涡旋的不相容状态：组分 1（红色，偶极）阻挡组分 2（蓝色，非偶极）中的电流。(c,d) 一个沿z 方向的涡旋位于组分 1 中；组分 2 流经其空心核心，携带电流 I_2。磁致伸缩形成狭窄的偶极组分区域，从而产生短弱连接 [42]。组分 1（组分 2）的密度等值面分别显示为其峰值密度的 45%（70%）。(d，下图)：电路模型：一个电感器与一个非线性约瑟夫森结（十字）串联，总相位降为 $\Delta\phi_2^{\mathrm{tot}}$，结上的相位降为 $\Delta\phi_2^{\mathrm{J}}$。参数：种间散射长度 $a_{12} = 125\,a_0$；粒子数$N_2 = 4N_1 = 7.5 \times 10^3$。

组分。在红色组分中存在一个量子化涡旋时 [图 1(c,d)], 涡旋核心是空的——不含红色组分——并成为蓝色组分流过的通道，携带电流 I_2。这一通道实现了一种新的势垒机制——由涡旋核心中的径向束缚产生的量子压力势垒。其高度和有效长度可通过组分内相互作用调节，

以及组分间相互作用（包括偶极-偶极耦合）和组分占据数，从而在自组织几何结构中实现精确的基于相互作用的控制。

从实际应用的角度来看，已有方法可以轻松产生涡旋——陷阱旋转 [43–45],二元凝聚体中的相位印刻 [46–48], 以及偶极气体中的磁搅拌 [49]。在稳定旋转下，会形成涡旋晶格；此时每个涡旋核心都充当一个弱连接。我们通过分析单个涡旋核心来揭示基本的电流-相位关系，但这一机制可直接推广至晶格和多涡旋构型，从而提供类似于超流氦中孔径阵列的弱连接阵列 [7, 8]。

通过分析涡旋核心通道的电流-相位关系，我们表明，旋转诱导涡旋可充当约瑟夫森弱连接。随着种间散射长度增加，电流-相位关系会从近乎线性（流体动力学）逐渐转变为正弦型（隧穿） [8, 12]。一个最简电路模型——理想约瑟夫森元件与动能电感串联 [见图 1(d)底部面板]——能够描述这两种状态；重要的是，电感是独立计算得出的，并非拟合参数。随着涡旋通道长度增加，非局域相互作用会将涡旋核心重塑为两个耦合的结；采用扩展电路模型后，结果可在定量上与之吻合。这些结果确立了涡旋介导的连接是一种多功能平台，可用于探索原子电子学电路中的约瑟夫森动力学。

系统—二元偶极玻色-爱因斯坦凝聚体的每个组分 $i = 1, 2$ 均由序参量 $\psi_i = \sqrt{n_i}\, e^{i\phi_i}$描述，其密度为 n_i ，相位为 ϕ_i。此类混合物如今已能常规地在实验中实现 [50–55]。系统被限制在一个三维（3D）管道中，横向受到谐振约束 $\omega_x = \omega_y = 2\pi \times 100\ \mathrm{s}^{-1}$，轴向则不受约束。我们考虑一种偶极-非偶极混合物（^{162}Dy ＋非偶极），其磁矩分别为 $\mu_1 = 9.93\,\mu_B$ 和 $\mu_2 = 0$。接触相互作用为 $a_{11} = a_{22} = 130\,a_0$，而种间散射长度 a_{12} 则用作控制参数。

我们的系统处于不相容态 [图 1(a,b)]，这是通过调节 a_{12}实现的。为了说明涡旋介导的弱连接，我们重点关注两种构型：偶极组分中的涡旋 [图 1(c,d)] 会形成较短的弱连接，因为磁致伸缩会沿轴向压缩承载涡旋的偶极组分区域 [42], ；而非偶极组分中的涡旋则会形成一条狭长通道。尽管基态中没有超流流动，但在填充涡旋核心的组分上施加相位梯度，可以诱导出直流电流。我们在固定相位偏置下，利用虚时间演化耦合偶极 Gross-Pitaevskii方程，使系统弛豫至稳态直流状态（详情见附录）。因此，涡旋核心形成一条中空通道，使一种超流体能够穿过另一种超流体的区域 [图 1(c,d)]。这些狭窄结构类似于超导体中的戴姆微桥[6, 56] 和液氦中的狭窄孔径 [7, 8, 57], 但这里它们是由相互作用效应自然形成的[58–63]，而非通过外部结构化手段制造。

电流-相位关系—电流-相位关系（CPR）描述了电流对系统两端相位差的依赖关系， $\Delta\phi_i^{\mathrm{tot}} = \phi_i(\rho = 0, l/2) - \phi_i(\rho = 0, -l/2)$，其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 l 为系统长度；由于系统呈细长几何形状，相位的径向变化可以忽略。原子电流密度为

$$\mathbf{I}_i(\mathbf{x}) = n_i(\mathbf{x})\frac{\hbar}{m_i}\nabla\phi_i(\mathbf{x}), \tag{1}$$

其中 m_i 为原子质量。下文将考虑径向积分电流，$I_i = \int I_{z,\,i}(\mathbf{x})\, d^2\rho$，其与 z无关。

由于承载电流的组分在涡旋通道内受到径向约束 [图 1(c,d)], , 因此会经历量子压力诱导的势垒。为量化该势垒及其对电流的影响，我们为组分 i 根据径向量子压力项定义一个有效势，

$$V_i^{\mathrm{eff}}(\mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m_i}\frac{\nabla_\rho^2\sqrt{n_i(\mathbf{x})}}{\sqrt{n_i(\mathbf{x})}}, \tag{2}$$

其中 ∇_ρ^2 是柱坐标中的拉普拉斯算符的径向部分。势垒高度为 $V_{b,\,i} = \max\left[V_{\mathrm{eff}i}(\rho = 0,\ z)\right]$。不同于量子输运实验中由外部设计势能景观的情况， [64], 这里V_i^{eff}由可控的涡旋通道宽度 w[65], 设定，而后者又由自旋愈合长度 ξ_s决定。后者对组分间散射长度高度敏感，并在可混溶性阈值附近发散为 $\xi_s \propto |a_{12} - a_c|^{-1/2}$，其中 a_c 为可混溶–不可混溶转变点 [66]。因此， a_{12} 上的 Feshbach 共振为调控弱连接性质提供了一个自然且响应性极高的旋钮。

短涡旋结—我们首先考虑这样一种结结构：在组分 1（偶极）中刻印一个涡旋 [图 1(c,d)]。组分 2（承载电流）的体相愈合长度 $\xi_2 = 0.35\,\mu m$ [67]与沿 z方向的涡旋长度 $l_v \approx 1.1\,\mu m$ [68]处于同一数量级，我们将其称为“短结”区间 [69]。三个种间散射长度 a_{12} 下的电流-相位关系如图 2(a) 所示，相应的有效势垒见图 2(b)。随着 a_{12} 增大，电流-相位关系从近似线性（流体动力学；绿色圆点）逐渐转变为正弦形（紫色三角形），表明开始通过弱连接发生约瑟夫森隧穿。

在流体动力学区（$a_{12} = 125\,a_0$）中，涡旋核心较宽（$w/\xi_2 \approx 2$），从而减小密度的径向曲率，并形成远低于化学势的势垒 μ_2 [图 2(b)]。因此，沿 z 轴的密度仅呈现一个浅凹陷 [图 2(a)，插图]。由此得到的电流-相位关系（CPR） [图 2(a)中的绿色圆点] 为

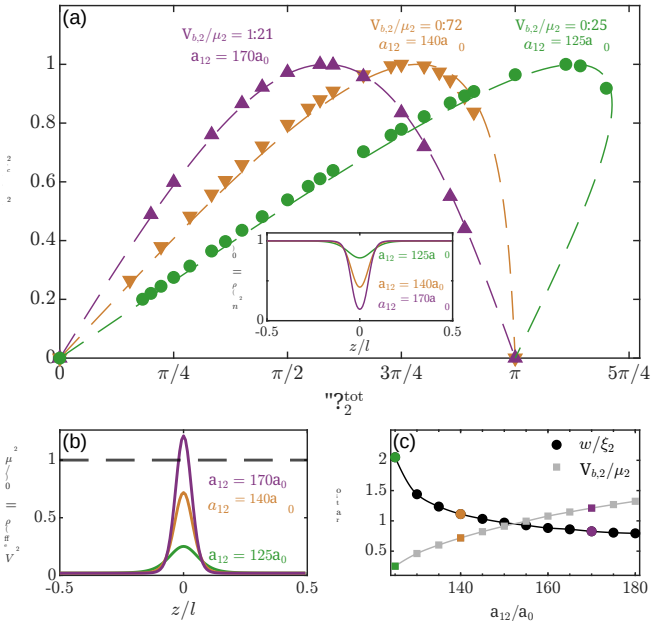

图 2. 短涡旋结。(a) 不同a_{12} （势垒高度）下的电流-相位关系。标记表示数值数据，虚线表示电路模型。每条电流-相位关系均以其临界（峰值）电流$I_{c,\,2}$归一化。插图显示了相应的核心密度，并以其峰值归一化。(b) 涡旋核心内的有效势。(c) 涡旋通道宽度 w（黑色）和势垒高度$V_{b,\,2}$ （灰色）随种间散射长度的变化。

近似线性，$I_2 \propto \Delta\phi_2^{\rm tot}$，这与通过涡旋通道强耦合的流体动力学超流相符。正向电流在 $\Delta\phi_2^{\rm tot} > \pi$仍能持续，这类似于超流 ^{4}氦流经狭窄孔口的观测结果 [8]；不过，与我们的系统不同，那里的孔口宽度固定，愈合长度则通过调节温度来改变。

随着 a_{12} 增加，系统进一步进入不相容态，涡旋通道随之变窄。由于有效势垒按 w^{-2} [式（2）]，缩放，其高度会随着 a_{12}增加而迅速上升。在 $a_{12} = 170\,a_0$处，向约瑟夫森隧穿区间的交叉转变完成：势垒高度超过化学势μ_2 [图 2(b)]，，三维核心密度显著降低[图 2(a) 插图]，，且电流-相位关系可由正弦形式很好地描述，$I_2 \propto I_{c,\,2}\sin\Delta\phi_2^{\rm tot}$ [图 2(a) 中的紫色三角形]。

在图 2(c)中，我们量化了随着 a_{12} 增大，涡旋宽度和势垒高度如何演变。值得注意的是，宽度减小到与愈合长度（$w/\xi_2 \lesssim 1$）相当的数值，与势垒高度进入隧穿区间（$V_{b,2}/\mu_2 \gtrsim 1$）相一致。这一交叉转变凸显了我们系统中弱连接的可调控性：通过调节 a_{12}，可以同时控制通道宽度和所形成的势垒高度，从而实现在强耦合（流体动力学）和弱耦合（隧穿）核心电流区间之间进行切换。

电路模型——所得的电流-相位关系可由 Deaver-Pierce 电路模型 [34, 70, 71]，描述，该模型由流动组分 i 的动能（流体动力学）电感 L_i 与具有正弦电流-相位关系的理想约瑟夫森元件串联构成，如图 1(d) 底部所示。总相位降等于理想弱连接两端的相位差与电感元件两端的相位差之和，

$$\Delta\phi_i^{\rm tot} = \Delta\phi_i^{\rm J} + \frac{L_i I_i}{\hbar}, \tag{3}$$

而理想结遵循约瑟夫森关系

$$I_i = I_{c,i}\sin\Delta\phi_i^{\rm J}, \tag{4}$$

其中 $I_{c,\,i}$ 由数值确定的电流-相位关系的峰值提取而得。动能电感源于密度分布，其表达式为

$$L_i = m_i\int_{\mathcal{R}}\frac{dz}{n_{i,1\rm D}(z)}, \tag{5}$$

其中，一维密度 $n_{i,\,1\rm D} = \int dx\,dy\,n_i(\mathbf{x})$ 是对横向方向积分得到的。这里，$\mathcal{R}$表示涡旋核心外部的区域，该区域由阈值条件 $n_i(\rho = 0,\ z) \geqslant n_i^{\rm min} + f(n_i^{\rm max} - n_i^{\rm min})$ 确定，其中 $n_i^{\rm min/max}$ 为核心沿线的全局最小/最大密度（$\rho = 0$），$f = 0.5$ [可视化见附录中的图 6(a)]。

电路模型 [方程 (3) 和 (4)] 预测的电流-相位关系以虚线显示在图 2(a) 中。除了与模拟结果高度吻合之外，该模型还提供了更深刻的直观认识。在高势垒隧穿区间（$a_{12} = 170\,a_0$），超电流较小，电感元件两端的相位降可以忽略 [见方程 (3)]，，因此 $\Delta\phi_i^{\rm tot} \approx \Delta\phi_i^{\rm J}$，得到图 2(a) 中观察到的正弦电流-相位关系。相比之下，在低势垒流体动力学区（$a_{12} = 125\,a_0$），较大的电流会使电感元件两端产生显著的相位降；因此，方程 (3) 将总相位降计入在内 $\Delta\phi_2^{\rm tot} > \pi$。电路模型还预测流体动力学电流-相位关系具有多值性，不过由于这些状态在动力学上不稳定，数值计算中并未出现下支 [71]。数值结果与电路模型高度吻合，说明 Deaver-Pierce 框架适用于描述本系统中动能电感与约瑟夫森非线性之间的相互作用。

长涡旋结—现在我们考虑长结几何结构，其中涡旋位于第二个（非偶极）组分中，如图 3(a1,c1)所示，对应两种具有代表性的种间散射长度，$a_{12} = 220\,a_0$ 和 $a_{12} = 130\,a_0$。由于非偶极组分的畴不会发生磁致伸缩，因此其长度可以任意延长 [42]；将涡旋置于

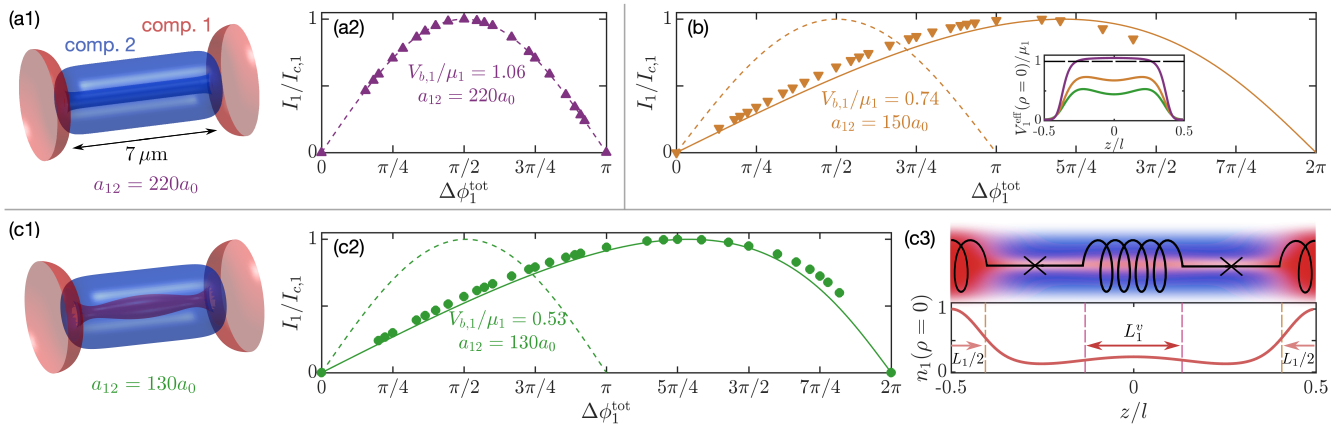

图 3. 三种势垒强度下的长涡旋结：(a) $a_{12} = 220\,a_0$（隧穿区间），(b) $a_{12} = 150\,a_0$，以及 (c) $a_{12} = 130\,a_0$（流体动力学区）。(a2)、(b) 和 (c2)：电流-相位关系的数值数据（标记）与简单电路模型 [方程 (3)-(5)]（虚线）及扩展电路模型 [方程 (6)]（实线）一同显示。(b，插图) 展示了 a_{12} 三种取值对应的有效势垒。(a1) 展示了隧穿区间内的通道，而 (c1) 显示，在流体动力学区，偶极相互作用将涡旋核心环境重塑为双结：流动组分（红色）在涡旋两端附近各有一个密度极小值，中间由一个密度隆起隔开。第一组分显示为其峰值密度的 10%，第二组分为 70%。(c3) 扩展电路模型（上）和轴向密度（下）。涡旋核心中心的局部密度最大值由额外的动能电感 L_1^v 建模，而两个极小值则表示为约瑟夫森元件。

该组分中即可形成细长的涡旋核。值得注意的是，在雪茄形凝聚体中，人们已成功制备出沿囚禁势轴排列的单条长寿命涡旋线，这为实现长结几何结构提供了一条切实可行的途径 [72]。与短涡旋情形相比，这个延展的涡旋核从定性上改变了弱连接的空间结构，进而改变其输运性质。图 3 考察了三个不同的 a_{12}取值，展示了结长增加如何改变电流-相位关系（CPR）及相应的有效势垒。

与短结情形类似，在组分间强排斥下 [$a_{12} = 220\,a_0$; 图 3(a2)]，系统稳处于隧穿区间，并呈现近乎正弦的电流-相位关系（紫色三角形）。与此一致，组分 1 的有效势垒高度超过其化学势，μ_1 [见图 3(b) 插图中的紫色曲线]。随着势垒高度降低 [见图 3(b) 插图中的其他曲线]，，系统呈现出与短结情形显著不同的特征。对于 $a_{12} = 150\,a_0$，电流-相位关系支持稳定解，直至 $\Delta\phi_1^{\rm tot} \approx 3\pi/2$ [图 3(b)；金色三角形]，；而对于 $a_{12} = 130\,a_0$，在 $\Delta\phi_1^{\rm tot} = 2\pi$ [图 3(c2)；绿色圆点] 处则出现零电流定态。为了解释这一有趣行为，下面我们转而采用电路模型描述。

单双结交叉转变——将为短涡旋建立的电路模型应用于此，可得到图 3(a2,b,c2) 中的虚线曲线。尽管这一单结模型在隧穿区间内能够再现电流-相位关系 [图 3(a2)]，，但在较低的 a_{12}（较低势垒）下却会彻底失效。模型失效的原因在于，长程偶极相互作用导致组分 1 中出现两个密度极小值，它们被细长涡旋核心内的一个局部极大值隔开，具体而言

长程偶极相互作用 [图 3(c1,c3)]。另一个线索是，对于 $a_{12} = 130\,a_0$，电流在 2π 处消失，而不是在 π 处消失。综合这些观测可知，在低-a_{12} 区间，弱连接实际上由两个串联的约瑟夫森结构成，两者之间由涡旋内一个小型中心储库隔开；该储库会贡献额外的动能电感 [，示意图见图 3(c3)]。我们根据公式 (5) 计算这一涡旋电感 L_1^v，计算时将积分范围限制在涡旋核心区域内，其中$n_1(\rho = 0,\ z) \geq n_1^{\rm min} + \left(n_1^{\rm loc\,max} - n_1^{\rm min}\right)/2$；参见示意图中的两条中央竖直虚线以及附录。由此得到的扩展电路模型为

$$\Delta\phi_i^{\rm tot} = \Delta\phi_i^{\rm J1} + \Delta\phi_i^{\rm J2} + \frac{(L_i + L_i^v)\, I_i}{\hbar}, \qquad (6)$$

其中涡旋电感显著超过外部电感，例如，对于 $a_{12} = 130a_0$，我们得到$L_1^v = 1.7 \times 10^{-38}\,{\rm kgm}^2$ 和 $L_1 = 3.6 \times 10^{-40}\,{\rm kgm}^2$。根据直流状态下的对称性，两个结上的相位降相同，$\Delta\phi_i^{\rm J1} = \Delta\phi_i^{\rm J2}$。

在确立双结图像之后，我们将其与完整模拟进行对照检验。扩展电路模型所复现的电流-相位关系与数值结果高度一致 [图3(b,c2)中的实线]。我们仅将其用于具有两个势垒极大值的情形；在 $a_{12} = 220\,a_0$ 处的隧穿区间，有效势垒只有单一峰值 [图3(b)的插图]。这些比较表明，长程偶极相互作用重塑了涡旋核通道，并使得随着 a_{12} 减小，可实现从单结到两个耦合结的可调交叉转变。

结论——我们证明，涡旋核心可作为超流输运的自诱导弱连接，其

有效势垒由与涡旋通道宽度相关的量子压强决定。该势垒——因而也包括运行区间——可通过组分间相互作用、相对组分布居数和几何形状进行广泛调控，从而实现从流体动力学输运到隧穿输运的连续交叉转变。在长程偶极相互作用下，涡旋核心可被重塑，实现从单结到两个耦合结的可控转变。扩展的 Deaver-Pierce 电路模型能够复现数值计算得到的电流-相位关系，并为设计二元偶极凝聚体中的多结原子电子电路提供了理论框架。

涡旋介导的弱连接可在均匀环中实现 [18] ，也可与环上的其他结串联 [37], ，还可作为雪茄形陷阱的一段 [73, 74]„ 从而能够研究交流约瑟夫森动力学和复杂量子输运。在非偶极混合物中也应能实现类似的结 [75——77], 在这类混合物中，相同的控制参数可用于实际调节势垒性质。

致谢——我们感谢 Klejdja Xhani、Giacomo Roati 和 Ioan Pop 进行了富有见地的讨论。本研究全部或部分由奥地利科学基金（FWF）资助， [资助项目 DOI：10.55776/COE1 和 10.55776/P36850]。为实现开放获取，作者已针对因本次投稿而产生的作者接受稿版本，适用知识共享署名许可协议（CC BY）公共版权许可。此处展示的计算结果部分使用因斯布鲁克大学的 LEO 高性能计算基础设施完成。

* 通讯作者：natalia.masalaeva@uibk.ac.at † 通讯作者：russell.bisset@uibk.ac.at

[1] K. K. Likharev, 《超导弱连接》, 《现代物理评论》51，101（1979）。[2] T. Zibold 和 M. K. Oberthaler, 《超冷玻色气体的弱连接》, 载于 *Fundamentals and Frontiers ofthe Josephson Effect*（施普林格国际出版，2019），第811–847页。[3] A. A. Golubov、M. Y. Kupriyanov 和 E. Il'ichev, 《约瑟夫森结中的电流-相位关系》, 《现代物理评论》76，411（2004）。[4] P. W. Anderson 和 J. M. Rowell, 《约瑟夫森超导隧穿效应的可能观测》, 《物理评论快报》10，230（1963）。[5] S. Shapiro, 《超导隧穿中的约瑟夫森电流：微波的影响及其他观测》, 《物理评论快报》11，80（1963）。[6] A. H. Dayem 和 J. J. Wiegand, 《微波场中薄膜超导桥的行为》, 《物理评论》155，419（1967）。[7] S. Backhaus、S. V. Pereverzev、A. Loshak、J. C. Davis 和 R. E. Packard, 《超流体 ^{3}He-B 弱连接的电流-相位关系直接测量》, 《科学》278，1435–1438（1997）。[8] E. Hoskinson、Y. Sato、I. Hahn 和 R. E. Packard, 《超流体 ^{4}He弱连接中从相位滑移到约瑟夫森效应的转变》, 《自然·物理》2，23–26（2005年）。[9] F. S. Cataliotti、S. Burger、C. Fort、P. Maddaloni、F. Minardi、A. Trombettoni、A. Smerzi 和 M. Inguscio, 《玻色-爱因斯坦凝聚体中的约瑟夫森结阵列》, 《科学》293，843–846（2001年）。[10] M. Albiez、R. Gati、J. F¨olling、S. Hunsmann、M. Cristiani 和 M. K. Oberthaler, 《直接观测单个玻色子约瑟夫森结中的隧穿和非线性自俘获》, 《物理评论快报》95，010402（2005年）。[11] S. Levy、E. Lahoud、I. Shomroni 和 J. Steinhauer, 《玻色 – 爱因斯坦凝聚体中的交流与直流约瑟夫森效应》, 《自然》449，579–583（2007年）。[12] L. J. LeBlanc、A. B. Bardon、J. McKeever、M. H. T. Extavour、D. Jervis、J. H. Thywissen、F. Piazza 和 A. Smerzi, 《可调超流结的动力学》, 《物理评论快报》106，025302（2011年）。[13] J.-P. Brantut、J. Meineke、D. Stadler、S. Krinner 和 T. Esslinger, 《超冷费米子通过介观通道的传导》, 《科学》337，1069–1071（2012年）。[14] A. Barone 和 G. Patern`o, *Physics and Applications of the Josephson Effect*（Wiley，1982）。[15] J. C. Davis 和 R. E. Packard, 《超流体 ^{3}He约瑟夫森弱连接》, 《现代物理评论》74，741（2002年）。[16] R. Gati 和 M. K. Oberthaler, 《玻色子约瑟夫森结》, 《物理学B辑：原子、分子与光学物理》40，R61–R89（2007年）。[17] L. Amico、M. Boshier、G. Birkl、A. Minguzzi、C. Miniatura、L.-C. Kwek、D. Aghamalyan、V. Ahufinger、D. Anderson、N. Andrei、A. S. Arnold、M. Baker、T. A. Bell、T. Bland、J. P. Brantut、D. Cassettari、W. J. Chetcuti、F. Chevy、R. Citro、S. De Palo、R. Dumke、M. Edwards、R. Folman、J. Fortagh、S. A. Gardiner、B. M. Garraway、G. Gauthier、A. G¨unther、T. Haug、C. Hufnagel、M. Keil、P. Ireland、M. Lebrat、W. Li、L. Longchambon、J. Mompart、O. Morsch、P. Naldesi、T. W. Neely、M. Olshanii、E. Orignac、S. Pandey、A. P´erez-Obiol、H. Perrin、L. Piroli、J. Polo、A. L. Pritchard、N. P. Proukakis、C. Rylands、H. Rubinsztein-Dunlop、F. Scazza、S. Stringari、F. Tosto、A. Trombettoni、N. Victorin、W. v. Klitzing、D. Wilkowski、K. Xhani 和 A. Yakimenko, 《原子电子学路线图：前沿现状与展望》, 《AVS量子科学》3，10.1116/5.0026178（2021年）。[18] J. Polo、W. Chetcuti、T. Haug、A. Minguzzi、K. Wright 和 L. Amico, 《超冷气体中的持续流》, 《物理学报告》1137，1–70（2025年）。[19] J.-P. Brantut、C. Grenier、J. Meineke、D. Stadler、S. Krinner、C. Kollath、T. Esslinger 和 A. Georges, 《以超冷原子构建热电热机》, 《科学》342，713–715（2013年）。[20] S. Krinner、D. Stadler、D. Husmann、J.-P. Brantut 和 T. Esslinger, 《观测到中性物质中的量子化电导》, 《自然》517，64–67（2014年）。[21] D. Husmann、S. Uchino、S. Krinner、M. Lebrat、T. Giamarchi、T. Esslinger 和 J.-P. Brantut, 《通过量子点接触连接强关联超流体》, 《科学》350，1498–1501（2015年）。[22] G. Spagnolli、G. Semeghini、L. Masi、G. Ferioli、A. Trenkwalder、S. Coop、M. Landini、L. Pezz`e、G. Modugno、M. Inguscio、A. Smerzi 和 M. Fattori, 《隧穿型玻色子约瑟夫森结中从吸引相互作用到排斥相互作用的跨越》, 《物理评论快报》118，230403（2017年）。

[23]P. Fabritius、J. Mohan、M. Talebi、S. Wili、W. Zw erger、M.-Z. Huang 和 T. Esslinger，《费米超流性增强的不可逆熵输运》，《自然·物理》20，1091–1096（2024年）。[24] G. Valtolina、A. Burchianti、A. Amico、E. Neri、K. Xhani、J. A. Seman、A. Trombettoni、A. Smerzi、M. Zaccanti、M. Inguscio 和 G. Roati，《BEC-BCS跨越过程中费米超流体中的约瑟夫森效应》，《科学》350，1505–1508（2015年）。[25] W. J. Kwon、G. Del Pace、R. Panza、M. Inguscio、W. Zw erger、M. Zaccanti、F. Scazza 和 G. Roati，《直流约瑟夫森超电流揭示的强关联超流序参量》，《科学》369，84–88（2020年）。[26] N. Luick、L. Sobirey、M. Bohlen、V. P. Singh、L. Mathey、T. Lompe 和 H. Moritz，《超冷二维费米气体中的理想约瑟夫森结》，《科学》369，89–91（2020年）。[27] V. P. Singh、E. Bernhart、M. R¨ohrle、H. Ott、L. Mathey 和 L. Amico，《三维原子约瑟夫森结从弱连接到隧穿区间的转变》（2025年）。[28] G. Del Pace、D. Hern´andez-Rajkov、V. P. Singh、N. Grani、M. F. Fern´andez、G. Nesti、J. A. Seman、M. Inguscio、L. Amico 和 G. Roati，《强相互作用费米气体中的夏皮罗台阶》，《科学》390，1125–1129（2025年）。[29] E. Bernhart、M. R¨ohrle、V. P. Singh、L. Mathey、L. Amico 和 H. Ott，《观测到超冷原子约瑟夫森结中的夏皮罗台阶》，《科学》390，1130–1133（2025年）。[30] A. Ramanathan、K. C. Wright、S. R. Muniz、M. Zelan、W. T. Hill、C. J. Lobb、K. Helmerson、W. D. Phillips 和 G. K. Campbell，《环形玻色-爱因斯坦凝聚体中的超流：具有可调弱连接的原子回路》，《物理评论快报》106，130401（2011年）。[31] Y. Cai、D. G. Allman、P. Sabharwal 和 K. C. Wright，《超冷费米原子环中的持续流》，《物理评论快报》128，150401（2022年）。[32] G. Del Pace、K. Xhani、A. Muzi Falconi、M. Fedrizzi、N. Grani、D. Hernandez Rajkov、M. Inguscio、F. Scazza、W. J. Kwon 和 G. Roati，《在可调费米原子环中印刻持续流》，《物理评论X》12，041037（2022年）。[33] S. Moulder、S. Beattie、R. P. Smith、N. Tammuz 和 Z. Hadzibabic，《环形玻色-爱因斯坦凝聚体中的量子化超流衰减》，《物理评论A》86，013629（2012年）。[34] K. C. Wright、R. B. Blakestad、C. J. Lobb、W. D. Phillips 和 G. K. Campbell，《通过旋转弱连接驱动超流原子回路中的相位滑移》，《物理评论快报》110，025302（2013年）。[35] N. Murray、M. Krygier、M. Edwards、K. C. Wright、G. K. Campbell 和 C. W. Clark，《探测环形玻色-爱因斯坦凝聚体的环流》，《物理评论A》88，053615（2013年）。[36] J. Polo、R. Dubessy、P. Pedri、H. Perrin 和 A. Minguzzi，《环上一维玻色气体中超流电流的振荡与衰减》，《物理评论快报》123，195301（2019年）。[37] L. Pezz`e、K. Xhani、C. Daix、N. Grani、B. Donelli、F. Scazza、D. Hernandez-Rajkov、W. J. Kwon、G. Del Pace 和 G. Roati，《在原子电子学约瑟夫森结链中稳定持续流》，《自然·通讯》15，10.1038/s41467-024-47759-7（2024年）。[38] S. Eckel , F. Jendrzejewski , A. Kumar , C. J. Lobb , , J. Rivera , R. R. Emran , W. J. S. Hernandez , 和 G. K. Campbell，《超流弱连接电流-相位关系的干涉测量》，《物理评论X》4，031052（2014年）。[39] P. Ilzh¨ofer、M. Sohmen、G. Durastante、C. Politi、A. Trautmann、G. Natale、G. Morpurgo、T. Giamarchi、L. Chomaz、M. J. Mark 和 F. Ferlaino，《超冷偶极原子非平衡超固态中的相干性》，《自然·物理》17，356–361（2021年）。[40] G. Biagioni、N. Antolini、B. Donelli、L. Pezz`e、A. Smerzi、M. Fattori、A. Fioretti、C. Gabbanini、M. Inguscio、L. Tanzi 和 G. Modugno，《通过约瑟夫森效应测量超固体的超流分数》，《自然》629，773–777（2024年）。[41] B. Donelli、N. Antolini、G. Biagioni、M. Fattori、A. Fioretti、C. Gabbanini、M. Inguscio、L. Tanzi、G. Modugno、A. Smerzi 和 L. Pezz`e，《超固态偶极量子气体中的自诱导约瑟夫森振荡与自俘获》，《物理评论A》112，L051302（2025年）。[42] W. Kirkby、T. Bland、F. Ferlaino 和 R. N. Bisset，《双组分反偶极凝聚体中的自旋旋子与超固体》，《SciPost物理核心》6，084（2023年）。[43] K. W. Madison、F. Chevy、W. Wohlleben 和 J. Dal- i bard，《搅拌玻色-爱因斯坦凝聚体中的涡旋形成》，《物理评论快报》84，806（2000年）。[44] J. R. Abo-Shaeer、C. Raman、J. M. Vogels 和 W. Ket- terle，《玻色–爱因斯坦凝聚体中涡旋晶格的观测》，《科学》292，476–479（2001年）。[45] P. C. Haljan、I. Coddington、P. Engels 和 E. A. Cornell，《利用旋转的正常云驱动玻色–爱因斯坦凝聚体涡量》，《物理评论快报》87，210403（2001年）。[46] M. R. Matthews、B. P. Anderson、P. C. Haljan、D. S. Hall、C. E. Wieman 和 E. A. Cornell，《玻色-爱因斯坦凝聚体中的涡旋》，《物理评论快报》83，2498（1999年）。[47] B. P. Anderson、P. C. Haljan、C. E. Wieman 和 E. A. Cornell，《玻色-爱因斯坦凝聚体中的涡旋进动：填充与空心涡核的观测》，《物理评论快报》85，2857（2000年）。[48] J. E. Williams 和 M. J. Holland，《制备玻色–爱因斯坦凝聚体的拓扑态》，《自然》401，568 572 1999–（）。[49] L. Klaus、T. Bland、E. Poli、C. Politi、G. Lamporesi、E. Casotti、R. N. Bisset、M. J. Mark 和 F. Ferlaino，《偶极凝聚体中涡旋与涡旋条纹的观测》，《自然·物理》18，1453–1458（2022年）。[50] A. Trautmann、P. Ilzh¨ofer、G. Durastante、C. Politi、M. Sohmen、M. J. Mark 和 F. Ferlaino，《铒原子与镝原子的偶极量子混合物》，《物理评论快报》121，213601（2018年）。[51] C. Ravensbergen、E. Soave、V. Corre、M. Kreyer、B. Huang、E. Kirilov 和 R. Grimm，《共振相互作用的费米子混合物 ^{161}Dy 与 ^{40}K》，《物理评论快报》124，203402（2020年）。[52] F. Sch¨afer、Y. Haruna 和 Y. Takahashi，《实现高磁性原子与非磁性原子的量子简并混合物》，《物理评论A》107，L031306（2023年）。[53] M. Lecomte、A. Journeaux、J. Veschambre、J. Dalibard 和 R. Lopes，《超冷偶极玻色气体自旋混合物的制备与稳定》，《物理评论快报》134，013402 2025（）。[54] K. Xie、X. Li、Y.-Y. Zhou、J.-H. Luo、S. Wang、Y.-Z. Nie、H.-C. Shen、Y.-A. Chen、X.-C. Yao 和 J.-W. Pan，《超冷混合物中 ^{6}Li 与 ^{164}Dy 原子的费什巴赫光谱学》，《物理评论A》111，023327（2025年）。[55] J. Kalia

K. Kwon 和 R. J. Fletcher, 《铒和锂原子简并玻色–玻色混合物的制备》（2025年）, arXiv:2506.00177 [cond-mat.quant-gas]。[56] C. Granata 和 A. Vettoliere, 《纳米超导量子干涉仪：纳米尺度研究的强大工具》, 《物理学报告》614, 1–69（2016年）。[57] K. Sukhatme、Y. Mukharsky、T. Chui 和 D. Pearson, 《超流^{4}氦中理想约瑟夫森效应的观测》, 《自然》411, 280–283（2001年）。[58] M. Abad、M. Guilleumas、R. Mayol、M. Pi 和 D. M. Jezek, 《偶极自诱导玻色子约瑟夫森结》, 《欧洲物理快报》94, 10004（2011年）。[59] M. Abad、M. Guilleumas、R. Mayol、M. Pi 和 D. M. Jezek, 《自诱导玻色子约瑟夫森结中的相位滑移与自俘获》, 《物理评论A》84, 035601（2011年）。[60] M. N. Tengstrand、D. Boholm、R. Sachdeva、J. Bengtsson 和 S. M. Reimann, 《环形偶极超固体中的持续流》, 《物理评论A》103, 013313（2021年）。[61] M. Nilsson Tengstrand、P. St¨urmer、J. Ribbing 和 S. M. Reimann, 《带旋转弱连接的环形偶极超固体》, 《物理评论A》107, 063316（2023年）。[62] A. Bellettini、A. Richaud 和 V. Penna, 《玻色子约瑟夫森结的大质量涡旋实现》, 《物理评论研究》6, 043197（2024年）。[63] A. Ala˜na、M. Modugno、P. Capuzzi 和 D. M. Jezek, 《超固体中的自维持约瑟夫森动力学与自俘获》, 《物理评论A》111, L051307（2025年）。[64] S. Krinner、T. Esslinger 和 J.-P. Brantut, 《利用冷原子进行双端输运测量》, 《物理学杂志：凝聚态》29, 343003（2017年）。[65] 我们将 w 定义为：对 z取最小值，即填充涡旋核心的组分的径向密度分布的半高半宽。[66] M. Eto、K. Kasamatsu、M. Nitta、H. Takeuchi 和 M. Tsubota, 《双组分玻色-爱因斯坦凝聚体中半量子化涡旋的相互作用》, 《物理评论A》83, 063603（2011年）。[67]我们定义$\xi_2 = \hbar/\sqrt{m_2 g_{22} n_{2,\max}}$，其中 g_{22} 是种内接触相互作用强度（见附录），而$n_{2,\max}$是峰值三维密度。[68] 关于用于确定涡旋长度和结区的判据，见附录（最后一节）。[69] D. Margineda、A. Crippa、E. Strambini、Y. Fukaya、M. T. Mercaldo、M. Cuoco 和 F. Giazotto, 《超导戴姆纳米桥中的符号反转二极管效应》, 《通信物理》6, 10.1038/s42005-023-01458-9（2023年）。[70] B. Deaver 和 J. Pierce, 《超导桥的弛张振荡器模型》, 《物理快报 A》38, 81–82（1972年）。[71] F. Piazza、L. A. Collins 和 A. Smerzi, 《玻色-爱因斯坦凝聚体流经一弱连接, 《物理评论A》81, 033613（2010年）。[72] P. Rosenbusch、V. Bretin和J. Dalibard, 《玻色-爱因斯坦凝聚体中单条涡旋线的动力学》, 《物理评论快报》89, 200403（2002年）。[73] S. Li、U. N. Le和H. Saito, 《双组分偶极玻色-爱因斯坦凝聚体中的长寿命超固体》, 《物理评论A》105, L061302（2022年）。[74] T. Bland、E. Poli、L. A. Pe˜na Ardila、L. Santos、F. Fer- laino和R. N. Bisset, 《二元偶极凝聚体中的交替畴超固体》, 《物理评论A》106, 053322（2022年）。[75] C. J. Myatt、E. A. Burt、R. W. Ghrist、E. A. Cornell和C. E. Wieman, 《通过蒸发冷却制备两个相互重叠的玻色-爱因斯坦凝聚体》, 《物理评论快报》78, 586（1997年）。[76] D. S. Hall、M. R. Matthews、J. R. Ensher、C. E. Wieman和E. A. Cornell, 《玻色-爱因斯坦凝聚体二元混合物中组分分离的动力学》, 《物理评论快报》81, 1539（1998年）。[77] P. Maddaloni、M. Modugno、C. Fort、F. Minardi和M. Inguscio, 《两个碰撞玻色-爱因斯坦凝聚体的集体振荡》, 《物理评论快报》85, 2413（2000年）。[78] Y. Tang、W. Kao、K.-Y. Li和B. L. Lev, 《利用旋转磁场调节量子气体中的偶极-偶极相互作用》, 《物理评论快报》120, 230401（2018年）。[79] W. Yuan、S. Zhang、N. Bigagli、H. Kwak、C. Warner、T. Karman、I. Stevenson和S. Will, 《超冷分子气体中偶极相互作用的极端损耗抑制与宽范围可调控性》（2025年）。[80] T. Chalopin、T. Satoor、A. Evrard、V. Makhalov、J. Dal- ibard、R. Lopes和S. Nascimbene, 《探测合成霍尔系统中的手性边缘动力学与体拓扑》, 《自然·物理》16, 1017（2020年）。[81] G. Durastante、C. Politi、M. Sohmen、P. Ilzh¨ofer、M. J. Mark、M. A. Norcia和F. Ferlaino, 《铒-镝偶极混合物中的费什巴赫共振》, 《物理评论A》102, 033330（2020年）。[82] C. Politi、A. Trautmann、P. Ilzh¨ofer、G. Durastante、M. J. Mark、M. Modugno和F. Ferlaino, 《超冷偶极混合物中的种间相互作用》, 《物理评论A》105, 023304 2022( )。[83] S. Ronen、D. C. E. Bortolotti和J. L. Bohn, 《圆柱形陷阱中偶极凝聚体的Bogoliubov模》, 《物理评论A》74, 013623（2006年）。[84] H.-Y. Lu、H. Lu、J.-N. Zhang、R.-Z. Qiu、H. Pu和S. Yi, 《受限偶极凝聚体中的空间密度振荡》, 《物理评论A》82, 023622（2010年）。[85] P. B. Blakie、D. Baillie、L. Chomaz和F. Ferlaino, 《细长偶极凝聚体中的超固体性》, 《物理评论研究》2, 043318（2020年）。[86] J. C. Smith、D. Baillie和P. B. Blakie, 《无限管中偶极玻色气体的超固体性与结晶》, 《物理评论A》107, 033301（2023年）。

附录

数值细节—我们考虑一种沿 z 轴排列、处于无限管几何中的三维二元偶极凝聚体。每个组分的横向谐振阱势每个分量的乒乓势为

$$V_i(\mathbf{x}) = \frac{m_i}{2}\left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2\right), \tag{A1}$$

其中 $i = 1,2$ 表示各组分， m_i 表示它们的质量。在零温度下，动力学由——

由两个耦合偶极Gross-Pitaevskii方程支配，其序参量为 $\psi_i(\mathbf{x}\ t)$，

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_i(\mathbf{x},t)=\Bigg[-\frac{\hbar^2}{2m_i}\nabla^2+V_i(\mathbf{x})+\sum_{j=1}^{2}g_{ij}\,n_j(\mathbf{x},t)+\sum_{j=1}^{2}\int d^3\mathbf{x}'\,U_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,n_j(\mathbf{x}',t)\Bigg]\psi_i(\mathbf{x},t),\qquad(A2)$$

其中，$n_i(\mathbf{x}\ t)\equiv|\psi_i(\mathbf{x}\ t)|^2$ 是组分 i 的原子密度，$g_{ij}=2\pi\hbar^2a_{ij}/m_{ij}$ 是接触相互作用强度，其 s 波散射长度为 a_{ij}，约化质量为 $m_{ij}=(m_i^{-1}+m_j^{-1})^{-1}$。长程各向异性的偶极-偶极相互作用势为

$$U_{ij}(\mathbf{r})=\alpha\,\frac{\mu_0\,\mu_i\,\mu_j}{4\pi}\,\frac{1-3\cos^2\theta}{r^3},\qquad(A3)$$

其中，μ_i 是组分 i 的偶极矩，μ_0 是真空磁导率，$\mathbf{r}=\mathbf{x}\ -\mathbf{x}'$ 是两个粒子之间的相对位置矢量，$r=|\mathbf{r}|$，而 θ 是$\mathbf{r}$ 与偶极极化方向 $\hat{\mathbf{z}}$之间的夹角。

虽然组分 2 不具有偶极性，但我们让组分 1 的原子绕管轴快速旋转（z），从而在 [$\alpha=-1/2$式 (A3)]中形成反偶极情形。反偶极子在能量上倾向于并排排列的偶极构型，这与通常的首尾相吸相反。反偶极子已在偶极原子 [78] 和微波屏蔽极性分子 [79]中实现。 ^{162}我们的模拟以$m_1=m_2=161.927$Dy 为基础，但我们的发现定性上适用于广泛的偶极-非偶极和偶极-偶极混合物 [50–55，80–82]。

直流定态——为了获得一个涡旋位于中心并沿囚禁势轴（z）排列的定态，我们利用柱对称性并采用傅里叶-汉克尔变换 [83]。这将三维问题简化为有效的二维数值处理，同时解析地施加绕 z 轴的 2π 相位环流。长程偶极-偶极相互作用通过柱形截断处理， [84], 在径向截断相互作用，以避免径向傅里叶副本之间产生非物理相互作用。对于不混溶相中的反偶极-非偶极混合物，基态由交替畴构成，参见图 4（另见 [42]）。我们首先考虑一个包含两种组分各一个完整畴的单个晶胞。从在一种组分中刻入涡旋的状态出发，使用分步傅里叶方法，通过虚时间演化求解方程（A2）。沿着 z，通过选择远大于任何密度调制特征尺寸的截断长度，允许傅里叶副本相互作用，从而从.....的角度实现无限管几何

相互作用。对于每组参数，我们确定使每个粒子能量最低的晶胞长度 l，从而能够考虑一个在能量上最优的单个晶胞

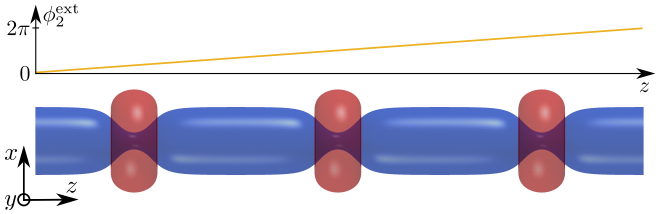

图 4. 在二元玻色-爱因斯坦凝聚体中，沿无涡旋组分施加线性相位梯度的方案。随后使用虚时间将相位分布弛豫至直流定态。

（在正文中称为系统长度 l） [85, 86]。

为获得携带核心电流的定态，我们从已收敛的基态出发，在不含涡旋的组分中沿轴向（z）施加线性相位梯度。具体做法是将相应的波函数乘以相位因子 $\exp[i\,\phi_i^{\rm ext}(z)]$，其中 $\partial_z\phi_i^{\rm ext}=$ 为常数。对于单个晶胞，由于采用周期性边界条件，所施加的相位差必须是 2π 的整数倍。为实现任意相位差，我们将系统扩展为多个晶胞：此时每个晶胞内的相位差为$2\pi q/n_{\rm uc}$，其中 $q\in\mathbb{Z}$ 和 $n_{\rm uc}\in\mathbb{Z}$ 分别表示晶胞数。例如，若要在每个晶胞中施加$\Delta\phi_i^{\rm tot}=2\pi/3$ 的相位差，我们模拟三个晶胞，并令 $\int_{-l/2}^{l/2}\partial_z\phi_i^{\rm ext}(z)\,dz=2\pi$，如图 4 所示。随后，我们在虚时间中演化耦合的 Gross-Pitaevskii 方程（A2），使系统弛豫至携带量子化电流的定态。

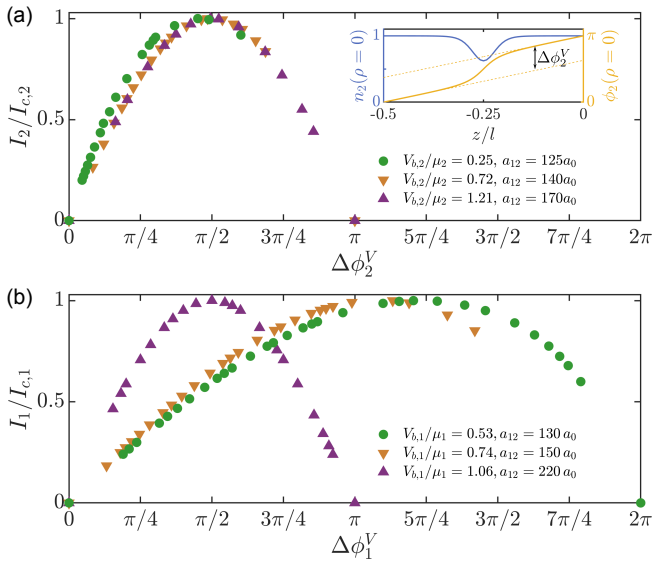

图 5. (a) 短涡旋和 (b) 长涡旋的电流-相位关系，绘制为相位差 $\Delta\phi_i^V$ 的函数，该相位差仅限于涡旋核心区域。(a) 中的插图展示了结两侧局域的相位降。

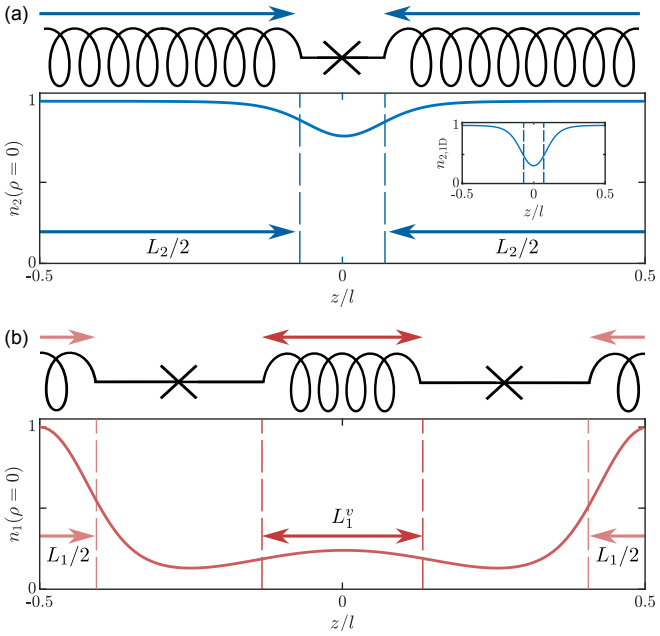

图 6. 结区的识别。（a）短涡旋构型（$a_{12}=125\,a_0$）沿涡旋核心的三维密度。虚线划定了结区以及用于评估动能电感的线段。插图显示了沿涡旋核心的一维密度。（b）对于长涡旋（$a_{12}=130\,a_0$），核心内的局部密度最大值充当了一个额外的小储库，贡献了额外的动能电感 L_1^v。密度均归一化为各自的峰值。

这一过程使我们能够计算短涡旋和长涡旋构型的电流-相位关系（电流-相位关系）。

穿过涡旋通道的相位降——除了正文中展示的电流-相位关系（图 2 和图 3）外，我们还基于相同数据给出了补充的电流-相位关系，仅考虑涡旋通道两端的相位降 [，见图 5(a) 的插图]。图 5(a) 中短涡旋的电流 - 相位关系呈现出经典的正弦行为，表明电感在空间上与涡旋核心内的理想结区分离。相比之下，长涡旋结所容纳的相位差超过了 π [图 5(b)], ，支持了长涡旋表现为双结的解释。

动能电感的数值计算——为评估结区外的动能电感，我们首先根据沿涡旋核心的流动组分三维密度，$n_i(\rho=0,\ z)$，确定结区边界。我们依据判据 $n_i(\rho=0,\ z) < n_i^{\min} + f\left(n_i^{\max} - n_i^{\min}\right)$识别属于结的点，其中 $n_i^{\min}$和 $n_i^{\max}$分别是 $n_i(\rho=0,\ z)$的全局最小值和最大值，而$f=0.5$ 是选定的阈值系数。图 6(a) 展示了短涡旋情形下结区分离的示例。

对于长涡旋，组分 1 内的长程偶极—偶极相互作用会改变核结构，并在涡旋核心 [图 6(b)]内形成一个局部密度最大值。因此，长涡旋的核心实际上表现为两个结，它们之间由与该局部最大值相关的额外动能电感 L_1^v [（见图 6(b)）]隔开。为评估这一额外电感，我们采用与上述相同的判据，但将全局最大值替换为局部最大值。