arXiv:2602.01890v1 [math.AP] 2 Feb 2026

论双压力可压缩流向机械平衡的松弛

COSMIN BURTEA、TIMOTHÉE CRIN-BARAT* 与 PIERRE GONIN--JOUBERT

摘要。我们针对斜压可压缩流体混合物，引入单速度双压力 Baer-Nunziato 型模型的一种对称化。由此我们可以论证零压实黏度极限，并恢复所谓 Kapila 模型的一个解。另一方面，该对称化揭示了一种压力诱导稳定机制，使我们能够对接近常值状态的初始数据得到一个全局存在性结果。

1. 引言

1.1. **引言。** Baer-Nunziato 模型（BN）在 [1] 中被引入，用以研究反应性颗粒介质中爆燃向爆轰的转变。就其一般形式而言，它是一个由 $5+2d$ 个方程组成的一阶偏微分方程拟线性系统，这些方程具有相当非标准的数学结构：方程是非守恒的，并且在如下意义上是退化的，即与该系统自然相关联的熵并非严格凸 [8, 2, 4]。特别地，用于对称化的 Lax-Friedrichs 定理在此情形下并不适用。（BN）方程组是通过对单相平衡方程进行体积平均过程[22, 5, 15] 并辅以支配体积分数演化的闭合关系而得到的，以便获得一个封闭系统。所得方程是非守恒的，这是由于两相之间的界面交换。事实表明，该模型展现了支配非均匀连续介质相互作用的适当代数结构，并被用于分析多相流，例如参见 [14, 13, 3] 及其所引文献。

关于（BN）模型双曲性的研究见 [6, 19, 20, 9, 8],；模型的对称化（这意味着模型至少在相空间的某些区域内局部适定）见 [9, 3, 18, 14, 4], ；黎曼问题则见 [6, 19, 20, 9]。据我们所知，如何对具有退化熵的非保守系统进行对称化，尚无定论，不过 [4] 讨论了具有严格凸熵的非保守系统这一情形。

在这类模型中，混合物的两相分别处于机械、热学和动力学非平衡状态。这会导致系统中出现刚性相互作用项。为便于计算，人们推导出约化模型，用于描述远离激波的区域中的流动。由此得到所谓的 Kapila 模型，也称为单速度、单压力双温度模型。

本文从数学角度研究一维（$d=1$）双压力单速度 Baer-Nunziato 模型，该模型针对斜压可压流，其形式为

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_\pm + u\partial_x \alpha_\pm = \pm \dfrac{\alpha_+\alpha_-}{\mu}\left(p_+(\rho_+) - p_-(\rho_-)\right), \\ \partial_t\left(\alpha_\pm \rho_\pm\right) + \partial_x\left(\alpha_\pm \rho_\pm u\right) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_x p = 0, \end{cases} \tag{BN}$$

关键词和短语。Baer-Nunziato 系统，压力松弛，Kapila系统，适定性。*通讯作者：timothee.crin-barat@math.univ-toulouse.fr。

其中，两相的特征状态函数分别记为 $+$ 和 $-$，两相的未知量为：

- 密度： ρ_+, ρ_-,
- 混合物速度： $u \in \mathbb{R}$,
- 体积分数： α_+ 和 $\alpha_- = 1 - \alpha_+$,
- 压力： $p_+ = p_+(\rho_+)$ 和 $p_- = p_-(\rho_-)$, </style}使得 $p_\pm$ ： $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是给定的正则且严格递增函数,
- 混合物密度 $\rho = \alpha_+\rho_+ + \alpha_-\rho_-$,
- 混合物压力 $p = \alpha_+ p_+(\rho_+) + \alpha_- p_-(\rho_-)$,
- 压实黏度 $\mu > 0$。

以下几个感兴趣的量并未在（BN）中明确出现，但将在下文中使用：

- 质量分数： $y_\pm = \frac{\alpha_\pm \rho_\pm}{\rho}$； ——
- 声速： $c_\pm^2 = p'_\pm(\rho_\pm)$,
- 平均声速： $\rho c^2 = \alpha_+\rho_+ c_+^2 + \alpha_-\rho_- c_-^2$。

在 [16], 系统（BN）的一个简化模型，是通过零压实黏度极限 $\mu \to 0$下的非正式渐近分析得到的。形式上，当 μ趋于0时，系统（BN）的解预期将收敛于 Kapila 模型的解：

$$\begin{cases} \alpha_+ + \alpha_- = 1, \\ \partial_t(\alpha_\pm\rho_\pm) + \partial_x(\alpha_\pm\rho_\pm u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_x p = 0, \\ p = p_+(\rho_+) = p_-(\rho_-). \end{cases} \tag{K}$$

1.2. **本文的目标**。 本文重新审视并完善了 [2],中提出的分析；该分析此前仅适用于幂律压力定律 $p_\pm(\rho_\pm) = A_\pm \rho_\pm^{\gamma_\pm}$。我们提出了系统（$BN$）的一种对称化，使系统的压力-耗散结构得以明确呈现。

对系统的这一重新表述使我们得以确立两类结果。一方面，我们证明了经典解在一个关于 μ 一致的时间区间上的存在性，并证明在极限 $\mu \to 0$ 下，这些解收敛于所谓 Kapila 模型的一个经典解。另一方面，对于固定的 μ，我们利用压力-耗散机制，证明了当初始数据充分小且接近压力平衡时，系统（BN）的经典解全局时间存在。

2. 系统的重新表述

2.1. **对称化**。 我们首先讨论极限情形 $\mu = 0$，该情形对应于 Kapila系统。通过观察可将系统（K）对称化：

$$\alpha_\pm(D_t p_\pm + \rho_\pm p'_\pm \partial_x u) + \rho_\pm p'_\pm D_t \alpha_\pm = 0,$$

将其除以 $\rho_\pm p'_\pm$、求和，并考虑到 $D_t p_+ = D_t p_-$ 后，得到 ，

$$\left(\frac{\alpha_+}{\rho_+ p'_+} + \frac{\alpha_-}{\rho_- p'_-}\right) D_t p + \partial_x u = 0.$$

在上文及本文余下部分中，我们使用以下记号

$$D_t := \partial_t + u\partial_x, \tag{2.1}$$

对于物质导数。引入所谓的*Wood*声速

$$\frac{1}{\rho c_w^2} = \frac{\alpha_+}{\rho_+ p'_+(\rho_+)} + \frac{\alpha_-}{\rho_- p'_-(\rho_-)} := \frac{\alpha_+}{\rho_+ c_+^2} + \frac{\alpha_-}{\rho_- c_-^2}$$

我们得到

$$D_t p + \rho c_w^2 \partial_x u = 0.$$

汇集新变量组的方程，我们得到*Wood*声速对称化，见 [10], Kapilamodel(2.2):

$$\begin{cases} D_t y = 0, \\ D_t p + \rho c_w^2 \partial_x u = 0, \\ D_t u + \frac{1}{\rho} \partial_x p = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 $y := y_+$。

为了对 (BN) 进行对称化，我们遵循两条指导原则：

- 首先，我们希望找到一种对称化，使其在 $\mu \to 0$(2.2) 时退化为（因此，新变量组取如下形式 $V = (y,\ \pi,\ \delta\pi,\ u)$ 其中

$$\begin{aligned} p &= \pi + \delta\pi \\ \pi &= \pi\left(\alpha_+, \rho_+, \rho_-\right), \\ \delta\pi &= \delta\pi\left(\alpha_+, \rho_+, \rho_-\right) = R\left(\alpha_+, \rho_+, \rho_-\right)\left(p_+\left(\rho_+\right) - p_-\left(\rho_-\right)\right). \end{aligned}$$

- 其次，在 π 的方程中，变量替换产生的零阶项至少应与 $\frac{1}{\mu}(\delta\pi)^2$ 成比例。

我们声称，两压力一速度（BN）模型可以写成如下形式

$$\begin{cases} D_t y = 0, \\ D_t \delta\pi + \left(\rho c^2 - \rho c_w^2 + f_{11}\delta\pi\right)\partial_x u + \left(\dfrac{\rho_+ c_+^2}{\alpha_+} + \dfrac{\rho_- c_-^2}{\alpha_-} + f_{12}\delta\pi\right)\dfrac{\alpha_+\alpha_-\delta\pi}{\mu} = 0, \\ D_t \pi + (\rho c_w^2 + f_{21}\delta\pi)\partial_x u + f_{22}\dfrac{(\delta\pi)^2}{\mu} = 0, \\ D_t u + \frac{1}{\rho}\partial_x \pi + \frac{1}{\rho}\partial_x \delta\pi = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

在（2.3）中，π 和 $\delta\pi$ 满足 $\delta\pi$ 与压力差成正比，$p_+ - p_-$ 而$\pi + \delta\pi = p$。各项 f_{ij} 是关于未知量的函数，且与 μ无关。因此，系统（2.3）可借助一个对角矩阵对称化：只要压力差充分小，对角项就严格为正（此处的小量条件与 μ无关），且 $\rho_+ c_+^2 \neq \rho_- c_-^2$。系统的代数结构（对称性以及零阶项的特殊结构）使我们能够得到关于参数 μ一致的 Sobolev 空间估计。这使我们能够证明，（BN）的经典解趋于（K）的经典解。精确的数学结果将在下文第 3 节给出。

至少有两种方法可以将（BN）改写为（2.3）：第一种采用了 [2] 中提出的一个想法；据我们所知，第二种方法似乎是新的。后一种方法的优点是具有 $f_{22} = 0$，从而能够更好地量化两个系统之间的误差。

2.1.1. 第一次对称化。

[2] 中采用的第一种方法可概括如下。我们写出平均压力所满足的方程

$$D_t p + \left(\alpha_+\rho_+ c_+^2 + \alpha_-\rho_- c_-^2\right)\partial_x u + \left(\rho_+ c_+^2 - \rho_- c_-^2\right)\frac{\alpha_+\alpha_-}{\mu}\delta p = \frac{\alpha_+\alpha_-}{\mu}(\delta p)^2 \tag{2.4}$$

并将其与压力差 $\delta p = p_+ - p_-$ 满足的方程进行比较：

$$D_t \delta p + (\rho_+ c_+^2 - \rho_- c_-^2)\partial_x u + \left(\frac{\rho_+ c_+^2}{\alpha_+} + \frac{\rho_- c_-^2}{\alpha_-}\right)\frac{\alpha_+\alpha_-}{\mu}\delta p = 0. \tag{2.5}$$

注意，变量 p 并不是一个合适的未知量，因为它的方程中含有关于 $\delta p/\mu$ 的线性项。因此，我们寻找 $R=R\left(\alpha_{+},\ \rho_{+},\ \rho_{-}\right)$，使得 $p-R\delta p$ 中含有关于 $\delta p/\sqrt{\mu}$ 的二次项。变量的自然选择是

$$\begin{cases} \delta\pi := \dfrac{\left(\rho_{+}c_{+}^{2}-\rho_{-}c_{-}^{2}\right)}{\left(\frac{\rho_{+}c_{+}^{2}}{\alpha_{+}}+\frac{\rho_{-}c_{-}^{2}}{\alpha_{-}}\right)}\delta p, \\ \pi := p-\dfrac{\left(\rho_{+}c_{+}^{2}-\rho_{-}c_{-}^{2}\right)}{\left(\frac{\rho_{+}c_{+}^{2}}{\alpha_{+}}+\frac{\rho_{-}c_{-}^{2}}{\alpha_{-}}\right)}\delta p=\dfrac{\frac{\rho_{-}c_{-}^{2}}{\alpha_{-}}}{\frac{\rho_{+}c_{+}^{2}}{\alpha_{+}}+\frac{\rho_{-}c_{-}^{2}}{\alpha_{-}}}p_{+}+\dfrac{\frac{\rho_{+}c_{+}^{2}}{\alpha_{-}}}{\frac{\rho_{+}c_{+}^{2}}{\alpha_{+}}+\frac{\rho_{-}c_{-}^{2}}{\alpha_{-}}}p_{-}. \end{cases} \tag{2.6}$$

一项冗长但直接的计算，与 [2], 中所展示的计算类似，表明由$(\pi,\ \delta\pi,\ y,\ u)$验证的方程具有如下形式(2.3)。事实上，对于伽马律压力 $p_{\pm}(\rho_{\pm})=c_{\pm}\rho_{\pm}^{\gamma_{\pm}}$，可以进行一些简化，如下所示

$$\rho_{\pm}c_{\pm}^{2}=\rho_{\pm}p_{\pm}^{\prime}=\gamma_{\pm}p_{\pm}.$$

在这种情况下，若 $\gamma_{+}\neq\gamma_{-}$，我们可以将方程(2.4) 中与 $\dfrac{\delta p}{\mu}$ 成比例的项写成(2.4) 如下形式

$$\begin{aligned}\left(\rho_{+}c_{+}^{2}-\rho_{-}c_{-}^{2}\right)\frac{\alpha_{+}\alpha_{-}}{\mu}\delta p&=\left(\gamma_{+}p_{+}-\gamma_{-}p_{-}\right)\frac{\alpha_{+}\alpha_{-}}{\mu}\delta p\\&=\left(\gamma_{+}-\gamma_{-}\right)p\frac{\alpha_{+}\alpha_{-}}{\mu}\delta p+\left(\gamma_{+}\alpha_{-}-\gamma_{-}\alpha_{+}\right)\frac{\alpha_{+}\alpha_{-}}{\mu}(\delta p)^{2}\end{aligned}$$

并且有

$$\left(\frac{\rho_{+}c_{+}^{2}}{\alpha_{+}}+\frac{\rho_{-}c_{-}^{2}}{\alpha_{-}}\right)\frac{\alpha_{+}\alpha_{-}}{\mu}\delta p=\left(\frac{\gamma_{+}}{\alpha_{+}}+\frac{\gamma_{-}}{\alpha_{-}}\right)p\frac{\alpha_{+}\alpha_{-}}{\mu}\delta p+\left(\gamma_{+}\alpha_{-}^{2}-\gamma_{-}\alpha_{+}^{2}\right)\frac{(\delta p)^{2}}{\mu}.$$

这解释了 [2]中所使用的变量组，即

$$p-\frac{\left(\gamma_{+}-\gamma_{-}\right)}{\frac{\gamma_{+}}{\alpha_{+}}+\frac{\gamma_{-}}{\alpha_{-}}}\delta p:=\frac{\frac{\gamma_{-}}{\alpha_{-}}p_{+}+\frac{\gamma_{+}}{\alpha_{+}}p_{-}}{\frac{\gamma_{+}}{\alpha_{+}}+\frac{\gamma_{-}}{\alpha_{-}}}.$$

这种变量替换使我们能够证明极限 $\mu\to 0$，并为一类良备初始数据获得收敛速率。

2.1.2. 第二种对称化。

另一种可能是寻找具有特定形式 $\pi=\pi(\rho,y)$ 的有效压力。这可以通过根据以下关系隐式定义函数 π 来实现：

$$\frac{1}{\rho}=\frac{y}{p_{+}^{-1}(\pi)}+\frac{1-y}{p_{-}^{-1}(\pi)}. \tag{2.7}$$

$\pi=\pi(\rho,y)$ 的存在性是 $p_{\pm}$ 严格单调性的推论，它保证对于任意给定的 (ρ,y)，都存在唯一的 π 满足 (2.7)，而其正则性则由隐函数定理得出。我们引入函数 $\left[\rho_{\pm}^{2}c_{\pm}^{2}\right]:(0,\infty)\to(0,\infty)$ $\left[\rho^{2}c_{w}^{2}\right]:(0,1)\times(0,\infty)\to(0,\infty)$，定义如下：

$$\begin{cases} \left[\rho_{\pm}^{2}c_{\pm}^{2}\right](s)=\left(p_{\pm}^{-1}\right)^{2}(s)\left(p_{\pm}\right)^{\prime}\left(p_{\pm}^{-1}(s)\right), \\ \dfrac{1}{\left[\rho^{2}c_{w}^{2}\right](y,s)}=\dfrac{y}{\left[\rho_{+}^{2}c_{+}^{2}\right](s)}+\dfrac{1-y}{\left[\rho_{-}^{2}c_{-}^{2}\right](s)}. \end{cases}$$

注意，若 $\rho_{+},\ \rho_{-}\in(0,\ \infty)$ 满足

$$p_{+}\left(\rho_{+}\right)=p_{-}\left(\rho_{-}\right)=p$$

then

$$\begin{cases} \left[\rho_{\pm}^2 c_{\pm}^2\right](p) = \rho_{\pm}^2 c_{\pm}^2, \\ \dfrac{1}{\left[\rho^2 c_w^2\right](y,p)} = \dfrac{y}{\rho_+^2 p'_+(\rho_+)} + \dfrac{1-y}{\rho_-^2 p'_-(\rho_-)}. \end{cases} \tag{2.8}$$

考虑映射

$$(\alpha_+, \rho_+, \rho_-) \to (y, \alpha_+ p_+(\rho_+) + \alpha_- p_-(\rho_-), \pi(\rho, y))$$

其中， ρ 和 y 视为(α_+， ρ_+， ρ_-)的函数，通过

$$\rho = \alpha_+\rho_+ + (1-\alpha_+)\rho_-,\ y = \frac{\alpha_+\rho_+}{\alpha_+\rho_+ + (1-\alpha_+)\rho_-}.$$

在点(α_+， ρ_+， ρ_-)处计算该变换的微分，其中 $p_+(\rho_+) = p_-(\rho_-)$，结果为

$$\begin{pmatrix} \frac{\rho_+\rho_-}{\rho^2} & \frac{\alpha_+\alpha_-\rho_-}{\rho^2} & -\frac{\alpha_+\alpha_-\rho_+}{\rho^2} \\ 0 & \alpha_+ p'_+(\rho_+) & \alpha_- p'_-(\rho_-) \\ 0 & \frac{\frac{\alpha_+}{\rho_+}}{\frac{\alpha_+}{\rho_+ p'_+(\rho_+)} + \frac{\alpha_-}{\rho_- p'_-(\rho_-)}} & \frac{\frac{\alpha_-}{\rho_-}}{\frac{\alpha_+}{\rho_+ p'_+(\rho_+)} + \frac{\alpha_-}{\rho_- p'_-(\rho_-)}} \end{pmatrix}$$

雅可比矩阵为

$$J(\alpha_+, \rho_+, \rho_-) = \frac{\rho_- p'_-(\rho_-)\,\rho_+ p'_+(\rho_+)}{\alpha_+\rho_- p'_-(\rho_-) + \alpha_-\rho_+ p'_+(\rho_+)} \frac{\alpha_+\alpha_-}{\rho^2} \left(\rho_+ p'_+(\rho_+) - \rho_- p'_-(\rho_-)\right). \tag{2.9}$$

考虑变量替换

$$\varphi : \left\{ (\alpha, p, \delta p) \in (0,1) \times (0,\infty) \times \mathbb{R} : \frac{p}{\alpha} > \delta p > -\frac{p}{1-\alpha} \right\} \to \mathbb{R}^3 \tag{2.10}$$

定义为

$$\begin{cases} \varphi_1(\alpha_+, p, \delta p) = \dfrac{\alpha_+ p_+^{-1}(p_+)}{\alpha_+ p_+^{-1}(p_+) + \alpha_- p_-^{-1}(p_-)}, \\ \varphi_2(\alpha_+, p, \delta p) = p, \\ \varphi_3(\alpha_+, p, \delta p) = p - \pi\left(\dfrac{\alpha_+ p_+^{-1}(p_+)}{\alpha_+ p_+^{-1}(p_+) + \alpha_- p_-^{-1}(p_-)}, \alpha_+ p_+^{-1}(p_+) + \alpha_- p_-^{-1}(p_-)\right) \end{cases} \tag{2.11}$$

with

$$\alpha_- = 1 - \alpha_+,\ p_\pm = p \pm \alpha_\mp \delta p.$$

Let

$$\psi : (0,1) \times (0,\infty) \to (0,1) \times (0,\infty) : \psi(\alpha_+, p) = (\varphi_1(\alpha_+, p, 0), \varphi_2(\alpha_+, p, 0)).$$

函数 ψ 是一个 C^∞-微分同胚，可以显式计算。利用链式法则和(2.9)，可知 φ 的雅可比矩阵在(α， p， 0) 处不为零，对于

$$(\alpha, p) \in \mathcal{O} := \left\{ (\alpha, s) \in (0,1) \times (0,\infty) : p_+^{-1}(s) p'_+\left(p_+^{-1}(s)\right) \neq p_-^{-1}(s) p'_-\left(p_-^{-1}(s)\right) \right\}.$$

下面的命题表明，变量替换 (2.11) 在 $p_+ = p_-$ 的一个足够小的柱状邻域上是可逆的。

命题2.1。 设 $\mathcal{U}$ 为有界开凸集，满足 $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ 且 φ 如(2.10)-(2.11)中所定义。存在某个 $\eta > 0$ 使得 φ 在 $\mathcal{U} \times (-\eta, \eta)$ 上的限制是一个C^∞微分同胚，并映 *onto* 其像。

为了得到关于 π 的方程，对 (2.7) 求导，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial_x u}{\rho} &= -\left(\frac{y_+}{(p_+^{-1})^2(\pi)}(p_+^{-1})'(\pi)+\frac{y_-}{(p_-^{-1})^2(\pi)}(p_-^{-1})'(\pi)\right)D_t\pi\\ &= -\left(\frac{y_+}{(p_+^{-1})^2(\pi)}\frac{1}{(p_+)'\left(p_+^{-1}(\pi)\right)}+\frac{y_-}{(p_-^{-1})^2(\pi)}\frac{1}{(p_-)'\left(p_-^{-1}(\pi)\right)}\right)D_t\pi.\end{aligned}$$

由此可得

$$D_t\pi+\frac{1}{\rho}\left[\rho^2c_w^2\right](y,\pi)\,\partial_x u=0.$$

令另一个变量为

$$\delta\pi := p-\pi.$$

.....这一事实 $\delta\pi$ 表现为 $\delta p = p_+ - p_-$ 可通过比较(2.7) 与

$$\frac{1}{\rho}=\frac{y_+}{\rho_+}+\frac{y_-}{\rho_-}=\frac{y_+}{p_+^{-1}(p_+)}+\frac{y_-}{p_-^{-1}(p_-)}.$$

利用（2.8），可得

$$y_+\int_\pi^{p_+}\frac{ds}{\left[\rho_+^2c_+^2\right](s)}+y_-\int_\pi^{p_-}\frac{ds}{\left[\rho_-^2c_-^2\right](s)}=0.$$

我们推得

$$\begin{aligned}&y_+(p_+-p)\int_0^1\frac{d\theta}{\left[\rho_+^2c_+^2\right]((1-\theta)p+\theta p_+)}+y_-(p_--p)\int_0^1\frac{d\theta}{\left[\rho_-^2c_-^2\right]((1-\theta)p+\theta p_-)}\\ &=y_+(\pi-p)\int_0^1\frac{d\theta}{\left[\rho_+^2c_+^2\right]((1-\theta)p+\theta\pi)}+y_-(\pi-p)\int_0^1\frac{d\theta}{\left[\rho_-^2c_-^2\right]((1-\theta)p+\theta\pi)}.\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\left(\rho_+\int_0^1\frac{d\theta}{\left[\rho_+^2c_+^2\right]((1-\theta)p+\theta p_+)}-\rho_-\int_0^1\frac{d\theta}{\left[\rho_-^2c_-^2\right]((1-\theta)p+\theta p_-)}\right)\frac{\alpha_+\alpha_-\delta p}{\rho}\\ &=\left(y_+\int_0^1\frac{d\theta}{\left[\rho_+^2c_+^2\right]((1-\theta)p+\theta\pi)}+y_-\int_0^1\frac{d\theta}{\left[\rho_-^2c_-^2\right]((1-\theta)p+\theta\pi)}\right)(\pi-p).\end{aligned}\tag{2.12}$$

上述方程左端的二阶展开为

$$\mathrm{LHS}_{(2.12)}=\left(\frac{1}{\rho_+c_+^2}-\frac{1}{\rho_-c_-^2}\right)\frac{\alpha_+\alpha_-\delta p}{\rho}+O\left((\delta p)^2\right).\tag{2.13}$$

将各方程合并后，我们得到

$$\begin{cases}D_t y_+=0,\\ D_t\pi+\frac{1}{\rho}\left[\rho^2c_w^2\right](y_+,\pi)\,\partial_x u=0,\\ D_t(p-\pi)+\dfrac{1}{\rho}\left(y_+\rho^2c_+^2+y_-\rho^2c_-^2-\left[\rho^2c_w^2\right]\right)\partial_x u\\ \qquad\qquad+\left(\rho_+c_+^2-\rho_-c_-^2\right)\frac{\alpha_+\alpha_-}{\mu}\delta p=\dfrac{\alpha_+\alpha_-}{\mu}(\delta p)^2,\\ D_t u+\dfrac{1}{\rho}\partial_x p=0.\end{cases}\tag{2.14}$$

利用等式（2.12）与（2.13），我们可以将出现在（2.14）第三个方程中的最后两项改写为与（$\delta\pi$）^{2} 成比例的一项，从而得到（2.3）中所述的形式。
μ

3. 主要结果

3.1. 关于 μ 的一致局部适定性与压力弛豫极限。

定理 3.1. 设 $\mu > 0$。设 $K \subset \mathcal{O}$ 为一个紧凸集，$(\bar{\alpha}_+, p) \in \mathcal{O}$, $\bar{\alpha_-} = 1 - \bar{\alpha}_+$并且，对于 $s > 3/2$,

$$(\alpha_{+,0}, p_0, u_0) \in (\bar{\alpha}_+, \bar{p}, 0) + \left(H^s(\mathbb{R})\right)^3$$

使得 $(\alpha_{+,0}, p_0) \in K$。存在 $\eta = \eta(K) > 0$ 使得，对于任意 $\delta p_0 \in H^s(\mathbb{R})$，若

$$\|\delta p_0\|_{H^s} \leq \eta,$$

则存在 $T = T\left(\|(\alpha_{+,0} - \bar{\alpha}_+, p_0 - \bar{p}, u_0)\|_{H^s}, K\right)$，其与 μ 无关，使得带有初始数据 $(\alpha_{+,0}, \rho_{\pm,0}, u_0)$ 的(BN) 系统，其中

$$\begin{cases} \rho_{+,0} = p_+^{-1}\left(p_0 + \alpha_{-,0}\delta p_0\right), \\ \rho_{-,0} = p_-^{-1}\left(p_0 - \alpha_{+,0}\delta p_0\right), \end{cases}$$

存在唯一解 $\left(\alpha_+^\mu, \rho_\pm^\mu, u^\mu\right) \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R})) \cap C^1((0,T); H^{s-1}(\mathbb{R}))$。

注 3.2. 非共振条件

$$p_+^{-1}(s)p_+'\left(p_+^{-1}(s)\right) \neq p_-^{-1}(s)p_-'\left(p_-^{-1}(s)\right) \tag{3.1}$$

出现在 $\mathcal{O}$ 中，是我们分析中为论证变量代换（2.10的有效性所必需的。在伽马定律压力 $p_\pm(\rho_\pm) = c_\pm\rho_\pm^{\gamma_\pm}$的情形下，它等价于 $\gamma_+ \neq \gamma_-$。

接下来，我们证明定理3.1 中构造的解，对于非良备初始数据，强收敛到 Kapila 模型（K）的解。

定理 *3.3.* 设 $\mu > 0$。设 $K \subset \mathcal{O}$ 为一个紧凸集，且 $\bar{\alpha}_+, p \in \mathcal{O}$。设$V_0^\mu = (\alpha_+^\mu, 0, p_+^\mu, 0, \delta p_0^\mu, u_0^\mu) \in (\bar{\alpha}_+, p, 0, 0) + (H^s(\mathbb{R}))^4$满足定理 *3.1* 的条件，并设 $V_0 = (\alpha_+, 0, p_0, u_0) \in (\bar{\alpha}_+, \bar{p}_+, 0) + (H^s(\mathbb{R}))^3$。令 $(\alpha_+^\mu, p_+^\mu, \delta p^\mu, u^\mu)$（分别地，$(\alpha_+, p_+, u)$）为方程 (BN)（分别地，(K)）在初始条件 $(\alpha_+^\mu, 0, p_+^\mu, 0, \delta p_0^\mu, u_0^\mu)$（分别地，$(\alpha_+, 0, p_0, u_0)$）下的解。那么存在一个仅依赖于 $\|(V_0^\mu, V_0)\|_{H^s}$ 的 $C > 0$，使得$\|(y^\mu - y, \pi^\mu - p, u^\mu - u)\|_{L_T^\infty(H^{s-1})} \leq C\sqrt{\mu} + C\|(\alpha_0^\mu, {}_+ - \alpha_{0,+}, p_0^\mu, {}_+ - p_{0,+}, \delta p_0^\mu, u_0^\mu - u_0)\|_{H^{s-}}$，其中 p 由 *(2.2)* 给出，π^μ 由 *(2.7)* 给出。 [1]

证明定理 2 和定理 3.1 以及定理 3.3 的主要难点在于论证（BN）模型可以改写为一般形式（2.14）。请注意，为了像定理3.3那样在非良准备情形下推导收敛速率，关键是获得形如（2.3）且满足 $f_{22} = 0$ 的对称化。关于基于熵变量的对称化过程如何为其他模型导出形如（标准形）的2.14，请参见 [11] 。

确保存在性以及 Sobolev 空间中的一致有界性所需的技术步骤均为标准内容（见 [12, 2]），故此处略去。

3.2. 非一致于 μ 的全局时间适定性结果。

接下来，我们希望研究该系统的长时间行为。定义质量-拉格朗日坐标：

$$\begin{cases} X : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ \dot{X}(t,x) = u\left(t, X(t,x)\right), \ X(0,x) = x \end{cases}$$

and

$$Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ Z^{-1}(x) = \int_0^x \rho_0(y)\,\mathrm{d}y.$$

系统（BN）用于

$$\left(\alpha_\pm^\ell, \rho_\pm^\ell, u^\ell\right)(t,x) = (\alpha_\pm, \rho_\pm, u)\left(t, X(t, Z(x))\right)$$

表示

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_+^\ell = \dfrac{\alpha_+^\ell \alpha_-^\ell}{\mu}(p_+^\ell - p_-^\ell), \\ \partial_t(\alpha_\pm^\ell \rho_\pm^\ell) + \alpha_\pm^\ell \rho_\pm^\ell \rho^\ell \partial_x u^\ell = 0, \\ \partial_t u^\ell + \partial_x(\alpha_+^\ell p_+^\ell + \alpha_-^\ell p_-^\ell) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

在这些坐标下，我们还有

$$\partial_t y_+^\ell = 0. \tag{3.3}$$

我们的全局时间适定性结果如下。

定理 3.4. 令 $\mu > 0$。对于 $\bar{\alpha}_\pm, \bar{\rho}_\pm > 0$，存在一个依赖于 μ的常数 $\eta > 0$，使得对于 $s > 3/2$，任意 $\alpha_{\pm,0}, \rho_{\pm,0}, u_0 \in (\bar{\alpha}_+, \rho_\pm, 0) + (H^s(\mathbb{R}))^\mathfrak{Z}$, 若

$$\|(\alpha_{\pm,0} - \bar{\alpha}_\pm, \rho_{\pm,0} - \bar{\rho}_\pm, u_0)\|_{H^s} \leq \eta,$$

则 (3.2) 存在唯一的全局时间解，且对所有 $T > 0$：

$$Y(T) \leq 2\eta,$$

其中

$$Y(T) = \|(\alpha_\pm^\ell - \bar{\alpha}_\pm, \rho_\pm^\ell - \bar{\rho}_\pm, u^\ell)\|_{L_T^\infty(H^s)} + \|\delta\pi^\ell\|_{L_T^2(H^s)} + \|(\partial_x u^\ell, \partial_x \pi^\ell)\|_{L_T^2(H^{s-1})}. \tag{3.4}$$

注记 3.5。

- 定理 3.4 揭示了该模型的亚强制结构（3.2）：尽管耗散效应仅显式地出现在压力差中，但系统内部的双曲耦合使这种耗散得以传播，从而使有效压力 π 和速度均随时间衰减。

- 尽管定理3.1和3.3可以直接推广到多维情形（后续工作），定理3.4 则仅适用于一维情形。这一限制源于子系统（2.14）$_{1-3}$ 的线性化在维数大于一时不满足 Shizuta–Kawashima（SK）条件 [21]。关于这一事实的计算见附录 A。

- 定理 3.4 为质量–拉格朗日表述下的（BN）模型给出了全局时间存在性结果。尽管也可以为欧拉表述推导出相应结果，但对解的控制会较弱：对于 H^s 中的初始数据，只能在 H^{s-1} 中对解进行一致时间控制。这是因为我们无法获得速度的 $L_T^1(W^{1,\infty})$ 界，而这对于证明质量–拉格朗日坐标变换的合理性或控制欧拉坐标系中 y 方程的平流项都是必需的。

- 在与本文所考虑情形密切相关的框架下，Qu 和 Wang [17] 证明了拟线性双曲系统的一个整体存在性结果：其中恰有一个特征族违反 Shizuta–Kawashima（SK）条件，前提是非线性项相对于该特征族满足适当的退化条件。在我们的框架中，违反（SK）条件的特征族对应于变量 y，且非线性项呈现出类似的退化结构。然而，[17] 的结果不能直接应用于我们的系统。首先，他们的方法依赖于严格凸熵的存在，而这一假设在我们的情形中并不成立。其次，他们的分析仅限于空间维数 $d \geq 2$；在此情形下，若假设初始数据属于 L^1，便可得到关于 u 的利普希茨界 $L_T^1(W^{1,\infty})$（在一维情形下，这种做法无效，因为仍无法获得足够的衰减）。

4. 定理的证明 3.4

4.1. 线性化。 本节中，我们省略与质量-拉格朗日 an
框架。系统（3.2）也可以用以下变量重写：$(y, \pi, \delta\pi, u)$ 变量 as

$$\begin{cases} \partial_t y = 0, \\ \partial_t \delta\pi + \left(y\rho^2 c_+^2 + (1-y)\,\rho^2 c_-^2 - \left[\rho^2 c_w^2\right]\right)\partial_x u + \left(\rho_+^2 c_+^2 - \rho_-^2 c_-^2\right)\frac{\alpha_+\alpha_-}{\mu}\delta p = 0, \\ \partial_t \pi + \left[\rho^2 c_w^2\right](y, \pi)\,\partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

在平衡态附近对（4.1）进行线性化

$$(\bar{y}, 0, \bar{P}, 0) \tag{4.2}$$

我们得到

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{y} = 0, \\ \partial_t \delta\pi + \big(h_1 + H_1(\delta\pi, \widetilde{\pi}, \widetilde{y})\big)\partial_x u + \big(h_2 + H_2(\delta\pi, \widetilde{\pi}, \widetilde{y})\big)\delta\pi = 0, \\ \partial_t \widetilde{\pi} + \big(h_3 + H_3(\delta\pi, \widetilde{\pi}, \widetilde{y})\big)\partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \big(h_5 + H_5(\delta\pi, \widetilde{\pi}, \widetilde{y})\big)\partial_x \widetilde{\pi} + \big(h_6 + H_6(\delta\pi, \widetilde{\pi}, \widetilde{y})\big)\partial_x \delta\pi = 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

扰动未知量定义如下:

- 扰动质量分数 y 满足

$$\widetilde{y} := \frac{\alpha_+\rho_+}{\rho} - \frac{\bar{\alpha}_+\bar{\rho}_+}{\bar{\rho}} \tag{4.4}$$

- 扰动有效压力 $\widetilde{\pi}$ 为

$$\widetilde{\pi} := \pi - \bar{P}$$

- 对于 $i \in \overline{1,\ 5}$，函数 H_i 满足 $H_i(0,\ 0,\ 0) = 0$，且常数 $h_i > 0$ 为正。

4.2. 先验估计。

$$X^2(t) := \|(\delta\pi, \widetilde{\pi}, u)(t)\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 + \|\delta\pi\|_{L^2((0,t);H^s(\mathbb{R}))}^2 + \|(\widetilde{\pi}, u)\|_{L^2((0,t);\dot{H}^1(\mathbb{R})\cap\dot{H}^s(\mathbb{R}))}^2. \tag{4.5}$$

在下文中，我们假设

$$X(0) = \|(\delta\pi_0, \widetilde{\pi}_0, u_0)\|_{H^s(\mathbb{R})} \le \eta$$

并考虑时间 $T^* \in (0,\ \infty]$，其中

$$X(t) \le 2\eta \tag{4.6}$$

此外还假设

$$\|\widetilde{y}_0\|_{H^s} \le c$$

其中 c 取为足够小。我们有

$$\|\widetilde{y}\|_{L_T^\infty(H^s)} \le c. \tag{4.7}$$

4.2.1. 能量估计。 对于未知量（$\widetilde{y}$、$\delta\pi$、$\widetilde{\pi}$、u），我们有以下引理。

引理 4.1。 设 $s > 3/2$ 和 （$\delta\pi$、$\widetilde{\pi}$、u）是 （4.3）的一个光滑解，且满足 （4.6）*hol* *ds.*
对于所有时刻 $t > 0$,

$$\|(\widetilde{y}, \delta\pi, \widetilde{\pi}, u)\|_{H^s}^2 + c\|\delta\pi\|_{L_T^2(H^s)}^2 \le \|(\widetilde{y}_0, \delta\pi_0, \widetilde{\pi}_0, u_0)\|_{H^s}^2 + X^3(t).$$

证明。 对于 L^2 估计，我们将依赖与系统（3.2）相关的自然能量。系统 （3.2）具有一种满足以下条件的能量

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{|u|^2}{2}+y_{+,0}\frac{H_+\left(\rho_+/\bar{\rho}_+\right)}{\rho_+}+y_{-,0}\frac{H_-\left(\rho_-/\bar{\rho}_-\right)}{\rho_-}\right)+\int_{\mathbb{R}}\frac{\alpha_+\alpha_-}{\mu\rho}(p_+-p_-)^2=0 \tag{4.8}$$

其中

$$H_\pm\left(s/\bar{\rho}_\pm\right)=H_\pm\left(s\right)-H\left(\bar{\rho}_\pm\right)-H'\left(\bar{\rho}_\pm\right)\left(s-\bar{\rho}_\pm\right),$$

and

$$H_\pm\left(s\right)=s\int_0^s\frac{p_\pm\left(\tau\right)}{\tau^2}\mathrm{d}\tau$$

严格凸，这是因为 $p_\pm$ 均为递增函数。特别地，在 $[0,T^*)$上，利用系统的能量 (4.8) 可对其进行控制

$$\|(\widetilde{\rho}_\pm,u)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\int_0^t\|\delta p\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\lesssim X^2\left(0\right)+cX^2\left(t\right)+X^3\left(t\right).$$

注意到

$$\alpha_+=\frac{\dfrac{\rho_-}{y_{-,0}}}{\dfrac{\rho_+}{y_{+,0}}+\dfrac{\rho_-}{y_{-,0}}}$$

由此可恢复

$$\|(\widetilde{\alpha}_+,\widetilde{\rho}_\pm,u)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\int_0^t\|\delta p\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\lesssim X^2\left(0\right)+X^2\left(t\right)+X^3\left(t\right).$$

这意味着

$$\|(\widetilde{\pi},\delta\pi,u)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\int_0^t\|\delta\pi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\lesssim X^2\left(0\right)+c^2\left(t\right)+X^3\left(t\right). \tag{4.9}$$

对于 H^s 估计，我们定义

$$\Lambda^\sigma=(-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}=\mathcal{F}^{-1}\Big(|\xi|^\sigma\mathcal{F}(\cdot)\Big),\quad \sigma\in\mathbb{R}.$$

将 Λ^s 应用于（3.2），进行标准能量估计并利用该系统的对称化性质，再结合标准的交换子估计和乘积估计，即可得到所需结果。 □

4.2.2. 关于 L^2 的次强制估计。 在引理 4.1 中，我们恢复了未知量 $\delta\pi$ 的耗散效应。现在，我们旨在为未知量 π 和 u恢复耗散。为此，我们采用次强制估计。

引理 4.2. 设 $s>3/2$ 和 $(\delta\pi,\ \widetilde{\pi},\ u)$ 是满足条件 (4.3) 的光滑解，且 (4.6) 成立。对于 $t>0$, 有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\delta\pi\partial_x u+\int_0^t\frac{h_1}{2}\|\partial_x u\|^2_{L^2}-\int_0^t\frac{h_2^2}{2h_1}\|\delta\pi\|^2_{L^2}\lesssim\|(\delta\pi_0,\partial_x u_0)\|^2_{L^2}\\+\int_0^t\int_{\mathbb{R}}h_5\partial_x\widetilde{\pi}\partial_x\delta\pi+X^3(t)\end{aligned} \tag{4.10}$$

and

$$\int_{\mathbb{R}} \Lambda^{s-1}\delta\pi\Lambda^{s-1}\partial_x u + \frac{h_1}{2}\int_0^t \|u\|_{\dot{H}^s}^2 - \frac{h_2^2}{2h_1}\int_0^t \|\delta\pi\|_{\dot{H}^{s-1}}^2 \lesssim \|(\delta\pi_0, u_0)\|_{H^s}^2 \tag{4.11}$$
$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h_5\Lambda^{s-1}\partial_x\widetilde{\pi}\Lambda^{s-1}\partial_x\delta\pi$$
$$+ X^3(t)$$

证明。有

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \delta\pi\partial_x u + h_1\|\partial_x u\|_{L^2}^2 - h_6\|\partial_x\delta\pi\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} H_6(\partial_x\delta\pi)^2 - \int_{\mathbb{R}} H_1(\partial_x u)^2$$
$$- \int_{\mathbb{R}} (h_2 + H_2)\delta\pi\partial_x u$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} (h_5 + H_5)\partial_x\widetilde{\pi}\partial_x\delta\pi.$$

运用柯西-施瓦茨不等式、杨不等式并对时间积分，可得式4.10的左端。非线性项可利用 Sobolev 空间中的标准乘积估计进行处理。式4.11的证明是直接推广。□

接下来，我们对 π 展示类似的耗散估计。

引理 4.3。 设 $s > 3/2$ 和 $(\delta\pi,\ \widetilde{\pi},\ u)$ 是方程 (4.3) 的光滑解，且满足 (4.6)。对于 $t > 0$，有

$$\int_{\mathbb{R}} u\partial_x\widetilde{\pi} + \frac{h_5}{2}\int_0^t \|\partial_x\widetilde{\pi}\|_{L^2}^2 - h_3\int_0^t \|\partial_x u\|_{L^2}^2 - \frac{h_6^2}{2h_5}\int_0^t \|\partial_x\delta\pi\|_{L^2}^2 \lesssim \|(u_0, \partial_x\widetilde{\pi}_0)\|_{L^2}^2 + X^3(t)$$

and, for $s > d/2 + 1$,

$$\int_{\mathbb{R}} \Lambda^{s-1}u\Lambda^{s-1}\partial_x\widetilde{\pi} + \frac{h_5}{2}\int_0^t \|\widetilde{\pi}\|_{\dot{H}^s} - h_3\int_0^t \|u\|_{\dot{H}^s}^2 - \frac{h_6^2}{2h_5}\int_0^t \|\delta\pi\|_{\dot{H}^s}^2 \lesssim \|(u_0, \widetilde{\pi}_0)\|_{H^s}^2$$
$$+ X^3(t)$$

证明。 证明与引理4.2的证明类似。 □

4.2.3. 汇总估计。 设 $\varepsilon > 0$。考虑李雅普诺夫泛函

$$\mathcal{L}(t) = \|(\widetilde{y}, \widetilde{\pi}, \delta\pi, u)\|_{H^s}^2 + \varepsilon\int_{\mathbb{R}} \delta\pi\partial_x u + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\int_{\mathbb{R}} u\partial_x\widetilde{\pi} \tag{4.12}$$
$$+\varepsilon\int_{\mathbb{R}} \Lambda^{s-1}\delta\pi\Lambda^{s-1}\partial_x u + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\int_{\mathbb{R}} \Lambda^{s-1}u\Lambda^{s-1}\partial_x\widetilde{\pi}. \tag{4.13}$$

首先，注意到当 ε 充分小时，有

$$\mathcal{L}(t) \sim \|(\widetilde{y}, \widetilde{\pi}, \delta\pi, u)\|_{H^s}^2. \tag{4.14}$$

然后，利用

$$\varepsilon h_5|\partial_x\widetilde{\pi}||\partial_x\delta\pi| \le \frac{\varepsilon^{3/2}h_5}{4}|\partial_x\widetilde{\pi}|^2 + \varepsilon^{1/2}h_5|\partial_x\delta\pi|^2$$

对右端项（4.10）进行处理，并结合引理 4.1、引理4.2、引理 4.3，当ε 充分小时，我们得到

$$X(t)^2 \lesssim X^3(t) + X_0^2. \tag{4.15}$$

通过采用标准的自举论证，将我们的局部时间结果推广，可得满足所需性质的全局时间解存在。唯一性证明从略，因为这是经典结论。□

致谢。 本研究部分获得法国国家科学研究中心的 PEPS JCJC 项目资助。T. Crin-Barat 获得项目 ANR-24-CE40-3260 – 双曲方程、近似与动力学(HEAD) 的支持。

附录 A. 定理的高维版本 3.4

本节将说明，为什么无法通过直接复现第 3.4 节中提出的方法，得到定理的高维类比 4。

对于 $d \geq 2$，与（2.14）线性化相关的线性系统的简化版本为

$$\begin{cases} \partial_t \delta\pi + \operatorname{div} u + \delta\pi = 0, \\ \partial_t \pi + \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + \nabla\pi + \nabla\delta\pi = 0. \end{cases} \tag{A.1}$$

得益于系统的对称性，标准的 H^1 能量估计给出

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\delta\pi, \pi, u)\|_{H^1}^2 + \|\delta\pi\|_{H^1}^2 = 0. \tag{A.2}$$

为了获得 u 和 $\delta\pi$的耗散，我们进行如下亚强制性分析。我们计算

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} \delta\pi \cdot \operatorname{div} u + \|\operatorname{div} u\|_{L^2}^2 - \|\nabla\delta\pi\|_{L^2}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^d} \delta\pi \cdot \operatorname{div} u + \int_{\mathbb{R}^d} \nabla\delta\pi \cdot \nabla\pi \tag{A.3}$$

and

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} u\nabla\pi + \|\nabla\pi\|_{L^2}^2 - \|\operatorname{div} u\|_{L^2}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^d} -\nabla\delta\pi \cdot \nabla\pi. \tag{A.4}$$

定义。

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\delta\pi, \pi, u)\|_{H^1}^2 + \varepsilon\int_{\mathbb{R}^d} \delta\pi \cdot \operatorname{div} u + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} u\nabla\pi.$$

当 ε 足够小时，我们有 $\mathcal{L} \sim \|(\delta\pi,\ \pi,\ u)\|_{H^1}^2$。利用柯西-施瓦茨不等式和杨不等式可得

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L} + \|\delta\pi\|_{H^1}^2 + \varepsilon\|\operatorname{div} u\|_{L^2}^2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\|\nabla\pi\|_{L^2}^2 \lesssim 0. \tag{A.5}$$

我们注意到，我们只能对 $\operatorname{div} u$ 得到耗散，而无法得到速度的完整梯度。这一结构性限制源于 Shizuta–Kawashima（SK）条件在维数 $d \geq 2$ 下不成立。该条件失效又与压力未知量为标量有关；与之相对，速度场 u 是向量值的，因此耗散机制无法传递到所有速度分量。

附录 B. 完整系统

这里，我们给出一个完整的、非等熵、多维 Baer-Nunziato 系统的对称化过程，该系统在 [16] 中写作

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_\pm + u \cdot \nabla\alpha_\pm = \frac{\alpha_\pm\alpha_-}{\mu}\left(p_+ - p_- - \beta\right), \\ \partial_t\left(\alpha_\pm\rho_\pm\right) + \operatorname{div}\left(\alpha_\pm\rho_\pm u\right) = \pm\mathcal{C}, \\ \partial_t\left(\rho u\right) + \operatorname{div}\left(\rho u \otimes u\right) + \nabla\left(\alpha_+ p_+ + \alpha_- p_-\right) = 0. \\ \alpha_+\rho_+ T_+\left(\partial_t\eta_+ + u \cdot \nabla\eta_+\right) = \frac{\alpha_+\alpha_-}{\mu}\left(p_+ - p_- - \beta\right)^2 - \left(T_+ - T_-\right)\mathcal{H}, \\ \alpha_-\rho_- T_-\left(\partial_t\eta_- + u \cdot \nabla\eta_-\right) = \left(T_+ - T_-\right)\mathcal{H} - \left[\left(h_+ - h_-\right) - \frac{1}{\rho_+}\left(p_+ - p_- - \beta\right)\right] C, \end{cases} \tag{B.1}$$

其中额外的未知量为

- 温度： T_+, T_-,
- 内能： e_+, e_-,

- 比熵： $\eta_+, \eta_-,$
- 焓： $h_+,\ h_-,$
- 函数 β 表示颗粒内应力或构型压力：

$$\beta\left(\alpha_+, \rho_+\right) = \alpha_+\rho_+\frac{dB}{d\alpha}\left(\alpha_+\right)$$

其中 B 是一个严格递增且严格凸的函数。从物理观点来看，它既重要（[16]），又在某种程度上便于对相关系统进行数学研究（[7]）

- 传热系数： $\mathcal{H}$。
- 传质系数： $\mathcal{C}$

我们观察到，熵方程在零阶项方面具有有利的结构：奇异项与 $\left(\delta\pi\right)^2_{\mu}$ 成正比。

系统（B.1）可写成如下形式

$$\begin{cases} D_t y = 0, \\ D_t\delta\pi + \left(\rho c^2 - \rho c_w^2 + f_{11}\delta\pi\right)\operatorname{div} u + \alpha_+\alpha_-\left(\frac{\rho_+c_+^2}{\alpha_+} + \frac{\rho_-c_-^2}{\alpha_-} + \alpha_+\rho_+B''\left(\alpha_+\right) + f_{12}\delta\pi\right)\frac{\delta\pi}{\mu} = 0, \\ D_t\pi + \left(\rho c_w^2 + f_{21}\delta\pi\right)\operatorname{div} u + f_{22}\frac{\left(\delta\pi\right)^2}{\mu} = 0, \\ D_t u + \frac{1}{\rho}\nabla\pi + \frac{1}{\rho}\nabla(\delta\pi) = 0, \\ \alpha_+\rho_+T_+D_t\eta_+ = \frac{\alpha_+\alpha_-}{\mu}\left(p_+ - p_- - \beta\right)^2 - \left(T_+ - T_-\right)\mathcal{H}, \\ \alpha_-\rho_-T_-D_t\eta_- = \left(T_+ - T_-\right)\mathcal{H} - \left[\left(h_+ - h_-\right) - \frac{1}{\rho_+}\left(p_+ - p_- - \beta\right)\right]C, \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} \delta\pi &= \frac{\rho_+c_+^2 - \rho_-c_-^2 - \beta}{\frac{\rho_+c_+^2}{\alpha_+} + \frac{\rho_-c_-^2}{\alpha_-} + \alpha_+\rho_+B''\left(\alpha_+\right)}\left(p_+ - p_- - \beta\right), \\ \rho c^2 &= \alpha_+\rho_+c_+^2 + \alpha_-\rho_-c_-^2, \\ \rho c_w^2 &= \rho c^2 - \frac{\left(\rho_+c_+^2 - \rho_-c_-^2 - \beta\right)^2}{\frac{\rho_+c_+^2}{\alpha_+} + \frac{\rho_-c_-^2}{\alpha_-} + \alpha_+\rho_+B''\left(\alpha_+\right)}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \pi &= p - \frac{\rho_+c_+^2 - \rho_-c_-^2 - \beta}{\frac{\rho_+c_+^2}{\alpha_+} + \frac{\rho_-c_-^2}{\alpha_-} + \alpha_+\rho_+B''\left(\alpha_+\right)}\left(p_+ - p_- - \beta\right) \\ &= \frac{\frac{\rho_-c_-^2}{\alpha_-} + \alpha_+^2\rho_+B''\left(\alpha_+\right) + \beta}{\frac{\rho_+c_+^2}{\alpha_+} + \frac{\rho_-c_-^2}{\alpha_-} + \alpha_+\rho_+B''\left(\alpha_+\right)}p_+ + \frac{\frac{\rho_+c_+^2}{\alpha_+} + \alpha_-\alpha_+\rho_+B''\left(\alpha_+\right) + \beta}{\frac{\rho_+c_+^2}{\alpha_+} + \frac{\rho_-c_-^2}{\alpha_-} + \alpha_+\rho_+B''\left(\alpha_+\right)}p_- \\ &\quad + \frac{\rho_+c_+^2 - \rho_-c_-^2 - \beta}{\frac{\rho_+c_+^2}{\alpha_+} + \frac{\rho_-c_-^2}{\alpha_-} + \alpha_+\rho_+B''\left(\alpha_+\right)}\beta. \end{aligned}$$

在此形式下，可以针对系统 B.1建立一个类似于定理 （3.1）的局部时间适定性结果。

参考文献

[1] M. Baer 和 J. Nunziato. 反应性颗粒材料中爆燃转爆轰转变（DDT）的两相混合理论。《国际多相流》，12(6):861–889，1986年。

[2] C. Burtea、T. Crin-Barat 和 J. Tan. 阻尼单速度 Baer-Nunziato 模型趋于 Kapila 模型的弛豫极限。《应用科学中的数学模型与方法》，2023年。[3] F. Coquel、J.-M. Hérard、K. Saleh 和 N. Seguin. 双相流双速度双压力模型的两个性质。《数学科学通讯》，2014年。[4] P. Cordesse 和 M. Massot. 非守恒项非线性偏微分方程组的熵补充守恒律：利用计算机代数对复杂流体流动进行建模与分析。《arXiv 预印本》arXiv:1911.02313，2019年。[5] D. A. Drew 和 S. L. Passman. 多组分流体理论，第135卷。施普林格科学与商业媒体，2006年。[6] P. Embid 和 M. Baer. 两相连续介质混合物理论的数学分析。《连续介质力学与热力学》，4(4):279–312，1992年。[7] S. Evje、W. Wang 和 H. Wen. 非守恒可压缩双流体模型强解的整体适定性与衰减率。《理性力学与分析档案》，221，1285-1316，2016年。[8] A. Forestier 和 S. Gavrilyuk. 具有部分凸守恒律的非守恒拟线性系统的双曲性判据。《应用科学中的数学方法》，34(17):2148–2158，2011年。[9] T. Gallouët、J.-M. Hérard 和 N. Seguin. 使用双流体双压力方法对两相流进行数值建模。《应用科学中的数学模型与方法》，14(05):663–700，2004年。[10] S. Gavrilyuk. 基于哈密顿原理的多相流建模。载于《固体与流体力学中的变分模型与方法》，第163–210页。Springer，2011年。[11] V. Giovangigli 和 W.-A. Yong. 体黏度与内能弛豫：对称化与 Chapman-Enskog 展开。《动力学及相关模型》，8(1):79–116，2015年。[12] V. Giovangigli 和 W.-A. Yong. 体黏度与内能弛豫：误差估计。《非线性分析：现实世界应用》，8:79–116，2018年。[13] J.-M. Hérard 和 O. Hurisse. 一种计算标准双流体模型的简单方法。《国际计算流体动力学杂志》，19(7):475–482，2005年。[14] J.-M. Hérard、K. Saleh 和 N. Seguin. 双曲型多相流模型的一些数学性质。Hal 预印本：01921027v1，2018年。[15] M. Ishii 和 T. Hibiki. 两相流的热流体动力学。施普林格科学与商业媒体，2010年。[16] A. Kapila、R. Menikoff、J. Bdzil、S. Son 和 D. S. Stewart. 颗粒材料中爆燃转爆轰转变的两相建模：约化方程。《流体物理学》，13(10):3002–3024，2001年。[17] P. Qu 和 Y. Wang. 违反 Kawashima 条件的部分耗散双曲系统的整体经典解。《纯粹与应用数学杂志》，109:93–146，2018年。[18] K. Saleh 和 N. Seguin. 斜压多相流模型的一些数学性质。《ESAIM：会议录与综述》，69:70–78，2020年。[19] R. Saurel 和 R. Abgrall. 一种用于可压缩多流体与多相流的多相 Godunov 方法。《计算物理学杂志》，150(2):425–467，1999年。[20] R. Saurel、S. Gavrilyuk 和 F. Renaud. 一种具有内自由度的多相模型：在激波-气泡相互作用中的应用。《流体力学杂志》，495:283，2003年。[21] S. Shizuta 和 S. Kawashima. 双曲-抛物型方程组及其在离散玻尔兹曼方程中的应用。《北海道数学杂志》，14，249-275，1985年。

[22] C. Truesdell。《扩散热力学》。载于理性热力学，第219–236页。Springer，1984年。

(C. Burtea) 巴黎西岱大学、索邦大学、法国国家科学研究中心、IMJ-PRG，法国巴黎 F-75013电子邮件地址：cosmin.burtea@imj-prg.fr (T. Crin-Barat) 保罗·萨巴捷大学、图卢兹数学研究所，法国图卢兹 Cedex 9，Route de Narbonne 118，31062电子邮件地址：timothee.crin-barat@math.univ-toulouse.fr (P. Gonin--Joubert) 里昂第一大学、Camille Jordan研究所，法国维勒班，Av. Claude Bernard 21，69100电子邮件地址：goninjoubert@math.univ-lyon1.fr