恒定电场中 Oldroyd-B 液滴的大变形

Sarika Shivaji Bangar[1] 和 Gaurav Tomar[1], *[1]
机械工程系，印度科学研究所，班加罗尔-*560012*，
印度（日期：2026年2月3日）

arXiv:2602.01891v1 [physics.flu-dyn] 2 Feb 2026

摘要

黏弹性液滴在电场作用下的变形，对于微流控、喷墨打印以及复杂流体的电流体动力学操控等应用至关重要。本研究利用开源求解器Basilisk进行数值模拟，探讨了Oldroyd-B液滴在均匀电场中的动力学。从（σ_r，ϵ_r）相空间的六个区域（PR_A^+、PR_B^+、PR_A^-、PR_B^-、OB^+和OB^-）中，选取了电导率比（σ_r）与介电常数比（ϵ_r）的代表性组合。在一阶与二阶变形系数同号的区域（PR_A^-、PR_B^-、OB^+），偏离牛顿行为的程度可忽略不计。在 PR_A^+ 中，当电毛细数超过临界值时，液滴形成多叶形状；弹性会减小变形，并使临界 Ca_E 随德博拉数（De）增大。在PR_B^+ 中，液滴在临界 Ca_E以上形成具有锥形端部的形状；而在该阈值以下，稳态变形随 De 减小，临界 Ca_E 则呈非单调变化。在高Ca_E 和 De时，瞬态变形在达到稳态之前会出现极大值和极小值，并偶尔在球状与尖点形状之间振荡。在 OB^-中，液滴变形为扁旋转形状，并在临界 Ca_E以上发生破裂；变形幅度随 De增大，而临界 Ca_E随 De减小；在低 Ca_E 和高 De时，可观察到凹陷和位置振荡。这些结果阐明了黏弹性-电相互作用，并为实际应用中液滴行为的控制提供了指导。

一、引言

理解电场作用下悬浮于环境流体中的液滴的动力学与变形，对于众多工业应用至关重要，包括喷墨打印 [1, 2], 油的破乳 [3–5], 电喷雾与雾化[6, 7], 静电喷漆 [8], 电推进 [9, 10], 以及微流控系统中液滴的操控 [11–13]。此外，研究这些现象还能为降雨带电、雷暴期间的液滴破裂以及大气电荷生成等自然过程提供宝贵的见解 [14–16]。

当流体液滴浸入介电介质并受到电场作用时，在较低场强下通常会变形为长椭球体，而在高场强下则会破裂；这一现象由 O'Konski 和 Thacher Jr [17] 以及 Taylor [18]证实。Allan 和 Mason [19] 通过平衡界面处的法向电应力与界面张力，解释了导电液滴的长椭球变形。O'Konski 和 Thacher Jr [17]则独立地从能量考量出发推导出这一结果。然而，Allan 和 Mason[19] 还观察到，即使是弱导电液滴也会变形成扁旋转形状。为

* 通讯作者： gtom@iisc.ac.in

解释这一现象，O’Konski 和 Harris [20]提出流体电导率也是一个影响因素，并基于能量考量建立了液滴变形（以偏心率表征）的理论模型，但该模型忽略了界面电荷分离和诱导流动所涉及的能量。Taylor [21]阐明了切向电应力的作用，指出它会引发内外环流，并根据电导率比和介电常数比决定液滴变形为长球形还是扁椭球形。他提出的漏电介质模型考虑了有限电导率，同时假设电荷能够快速弛豫，从而使电场与流场解耦。该模型揭示了变形对材料物性比的强烈依赖性。Melcher 和 Taylor [22] 进一步在这一框架下分析了界面剪切应力。Torza 等人 [23] 将该模型推广至交变电场，发现理论与实验在定性上吻合，但实验测得的变形幅度更大。为解决这一问题，Ajayi [24]引入了高阶修正，虽然提高了预测的变形幅度，却未能完全消除差异。Saville [25]对漏电介质模型作了全面综述。

漏电介质模型（LDM）已被广泛用于研究电场中液滴的电流体动力学行为。Ha 和 Yang [26] 分析了表面活性剂存在时的稳态变形与稳定性，结果表明，表面活性剂会增强变形，且对长球形的影响强于对扁旋转形状的影响。基于 LDM，Bentenitis 和 Krause [27] 开发了扩展漏介电模型（ELDM），以描述强电场下的连续变形和滞后，并指出电导率比和黏度比主要决定平行变形，而电导率比和介电常数比则控制垂直变形。Zabarankin [28]通过将液滴近似为椭球体，建立了预测中等程度变形的解析模型。同样，Nganguia等人 [29]采用弱电场下的二阶小变形理论以及针对较大变形的椭球模型，研究了含表面活性剂液滴的变形。Deshmukh 和 Thaokar [30]研究了四极电场中的液滴，发现变形主要由四阶勒让德模主导，且由此产生的内部流动呈现复杂的环流结构和明显的变形–环流相位特征。液滴的电旋转行为也已在 LDM 框架下得到研究。He 等人 [31]利用三维模型研究了直流电场下的液滴旋转，确定表面电荷对流是关键机制，并将旋转阈值与刚性球体中奇特的 Quincke旋转联系起来。在此分析基础上，Yariv 和 Frankel [32] 采用二维模型研究了大电雷诺数渐近极限下的液滴电旋转。经典 Taylor–Melcher框架还被用于描述对称性破缺的电流体动力学不稳定性，例如 Quincke旋转、赤道射流，以及含表面活性剂液滴上的图案形成[33, 34]。此外，研究表明，表面电荷对流会显著影响液滴破裂模式[35]。

关于液滴的瞬态变形，Sozou [36] 首次尝试将局部加速度项（$\rho\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}$）纳入控制方程。Moriya 等人 [37] 采用准稳态近似，分析了弱电场下的时变变形，并假设液滴从球形过渡到椭球形的过程中存在拉伸流。随后，Esmaeeli 和 Sharifi [38]推导出弱电场下漏电介质液滴瞬态变形的闭式解，量化了法向和切向电应力在驱动流动与变形中的作用。在Taylor–Melcher框架下，Zhang 等人 [39] 建立了考虑有限电荷弛豫时间的瞬态变形模型，同时假设液滴在整个过程中始终保持椭球形。Lanauze 等人[40] 进一步将有限电荷弛豫和惯性均纳入模型，指出变形过冲由奥内佐格数决定，该数表示毛细扩散时间尺度与动量扩散时间尺度之比；而对于最终呈扁椭球形的液滴，其初始长球形变形是否出现，则由 Saville数决定，该数是电扩散时间尺度与黏性扩散时间尺度之比。Lanauze 等人 [41] 采用边界积分法研究了存在表面电荷对流和有限电荷弛豫的非线性瞬态电流体动力学，重点考察导致稳定扁椭球形状的条件。他们证明，较慢的电荷弛豫会因界面电荷积累延迟而引发瞬态长椭球到扁椭球转变；电荷向赤道对流则会减弱扁椭球变形。随后，Vlahovska [34] 将 Taylor 的漏电介质模型推广至瞬态液滴动力学。最近，Esmaeeli 和 Behjatian [42] 开展了有限雷诺数下的三维模拟，发现液滴变形以时间尺度,τ_{def}演变，峰值变形由毛细数（$Ca = \tau_{def}/\tau_{conv}$）决定，其中 τ_{def}为黏性毛细时间尺度， τ_{conv} 为对流时间尺度。长期行为取决于奥内佐格数（$Oh^2 = \tau_{def}/\tau_{diff}$；其中 τ_{diff}为黏性扩散时间尺度）：当 $Oh^2 > 1$时，液滴动力学类似于单调的质量-阻尼系统；当 $Oh^2 < 1$时，则呈现振荡的质量-弹簧-阻尼行为。尽管稳态变形与 Oh^2无关，但随着雷诺数增大（由于 $Oh^2 = Ca/Re_f$；$Re_f = \tau_{diff}/\tau_{conv}$），振荡瞬态会增强。

关于电场中液滴变形和破裂的实验研究也已开展。Nishiwaki 等人 [43]通过实验研究了液滴变形，并根据流体黏度、界面表面能和液滴半径，给出了延迟时间的经验关系。他们发现，该理论能够预测聚氧化丙烯和聚丙二醇液滴的平衡变形，但水滴的变形程度小于预测值。Vizika 和 Saville [44] 通过实验测定了液滴在稳态和振荡电场下的变形，结果表明，与 Torza 等人 [23]的研究相比，实验结果与漏电介质理论更加吻合。最近，Karp 等人 [45] 利用粒子图像测速和高速阴影法研究了液滴内部环流和界面动力学，发现稳态和瞬态变形幅度小于 0.1 时，实验结果与漏电介质模型吻合良好，并且

证明，对于变形幅度小于 0.1 的瞬态变形，实验结果同样如此。Brosseau 和 Vlahovska 的实验研究 [46] 表明，低黏度液滴（黏度比 < 0.1）在强直流电场作用下会发生赤道射流。沿界面的电剪切应力驱动表面流动并汇聚于赤道，在此处，界面扰动的放大导致液片从停滞线处喷出。

数值研究极大地推进了对牛顿液滴电流体动力学的理解，阐明了变形、稳定性和破裂机制。Miksis [47] 首次采用边界积分法计算静态介电液滴形状，发现当介电常数比高于某一临界值时，强电场下会形成钝角锥形端部；否则则形成长旋转椭球体。在此基础上，Sherwood [48]分析了爬行流中的漏电介质液滴，并预测了实验中观察到的破碎模式，例如尖端射流和液滴—细丝结构。他的研究结果将较高的介电常数比与尖端液滴联系起来，并指出较高的电导率会导致液滴分裂，不过分析仅限于长椭球变形。Feng 和 Scott [49]采用有限元伽辽金方法求解完整的电流体动力学问题，表明渐近理论低估了变形和流动。他们确定了一个临界电场，超过该电场后便不存在稳定形状，并发现变形行为强烈依赖于电导率比和黏度比。长椭球形液滴主要受静电应力支配，而扁旋转形状则需要流体动力应力才能保持稳定。他们的非线性模型消解了与实验结果之间的差异。Feng [50] 随后纳入电荷对流效应，表明该效应会削弱流体动力流动，从而减小扁椭球变形、增强长椭球变形。沿用 Sherwood 的框架，Lac 和 Homsy [51] 研究了斯托克斯流下液滴的稳定性和破裂，涵盖了广泛的电导率—介电常数比和黏度差异，也包括扁椭球模式。Dubash 和 Mestel [52] 分析了黏性绝缘介质中的无黏导电液滴，捕捉到低电场下的稳态变形以及临界电场强度下的破裂。Karyappa 等 [53] 研究了黏度对介电介质中理想导电液滴变形和破裂的影响，确定了破裂前的三种轴对称形状（ASPB）模式（叶状、尖端和非尖端），这些模式会转变为破裂时的非轴对称形状（NSAB）模式（带电解体、规则射流、开放射流）。最近，Wagoner 等 [54] 模拟了高导电性黏性介质中弱导电液滴的赤道射流，证明只有同时考虑表面电荷对流和扩散时才会出现这种不稳定性。Wang等 [55] 进一步利用格子玻尔兹曼框架，捕捉到强直流电场和显著电导率差异下的指状赤道流动区域。

研究人员提出了多种计算方法来求解多相电流体动力学流动。Zhang 和 Kwok [56]提出了一种用于液滴二维电流体动力学的多组分格子玻尔兹曼方法（LBM）。Tomar 等人 [57]采用耦合的水平集方法和流体体积法，研究介电质-介电质和导电介质-导电介质

流体，并提出了一种加权调和平均插值格式，用于物性平滑。Hua 等人 [58]提出了一种结合多种电场模型（理想电介质、漏电介质、恒定表面电荷）的锋面追踪/流体体积法，用于预测粘性液滴的变形和运动。Paknemat 等人 [59]采用基于有限差分的虚拟流体法与水平集方法，对理想电介质、理想导体和漏电介质系统进行了数值研究，模拟了尖端射流和多种破碎模式。Nganguia等人 [60]开发了浸入界面法，用于求解电场中的液滴动力学。Das 和 Saintillan [61] 开发了用于完整漏电介质模型的三维边界元法。他们还考虑了表面电荷对流的影响，并研究了导致昆克旋转的对称性破缺状态。Liu等人 [62] 开发了一种用于电流体动力学流动的数值方法，采用格子玻尔兹曼方法求解耦合的Allen-Cahn方程、泊松方程和纳维-斯托克斯方程。Wang 等人 [55] 通过将Allen-Cahn型多相模型与另外两个LB方程耦合，构建了一个格子玻尔兹曼框架，以求解电场泊松方程和表面电荷守恒方程。

自然过程和工业过程中遇到的许多流体都属于非牛顿流体；由于含有大分子或悬浮微结构，它们表现出复杂的流变行为。例子包括生物流体、聚合物溶液，以及用于聚合物加工、微流体和喷墨打印的复杂混合物。这些流体兼具黏性和弹性响应，因而会产生法向应力差、应力松弛和应变硬化等非线性现象；与牛顿流体相比，这些现象会显著影响界面动力学。关于剪切流和拉伸流动中黏弹性液滴变形与破裂的研究表明，弹性可以延缓破裂、增强形状恢复能力，并改变变形的临界毛细数。Ramaswamy 和 Leal [63] 研究了拉伸流动中 FENE-CR 液滴的变形，指出液滴形状反映了两种效应之间的平衡：沿对称轴方向的粘弹性拉应力会将界面向内拉并抑制尖端变形，而粘弹性对黏性应力和压力应力的影响则会促进伸长。在高可伸展性（$L^2 = 600$）下，拉应力占主导，导致变形减小，尖端曲率也低于牛顿情形。在较低可伸展性（$L^2 = 144$）下，黏弹性效应会增强变形并增大尖端曲率。Hooper 等人 [64] 表明，在稳态拉伸流动中，黏弹性液滴的伸长程度低于牛顿液滴，但储存的弹性应力会在松弛阶段引发快速回缩。类似地，Aggarwal 和 Sarkar [65]研究了剪切流中的 Oldroyd-B 液滴，发现黏弹性会在低毛细数下减小变形，而在较高毛细数下则呈现非单调变化趋势。在瞬态过程中，液滴会出现变形过冲，且破裂的临界毛细数会随德博拉数增大。尽管黏弹性流体十分常见，对其电流体动力学的研究却相对较少。Ha 和

Yang [66] 通过将流体建模为二阶流体，研究了黏弹性对电场中液滴变形和稳定性的影响。在此基础上，Ha 和 Yang [67]分析了牛顿和非牛顿导电液滴的变形与破裂，结果表明，无论是黏度剪切无关的弹性液滴，还是黏度随剪切率变化的黏弹性液滴，其变形都会减小、稳定性都会增强。他们进一步发现，连续相中的弹性会在低黏度比下稳定液滴，但在较高黏度比下则会促使液滴失稳。最近，Lima 和 d'Avila [68] 通过数值模拟研究了 Giesekus 液滴的电流体动力变形，结果表明，聚合物松弛时间增加会增强弹性阻力，从而抑制变形；与此同时，剪切变稀效应会降低液滴黏度。Zhao 等人 [69] 研究了剪切流中黏弹性液滴的电流体动力变形，并报告称，黏弹性会同时减小液滴变形和旋转运动，不过，与电流体动力学效应相比，其影响仍处于次要地位。Das 等人 [70] 推导了小德博拉数极限下电场中 Oldroyd-B 液滴变形的近似表达式，并进行了数值模拟，以研究其在较高德博拉数下的行为。

目前对黏弹性液滴电流体动力学的深入理解仍然有限。在 Lac 和 Homsy [51] 关于牛顿体系的研究基础上，本研究采用 Oldroyd-B模型，通过数值方法考察均匀电场中黏弹性液滴的大变形及破裂行为。Oldroyd-B本构形式描述的是黏度恒定的黏弹性流体，通过松弛动力学捕捉弹性效应，但假设聚合物具有无限可伸展性。该本构形式为评估弹性对电流体动力变形的影响提供了基准。问题表述以及控制方程和边界条件见§II。数值方法和网格无关性研究见§III。$(\sigma_r,\ \epsilon_r)$平面中的相图，以及本研究所选用的电导率比和介电常数比组合见§IV，随后在§V中给出结果与讨论。

II. 问题表述

我们考虑一个半径为 R 的黏弹性液滴，该液滴悬浮于牛顿流体中，并置于均匀的恒定电场 $\boldsymbol{E}_\infty$ 下。下标 i 和 e 分别表示液滴和周围介质。流体性质定义如下：密度 ρ、黏度 μ、介电常数 ϵ 和电导率 σ。环境相遵循牛顿本构定律，而液滴相采用 Oldroyd-B 本构关系进行建模，以考虑黏弹性效应。液滴的黏弹性响应由松弛时间 λ_i、溶剂黏度 μ_{i_s} 和聚合物黏度 μ_{i_p} 表征。轴对称数值——

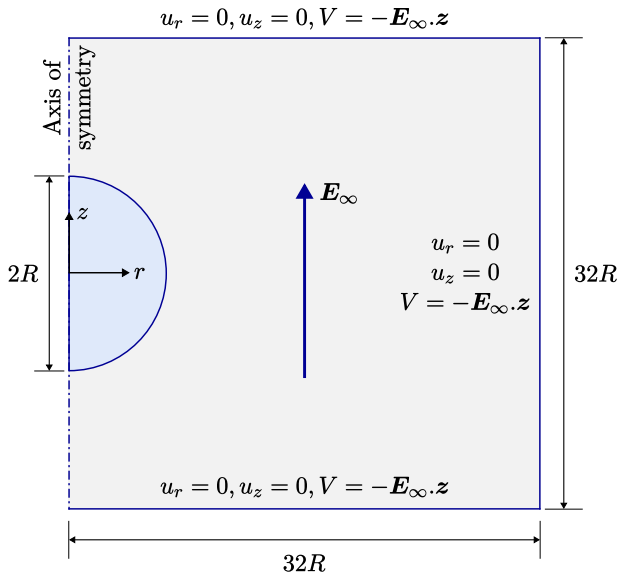


图1. 问题设置示意图：半径为 R 的 Oldroyd-B 液滴置于外加电场 $\boldsymbol{E}_\infty$中，该电场沿示意图所标示的对称轴方向。计算域尺寸选为 $32R \times 32R$，以尽量减小边界效应。

值模拟采用开源求解器 Basilisk（[71]）。构型示意图见 图 1。

A. 控制方程

流场的控制方程包括不可压缩流体的连续性方程和动量平衡方程,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = 0, \tag{1}$$

$$\rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\boldsymbol{\nabla} p + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{F}, \tag{2}$$

其中， $\boldsymbol{u}$ 为速度矢量， p 为压力， $\boldsymbol{\tau}$ 为应力张量， $\boldsymbol{F}$ 表示外力体积力。

液滴相采用 Oldroyd-B 本构关系。总应力由溶剂贡献和聚合物贡献之和组成:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_s + \boldsymbol{\tau}_p, \tag{3}$$

其中溶剂应力为 $\boldsymbol{\tau}_s = 2\mu_s \boldsymbol{D}$，其中 $\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla u} + (\boldsymbol{\nabla u})^T\right)$ 是变形率张量。聚合物应力遵循本构方程,

$$\boldsymbol{\tau}_p + \lambda \left(\frac{\partial \boldsymbol{\tau}_p}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\tau}_p - \boldsymbol{\tau}_p \cdot \boldsymbol{\nabla u} - (\boldsymbol{\nabla u})^T \cdot \boldsymbol{\tau}_p \right) = \mu_p \left(\boldsymbol{\nabla u} + (\boldsymbol{\nabla u})^T \right),$$

其中 λ 是聚合物松弛时间，$\mu_p = \mu - \mu_s$ 是聚合物黏度。

在电场 $\boldsymbol{E}$ 作用下，外力由麦克斯韦应力张量的散度给出，

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}_E, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\tau}_E = \epsilon \left(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E} - \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E})\boldsymbol{I} \right), \tag{5}$$

其中 ϵ 为介质的介电常数。由于特征磁响应时间 $t_M = \mu_M \sigma L^2$（μ_M：磁导率，σ：电导率，L：特征长度）通常远小于电松弛时间 $t_E = \epsilon/\sigma$，因此忽略磁效应后，电场由高斯定律和法拉第定律支配：

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\epsilon \boldsymbol{E}) = q, \quad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0, \tag{6}$$

其中 q 为体电荷密度。电场可表示为电势 V 的标量梯度，$\boldsymbol{E} = -\nabla V$。因此，

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\epsilon \boldsymbol{\nabla} V) = -q. \tag{7}$$

电荷守恒表示为

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} = 0, \tag{8}$$

其中电流密度为

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} + q\boldsymbol{u}, \tag{9}$$

其中，第一项对应欧姆传导，第二项则源于自由电荷的对流。求解方程（7）–（8）可得到电势，进而可直接计算麦克斯韦应力和电体力。

B. 边界条件

计算域定义在以液滴为中心的（r，z）坐标系中。计算域的范围为 $-L/2 \le z \le L/2$ 和 $0 \le r \le L$（在本次数值模拟中，$L = 32R$）。在远场边界处施加无滑移条件，

$$u_r(r, -L/2) = u_z(r, -L/2) = 0, \tag{10a}$$

$$u_r(r, L/2) = u_z(r, L/2) = 0, \tag{10b}$$

$$u_r(L, z) = u_z(L, z) = 0. \tag{10c}$$

所施加的电场对应的电势分布为 $V = -E_\infty z$。因此，V 的边界条件为：

$$V(r, -L/2) = -E_\infty z\ , \tag{11a}$$

$$V(r, L/2) = -E_\infty z \ , \tag{11b}$$

$$V(L, z) = -E_\infty z \ . \tag{11c}$$

聚合物应力分量在外边界满足齐次诺伊曼边界条件，这只会引入局部误差，不会影响全局解[72]。沿着 $r = 0$施加对称条件：

$$u_r(0, z) = 0, \quad \left.\frac{\partial u_z}{\partial r}\right|_{(0,z)} = 0, \quad \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{(0,z)} = 0, \tag{12a}$$

以及聚合物应力，

$$\left.\frac{\partial \tau_{p_{rr}}}{\partial r}\right|_{(0,z)} = \left.\frac{\partial \tau_{p_{zz}}}{\partial r}\right|_{(0,z)} = \tau_{p_{rz}}(0, z) = \left.\frac{\partial \tau_{p_{\theta\theta}}}{\partial r}\right|_{(0,z)} = 0. \tag{13}$$

C. 无量纲参数

该系统采用 R 作为长度尺度，采用 E_∞ 作为电场尺度进行无量纲化。速度尺度由电应力和黏性应力的平衡得出，

$$U \sim \frac{\epsilon_e E_\infty^2 R}{\mu_e}. \tag{14}$$

相应地，应力和压力均以 $\mu_e U/R$为尺度，相当于 $\epsilon_e E_\infty^2$。控制该问题的无量纲群如下：

(i) 介电常数比，$\epsilon_r = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_e}$(ii) 电导率比，$\sigma_r = \frac{\sigma_i}{\sigma_e}$(iii) 密度比，$\rho_r = \frac{\rho_i}{\rho_e}$ (iv) 黏度比，$\mu_r = \frac{\mu_i}{\mu_e}$ (v) 流动雷诺数，$Re = \frac{\rho_e U R}{\mu_e}$

(vi) 电毛细数，$Ca_E = \frac{\epsilon_e E_\infty^2 R}{\gamma}$，表示电力与表面张力之比，其中表面张力是阻碍力，而电场产生的力是使液滴发生变形的力。

(vii) 德博拉数，$De = \frac{\lambda_i U}{R}$，是聚合物松弛时间与流动时间尺度之比。

(viii) 液滴相溶剂黏度与总黏度之比，$\beta_i = \frac{\mu_{i_s}}{\mu_i}$

III. 数值模拟

A. 数值方法

在我们的轴对称数值模拟中，我们在开源求解器Basilisk中采用几何流体体积（VOF）方法。Basilisk采用二阶精度的时间分裂投影格式，变量存储在单元中心。扩散项采用隐式处理，而对流项则使用二阶精度的Bell-Collela-Glaz（BCG）格式计算。电势的泊松方程和电荷守恒方程按照L´opez-Herrera等人 [73]所描述的数值方法求解。对于黏弹性应力演化，Basilisk采用Fattal和Kupferman [74]提出的对数构象张量表述，以确保高魏森伯格数下的数值稳定性。聚合物应力用对称正定张量表示， $\boldsymbol{A}$，其中，$\boldsymbol{\tau_p} = \frac{\mu_p}{\lambda}($ $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}$）。 $\boldsymbol{\Psi} = \log \boldsymbol{A}$ 的方程因此由下式给出，

—

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial t} + \underbrace{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\Psi}}_{\text{Advection}} = \underbrace{\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{B}}_{\text{Upper convection}} + \underbrace{\frac{1}{\lambda}(e^{-\boldsymbol{\Psi}} - \boldsymbol{I})}_{\text{Model term}}. \tag{15}$$

其中，$\boldsymbol{\Omega}$是反对称张量， $\boldsymbol{B}$ 是与 $\boldsymbol{A}$对易的对称张量。 $\boldsymbol{\Psi}$ 的方程采用时间分裂过程进行数值求解（L´opez-Herrera 等 [75]），其中 $\boldsymbol{\Psi}$的演化方程分裂为：

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial t} = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{B} \tag{16}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}.(\boldsymbol{u}\boldsymbol{\Psi}) = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \frac{1}{\lambda}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \tag{18}$$

上对流导数（方程 16）采用显式计算， $\boldsymbol{\Psi}$ （方程 17）的平流采用 BCG 格式处理，而Oldroyd-B流体的模型项（方程 18）在将 $\boldsymbol{\Psi}$ 转换为 $\boldsymbol{A}$后进行解析积分。

为验证模拟方法，我们模拟了悬浮在牛顿介质中的牛顿液滴（$\beta_i = 1, De = 0$），并使其置于均匀稳恒电场中，然后将变形结果与 Lac 和 Homsy [51]的结果进行比较。模拟过程中固定参数 $\mu_r = 1$, $\rho_r = 1$, $Re = 1$, $\beta_i = 1$, $De = 0$ 。考虑了两组（σ_r， ϵ_r），分别对应长椭球变形（σ_r， ϵ_r） =（10，1。37）和扁椭球变形（σ_r， ϵ_r） =（0。1，2）。针对每组（σ_r， ϵ_r），对不同的Ca_E 值进行了模拟。液滴变形采用 Taylor变形参数进行量化，

$$D = \frac{L - B}{L + B} \tag{19}$$

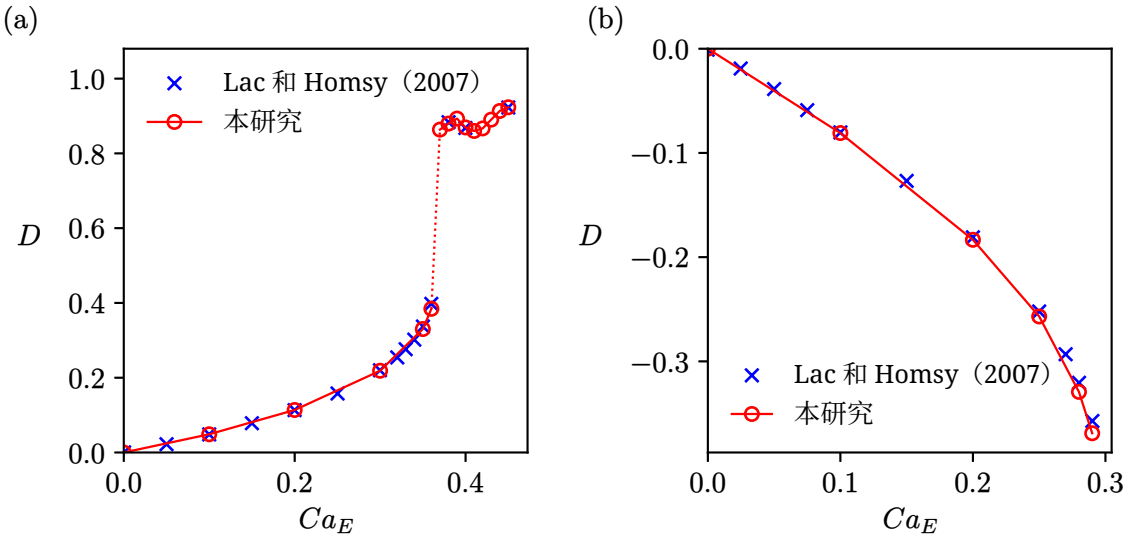


图 2. 液滴变形随电毛细数的变化，其中 $\mu_r = 1$, $\rho_r = 1$, $Re = 1$,$\beta_i = 1$, $De = 0$；(a) $\sigma_r = 10$, $\epsilon_r = 1.37$；(b) $\sigma_r = 0.1$, $\epsilon_r = 2$

其中， L 和 B 分别表示沿施加电场方向和垂直于施加电场方向的液滴尺寸。液滴变形 D 随 Ca_E 变化的结果见图 2，与 Lac 和 Homsy 的结果吻合良好 [51], ，从而验证了该数值方法的准确性和可靠性。

B. 计算域无关性与网格收敛性研究

如图 3所示，我们进行了计算域无关性测试，以确定合适的计算域尺寸。采用三种不同的计算域尺寸进行模拟，并比较液滴变形参数的时间演化。还展示了每种计算域尺寸下三个代表性时刻对应的界面形态。结果表明，计算域尺寸为 $32R$ 和 $64R$时，变形动力学几乎完全相同，差异可以忽略不计。基于这一观察，后续所有模拟均采用计算域尺寸 $32R$ 。

我们采用基于空隙率场梯度的自适应网格加密，并通过参数 $R/\Delta.x_{min}$ 对网格加密进行表征。 图 4 展示了网格收敛性研究的结果。 图 4（a）描绘了不同网格分辨率下变形参数的时间演化，结果显示 $R/\Delta x_{min} = 512$ 和$R/\Delta x_{min} = 256$的结果几乎重合（$< 1\%$ 的差异），表明结果与网格无关。 图 4（b）展示了对应于不同网格细化程度的稳态界面形状，进一步证实了收敛性。计算得到的变形参数及其对应的相对

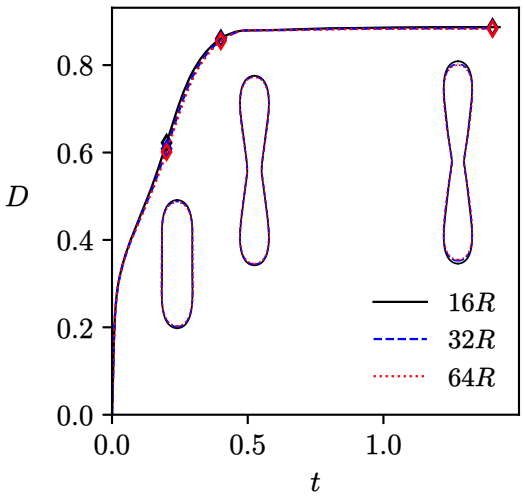


图 3. 不同模拟区域尺寸下的变形随时间变化。模拟参数为 $\mu_r = 1$, $\rho_r = 1$, $Re = 1$, $\beta_i = 1/9$, $\sigma_r = 10$, $\epsilon_r = 1.37$, $De = 5$, $Ca_E = 0.4$。 $R/\Delta x_{min}$ 取为 256。

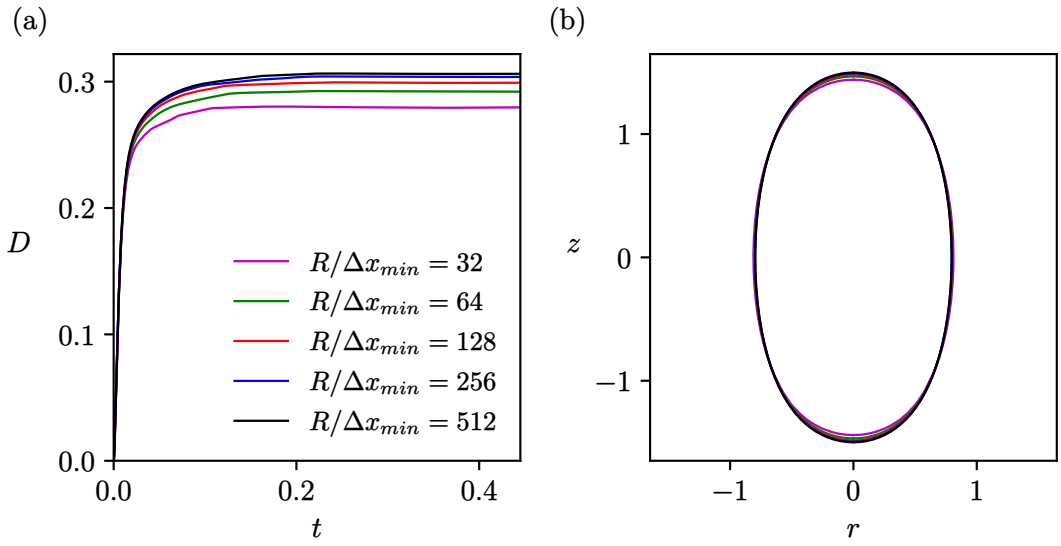


图 4. (a) 不同网格细化程度下变形参数随时间的变化。(b) 不同网格细化程度下液滴在稳态时变形后的界面。模拟参数：$Re = 1$, $Ca_E = 0.4$, $De = 5$, $\sigma_r = 10$, $\epsilon_r = 1.37$, $\beta = 1/9$

不同网格分辨率下的百分比误差汇总于 表 I。由于 $R/\Delta x_{min} = 256$ 的相对百分误差低于 1%，因此本研究后续所有数值模拟均采用该网格分辨率。

表 I. 不同网格细化下的变形参数和相对百分误差

$R/\Delta x_{min}$	D	$e_{rel} = \frac{\lvert D-D_{512}\rvert}{\lvert D_{512}\rvert} \times 100$
32	0.27962977	8.674150256
64	0.29198353	4.639466719
128	0.2991283	2.306016345
256	0.30390389	0.746329711
512	0.30618907	0

IV. 参数空间

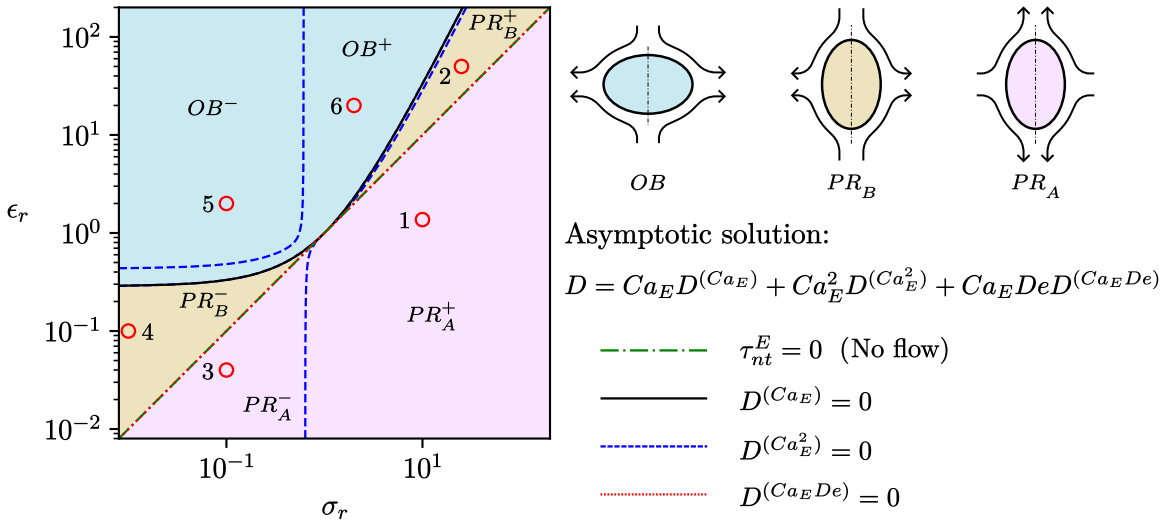


图 5. $\epsilon_r - \sigma_r$ 在双对数坐标下的相图，适用于 $\mu_r = 1$。 PR 和 OB 分别表示长椭球变形和扁椭球变形。对于长椭球变形，下标 A 和 B 分别对应从赤道流向两极和从两极流向赤道的流动方向。扁椭球变形总是伴随着液滴周围从两极流向赤道的流动。上标 $+$ 表示对$\mathcal{O}(Ca_E^2)$处变形的正贡献，而上标 $-$ 表示对 $\mathcal{O}(Ca_E^2)$处变形的负贡献。（σ_r， ϵ_r）对的研究取值在（σ_r， ϵ_r）双对数坐标相图中以红色圆圈标出。各阶变形系数的表达式见附录 A。

根据在小电毛细数（Ca_E）极限下有效的渐近分析

以及小德博拉数（De），发现变形强烈依赖于电导率比（σ_r）和介电常数比（ϵ_r） [70]。这种依赖关系体现在图5所示（σ_r， ϵ_r）平面上的双对数相图中。界面处电应力的切向分量按（$\epsilon_r - \sigma_r$）标度。因此，绿色点划线 $\epsilon_r = \sigma_r$对应于切向应力的消失。沿该线，法向电应力通过长椭球变形由表面张力平衡，而两相均保持静止。对于 $\epsilon_r < \sigma_r$，诱导流动由赤道指向两极；而对于 $\epsilon_r > \sigma_r$，流动方向反转，由两极流向赤道。由 $D^{(Ca_E)} = 0$定义的黑色实线分隔长椭球变形区与扁椭球变形区。扁椭球变形总是与极点至赤道流动相关联，而长椭球变形既可能对应于赤道至极点流动，也可能对应于极点至赤道流动。蓝色虚线标出二阶形变修正 $D^{(Ca_E^2)}$ 消失的轨迹。此处，上标“+”表示正的$\mathcal{O}$（Ca_E^2）修正，上标“–”表示负的修正。此外，由于 $D^{(Ca_E De)} \propto$ （$\epsilon_r - \sigma_r$）^{2}, ，对应于 $D^{(Ca_E De)} = 0$ 的红色点线与无流动条件 $\epsilon_r = \sigma_r$重合。

本研究针对 $\rho_r = 1$、 $\mu_r = 1$、 $Re = 1$和 $\beta_i = 1/9$条件下黏弹性液滴的电流体动力变形进行了研究。在（σ_r， ϵ_r）平面上，通过渐近分析确定了六个不同区域，分别记为 PR_A^+ 、 PR_B^+ 、 PR_A^- 、 PR_B^- 、 OB^-和 OB^+，并以此为基础选取参数对（σ_r， ϵ_r）。从每个区域中选取一个代表点，如下所列并在图5中标出：

(i) PR_A^+: $(\sigma_r, \epsilon_r) = (10, 1.37)$

(ii) PR_B^+: $(\sigma_r, \epsilon_r) = (25, 50)$

(iii) PR_A^-: $(\sigma_r, \epsilon_r) = (0.1, 0.04)$

(iv) PR_B^-: $(\sigma_r, \epsilon_r) = (0.01, 0.1)$

(v) OB^-: $(\sigma_r, \epsilon_r) = (0.1, 2)$

(vi) OB^+: $(\sigma_r, \epsilon_r) = (2, 20)$

针对每组所选参数，在 Ca_E 和De的一定范围内进行数值模拟。有量纲参数固定如下：液滴半径为 $R = 0.001$，环境密度为$\rho_e = 1000 kg/m^3$，环境介电常数为 $\epsilon_e = 4.425 \times 10^{-11}$ 法拉/ m，环境电导率为$\sigma_e = 10^{-5}$ 西门子/ m，界面张力为 $\gamma = 0.065 N/m$。其余有量纲参数根据指定的无量纲值确定。根据电应力和黏性应力的平衡关系得到的速度尺度为 $U = 0.2549\sqrt{Ca_E}\ m/s$ ，对应的电雷诺数为$Re_E = \frac{\epsilon_e U}{R\sigma_e} = 1.128 \times 10^{-3}\sqrt{Ca_E}$。

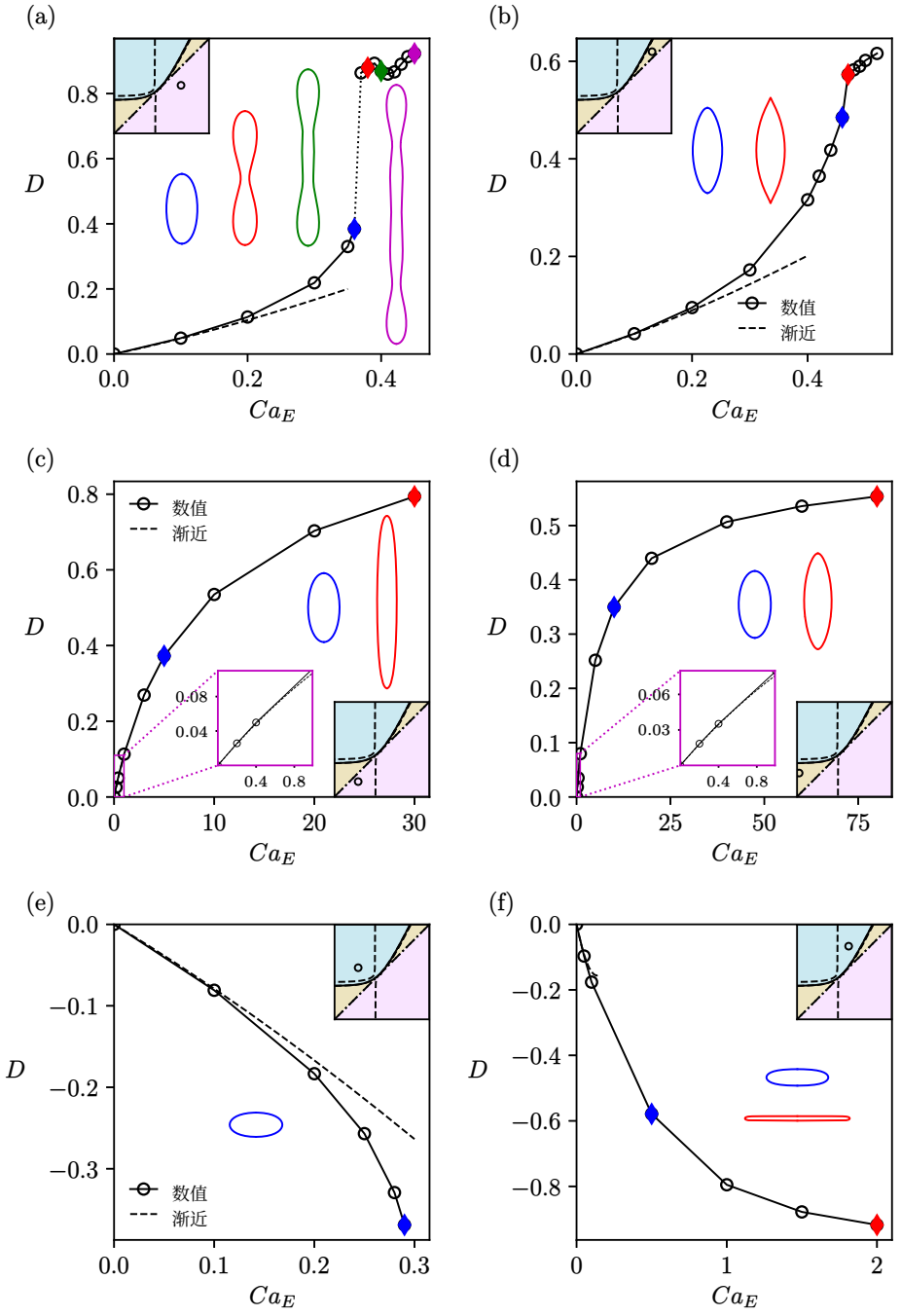


图 6. 牛顿液滴的变形随电毛细数的变化 Ca_E，适用于$\rho_r = 1$、 $\mu_r = 1$、 $Re = 1$; (a) $\sigma_r = 10$、 $\epsilon_r = 1.37$ (b) $\sigma_r = 25$、 $\epsilon_r = 50$ (c) $\sigma_r = 0.1$、 $\epsilon_r = 0.04$ (d)$\sigma_r = 0.01$、 $\epsilon_r = 0.1$ (e) $\sigma_r = 0.1$、 $\epsilon_r = 2$ (f) $\sigma_r = 2$、 $\epsilon_r = 20$。界面形状对应于图中同色菱形标记所示点处液滴的稳态形状。插图显示了相图中（σ_r， ϵ_r）点的位置。虚线表示通过渐近分析得到的液滴变形。

V. 结果与讨论

A. 悬浮在牛顿流体中的牛顿液滴

图6总结了外加电场作用下，六组具有代表性的（σ_r， ϵ_r）参数组合对应的牛顿液滴变形情况。在 PR_A^+和 PR_B^+区间（图6(a–b)）中，变形曲线呈正曲率，与渐近理论一致。液滴变形为长椭球形状，直至达到临界电毛细数 Ca_E^{crit}；超过该值后，无法维持稳态椭球体。 PR_A^+ 情形经历了一系列形状转变，从椭球形转变为多叶构型；如 Lac 和 Homsy [51], 所述，内部电流体动力学回流使这些构型得以稳定。相比之下， PR_B^+ 情形因流动方向由两极指向赤道而形成尖端，但不会出现尖端射流。与此相反， PR_A^-和 PR_B^-区间（图6(c–d)）呈现负曲率，因此变形随 Ca_E 增长得更慢，并最终在较大的 Ca_E下趋于平缓。这一趋势使液滴形状在较高的 Ca_E下仍能保持稳定；由于存在由两极指向赤道的环流， PR_A^- 下的变形更强。对于 OB^- 区间（图6(e)），扁椭球变形随 Ca_E加速增长，并达到临界阈值 Ca_E^{crit}；超过该阈值后，两极处不稳定的电压力会导致破裂。最后，在 OB^+ 区间（图6(f)）中，扁椭球变形随Ca_E 增加，但增长速率逐渐减小，因此即使在较大的 Ca_E下，形状仍可保持稳定。

B. 牛顿流体中的黏弹性液滴

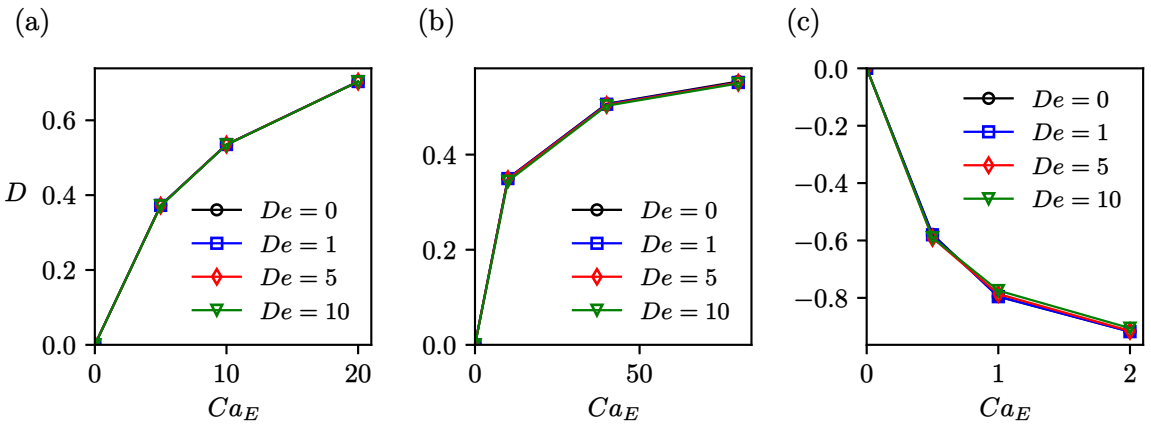


图7. 不同 De下的变形与Ca_E 的关系，针对 $\rho_r = 1$、 $\mu_r = 1$、 $Re = 1$、 $\beta_i = 1/9$。$\sigma_r = 0.1$、 (a) $\epsilon_r = 0.04$ （PR_A^-） (b) $\sigma_r = 0.01$、 $\epsilon_r = 0.1$ （PR_B^-） (c) $\sigma_r = 2$、 $\epsilon_r = 20$ （OB^+）。

基于 Lac 和 Homsy 的牛顿液滴分析 [51] ($De = 0$)，我们将研究拓展至

处于稳恒电场中的黏弹性液滴。$(\sigma_r,\ \epsilon_r)$ 参数对的分类取决于一阶 $(D^{(Ca_E)})$ 和二阶 $(D^{(Ca_E^2)})$ 变形系数的符号。当两个系数符号相同时，变形会随着 Ca_E 加速增长，从而出现一个临界 Ca_E，超过该临界值后便无法维持稳态椭球形。若两个系数符号相反，变形则随着 Ca_E平缓增加，即使在较大的 Ca_E 下，液滴仍保持稳定。

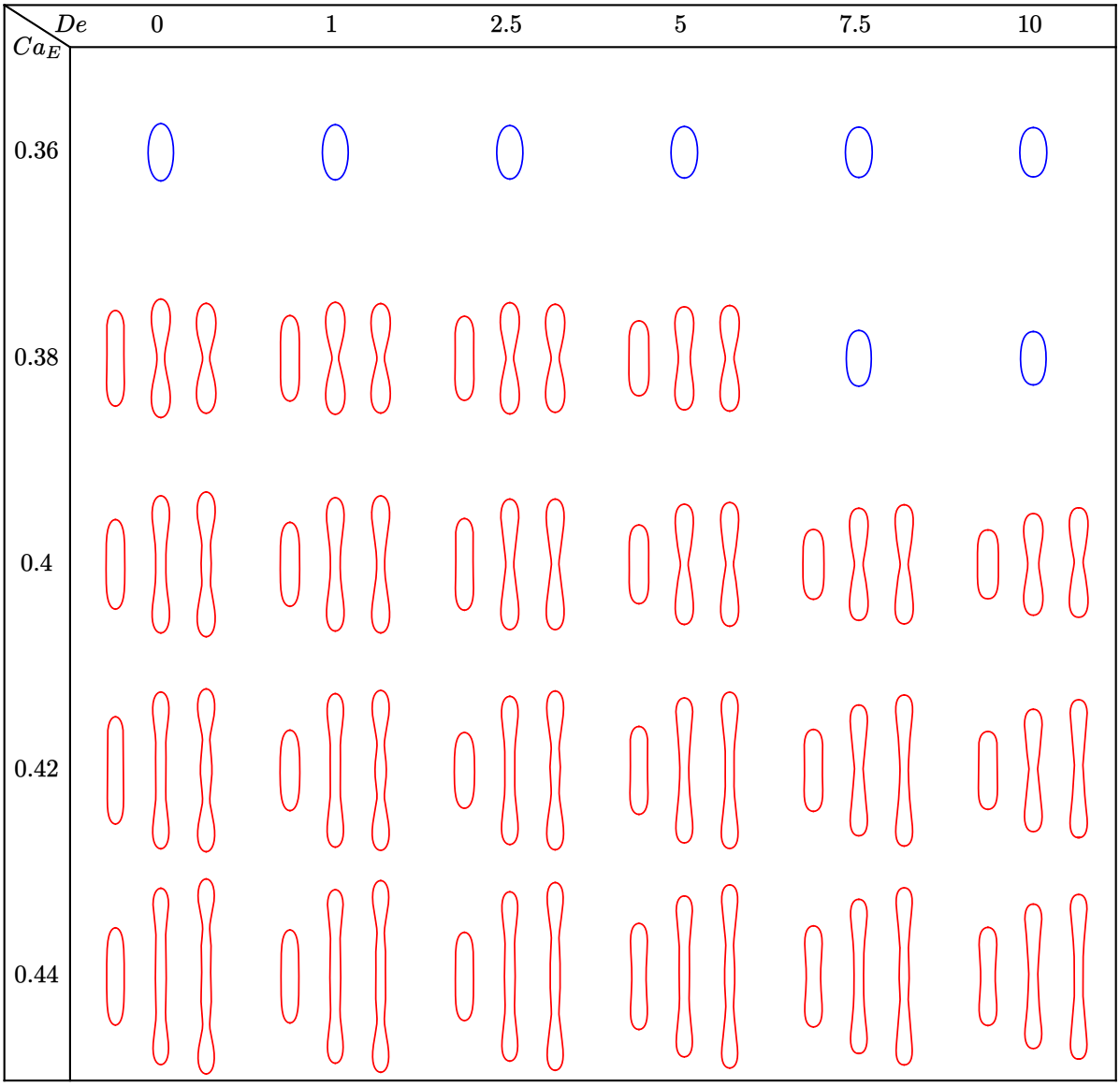


图 8. 外加电场作用下，取不同 Ca_E 和 De 时 Oldroyd-B 液滴界面的行为，其中 $(\sigma_r,\ \epsilon_r) = (10,\ 1.37)$，$\mu_r = 1$，$\rho_r = 1$，$Re = 1$，$\beta_i = 1/9$。

在 PR_A^+ 和 PR_B^+ 区域中，两个系数均为正，从而产生具有正曲率 D–Ca_E 特征的长球形变形。在 OB^- 区域中，两个系数均为负，产生加速增长的扁椭球变形。这三个区域（PR_A^+，

PR_B^+， OB^-）因此表现出临界 Ca_E。相比之下，在 PR_A^-、 PR_B^-和 OB^+区域中，系数符号相反，变形平滑演化，即使在较大的 Ca_E下也能保持稳定的液滴形状。图7显示了液滴变形随电毛细数在不同 De取值下、 PR_A^-、 PR_B^-和 OB^+区域的变化。可以观察到，这些区域偏离牛顿行为的程度可忽略不计。因此，在后续讨论中，我们重点关注 PR_A^+、 PR_B^+和 OB^-区域所在的（σ_r， ϵ_r）平面。

1. (σ_r, ϵ_r) *</style}*来自 PR_A^+ 区域

与牛顿液滴类似，只要电毛细数（Ca_E）低于临界阈值，Oldroyd-B 液滴就会变形为稳定的椭球形。超过这一阈值后，液滴会转变为稳定的多叶平衡构型。图 8展示了均匀电场下 Oldroyd-B 液滴界面的演变。在所有研究的 Ca_E 和 De组合中，液滴最终都会达到稳定的平衡构型。对于较低的德博拉数（$De = 0$、1、2.5、5），液滴在 $Ca_E = 0.38$处形成双叶形状；而对于较高的德博拉数（$De = 7.5$、10），这一转变则发生在略大的 $Ca_E = 0.4$处。这一变化表明，临界电毛细数会随弹性增强而增大。此外，结果还显示出两种相辅相成的趋势。对于固定的 De，平衡液滴形状的伸长程度和叶片数量都会随 Ca_E增大而增加，这反映出更强的电应力会导致更显著的变形。相反，对于固定的 Ca_E，增大 De 会降低整体伸长程度并抑制多叶结构的形成，这表明黏弹性应力会抵抗电场诱导变形。

变形对 Ca_E 和 De 的定量依赖关系见图 9。如图 9(a) 所示，变形曲线呈现出两条明显不同的分支。下分支对应椭球平衡形状，其有效范围截至临界 Ca_E；上分支则代表超过临界阈值后达到的多叶平衡状态。对于所有德博拉数，下分支始终呈现正曲率。值得注意的是，对于给定的 Ca_E，变形幅度随 De增加而减小，表明弹性会抑制界面变形。这一趋势在图 9(b) 中进一步得到印证：以 De 为横坐标绘制的变形在所有 Ca_E 取值下均呈现系统性降低。

为理解变形为何随德博拉数增大而减小，我们绘制了固定毛细数 $De = 0$下，1、5和 10 时聚合物应力张量的迹的等值线，如 $Ca_E = 0.36$所示，见图 10。当 $De = 0$时，不存在聚合物应力贡献，液滴变形主要由电应力与表面张力之间的平衡决定。随着 De 增大，等值线显示液滴内部聚合物应力的幅值和空间范围逐渐增大，且

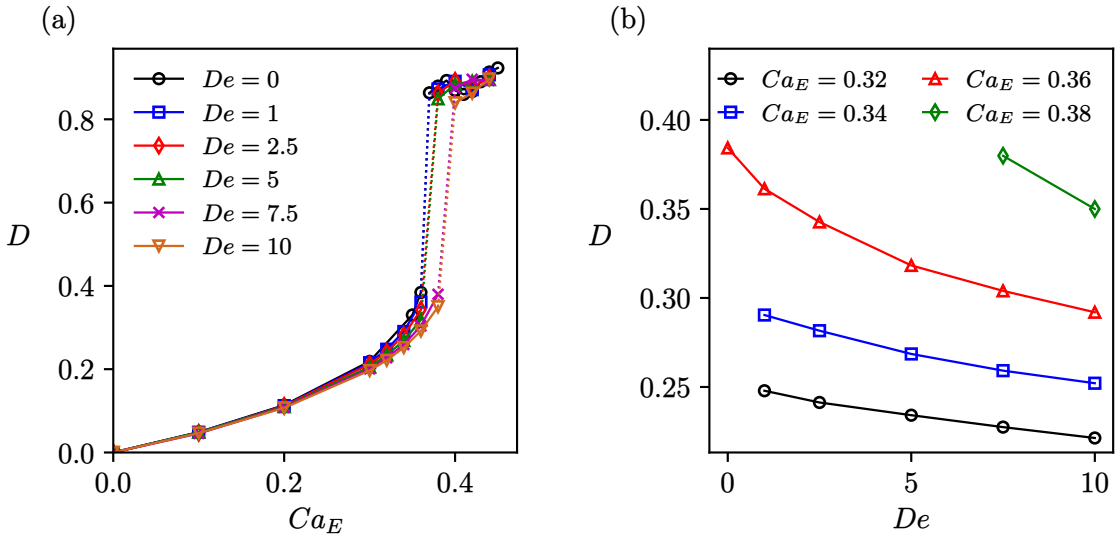


图9。（a）不同 De 下，变形随 Ca_E 的变化；（b）不同 Ca_E 下，变形随 De 的变化，其中 $\rho_r = 1$、$\mu_r = 1$、$Re = 1$、$\sigma_r = 10$、$\epsilon_r = 1.37$、$\beta_i = 1/9$。（引自 PR_A^+）

液滴两极附近的应力累积尤为明显。聚合物应力的增加对应于聚合物链弹性拉伸的增强，这会产生额外的法向应力，从而抵抗流动和电场诱导的变形。因此，聚合物应力提供的弹性阻力抑制了界面拉伸，使液滴变形随 De 增大而单调减小。

2. (σ_r, ϵ_r) </style}来自 PR_B^+ 区域

在恒定电场作用下，物性比为（σ_r，ϵ_r）且处于 PR_B^+ 状态的 Oldroyd-B 液滴会变形成稳定的椭球形，前提是电毛细数低于临界阈值（Ca_E^{crit}）。然而，超过这一临界值后，变形动力学会变得明显更加复杂。液滴可能伸长为带有尖端的构型，在球状形状与尖端形状之间振荡，甚至短暂形成尖端，随后最终弛豫回稳定的椭球平衡态。这一系列变形行为绘于图11所示的相图中，该相图构建于（Ca_E，De）平面。蓝色标记表示形成稳定球状形状的条件，红色标记则对应演化为持续尖端构型的情况。洋红色标记表示界面在球状形状与尖点形状之间振荡的区域；绿色标记则表示尖端形状短暂出现、随后液滴稳定为球状状态的情形。

图12 和图13 展示了变形参数随电

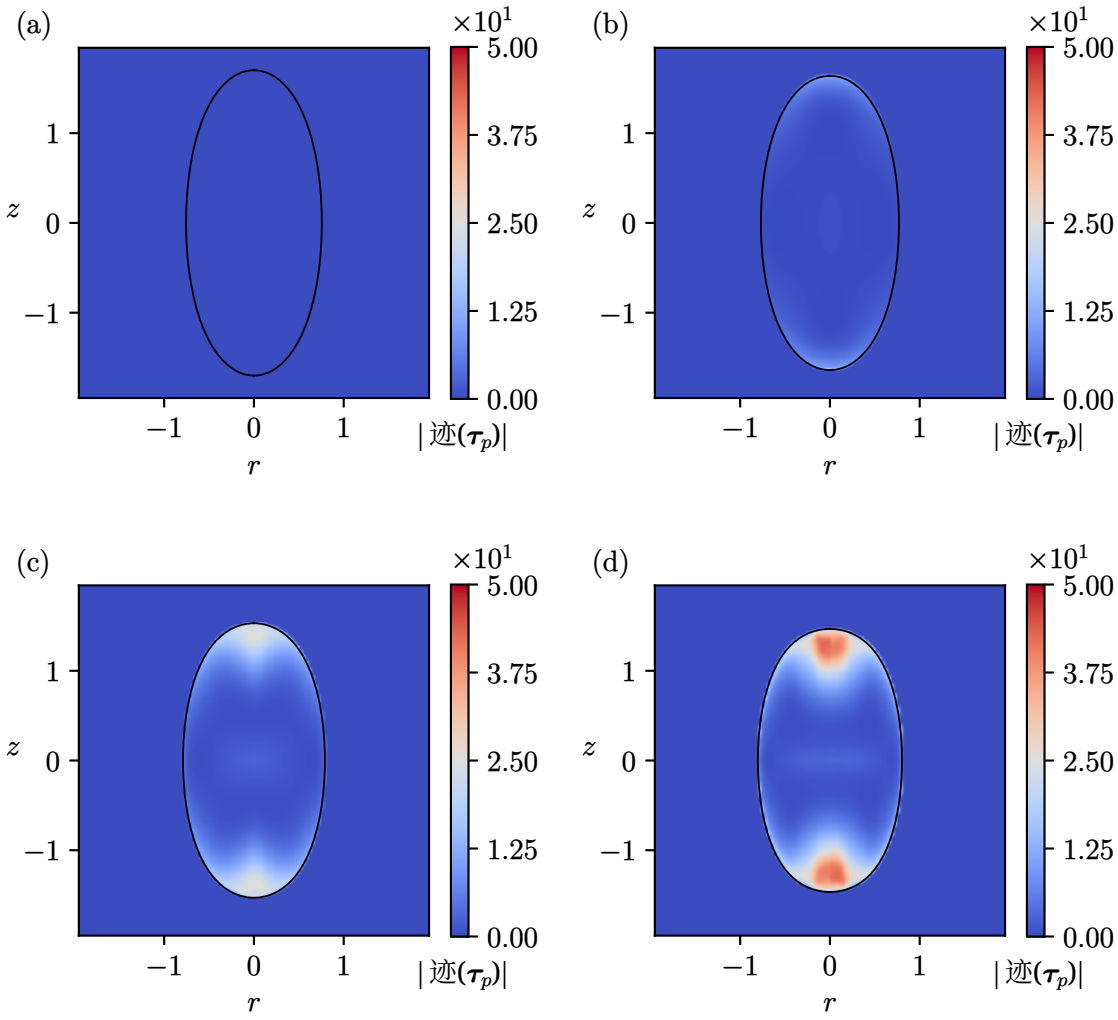


图 10. $Ca_E = 0.36$, $\rho_r = 1$, $\mu_r = 1$, $Re = 1$, $\sigma_r = 10$,$\epsilon_r = 1.37$, $\beta_i = 1/9$条件下聚合物应力迹的等值线。(a) $De = 0$, (b) $De = 1$ (c) $De = 5$, (d) $De = 10$。

毛细数（Ca_E）和德博拉数（De）的变化。图12(a)展示了不同 De 值下液滴变形对 Ca_E 的依赖关系。对于所有 De，变形均随 Ca_E单调增加，曲线向上凹的形态表明，在较高的 Ca_E下，变形加速增大。 $De = 7.5$ 和10对应的曲线在 $Ca_E = 0.48$处截断；对于 $Ca_E \geq 0.5$ ，液滴要么在球状和尖端形状之间振荡，要么形成瞬态尖端。图12(b)展示了不同 Ca_E下变形随 De的变化。在 $Ca_E = 0.46$时，对于所有De，液滴均保持稳定的球状，且变形随 De 增加而单调减小。在 $Ca_E = 0.48$时，只有 $De = 0$会出现尖端变形，而对于 $De \geq 1$ ，液滴仍保持球状，变形随 De减小。对于 $Ca_E = 0.5$，当 $De = 0$、2.5和5时会出现尖端；而在 $De = 7.5$ 和10时，则会观察到振荡或瞬态尖点形状；值得注意的是，一个

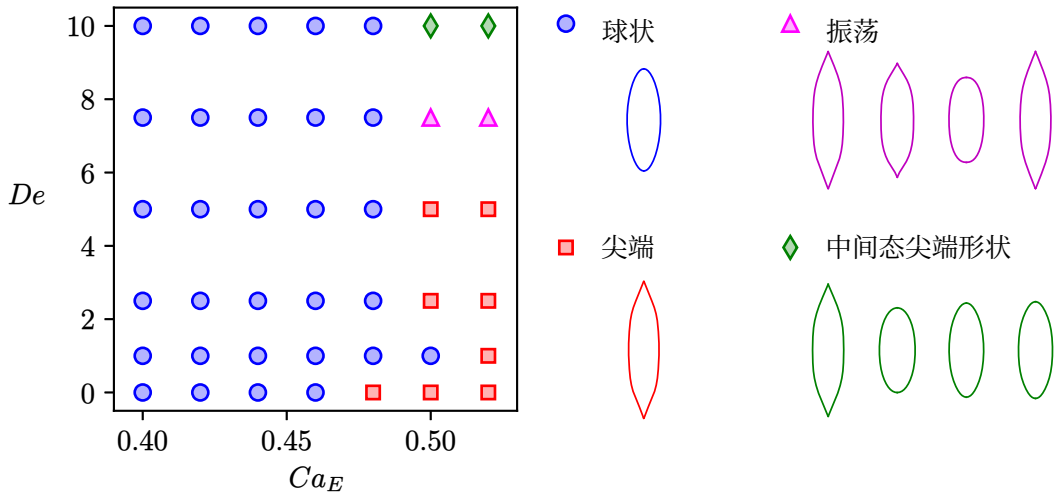


图 11.（Ca_E, De）平面上的相图，表示球状形状、带尖端的形状、液滴在球状形状与尖端形状之间振荡，以及在达到稳定的球状形状之前中间态尖端形状的存在

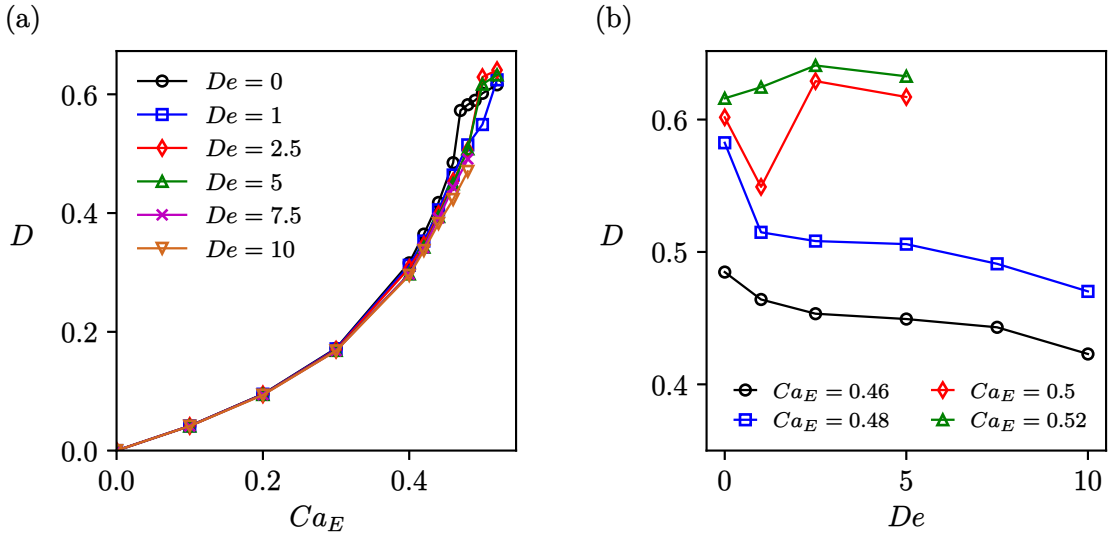


图 12.（a）不同 De 下变形随 Ca_E 的变化，（b）不同 Ca_E 下变形随 De 的变化，适用于 $\rho_r = 1$、$\mu_r = 1$、$Re = 1$、$\sigma_r = 25$、$\epsilon_r = 50$、$\beta_i = 1/9$。（摘自 PR_B^+）

在 $De = 1$ 时，椭球形平衡态得以保持。有趣的是，变形参数 D 随着 De 增大而先减小后增大。当 Ca_E 进一步增大至 0。52 时，对于所有 $De \leq 5$，液滴都会形成尖端，且变形随 De 增大。然而，对于 $De = 7.5$ 和 10，液滴要么在椭球形和尖端形状之间振荡

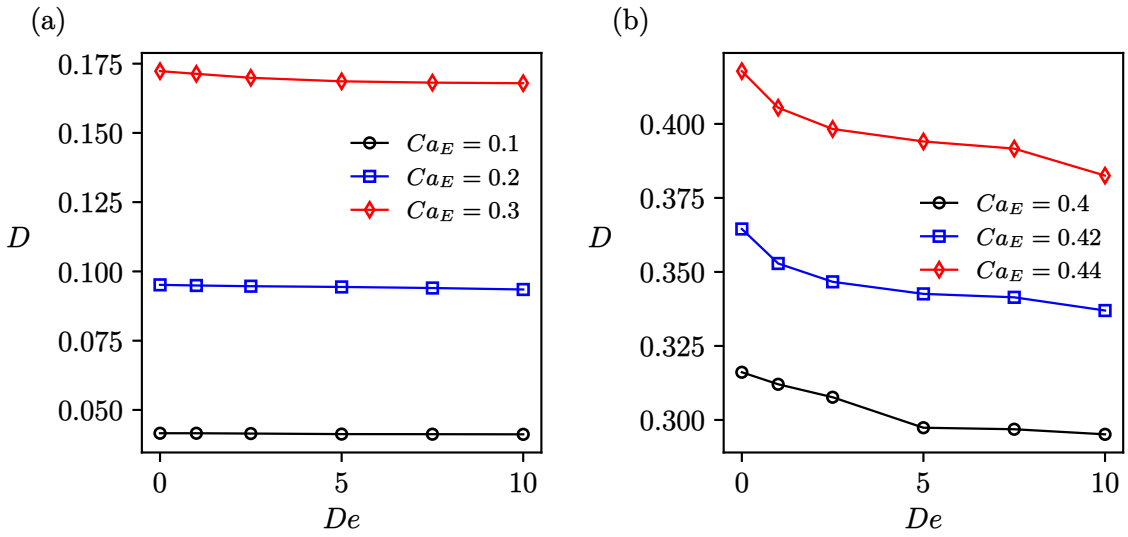


图13. (a) 较低电毛细数下，不同 Ca_E 对应的变形随 De 的变化；(b) 中等电毛细数下，不同 Ca_E 对应的变形随 De 的变化，其中 $\rho_r = 1$、$\mu_r = 1$、$Re = 1$、$\sigma_r = 25$、$\epsilon_r = 50$、$\beta_i = 1/9$。（引自 PR_B^+）

构型之间振荡，或者在经历瞬态尖端变形后演变为椭球形。本文考察了在低和中等 De Ca_E 下液滴变形对图13所示参数的敏感性。在低 Ca_E 时，图13(a) 表明变形仅微弱依赖于 De，并随着 De 增大而略微减小。相比之下，在中等 Ca_E 时，图13(b) 表明，随着 De 增大，变形持续单调减小。

通过考察聚合物应力张量的迹的等值线，分析德博拉数增大对液滴变形的影响，其中 $De = 0$、1、5、和 10 对应 $Ca_E = 0.46$，如图14所示。对于 $De = 0$，不存在聚合物应力，液滴变形由电应力与表面张力之间的平衡决定。随着De增大，聚合物应力的大小显著增加，等值线中 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}_p)$ 的值不断升高便证明了这一点。与 PR_A^+ 的情况不同，在 PR_B^+ 中，聚合物应力高度集中在液滴两极附近。两极处聚合物应力的积累会产生较大的弹性法向应力，抵消导致液滴伸长的电拉伸应力。随着 De增大，两极处的弹性阻力也随之增强，阻碍界面的轴向拉伸，从而减小液滴的整体变形。

图15 通过展示以下条件下变形和界面动力学的时间演化，提供了进一步的认识：$Ca_E = 0.48$ 和 $Ca_E = 0.52$对于不同的 De。在 $Ca_E = 0.48$，只有 $De = 0$会出现尖端，而对于 $De \geq 1$ 液滴则始终演化为稳定的球状。变形的时间历程显示，具有 $De \leq 5$会迅速达到

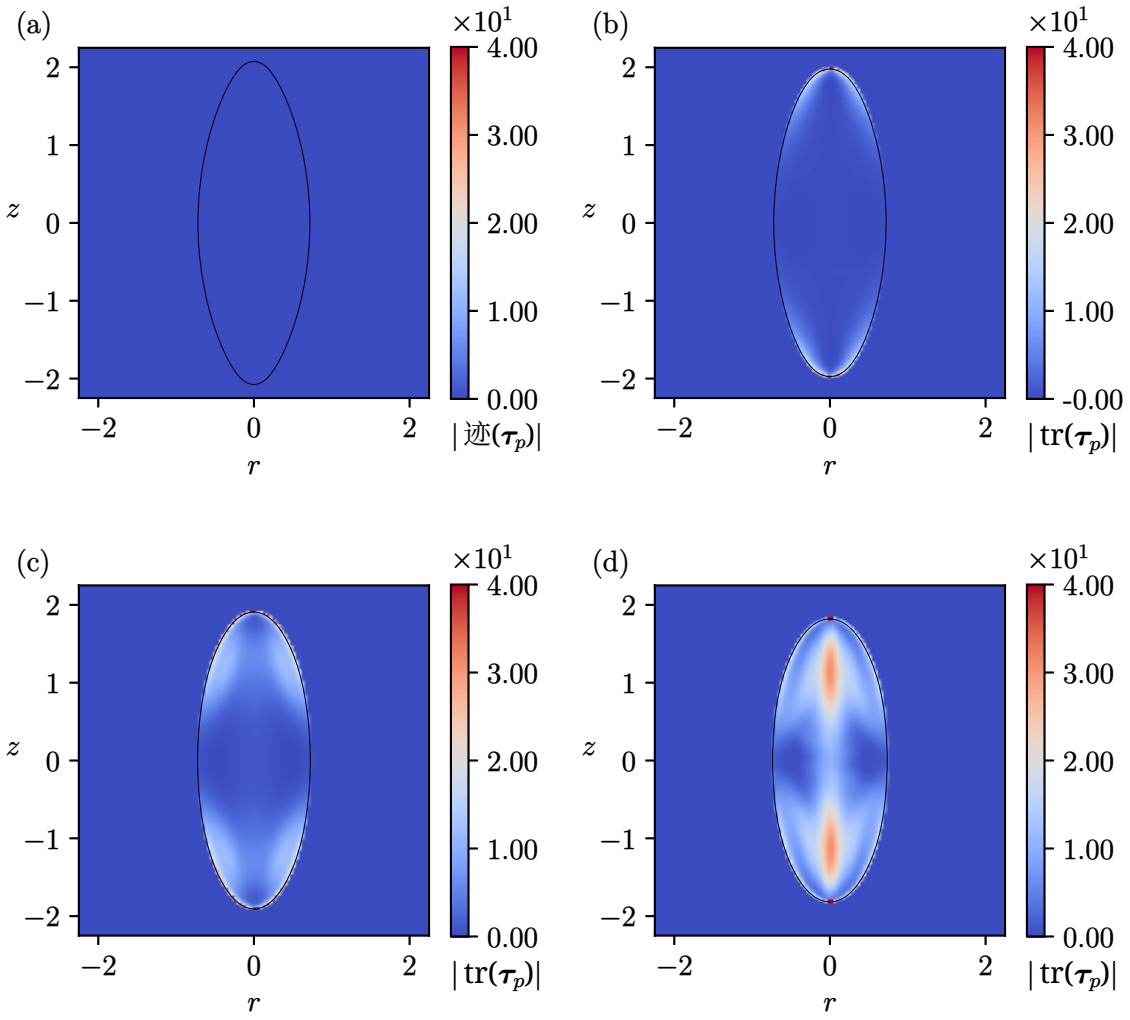


图 14. $Ca_E = 0.46$, $\rho_r = 1$, $\mu_r = 1$, $Re = 1$, $\sigma_r = 25$,$\epsilon_r = 50$, $\beta_i = 1/9$条件下的聚合物应力迹等值线。(a) $De = 0$, (b) $De = 1$ (c) $De = 5$, (d) $De = 10$。液滴两极处的 $|\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}_p)|$值显著更高（ $De = 1$ 和 5 时约为 100， $De = 10$时约为 500）。色标范围经过调整，以便清晰呈现内部场变化。

稳态，而对于 $De = 7.5$ 和 10，达到平衡态的过程较慢，其特征是在变形过冲后逐渐松弛至较低的稳态值。过冲在 $De = 10$ 时尤为明显。在较高的 $Ca_E = 0.52$下，所有 De 均可观察到尖端形状。对于 $De \leq 5$，液滴最终达到尖端稳态。对于 $De = 7.5$，液滴在球状和尖端构型之间振荡，而对于$De = 10$，变形最初过冲至尖端形状，随后减小并达到椭球形平衡态。

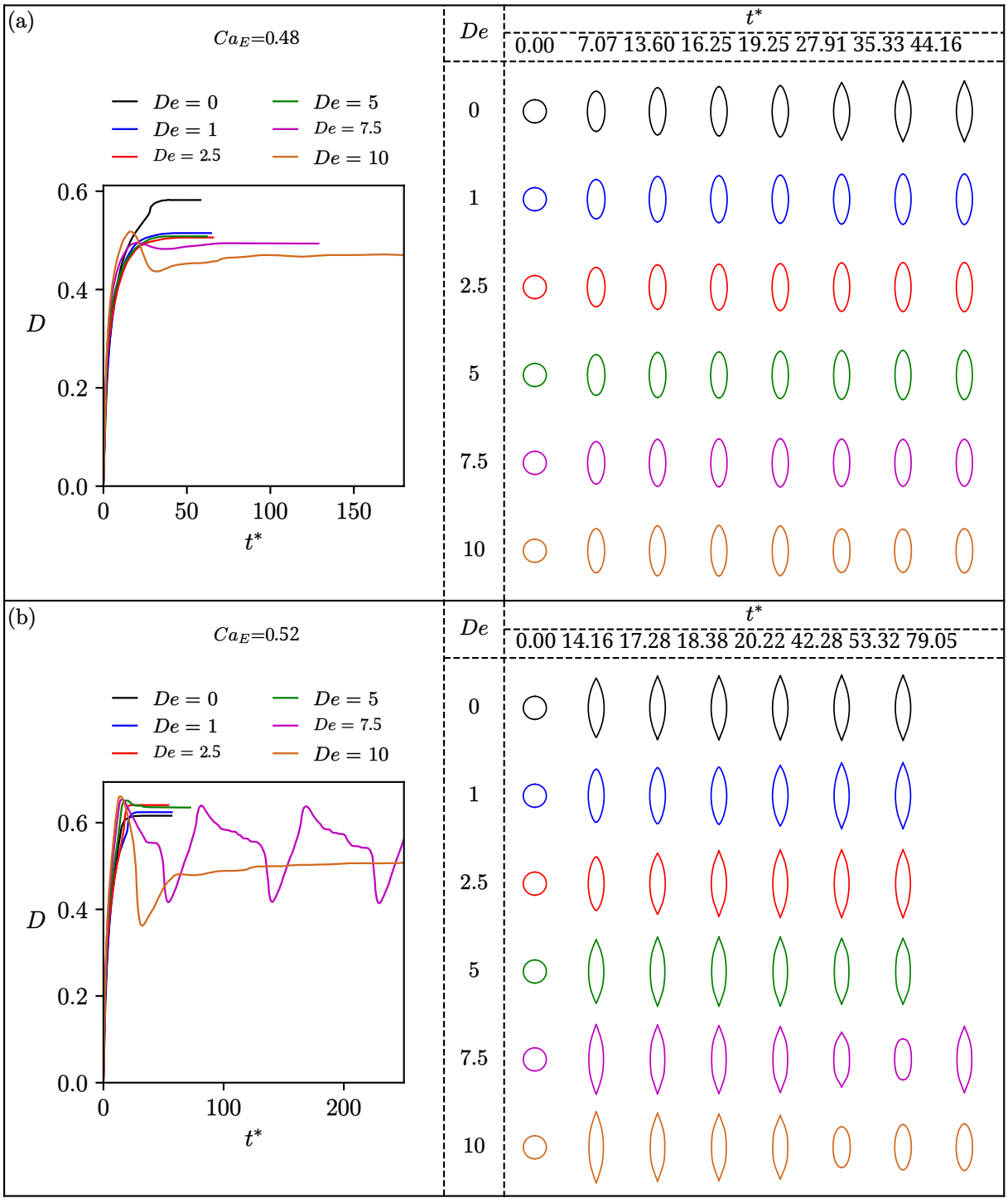


图 15. 变形参数随时间的变化，以及不同 De 条件下液滴界面的时间演化，其中 $\rho_r = 1$、$\mu_r = 1$、$Re = 1$、$\sigma_r = 25$、$\epsilon_r = 50$、$\beta_i = 1/9$。（a） $Ca_E = 0.48$（b）$Ca_E = 0.52$。

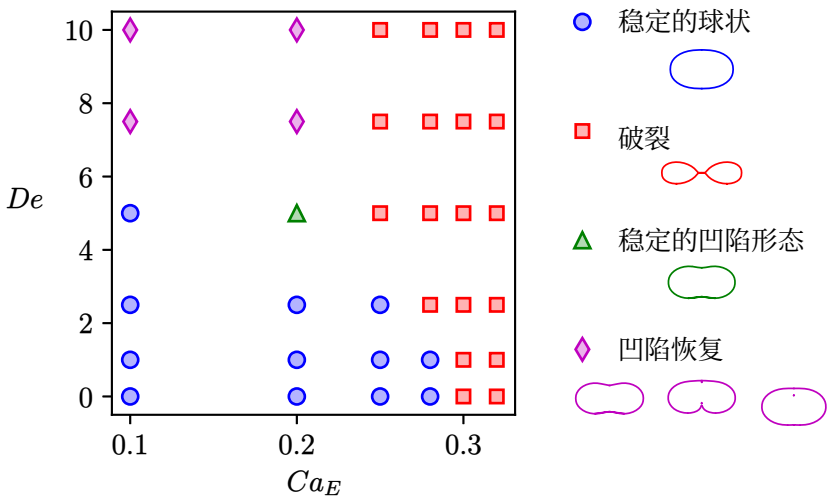


图 16. 在（Ca_E, De）平面上的相图，展示稳定的球状形状、稳定的凹陷形状、液滴破碎，以及随后出现位置振荡的中间凹陷形成状态的存在区域。

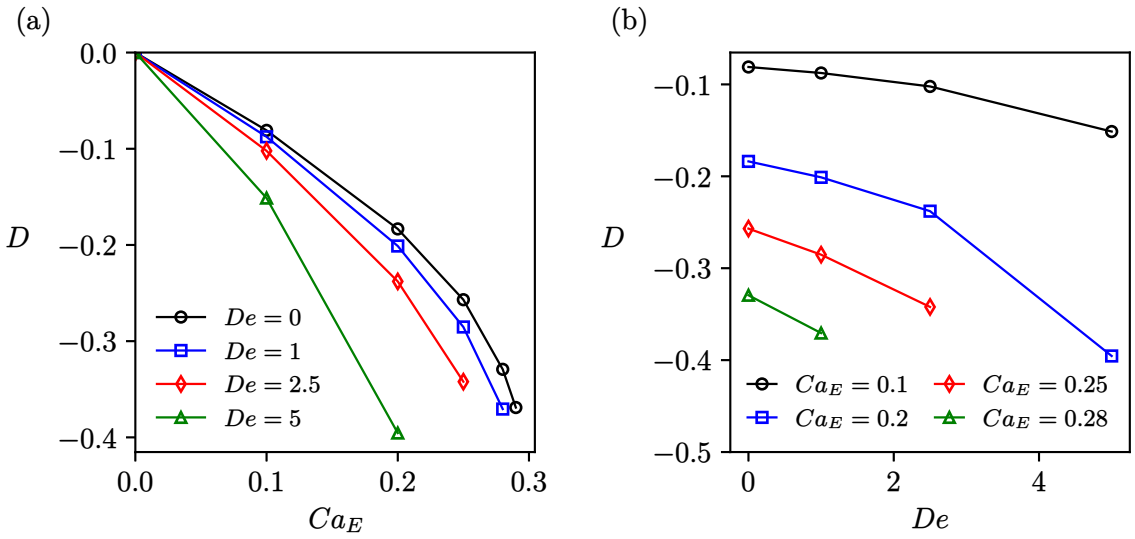


图 17. （a）不同 De 下变形与 Ca_E 的关系，（b）不同 Ca_E 下变形与 De 的关系，其中 $\rho_r = 1$、$\mu_r = 1$、$Re = 1$、$\sigma_r = 0.1$、$\epsilon_r = 2$、$\beta_i = 1/9$。（引自 OB^-）

3. (σ_r, ϵ_r) 来自 OB^- 区域

对于由（σ_r，ϵ_r）表征的Oldroyd-B流体液滴，在 OB^- 区域内，施加稳态外电场主要引起扁球形变形。在低于临界阈值的电毛细数下，液滴也可呈现稳定构型

具有凹坑。当 Ca_E 超过该临界值时，液滴可能失稳，从而导致破裂，或短暂形成凹坑，随后恢复并发生纵向振荡。图16给出了（Ca_E， De）平面内的相图，刻画了这些不同的变形行为。在该图中，蓝色标记对应稳定的扁椭球形状，红色标记表示液滴破碎，绿色标记表示带有凹坑的稳定扁旋转形状，品红色标记表示液滴暂时试图破裂但最终恢复并表现出位置振荡的情形。

图 17 展示了液滴变形参数对电毛细数（Ca_E）和德博拉数（De）的依赖关系，并突出显示了产生稳定变形形状的条件。在图 17(a) 中可以看到，随着 Ca_E 增大，变形程度减小（即扁椭球变形的幅度增大），这表明更强的电场会增强液滴的扁椭球形态。 图 17(b) 展示了不同 Ca_E 值下，变形随 De 的变化。结果表明，增大液滴的黏弹性会加剧扁椭球变形的幅度。

通过考察 $De = 0$、1、2.5 和 5 对应的聚合物应力张量的迹等值线，研究扁椭球形态下的变形行为；电毛细数 $Ca_E = 0.2$固定，如图 18所示。在此形态下，液滴发生扁椭球变形，其特征是变形参数为负值。对于 $De = 0$，变形完全由电应力与表面张力之间的平衡决定。随着 De 增大，液滴内部的聚合物应力幅度不断增加，这可以从 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}_p)$ 数值的增大看出。随着 De 增大，聚合物应力增强了液滴对轴向拉伸的抵抗，同时促进径向铺展，导致负变形的幅度增大。这解释了为何与长球形情形相反，扁椭球变形会随 De增大而增强。

图 19 展示了处于 OB^- 区域内、参数为 $(\sigma_r, \epsilon_r) = (0.1, 2)$ 的 Oldroyd-B 液滴在四种电毛细数下（ $Ca_E = 0.25$,0.28、0.3 和 0.32）的变形时间演化及相应的界面形状，并比较了不同德博拉数的情况。变形随无量纲时间变化的曲线在破裂时截断，破裂前变形会突然骤降。当 $Ca_E = 0.25$ 时，液滴在 $De \leq 2.5$ 下达到稳定的扁球稳态；而较高的德博拉数（$De \geq$5）会导致破裂。对于 $Ca_E = 0.28$，仅当 $De \leq 1$ 时才会出现稳定构型，而 $De \geq 2.5$ 时则会破裂。在较高的电毛细数 0.3 和 0.32 下，液滴在所有考察的德博拉数下均无法达到稳定形状，最终都会发生破裂。

图 20（a）和（b）展示了 Oldroyd-B 流体液滴的无量纲液滴破裂时间随电毛细数（Ca_E）和德博拉数（De的变化，直接反映了图 19所示的时间演化。如图 20（a）所示，对于所有考察的 De，无量纲破裂时间均随 Ca_E 的增大而减小，说明更强的电场会加速液滴破裂。液滴破裂受以下因素影响

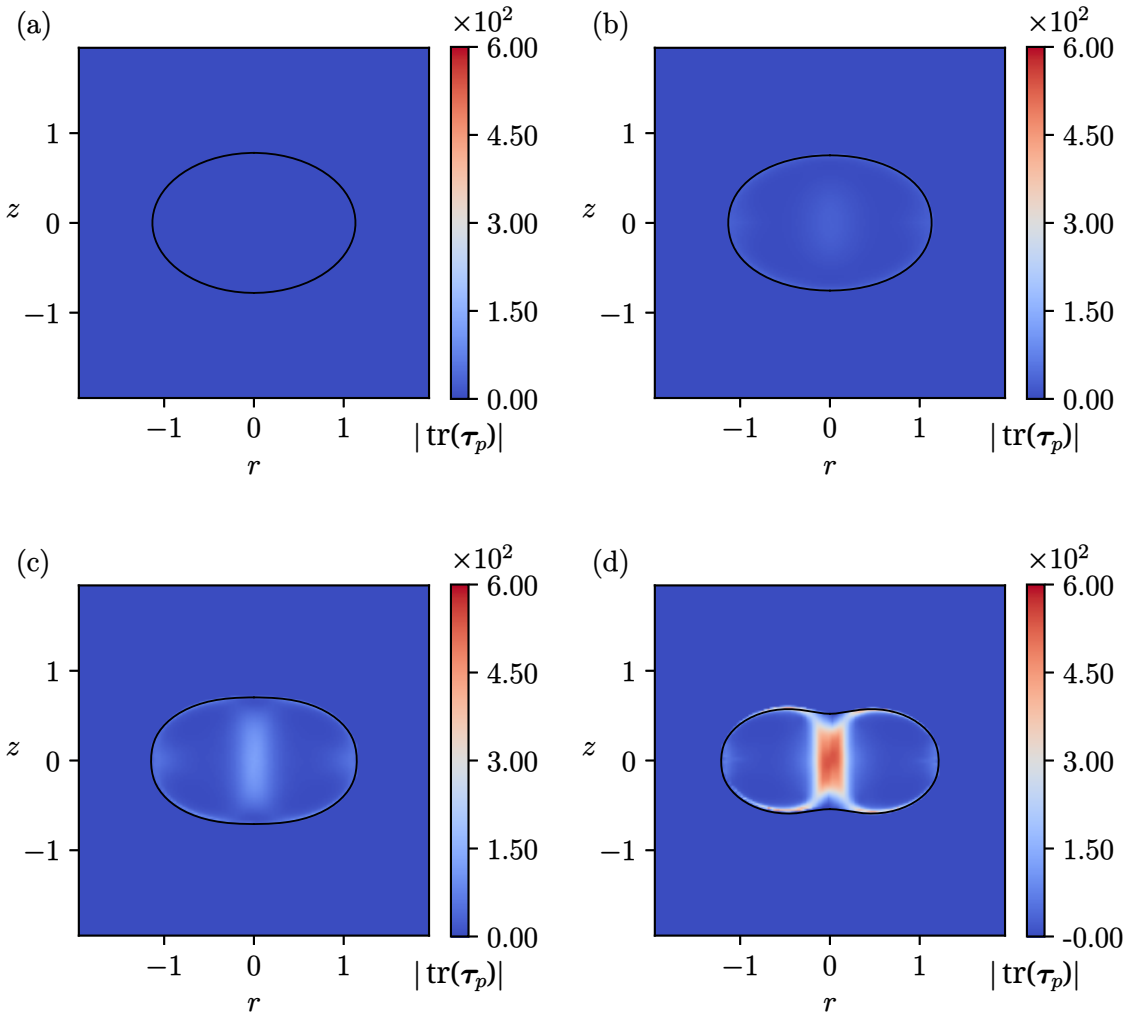


图 18. $Ca_E = 0.36$、 $\rho_r = 1$、 $\mu_r = 1$、 $Re = 1$、 $\sigma_r = 10$、$\epsilon_r = 1.37$、 $\beta_i = 1/9$时聚合物应力迹的等值线。（a） $De = 0$, （b） $De = 1$ （c） $De = 2.5$, （d） $De = 5$。

： De 和 Ca_E：在较低的 De下，只有在较高的 Ca_E 时才会发生破裂（例如，对于 $De = 0$和 $De = 1$，在 $Ca_E \geq 0.3$时观察到破裂）。对于 $De = 2.5$，破裂始于 $Ca_E \geq 0.29$；而对于 $De \geq 5$，在所有 $Ca_E \geq 0.25$下都会发生破裂。图 20（b）展示了不同 Ca_E下 De对破裂时间的影响。对于 $Ca_E = 0.25$ 和 0.28，破裂时间随 De单调减小，表明黏弹性增强会加速破裂。相比之下，在较高的 Ca_E 值（$Ca_E \geq 0.3$）下，破裂时间随 De呈非单调变化。在 $Ca_E = 0.3$时，对于 $De \geq 1$，破裂时间几乎保持不变，而 $De = 0$ 对应的值略高。具体而言，破裂时间随 De 增大而减小，直至 $De = 2.5$；在 $De = 5$时略有增加，随后在 De 趋近于 10 时再次减小。对于 $Ca_E = 0.32$， $De \geq 5$ 的破裂时间聚集在一起，且高于$De \leq 2.5$的破裂时间，后者形成另一组。在较高的 De下，破裂速率的下降

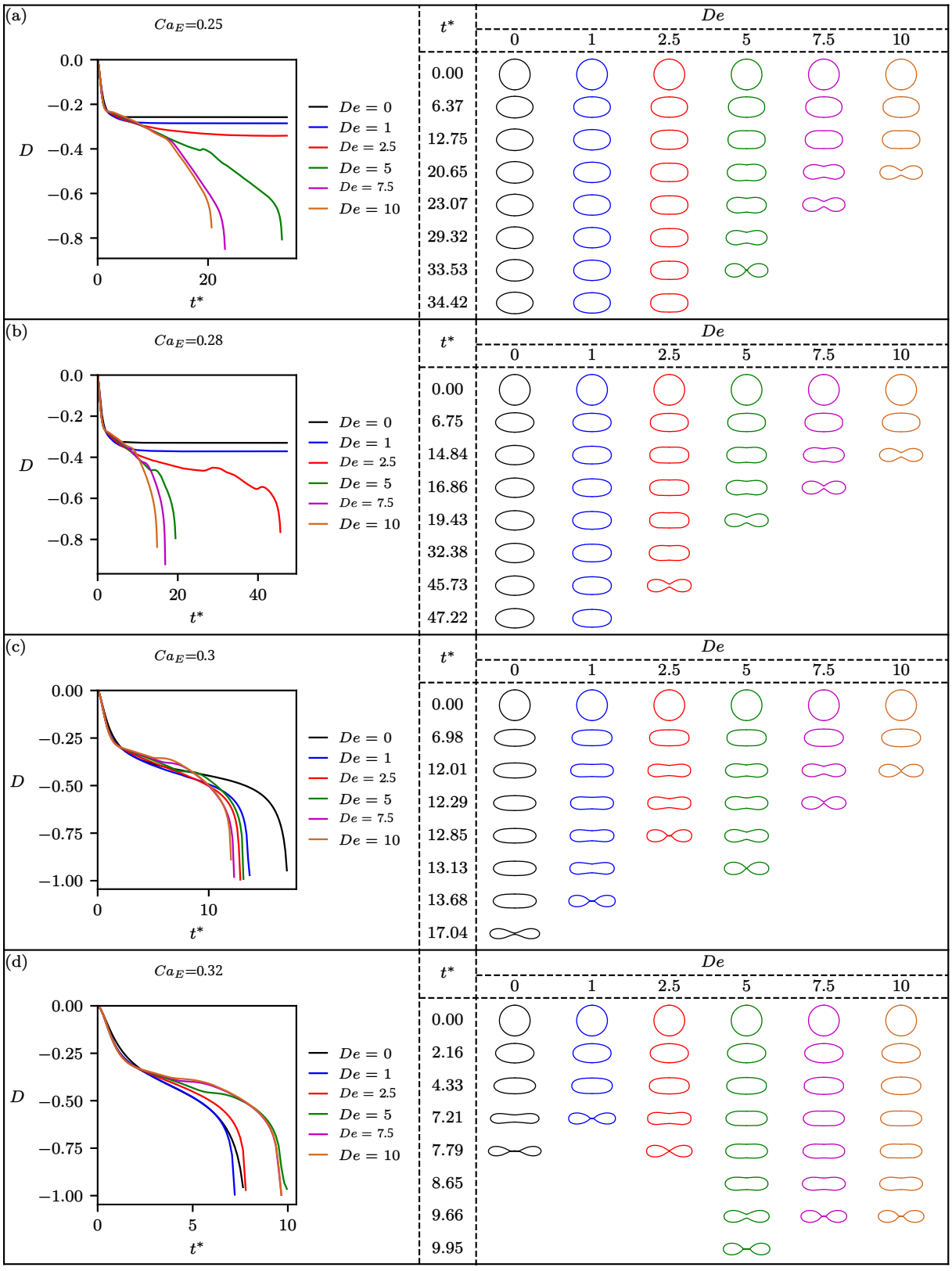


图 19. $\rho_r = 1$, $\mu_r = 1$, $Re = 1$, $\sigma_r = 0.1$, $\epsilon_r = 2$, $\beta_i = 1/9$ 条件下，不同德博拉数对应的液滴变形随时间的变化及液滴界面的演变。(a) $Ca_E = 0.25$(b) $Ca_E = 0.28$ (c) $Ca_E = 0.3$ (d) $Ca_E = 0.32$

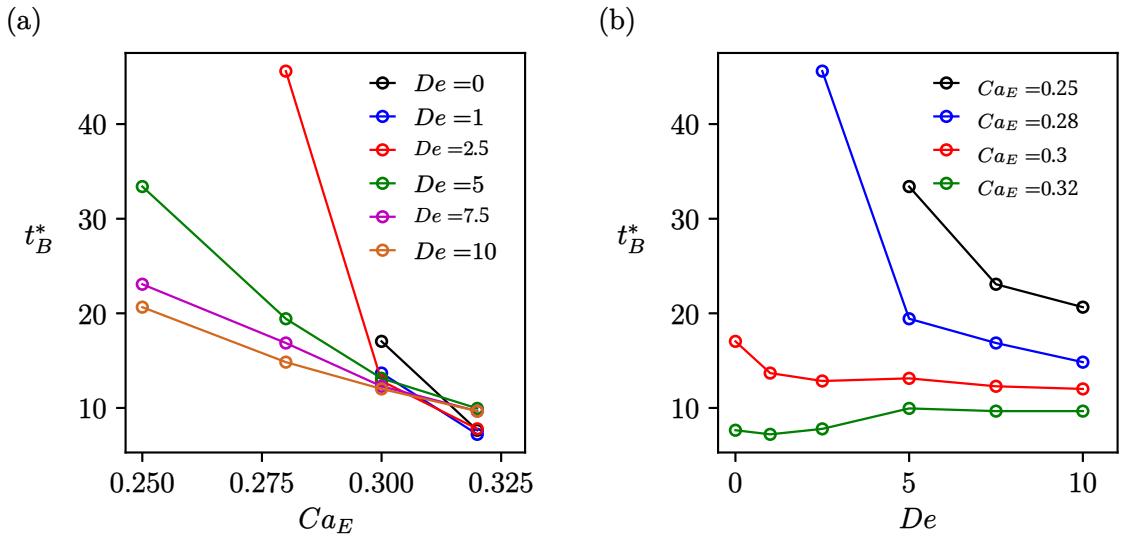


图 20. 破裂时间随 (a) Ca_E 和 (b) De 的变化，针对 $\rho_r = 1$、 $\mu_r = 1$、 $Re = 1$、$\sigma_r = 0.1$、$\epsilon_r = 2$、 $\beta_i = 1/9$。

随 Ca_E 增大的时间略低于较低 De时。因此，在最大$Ca_E = 0.32$处，不同德博拉数下的破裂时间收敛至相近数值，较高 $De \geq 5$ 时的时间略短于 $De \leq 2.5$。尽管在高 Ca_E下破裂时间对 De 呈非单调依赖，不同 De 之间无量纲破裂时间的差异仍然相对较小。总体而言，提高 Oldroyd-B 液滴的弹性通常会增强变形并加速破裂，仅在较高 De （$De \geq 5$）时对 $Ca_E = 0.32$观察到轻微延迟。

VI. 结论

本研究通过数值模拟，考察了外加电场作用下 Oldroyd-B 液滴的动力学行为。从 σ_r–ϵ_r 相空间的六个区域（PR_A^+、 PR_B^+、 PR_A^-、 PR_B^-、OB^+和 OB^-）中，分别选取一组代表性的电导率比（σ_r）和介电常数比（ϵ_r）。在第一和第二变形系数符号相同的区域（PR_A^-、 PR_B^-和 OB^+）中，偏离牛顿行为的程度可以忽略。在 PR_A^+ 区域，超过临界电毛细数后，液滴会形成多叶形状。在该区域，弹性会减小稳态变形，且临界 Ca_E 随德博拉数（De）增大。对于 PR_B^+，稳态变形随 De增大而减小，而临界 Ca_E 则呈现非单调变化。在较高的 De下，变形—时间曲线在达到稳态前会出现瞬态极大值和极小值；某些情况下，液滴会在

球状和尖点形状之间振荡。在 OB^- 区域，变形幅度随De增大，临界 Ca_E 则减小。在较低的 Ca_E 和较高的 De下，液滴会出现凹陷并试图破裂，但随后恢复并发生位置振荡。

附录 A：液滴变形的渐近解

渐近解得出的液滴变形为：

$$D = Ca_E D^{(Ca_E)} + Ca_E^2 D^{(Ca_E^2)} + Ca_E De D^{(Ca_E De)} \tag{A1}$$

其中，

$$D^{(Ca_E)} = \frac{9}{80}\frac{1}{(1+\mu_r)(2+\sigma_r)^2}\left[(6+9\mu_r)\sigma_r - (16+19\mu_r)\epsilon_r + 5(1+\mu_r)(1+\sigma_r^2)\right] \tag{A2}$$

$$\begin{aligned} D^{(Ca_E^2)} = \frac{D^{(Ca_E)}}{(2+\sigma_r)^3(1+\mu_r)^2}\Bigg[&\frac{(2743+\mu_r(20616+15281\mu_r))\sigma_r}{8400} \\ &+ \frac{(5120+\mu_r(31413+24997\mu_r))\sigma_r^2}{8400} + \frac{1}{80}(1+\mu_r)^2(-154+139\sigma_r^3) \\ &+ \epsilon_r\Bigg\{\frac{22096+\mu_r(36627+15827\mu_r)}{4200} \\ &+ \sigma_r\left(\frac{-50480-\mu_r(122133+70357\mu_r)}{8400}\right)\Bigg\}\Bigg] \end{aligned} \tag{A3}$$

$$\begin{aligned} D^{(Ca_E De)} = \frac{27(\epsilon_r-\sigma_r)^2}{56000(1+\mu_r)^3(2+\sigma_r)^4}\Big[&\Lambda_e(1-\beta_e)(408-443\mu_r) \\ &- 4\Lambda_i\mu_r(1-\beta_i)(787+998\mu_r)\Big]. \end{aligned} \tag{A4}$$

对于悬浮在牛顿型周围流体中的 Oldroyd-B 液滴，$\beta_e = 1$ 和 $\Lambda_e = 0$。因此，

$$D^{(Ca_E De)} = -\frac{27(\epsilon_r-\sigma_r)^2}{14000(1+\mu_r)^3(2+\sigma_r)^4}\Big(\Lambda_i\mu_r(1-\beta_i)(787+998\mu_r)\Big). \tag{A5}$$

上述表达式的详细推导请参见 Das 等人 [70]。

[1] O. A. Basaran、H. Gao 和 P. P. Bhat，《非标准喷墨打印机》，《流体力学年度评论》**45**,85(2013)。

[2] G.-K. Lau 和 M. Shrestha，微机电系统（mems）的喷墨打印，《微型机械》**8**，194（2017）。

[3] J. S. Eow 和 M. Ghadiri，《静电增强油中水滴聚并：技术综述》，《化学工程杂志》**85**，357（2002）。

[4] V. Alvarado 和 E. Manrique, 《提高石油采收率：最新综述》, Energies **3**, 1529（2010）。[5] Y. Zhang、Y. Liu、R. Ji、F. Wang、B. Cai 和 H. Li, 《变频技术在油包水乳状液电脱水中的应用》, Colloids and Surfaces A: Physic- ochemical and Engineering Aspects **386**, 185（2011）。[6] A. Kelly, 《烃类的静电雾化》, J. Inst. Energy;(United Kingdom)**57** （1984）。[7] S. E. Law, 《静电雾化与喷洒》, 载于静电过程手册（CRC Press, 2018）, 第429–456页。[8] R. Hines, 《静电雾化与喷漆》, Journal of Applied Physics **37**, 2730（1966）。[9] E. Moreau、N. Benard、F. Alicalapa 和 A. Douy`ere, 《线状主动电极与多个圆柱电极之间电晕放电产生的电流体动力力——在电推进中的应用》, Journal of Electrostatics **76**, 194（2015）。[10] H. Huh 和 R. E. Wirz, 《电喷雾推进器抽取过程的数值模拟》, 载于维也纳（奥地利）举行的第*36*届国际电推进会议论文集（2019）, 第15–20页。[11] D. J. Laser 和 J. G. Santiago, 《微型泵综述》, Journal of micromechanics and microengineering **14**, R35（2004）。[12] H. A. Stone、A. D. Stroock 和 A. Ajdari, 《微型器件中的工程流动：迈向芯片实验室的微流体》, Annu. Rev. Fluid Mech. **36**, 381（2004）。[13] H. A. Phan、K. Nguyen、P. T. Pham、L. Do Quang、H. B. Thu、D. B. Lam、C.-P. Jen、T. B. Thanh 和 T. C. Duc, 《按需静电液滴分选与分裂》, Sensors and Actuators A: Physical **385**, 116311（2025）。[14] G. Simpson, 《论雨的带电现象及其在雷暴中的起因》, Phil. Trans., A**209**, 397（1909）。[15] C. T. R. Wilson, 《III. 关于闪电放电和雷暴电场的研究》, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character **221**, 73（1921）。[16] D. C. Blanchard, 《海洋气泡产生的颗粒对大气带电的作用》, Progress in oceanography **1**, 73（1963）。[17] C. T. O' Konski 和 H. C. Thacher Jr, 《电场对气溶胶液滴的变形作用》, The Journal of Physical Chemistry **57**, 955（1953）。[18] G. I. Taylor, 《电场中水滴的破裂》, Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences**280**, 383（1964）。[19] R. Allan 和 S. Mason, 《剪切场和电场中的颗粒行为 I. 液滴的变形与破裂》, Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and

物理科学**267**, 45 (1962).[20] C. T. O'Konski 和 F. E. Harris，导电系统中的电自由能与液滴变形，The Journal of Physical Chemistry **61**, 1172 (1957).[21] G. I. Taylor，电流体动力学研究：I. 电场在液滴中产生的环流，Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences**291**, 159 (1966).[22] J. Melcher 和 G. Taylor，电流体动力学：界面剪切应力作用的综述，《流体力学年度评论》**1**, 111 (1969).[23] S. Torza、R. Cox 和 S. Mason，液滴的电流体动力变形与破裂，《伦敦皇家学会哲学汇刊》. Series A, Mathematical and Physical Sciences **269**, 295 (1971).[24] O. Ajayi，关于 Taylor 电流体动力学理论的一则说明，Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences**364**, 499 (1978).[25] D. Saville，电流体动力学：Taylor–Melcher 漏介电模型，《流体力学年度评论》**29**, 27 (1997).[26] J.-W. Ha 和 S.-M. Yang，表面活性剂对电场中黏性流体内液滴变形与稳定性的影响，《胶体与界面科学杂志》**175**, 369 (1995).[27] N. Bentenitis 和 S. Krause，直流电场中的液滴变形：扩展漏介电模型，Langmuir **21**, 6194 (2005).[28] M. Zabarankin，恒定电场下黏性不可压缩流体中的液态椭球形液滴，《SIAM应用数学杂志》**73**, 677 (2013).[29] H. Nganguia、Y.-N. Young、P. M. Vlahovska、J. Blawzdziewicz、J. Zhang 和 H. Lin，含表面活性剂的黏性液滴的平衡电变形，Physics of Fluids**25** (2013).[30] S. D. Deshmukh 和 R. M. Thaokar，四极电场中漏介电液滴的变形与破裂，Journal of Fluid Mechanics **731**, 713 (2013).[31] H. He、P. F. Salipante 和 P. M. Vlahovska，均匀直流电场中黏性液滴的电旋转，Physics of Fluids **25** (2013).[32] E. Yariv 和 I. Frankel，大电雷诺数下液滴的电流体动力旋转，Journal of Fluid Mechanics**788**, R2 (2016).[33] P. M. Vlahovska，黏性液滴的电流体动力学不稳定性，《物理评论：流体》**1**, 060504 (2016).[34] P. M. Vlahovska，液滴与囊泡的电流体动力学，《流体力学年度评论》**51**, 305 (2019).[35] R. Sengupta、L. M. Walker 和 A. S. Khair，表面电荷对流在长椭球形液滴电流体动力学及破裂中的作用，Journal of Fluid Mechanics**833**, 29 (2017).[36] C. Sozou，液滴的电流体动力学：时变问题，Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences**331**, 263 (1972).

[37] S. Moriya、K. Adachi 和 T. Kotaka，电场中悬浮于黏性介质内的液滴变形。1. 变形速率，Langmuir **2**, 155 (1986).[38] A. Esmaeeli 和 P. Sharifi，液滴的瞬态电流体动力学，Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics**84**, 036308 (2011).[39] J. Zhang、J. D. Zahn 和 H. Lin，电场作用下液滴变形的瞬态解，Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics **87**, 043008 (2013).[40] J. A. Lanauze、L. M. Walker 和 A. S. Khair，惯性与电荷弛豫对液滴电流体动力变形的影响，Physics of Fluids **25**(2013).[41] J. A. Lanauze、L. M. Walker 和 A. S. Khair，轻微变形扁椭球形液滴的非线性电流体动力学，Journal of Fluid Mechanics **774**, 245 (2015).[42] A. Esmaeeli 和 A. Behjatian，有限雷诺数下液滴的瞬态电流体动力学，Journal of Fluid Mechanics **893**, A26 (2020).[43] T. Nishiwaki、K. Adachi 和 T. Kotaka，电场中黏性液滴的变形：聚（环氧丙烷）/聚（二甲基硅氧烷）体系，Langmuir**4**, 170 (1988).[44] O. Vizika 和 D. Saville，液体中悬浮液滴在恒定及振荡电场中的电流体动力变形，Journal of fluid Mechanics **239**, 1 (1992).[45] J. R. Karp、B. Lecordier 和 M. S. Shadloo，中性浮力漏介电液滴内部的电流体动力学流动，Physics of Fluids**36** (2024).[46] Q. Brosseau 和 P. M. Vlahovska，外部电场中液滴赤道处的射流，Physical review letters**119**, 034501 (2017).[47] M. J. Miksis，电场中的液滴形状，The Physics of Fluids**24**, 1967 (1981).[48] J. Sherwood，电场和磁场中的流体液滴破裂，Journal of Fluid Mechanics **188**, 133 (1988).[49] J. Q. Feng 和 T. C. Scott，电场中漏介电液滴电流体动力学的计算分析，Journal of Fluid Mechanics**311**, 289 (1996).[50] J. Q. Feng，有限电雷诺数下液滴在恒定均匀电场作用下的电流体动力学行为，Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **455**, 2245 (1999).[51] E. Lac 和 G. Homsy，恒定电场中黏性液滴的轴对称变形与稳定性，Journal of Fluid Mechanics **590**, 239 (2007).[52] N. Dubash 和 A. Mestel，电场作用下高粘性流体中的导电液滴行为，Journal of Fluid Mechanics **581**, 469 (2007).[53] R. B. Karyappa、S. D. Deshmukh 和 R. M. Thaokar，均匀电场中导电液滴的破裂，Journal of fluid mechanics **754**, 550 (2014).[54] B. W. Wagoner、P. M. Vlahovska、M. T. Harris 和 O. A. Basaran，透镜状液滴的电流体动力学与赤道射流，Journal of Fluid Mechanics**925**, A36 (2021).[55] G. Wang、T. Lei、J. Yang、L. Fei、J. Chen 和 K. H. Luo，格子玻尔兹曼建模与

电场中液滴赤道射流的研究，Journal of Fluid Mechanics **988**, A40 (2024).[56] J. Zhang 和 D. Y. Kwok，基于格子玻尔兹曼方法、采用漏电介质理论研究电流体动力学液滴变形的二维模拟，Journal of Computational Physics**206**, 150 (2005).[57] G. Tomar、D. Gerlach、G. Biswas、N. Alleborn、A. Sharma、F. Durst、S. W. Welch 和 A. Delgado，采用流体体积法进行两相电流体动力学模拟，Journal of Computational Physics **227**, 1267 (2007).[58] J. Hua、L. K. Lim 和 C.-H. Wang，稳恒电场作用下悬浮于黏性液体中的液滴变形与运动数值模拟，Physics of Fluids **20**(2008).[59] H. Paknemat、A. Pishevar 和 P. Pournaderi，直流电场导致的液滴变形及破碎模式的数值模拟，Physics of Fluids **24** (2012).[60] H. Nganguia、Y.-N. Young、A. Layton、W.-F. Hu 和 M.-C. Lai，一种用于斯托克斯流中轴对称电流体动力学模拟的浸入界面法，计算物理通讯 **18**, 429 (2015).[61] D. Das 和 D. Saintillan，强电场中粘性液滴的电流体动力学：数值模拟，Journal of Fluid Mechanics **829**, 127 (2017).[62] X. Liu、Z. Chai 和 B. Shi，基于相场的格子玻尔兹曼建模，用于两相电流体动力学流动，Physics of Fluids **31** (2019).[63] S. Ramaswamy 和 L. Leal，牛顿流体中的稳态单轴拉伸流作用下黏弹性液滴的变形，《非牛顿流体力学杂志》**85**, 127 (1999).[64] R. W. Hooper、V. F. De Almeida、C. W. Macosko 和 J. J. Derby，单轴拉伸流动中聚合物液滴的瞬态拉伸与回缩，《非牛顿流体力学杂志》**98**, 141 (2001).[65] N. Aggarwal 和 K. Sarkar，稳态剪切作用下牛顿流体基质中黏弹性液滴的变形与破裂，Journal of Fluid Mechanics **584**, 1 (2007).[66] J.-W. Ha 和 S.-M. Yang，电场中二阶流体液滴的变形与破裂，韩国化学工程学报 **16**, 585 (1999).[67] J.-W. Ha 和 S.-M. Yang，电场中牛顿及非牛顿导电液滴的变形与破裂，Journal of Fluid Mechanics **405**, 131 (2000).[68] N. Lima 和 M. d’Avila，牛顿及黏弹性液滴电流体动力学流动的数值模拟，《非牛顿流体力学杂志》**213**, 1 (2014).[69] J. Zhao、V. Dzanic、Z. Wang 和 E. Sauret，电流体动力学效应对剪切流中黏弹性液滴变形的影响，Physics of Fluids **37**(2025).[70] S. K. Das、S. S. Bangar、A. Dalal 和 G. Tomar，黏弹性对电流体动力学液滴变形的影响，国际多相流杂志 **197**, 105633 (2026).[71] S. Popinet，一种用于Serre–Green–Naghdi方程的四叉树自适应多重网格求解器，Journal

of Computational Physics **302**, 336 (2015).[72] M. Alves、P. Oliveira 和 F. Pinho，黏弹性流体流动的数值方法，《流体力学年度评论》**53**, 509 (2021).[73] J. L´opez-Herrera、S. Popinet 和 M. Herrada，一种采用流体体积法模拟电流体动力学两相流动的电荷守恒方法，《计算物理学杂志》**230**, 1939 (2011).[74] R. Fattal 和 R. Kupferman，构象张量矩阵对数的本构定律，《非牛顿流体力学杂志》**123**, 281 (2004).[75] J.-M. L´opez-Herrera、S. Popinet 和 A.-A. Castrej´on-Pita，一种用于黏弹性不可压缩两相问题的自适应求解器，并将其应用于弱黏弹性液滴飞溅的研究，《非牛顿流体力学杂志》**264**, 144 (2019).