arXiv:2602.01912v1 [stat.ML] 2 Feb 2026

通过带共形校准的分位数回归森林可靠地实时估计风险价值

Du-Yi Wang[a, b]、Guo Liang[a]、Kun Zhang[c]、Qianwen Zhu[b]

[a]中国人民大学统计与大数据研究院，北京，中国[b]香港城市大学决策分析与运营学系，九龙，香港，中国[c]中国人民大学信息学院，北京，中国

摘要

市场状况的快速变化要求进行实时风险监测，但在线估计仍面临挑战。本文研究最广泛使用的风险度量之一——风险价值（VaR）的在线估计。准确可靠地估计风险价值对于及时进行风险控制和明智决策至关重要。我们提出在离线模拟—在线估计（OSOA）框架中使用分位数回归森林。具体而言，分位数回归森林通过离线训练，学习在线 VaR 与风险因子之间的关系；随后结合观测到的风险因子，在线生成实时 VaR 估计。为进一步确保可靠性，我们开发了一种保形化估计量，用于校准在线 VaR 估计。据我们所知，我们是首个基于 OSOA 方案利用共形校准可靠地估计实时 VaR 的研究。理论分析证明了所提估计量的一致性和覆盖有效性。数值实验验证了所提方法，并展示了其在实践中的有效性。

关键词：风险价值、分位数回归森林、随机模拟，

1. 引言

风险管理是金融机构日常运营的核心，准确的实时风险度量能够支撑交易限额、保证金要求、资本配置和监管合规（例如，Jiang 等人，2020；Huang 等人，2022；Valle，2025）。一个著名的例子是摩根大通的“4:15报告”，该报告要求在收盘后15分钟内完成全公司风险汇总，以管理隔夜敞口并为下一交易日的决策提供信息（Jorion，2006；Jiang 等人，2020）。值得注意的是，Jiang 等人（2020）将这一场景称为在线风险监测问题。

在这种在线监测情境中，风险度量是投资组合损失的函数，在观测到当前风险因子（如股票价格、利率和汇率）后计算得出。因此，这一计算可视为对条件风险度量的估计，即以观测到的风险因子为条件的风险度量。Jiang 等人(2020) 采用离线模拟—在线估计（OSOA）框架（Hong 和 Jiang，2019）。具体而言，离线阶段通过模拟风险因子与投资组合损失的配对数据来学习二者之间的函数关系；随后，在线阶段将实时风险因子输入已学习的关系中，以估计风险。事实上，不同的条件风险度量对应不同的函数关系。例如，Jiang 等人(2020) 研究给定实时风险因子时发生大额损失的概率，并提出使用逻辑回归来学习函数关系。本文关注风险价值（VaR）这一应用最广泛的风险度量之一，以及其在线估计的理论

依据。

风险价值（VaR）定义为给定置信水平下，投资组合损失概率分布的一个分位数。因此，在线 VaR 估计本质上是条件分位数估计；进一步说，在 OSOA 框架下，它相当于学习条件分位数函数，即分位数回归。此外，除了准确性和及时性，风险度量的可靠性也尤为重要，尤其是在 VaR 的情境中（例如，参见 巴塞尔银行监管委员会，1996；Campbell，2006）。可靠性与准确性有所不同，因为它会区分风险度量中的低估和高估。例如，在 200 个交易日内，99% 的日风险价值平均应产生约两次例外；当交易结果超过估计值时，即记为一次例外。在对称准确度指标下，一次或三次例外可能产生相同的评估误差；然而在实践中，一次例外（VaR 高估）优于三次例外（VaR 低估），因此被认为更加可靠。这种偏好源于低估可能引发监管应对措施，包括提高适用于内部模型资本要求的乘数；在更严重的情况下，还可能要求修订模型。相比之下，VaR 高估导致的例外较少，也不太可能招致监管行动（巴塞尔银行监管委员会，1996）。

本文旨在以实时方式估计风险价值，并提供理论保证。该问题面临三个方面的挑战：准确性、及时性和可靠性。首先，为了提高准确性，我们采用分位数回归森林（QRF）（Meinshausen，2006）来学习条件分位数函数。

请注意，大规模投资组合会带来高维风险因子（Broadie 等人，2015）。此外，由于风险因子到投资组合损失的映射高度非线性（Broadie 等人，2015），相应的条件分位数本质上十分复杂。因此，分位数回归森林是合适的选择，因为它在高维结构中表现良好，并且能够捕捉复杂的条件分位数曲面（Gnecco 等人，2024）。此外，与其他机器学习方法相比，分位数回归森林所需调参较少，且其统计特性相对较为明晰（Athey 等人，2019； Grinsztajn 等人，2022）。其次，通过应用 OSOA 框架来实现及时性，因为仅凭已学习函数进行预测就足以满足在线时限要求。第三，为确保可靠性，我们提出将共形校准纳入分位数回归森林。近年来，这项技术在机器学习（Angelopoulos和Bates，2023）和大语言模型（Cherian 等人，2024； Mohri 和 Hashimoto，2024）领域日益受到关注。校准通过使用留出的校准集修正分位数回归森林估计量来恢复目标覆盖水平；该校准集能够在经验上刻画原始分位数回归森林估计量的误差。

在我们的算法中，我们先利用风险因子与投资组合损失的模拟样本对离线训练 QRF 模型，然后通过在观测到的风险因子处评估拟合模型，在线估计风险价值。具体而言，对于 QRF，在训练阶段，它利用各棵树叶节点中的邻域观测值构建加权经验条件分布；在预测阶段，则根据该分布估计条件分位数。此外，训练完 QRF 模型后，我们在校准集上计算相对于 QRF 估计值的残差，并根据这些残差的相应经验分位数调整原始

估计值，从而得到共形化估计。我们的理论分析证明了所提出的 QRF估计量具有一致性，并为保形化估计量提供了覆盖率保证。

我们的贡献总结如下。

1. 我们针对在线VaR估计问题提出了一种 QRF估计量。由于在线 VaR 对应于条件分位数，我们在 OSOA 框架内将该问题建模为分位数回归任务，并使用 QRF 求解。OSOA 框架将耗时的计算移至离线阶段，从而确保及时性；因此，在线估计只需快速评估训练得到的回归模型。此外，QRF 非常适合复杂的高维条件分位数函数，因此能够提高准确性。

2. 我们进一步提出了一种共形化的分位数回归森林估计器，以提高可靠性。共形校准量化了分位数回归森林的超越误差，并对其进行补偿以恢复覆盖水平。我们在留出集上计算相对于分位数回归森林估计值的校准残差，并用这些残差的经验分位数修正估计值，从而使最终的共形化估计达到目标水平。据我们所知，尽管保形预测已在机器学习领域得到广泛研究（Angelopoulos和Bates，2023），但其在风险度量中的潜力仍未得到充分探索。本文展示了一种范式：利用共形校准恢复目标覆盖率，从而实现风险度量的可靠性，并以基于 OSOA 的表述作为连接分位数回归与

在线 VaR 估计的桥梁。

3. 我们对所提出的两种估计器的性能进行了理论分析。我们建立了 QRF 估计器的逐点一致性和 L^2 一致性，这表明随着离线样本量的增加，该估计器渐近地收敛于真实的条件分位数，无论是对每个固定风险因子而言，还是在风险因子上的平均意义下。此外，我们还证明了保形 QRF 估计器的覆盖保证。该估计器具有有限样本、与模型无关的边际覆盖有效性，即对于任意实时风险因子，在任意有限校准样本量和任意回归模型下，相应的投资组合损失低于估计值的概率至少达到目标概率。进一步地，随着离线样本量的增加，这一保证将从边际有效性增强为条件有效性。这些理论结果确保了我们估计结果的准确性和可靠性，从而使后续的管理决策更加有依据且更具说服力。

4. 我们开展了数值实验，以验证所提出方法的性能。我们采用包括平均均方根积分误差、平均针形损失和平均覆盖率在内的综合指标，在一个真实的投资组合风险测量示例中对这些估计器进行了全面评估。我们给出了数值结果，以展示所提出方法的有效性，并验证所提出估计器的理论分析。

1.1. 文献综述

我们的研究与三类文献相关。

离线模拟在线估计。Hong 和 Jiang（2019）提出了 OSOA 框架，并推动了相关文献不断发展（Jiang 等人，2020；Cai 等人，2020；Jiang 等人，2024；Luo 等人，2024；Keslin 等人，2025；Zhang 等人，2025；Lin 等人，2025）。在这类研究中，大多数在线应用属于优化任务，只有少数研究涉及投资组合风险度量估计问题。具体而言，Jiang 等人（2020）使用逻辑回归来估计大额损失的概率，并对风险类别进行分类。他们从理论上证明，随着离线样本量趋于无穷，估计概率与其真实值之间偏差较大的概率，以及错误分类的概率，都会以指数速度收敛。此外，Cai 等人（2020）采用自然梯度提升学习条件分布，进而估计不同类型的风险度量。然而，由于使用了梯度提升方法，他们并未证明这些估计量的一致性（Duan 等人，2020；Velthoen 等人，2023）。本文聚焦于在线 VaR 估计，并为其建立理论保证。

分位数回归。分位数回归由 Koenker 和 Bassett Jr （1978）提出；然而，当条件分位数曲面较为复杂时，早期的参数分位数回归可能会引入额外偏差（Koenker，2017；Gnecco 等，2024）。非参数核方法（Yu 和 Jones，1998）和样条方法（Koenker 等，1994）更加灵活，但由于维数灾难，在中高维情形下性能会迅速下降（Gnecco 等，2024）。此外，机器学习的发展推动了分位数回归方法的激增，包括梯度提升（Friedman，2001；Velthoen 等，2023）、神经网络（Taylor，2000）和随机森林

（Meinshausen，2006；Athey 等，2019；Gnecco 等，2024）。这些方法在协变量维度较高且条件分位数曲面复杂的情形下表现良好（Gnecco 等，2024）。

保形化分位数回归。保形预测是一种构建具有有限样本覆盖保证的预测区间的通用方法（例如参见 Angelopoulos和Bates，2023），并已应用于大语言模型中的不确定性量化（Cherian 等人，2024；Mohri和Hashimoto，2024）。Romano 等人(2019) 提出了保形化分位数回归（CQR），该方法生成的预测区间能够适应高度异方差情形下的局部变异性。重要的是，保形框架与底层分位数回归方法无关，因此可以自然地与分位数回归森林（QRF）相结合。关于 CQR 的进一步理论分析，包括逐点覆盖性质以及不同程序之间的比较，见 Sesia和Candès (2020)。本文将共形校准技术融入分位数回归森林（QRF），以确保风险价值估计量的可靠性，并建立覆盖保证。

本文其余部分安排如下。第2 节提出实时风险价值估计问题。第3 节介绍基于分位数回归森林的离线学习和在线估计算法。第4 节构建保形 QRF 估计器。第5 节为所提出的估计量提供理论保证。第6 节报告数值结果，第7节总结全文。

2. 问题表述

令$\mathbf{S}(t) = (S_1(t) \ldots, S_d(t))^\top \in \mathbb{R}^d$表示 $0 \leq t \leq T$时市场变量的价格动态，例如利率、股票价格、汇率及其他可交易资产。令 $\mathcal{F}_t$ 表示由截至时间 t的市场演化所生成的滤过。我们在下文定义满足 $0 < u < \tau < T$ 的三个关键时间点。

- T：投资组合中衍生工具（例如期权）的到期日。

- τ：用于评估投资组合风险的风险期限。

- u：需要风险估计的实时监测时点。

令 $L(\tau) \in \mathbb{R}$表示风险期限 τ 的投资组合损失，并令 $\mathbf{X}(t) = (X_1(t) \ldots, X_\nu(t))^\top \in \mathbb{R}^\nu$ （ $\nu \geq d$ ）表示时点 t, $0 \leq t \leq T$ 的风险因子，因此 $\mathbf{X}(\tau)$ 表示风险期限上的风险因子。投资组合通常包含收益具有非线性的衍生证券。因此， $L(\tau)$ 是在给定风险因子 $\mathbf{X}(\tau)$ 的条件下，投资组合在到期日的（折现）损失期望。根据 $\mathbf{S}(t)$ 的马尔可夫性质，$\mathbf{X}(\tau)$ 可以由 $\mathbf{S}(t)^{t\in[0,\tau]}$ 构造。例如，除 $\mathbf{S}(\tau)$ 外，$\mathbf{X}(\tau)$ 还可能包含路径依赖状态变量，如障碍期权的标的价格运行最大值或亚式期权的运行平均值（例如参见 Lai 等人，2024）。

在监测时刻 u，根据可用信息 $\mathcal{F}_u$，我们观测到风险因子的一个实现，记为 $\mathbf{x}(u) = (x_1(u) \ldots, x_\nu(u))^\top \in \mathbb{R}^\nu$。因此，在线风险度量问题是估计条件风险

度量，即在 $\mathbf{X}(u) = \mathbf{x}(u)$ 给定的条件下， $L(\tau)$ 的风险度量：

$$f_u(\mathbf{x}(u)) = \rho\left(L(\tau) \mid \mathbf{X}(u) = \mathbf{x}(u)\right),$$

其中， $\rho(\cdot)$ 表示一个通用的风险度量函数。在本文中，我们关注在线 VaR 估计，其中目标函数是在置信水平 $\alpha \in (0, 1)$ 下，给定 $\mathbf{X}(u) = \mathbf{x}(u)$ 时， $L(\tau)$ 的条件 α分位数：

$$\begin{aligned} v_\alpha(\mathbf{x}(u)) = f_u(\mathbf{x}(u)) &= Q_\alpha(L(\tau) \mid \mathbf{X}(u) = \mathbf{x}(u)) \\ &= \inf\left\{y \in \mathbb{R} : \mathbb{P}\left(L(\tau) \le y \mid \mathbf{X}(u) = \mathbf{x}(u)\right) \ge \alpha\right\}, \end{aligned}$$

其中， $Q_\alpha(\cdot \mid \cdot)$ 表示条件 α分位数算子。

这里，我们直观地解释这一目标函数，以说明该问题为何并不简单。投资组合损失函数 $L(\tau)$ 是非线性的，且没有封闭形式（Broadie 等人，2015；Hong 等人，2017；Jiang 等人，2020；Wang 等人，2024）。此外，我们的目标函数是 $L(\tau)$ 的条件分位数，因此估计起来本质上更加困难，因为条件化会降低局部有效样本量，而尾部分位数又会进一步放大数据稀缺性。

3. QRF估计量

为应对实时估计的挑战，我们采用 OSOA 范式。该范式由两个阶段组成：用于繁重计算的离线阶段，以及用于快速评估的在线阶段（Hong 和 Jiang，2019）。下面，我们将详细介绍每个阶段。

1. **离线阶段：模拟与学习。**

   我们根据基础随机模型模拟 n 条独立样本路径 $\mathbf{S}_i(t)_{t\in[0,\tau]}$， $i = 1, \ldots, n$，

同时通过嵌套模拟获得相应的投资组合损失 $L_i(\tau)$。具体而言，给定每条生成的路径$\mathbf{S}_i(t)_{t\in[0,\tau]}$，我们抽取 m 条独立内层路径 $\mathbf{S}_{i,j}(t)_{t\in[\tau,T]}$ $j=1,\ldots,m$，计算时间 T 的终端收益及相应损失 $l_{i,j}(\tau)$，然后使用平均值 $\sum_{j=1}^{m} l_{i,j}(\tau)/m$计算投资组合损失 $L_i(\tau)$。该过程生成数据集 $\{(\mathbf{X}_i(u),\ L_i(\tau))\}_{i=1}^{n}$。

基于该数据集，我们训练一个条件分位数回归模型，以学习从 $\mathbf{X}(u)$ 到 $L(\tau)$ 的条件 α-分位数的映射，记为 $f_u(\cdot)$。

2. **在线阶段：估计**。

   在观测到现实世界风险因子$\mathbf{x}(u)$后，我们将其输入所学模型，并返回 $f_u(\mathbf{x}(u))$ 作为实时风险价值估计。

我们对这一算法作几点说明。首先，用于计算 $L_i(\tau)$ 的嵌套模拟程序细节可见于 Gordy 和 Juneja（2010）以及 Zhang 等（2022），而 $\mathbf{X}_i(u)$ 的构造可遵循 Lai 等（2024）。其次，我们不考虑使用有限数量内层样本所带来的误差。这是合理的，因为离线阶段计算时间充裕，使我们能够为内层模拟分配足够的预算，从而使内层误差几乎可以忽略（Jiang等人，2020；Cai 等人，2020）。第三，为学习模型 $f_u(\cdot)$，我们在 OSOA 框架内采用分位数回归森林（Meinshausen，2006）作为分位数回归的一种替代方法。下文将给出分位数回归森林的详细步骤。

ˆ 在离线阶段，为了获得 $f_u(\cdot)$，我们使用自助重抽样和随机分裂规则，构建由 B 个回归树 $T(\theta_b)_{b=1}^{B}$ 组成的集成，其中 θ_b 汇集了构建过程中的所有随机性

树 b 的随机性。在在线阶段，新数据点 $\mathbf{x}(u)$ 会沿每棵树 $T(\theta_b)$ 向下传播至叶节点 $l(\mathbf{x}(u), \theta_b)$，其对应区域为 $R_{l(\mathbf{x}(u),\theta_b)}$。对于每个训练样本 $\mathbf{X}_i(u)$、$i = 1,\ldots,n$，其树权重定义为

$$w_i(\mathbf{x}(u), \theta_b) = \frac{\mathbf{1}\{\mathbf{X}_i(u) \in R_{l(\mathbf{x}(u),\theta_b)}\}}{\#\{j : \mathbf{X}_j(u) \in R_{l(\mathbf{x}(u),\theta_b)}\}},$$

其中，$\#\{\cdot\}$ 表示集合的基数，$\mathbf{1}\{\cdot\}$ 表示指示函数。对所有树取平均，即可得到森林权重

$$w_i(\mathbf{x}(u)) = \frac{1}{B}\sum_{t=1}^{B} w_i(\mathbf{x}(u), \theta_b).$$

因此，条件 α 分位数，即置信水平为 α 时的风险价值，估计为

$$\hat{v}_\alpha(\mathbf{x}(u)) = \hat{f}_u(\mathbf{x}(u)) = \inf\left\{y \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{n} w_i(\mathbf{x}(u))\mathbf{1}\{L_i(\tau) \le y\} \ge \alpha\right\}.$$

我们将此估计器称为 QRF 估计器。

4. 保形 QRF 估计器

QRF估计量旨在实现准确预测，但无法区分低估和高估。然而，在实践中，高估通常比低估更受欢迎。例如，当使用估计的风险价值来确定保证金要求时，持有更大的保证金缓冲通常更为可取；否则，机构可能会因资本缓冲不足而面临巨大的下行风险。总而言之，轻微高估通常是可以接受的，而低估则不可取。

受这一考虑的启发，我们进一步开发了一种估计器，以满足覆盖率标准。其主要思想源自 CQR（Romano 等人，2019），该方法提供了一个校准步骤，用于调整基础分位数估计量，以达到指定的覆盖水平。我们的算法具体实现如下。在离线阶段，给定数据集 $\{(\mathbf{X}_i(u)\ L_i(\tau)\}_{i=1}^n$，我们将索引集不相交地划分为训练集和校准集，分别记为$\mathcal{I}_1$ 和 $\mathcal{I}_2$。分位数回归模型（例如 QRF）仅使用由 $\hat{}$索引的数据进行训练，以获得 $\hat{}v_\alpha(\cdot)$，或记为 $f_u(\cdot)$。随后，我们在校准集 $\mathcal{I}_2$上计算一致性分数，

$$E_i = L_i(\tau) - \hat{v}_\alpha(\mathbf{X}_i(u)), \quad i \in \mathcal{I}_2,$$

并将 $q_\alpha(E, \mathcal{I}_2)$定义为一致性分数$\{E_i\}_{i\in\mathcal{I}_2}$的经验 α-分位数。在在线阶段，给定新的观测值$\mathbf{x}(u)$，保形 QRF 估计器由下式给出

$$\hat{v}_\alpha^{\mathrm{c}}(\mathbf{x}(u)) = \hat{v}_\alpha(\mathbf{x}(u)) + q_\alpha(E, \mathcal{I}_2).$$

我们对这一估计器作几点说明。该过程可视为在条件分位数回归之后施加的灵活校准步骤，它利用校准集对初始回归估计值进行保形化，以提高覆盖有效性。此外，由于其无模型特性，这一校准思想可与分位数回归森林之外的一大类分位数回归方法相结合。

5. 理论保证

为方便记号，我们记 $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u)$、$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u)$ 和 $Y = L(\tau)$，并省略时间索引，因为它与我们的分析无关。我们

将 $F(y \mid \mathbf{x}) = \mathbb{P}(Y \leq y \mid \mathbf{X} = \mathbf{x})$ 记作。此外，$g(n) = o(f(n))$ 表示 $g(n)/f(n) \to 0$，其中 $n \to \infty$。进一步地，对于两个随机变量序列 $\{U_n\}$ 和 $\{V_n\}$，$U_n = o_p(V_n)$ 表示 $U_n/V_n \xrightarrow{p} 0$，其中 $n \to \infty$。为便于分析估计量，我们作出以下假设。

假设 1. $\mathbf{X}$的支撑集记为 $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{\nu}$，其有界，且$\mathbf{X}$的密度为正，并被正的常数从上下两侧所界定。

假设 1对风险因子的分布作出了假设，该假设也用于以下文献中：Wang 等人(2024)。

假设 2. 记由参数 θ 构造的树中叶节点 l 的大小为 $k_\theta(l) = \#\left\{i \in \{1, \ldots, n\} : \mathbf{X}_i \in R_{l(\mathbf{x},\theta)}\right\}$。当 $n \to \infty$ 时，$\max_{l,\theta} k_\theta(l) = o(n)$ 且 $1/\min_{l,\theta} k_\theta(l) = o(1)$。

假设 2 对叶节点提出了两个条件。具体而言，任一叶节点中的观测值占全部观测值的比例随着 n增长而趋于零，且每个叶节点中的最小观测值数量趋于无穷大。

假设 3。 设 r 是树中的任意节点，含有 n_r 个观测值。若对 r 进行分裂，则存在常数 $C_0 > 0$，使得对于任意坐标 $m \in \{1, \ldots, \nu\}$，维度 m 被选为分裂变量的概率至少为 C_0。此外，存在常数 $\gamma \in (0, 1/2]$，使得每当节点 r 被分裂时，生成的每个子节点 r_c 均满足 $n_{r_c}/r_v \geq \gamma$。

假设 3对基于树的方法中的叶节点施加了两个标准正则条件。第一个条件确保选择

用于分裂的任意特征的概率不会过小。第二个条件确保分裂后生成的子节点不会出现样本量高度不均衡的情况。假设2 和 3 是随机森林相关文献中的标准正则条件（Meinshausen，2006；Wager 和 Athey，2018；Athey 等，2019；Cevid 等，2022）。

A假设4。 对于任意$\mathbf{x}$、$\mathbf{x}' \in \mathcal{X}$，存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |F(y \mid \mathbf{x}) - F(y \mid \mathbf{x}')| \leq C \left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}' \right\|_1 ,$$

其中，$\| \cdot \|_1$ 表示 ℓ_1 范数。

假设4 指出，条件分布函数关于$\mathbf{x}$ 是利普希茨连续的，参数为 C。

假设5。 对于任意$\mathbf{x} \in \mathcal{X}$，$F(y \mid \mathbf{x})$ 关于 y严格单调递增。

假设4和5已被Meinshausen (2006)使用。

定理1。 在假设*1–5*下，对于任意$\mathbf{x} \in \mathcal{X}$，所提出的置信水平为 α 的风险价值在线估计量满足

$$\hat{v}_\alpha(\mathbf{x}) \xrightarrow{p} v_\alpha(\mathbf{x}), \quad n \to \infty,$$

其中 n 为离线样本量。

证明。 下文中，我们通过应用函数泛函的连续映射定理（Wainwright，2019）来证明该结果。为此，我们需要验证两个条件。根据假设1–5，由Meinshausen（2006）中的定理1可得

$$\| \hat{F}_n(\cdot \mid \mathbf{x}) - F(\cdot \mid \mathbf{x}) \|_\infty = \sup_{y \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(y \mid \mathbf{x}) - F(y \mid \mathbf{x})| \xrightarrow{p} 0, \quad n \to \infty,$$

其中 $\hat{F}_n(y \mid \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_i(\mathbf{x}) \mathbf{1}\{Y_i \le y\}$。因此，第一个条件得到验证。注意，条件分位数估计量和真实条件分位数 $\hat{}$ 均可分别重写为 $F_n(y \mid \mathbf{x})$ 和 $F(y \mid \mathbf{x})$ 的分位数泛函 Q^α，其中 $Q^\alpha(G) = \inf\{z \in \mathbb{R}: G(z) \ge \alpha\}$。为方便起见，我们记 $q = v_\alpha(\mathbf{x})$，于是 $F(q \mid \mathbf{x}) = \alpha$。根据假设5，对于任意 $\epsilon > 0$，有 $F(q-\epsilon \mid \mathbf{x}) < F(q \mid \mathbf{x}) < F(q+\epsilon \mid \mathbf{x})$。令

$$\delta = \min\{\alpha - F(q-\epsilon \mid \mathbf{x}), F(q+\epsilon \mid \mathbf{x}) - \alpha\} > 0.$$

若 $\|F_n(\cdot \mid \mathbf{x}) - F(\cdot \mid \mathbf{x})\|_\infty \le \delta$，则 $\sup_{y\in\mathbb{R}} |F_n(y \mid \mathbf{x}) - F(y \mid \mathbf{x})| \le \delta$，因此对于任意 $z \in \mathbb{R}$，$|F_n(z \mid \mathbf{x}) - F(z \mid \mathbf{x})| \le \sup_{y\in\mathbb{R}} |F_n(y \mid \mathbf{x}) - F(y \mid \mathbf{x})| \le \delta$。换言之，$-\delta \le F_n(z|\mathbf{x}) - F(z|\mathbf{x}) \le \delta$，即 $F(z \mid \mathbf{x}) - \delta \le \hat{F}_n(z \mid \mathbf{x}) \le F(z \mid \mathbf{x}) + \delta$。若 $z \le q - \epsilon$，则有 $F_n(z \mid \mathbf{x}) \le F_n(q-\epsilon \mid \mathbf{x}) \le F(q-\epsilon \mid \mathbf{x}) + \delta < \alpha$，其中最后一个不等式根据 δ 的定义得出。类似地，若 $z \ge q + \epsilon$，则有 $F_n(z \mid \mathbf{x}) \ge F_n(q+\epsilon \mid \mathbf{x}) \ge F(q+\epsilon \mid \mathbf{x}) - \delta > \alpha$。因此，$q - \epsilon < Q^\alpha(F_n(y \mid \mathbf{x})) < q + \epsilon$，即 $|Q^\alpha(F_n(y \mid \mathbf{x})) - q| = |Q^\alpha(F_n(y \mid \mathbf{x})) - Q^\alpha(F(y \mid \mathbf{x}))| < \epsilon$。根据定义可验证第二个条件：$Q^\alpha$ 关于上确界范数在 F 处连续。因此，证明完毕。

□

定理 1确立了QRF估计量的逐点一致性，确保随着离线样本量的增加，所估计的条件分位数依概率收敛于真实的风险价值。尽管一致性保证该估计器在渐近意义上是正确的，但它允许出现罕见却任意大的估计误差，并且无法对估计误差的矩加以控制，从而限制了其在在线分析中的实用性。为加强这一结果，我们施加一个额外的矩条件，并

在定理2中确立均方意义下的收敛。

假设6。 存在常数 $\delta > 0$ 和 $M < \infty$，使得对于所有$\mathbf{x}$，

$$\mathbb{E}\big[|Y|^{2+\delta} \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}\big] \leq M.$$

定理2。 假设假设*1–6*成立。进一步假设树构建满足诚实性条件（例如，参见*Athey* 和 *Imbens*，*2016*；*Wager* 和 *Athey*，*2018*）。具体而言，用于确定树结构（即分裂序列）的随机化与响应样本相互独立 $\{Y_i\}_{i=1}^n$，因此响应仅用于估计固定的、与数据无关的划分中各叶节点内的量。于是，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[\big(\hat{v}_\alpha(\mathbf{X}) - v_\alpha(\mathbf{X})\big)^2\Big] = 0,$$

其中 n 表示离线样本量。

证明。 证明分为三个步骤。首先，我们证明在随机协变量$\mathbf{X}$处依概率收敛。随后，我们推导 $v_\alpha(\mathbf{X})$ 和 $\hat{}v_\alpha(\mathbf{X})$ 的一致 $(2+\delta)$ 矩界。最后，我们结合这些结果，通过一致可积性得出 L^2 收敛。

步骤1：在随机 X 处依概率收敛。

定理 1 表明，对于任意固定的 $\mathbf{x}$，

$$\hat{v}_\alpha(\mathbf{x}) \xrightarrow{p} v_\alpha(\mathbf{x}), \qquad n \to \infty.$$

令 $\varepsilon > 0$。注意，

$$\mathbb{P}\big(|\hat{v}_\alpha(\mathbf{X}) - v_\alpha(\mathbf{X})| > \varepsilon\big) = \mathbb{E}\Big[\mathbb{P}\big(|\hat{v}_\alpha(\mathbf{X}) - v_\alpha(\mathbf{X})| > \varepsilon \mid \mathbf{X}\big)\Big]. \tag{1}$$

对于 $\mathbf{X}$ 的几乎每个实现，右侧的条件概率根据逐点一致性收敛到零。由于它介于 0 和 1 之间，控制收敛定理给出

$$\hat{v}_\alpha(\mathbf{X}) - v_\alpha(\mathbf{X}) \xrightarrow{p} 0, \qquad n \to \infty. \tag{2}$$

步骤 2： $(2+\delta)$ **阶矩界。**

我们首先推导 $v_\alpha(\mathbf{X})$ 的矩界。令 $p = 2+\delta$ and $\beta = \min\{\alpha, 1-\alpha\}$。根据 $v_\alpha(\mathbf{x})$ 的定义，

$$\mathbb{P}\big(|Y| \geq |v_\alpha(\mathbf{x})| \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}\big) \geq \beta. \tag{3}$$

另一方面，马尔可夫不等式表明

$$\mathbb{P}\big(|Y| \geq |v_\alpha(\mathbf{x})| \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}\big) \leq \frac{\mathbb{E}\big[|Y|^p \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}\big]}{|v_\alpha(\mathbf{x})|^p}.$$

将此不等式与 (3) 结合可得

$$|v_\alpha(\mathbf{x})|^p \leq \frac{1}{\beta}\mathbb{E}\big[|Y|^p \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}\big] \leq \frac{M}{\beta},$$

其中，最后一个不等式由假设 6 得出。因此，

$$\mathbb{E}\big[|v_\alpha(\mathbf{X})|^{2+\delta}\big] < \infty. \tag{4}$$

接下来，我们推导 $\hat{}v_\alpha(\mathbf{x})$ 的确定性界。对于任意$\mathbf{x}$，我们声称，对于 $\{Y_i\}_{i=1}^n$ and $\{w_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^n$ 的每个实现，

$$|\hat{v}_\alpha(\mathbf{x})|^p \leq \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x})\,|Y_i|^p. \tag{5}$$

注意到，$\hat{}v_\alpha(\mathbf{x})$ 的定义意味着

$$\sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x})\mathbf{1}\big\{|Y_i| \geq |\hat{v}_\alpha(\mathbf{x})|\big\} \geq \beta, \tag{6}$$

分别考虑 $\hat{v}_\alpha(\mathbf{x}) \le 0$ 和 $\hat{v}_\alpha(\mathbf{x}) \ge 0$ 的情形，即可得到这一结论。应用不等式

$$\mathbf{1}\{|a| \ge t\} \le |a|^p / t^p, \qquad t > 0,$$

与 $t = |\hat{v}_\alpha(\mathbf{x})|$ 相结合，并与（6）结合，得到（5）。

对（5）取期望，在给定 $\mathbf{X}$、$\{\mathbf{X}_i\}_{i=1}^n$以及树结构 θ_b的条件下，诚实性意味着

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{X})|Y_i|^p \;\middle|\; \mathbf{X}, \{\mathbf{X}_i\}_{i=1}^n, \theta_b\right] = \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{X})\mathbb{E}\left[|Y_i|^p \mid \mathbf{X}_i\right] \le M.$$

因此，

$$\sup_{n\ge 1} \mathbb{E}\left[|\hat{v}_\alpha(\mathbf{X})|^{2+\delta}\right] \le \frac{M}{\beta} < \infty. \tag{7}$$

步骤3：一致可积性与 L^2 收敛。

利用不等式 $|a-b|^p \le 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$与 $p = 2+\delta$，我们得 n

$$\mathbb{E}\left[|\hat{v}_\alpha(\mathbf{X}) - v_\alpha(\mathbf{X})|^{2+\delta}\right] \le 2^{1+\delta}\Big(\mathbb{E}|\hat{v}_\alpha(\mathbf{X})|^{2+\delta} + \mathbb{E}|v_\alpha(\mathbf{X})|^{2+\delta}\Big).$$

结合（4）与（7），我们得到

$$\sup_{n\ge 1} \mathbb{E}\left[|\hat{v}_\alpha(\mathbf{X}) - v_\alpha(\mathbf{X})|^{2+\delta}\right] < \infty. \tag{8}$$

根据Durrett（2019）的定理 4.6.2，该界意味着族$\{(\hat{v}_\alpha(\mathbf{X}) - v_\alpha(\mathbf{X}))^2\}_{n\ge 1}$是一致可积的。

结合式（2）中得到的依概率收敛，Durrett(2019) 的定理 4.6.3 得出 L^1 平方误差收敛。因此，

$$\mathbb{E}\Big[(\hat{v}_\alpha(\mathbf{X}) - v_\alpha(\mathbf{X}))^2\Big] \to 0, \qquad n \to \infty.$$

这就确立了所需的 L^2 收敛性。 □

假设6 中的附加矩条件排除了尾部过重的响应分布，从而确保条件VaR保持良好的性质，并使分位数估计误差具有有限的二阶矩。结合树构建中的诚实性条件，这些假设可保证基于QRF的VaR估计量在均方意义下收敛。更重要的是，这种更强形式的收敛为确立渐近有效性提供了基础构件。现在我们来分析保形 QRF 估计器$\hat{v}_{\alpha}^{c}$。

命题1。 如果样本 $\{(\mathbf{X}_i, Y_i)\}_{i=1}^{n+1}$ 是可交换的，那么

$$\mathbb{P}\{Y_{n+1} \leq \hat{v}_{\alpha}^{c}(\mathbf{X}_{n+1})\} \geq \alpha.$$

命题 1 可由 Romano 等人 (2019的定理1推出。该定理为保形化在线VaR估计量提供有限样本、无模型的边际覆盖概率保证，前提是将 $\mathbf{X}_{n+1}$ 视为在线观测到的风险因子。此外需要注意，在我们的设定中，可交换性比独立同分布条件更弱，因此很容易满足。另外，人们可能对更强的条件形式感兴趣；定理3 通过建立渐近条件覆盖保证对其进行了形式化。

定理3。 在满足定理2的条件下，进一步假设一致性分数 E 的密度在零的某个开邻域内有正下界，并且给定 Y 时，$\mathbf{X} = \mathbf{x}$的条件分布相对于勒贝格测度具有连续密度。那么存在一个随机集序列 $\Lambda_n \subseteq \mathbb{R}^d$ 使得 $\mathbb{P}(\mathbf{X} \in \Lambda_n) = 1 - o(1)$

and

$$\sup_{\mathbf{x}\in\Lambda_n}\left|\mathbb{P}\big(Y\le\hat{v}^{\mathrm{c}}_{\alpha,n}(\mathbf{x})|\mathbf{X}=\mathbf{x}\big)-\alpha\right|=o_p(1).$$

证明。 结论可通过结合 L^2 定理2 中得到的收敛性与额外的正则性假设，并应用Sesia 和 Candès (2020)中的推论 **1** 立即得出。

□

此外，通过遵循随机森林中已有的做法（Wager 和 Walther，2015），这些结果可以扩展到不采用诚实性的情形。

6. 数值实验

我们考虑一个现实的投资组合风险度量问题，其中涉及基于多个标的资产的期权，其设定改编自Hong 等人（2017）。具体而言，资产价格动态 $\mathbf{S}(t)$ 由一个 d 维几何布朗运动控制，其漂移为 μ_i'，波动率为 σ_i，两两相关性为 ρ_{ij}、 i、 $j=1,$ ....., d。具体来说，每个标的资产价格按照以下方式演化

$$\frac{\mathrm{d}S_i(t)}{S_i(t)}=\mu_i'\,\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{i}A_{ij}\,\mathrm{d}B_j(t),\qquad i=1,\dots,d,$$

其中 $\{B_j(t)\}_{j=1}^{d}$ 为相互独立的标准布朗运动，下三角矩阵 A 满足 $\Sigma=AA^{\top}$ ，协方差矩阵 $\Sigma=(\Sigma_{ij})$ 由 $\Sigma_{ij}=\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}$ 给出。

根据伊藤公式，资产价格具有如下显式表达式

$$S_i(t)=S_i(0)\exp\left\{\left(\mu_i'-\tfrac{1}{2}\sigma_i^2\right)t+\sum_{j=1}^{i}A_{ij}B_j(t)\right\},\quad i=1,\dots,d.$$

注意，漂移参数 μ' 被指定为现实世界预期收益率μ（在风险期限 $[0,\tau]$上），并被指定为无风险利率 r（在风险中性概率测度下，于$(\tau,T]$上）。为简便起见，我们假设所有资产具有相同的参数，因此在这些记号中省略下标。我们设定$S(0) = 100$、 $\mu = 0.08$、 $r = 0.05$、 $\sigma = 15\%$以及 $\rho = 0.3$。

在我们的示例中，我们设定 $d = 4$，投资组合由二十份欧式看涨期权组成，每个标的资产对应五份期权，行权价格分别为 $K_1 = 90$、 $K_2 = 95$、 $K_3 = 100$、 $K_4 = 105$ 和 $K_5 = 110$。假定所有期权具有共同的到期日 T。我们设定 $T = 1/12$，即一个月， $\tau = 1/52$，即一周，以及用于在线估计的监测时点 $u = 1/252$，即一天。时刻 0 的投资组合价值记为 $V(0)$，可利用布莱克–斯科尔斯公式解析计算。风险期限 τ 处的投资组合价值由下式给出

$$V(\tau) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{5} \mathrm{e}^{-r(T-\tau)}\big(S_k(T) - K_j\big)^+ \,\middle|\, \mathbf{X}(\tau)\right],$$

其中，在本例中 $\mathbf{X}(\tau) = \mathbf{S}(\tau)$。据此，时刻$\tau$ 的投资组合损失定义为

$$L(\tau) = V(0) - V(\tau).$$

具体而言，在计算 $V(\tau)$时，我们使用 500 条内层模拟路径来近似条件期望，这被认为足以使内层误差相对于估计误差可以忽略不计（Jiang 等人，2020；Cai 等人，2020）。

为验证定理 1 和 2中的 QRF 估计器的一致性，我们考察不同离线样本量下的估计误差。对于

保形 QRF 估计器，我们使用 70% 的离线样本进行训练，其余 30% 用于校准。此外，我们改变置信水平 α，以考察这些方法在不同情形下的表现。具体而言，α 设为 90.0%、95.0%、99.0% 和 99.5%。

我们使用两种指标来量化估计误差。第一种是平均积分平方误差平方根（MRISE），该指标用于分位数回归的实证研究（例如，Bondell 等人，2010），其定义如下：

$$\mathrm{MRISE} = \frac{1}{m'} \sum_{i=1}^{m'} \sqrt{\frac{1}{n'} \sum_{j=1}^{n'} \left(v_\alpha(\mathbf{x}_{i,j}) - \hat{v}_\alpha(\mathbf{x}_{i,j}) \right)^2},$$

其中，n' 表示协变量评估点的数量，m' 表示重复次数。这里，引入 n' 和 m'，通过对多个协变量点以及重复的模型训练运行结果取平均，来稳定性能评估，从而兼顾协变量变化和模型学习带来的不确定性。在所有实验中，我们设定 $n' = 1000$ 和 $m' = 40$。

第二个指标是平均针球损失（MPL）。与 MRISE 相比，MPL 能体现这种非对称性：低估所受的惩罚大于高估。监管评估方法中也使用了类似的非对称指标（Lopez，1998）。因此，倾向于保守估计的估计器，即略微高估目标值的估计器，往往能取得较小的 MPL。具体而言，其定义为

$$\mathrm{MPL} = \frac{1}{m'} \sum_{i=1}^{m'} \left(\frac{1}{n'} \sum_{i=1}^{n'} \rho_\alpha \left(v_\alpha(\mathbf{x}_{i,j}) - \hat{v}_\alpha(\mathbf{x}_{i,j}) \right) \right), \ \rho_\alpha(a) = \begin{cases} \alpha a, & a > 0, \\ (\alpha - 1)a, & a \leq 0. \end{cases}$$

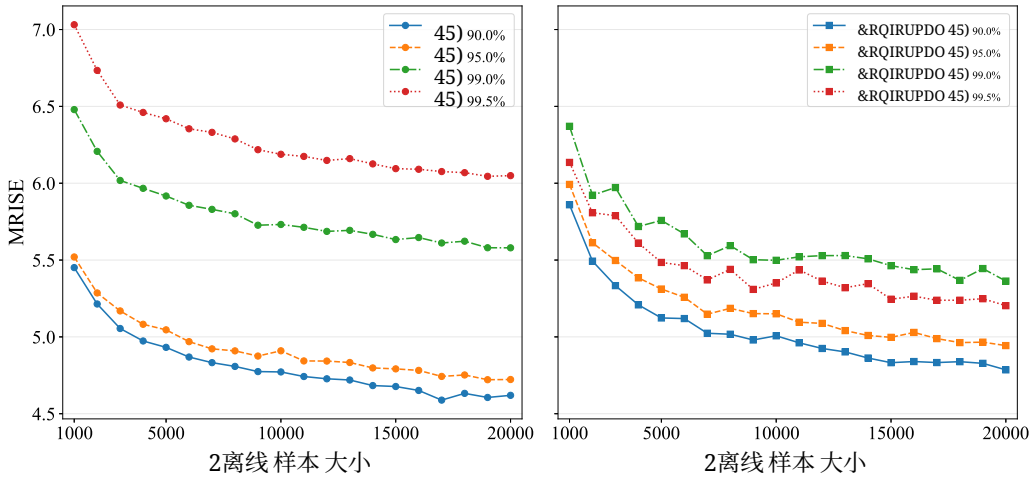


图1：不同离线样本量和分位数水平下，QRF（左）和保形QRF（右）的MRISE。

图1 展示了分位数回归森林和保形 QRF 在不同离线样本量及 VaR 置信水平下的 MRISE。对于每个置信水平，随着离线样本量增加，QRF估计量的 MRISE 会降低并趋于收敛，这与定理1 和2中确立的理论保证一致。此外，还可以观察到，QRF 的 MRISE 往往会随着置信水平的提高而增大，这是因为极端区域的数据点稀少，导致尾部分位数本身难以估计（Gnecco 等，2024）。然而，对于保形 QRF，除 $\alpha = 99.5\%$外，校准步骤后 MRISE 并未降低。这是可以接受的，因为保形化并非针对这种对称指标进行设计的。此外，令人欣慰的是，保形 QRF 估计器呈现出与 QRF估计量相似的收敛趋势，为其在实际应用中的可靠性提供了经验证据。

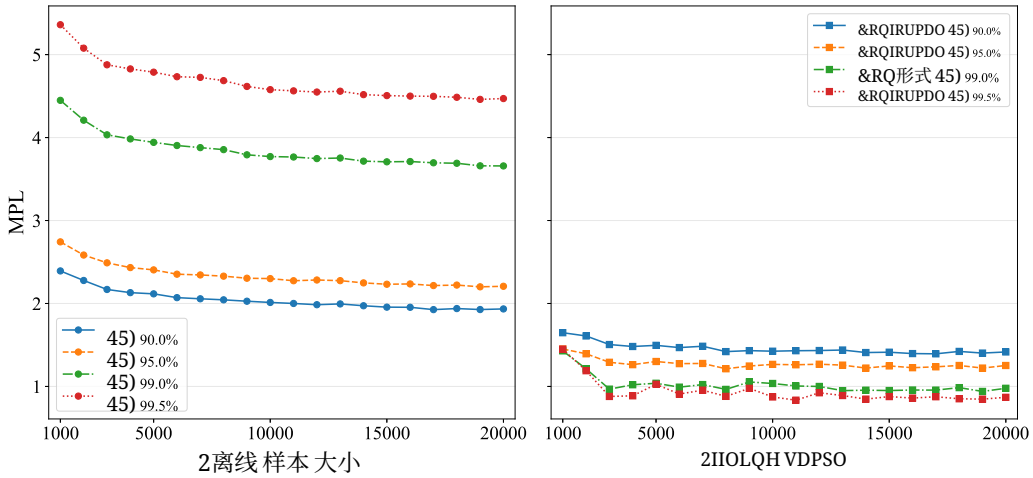


图 2：不同离线样本量和分位数水平下，QRF（左）和保形QRF（右）的 MPL。

图2比较了不同离线样本量和风险价值置信水平下 QRF 与保形 QRF 的 MPL。可以观察到，保形 QRF 的 MPL 小于 QRF，这与图1中的 MRISE 表现不同，证实了所设计的校准步骤的有效性。有趣的是，经过共形校准后，置信水平越极端，MPL 的下降就越明显。这看起来有些违反直觉，因为通常越极端的分位数越难估计，因此误差也越大。事实上，这种趋势源于 MPL 的定义：它会按因子 $1-\alpha$惩罚高估；当 α 较大时，该因子便可忽略不计。因此，倾向于高估的、更保守的估计器可以获得更小的 MPL。请注意，保形 QRF 正是这样的估计器，因此它在所有置信水平下都能改善 MPL，且在最极端的置信水平下改善最为显著。此外，不同置信水平下的 MPL 值不可直接比较

不同置信水平下的 MPL 值不可直接比较，因为针形损失取决于 α；而 MRISE 在不同水平间的比较则有意义。

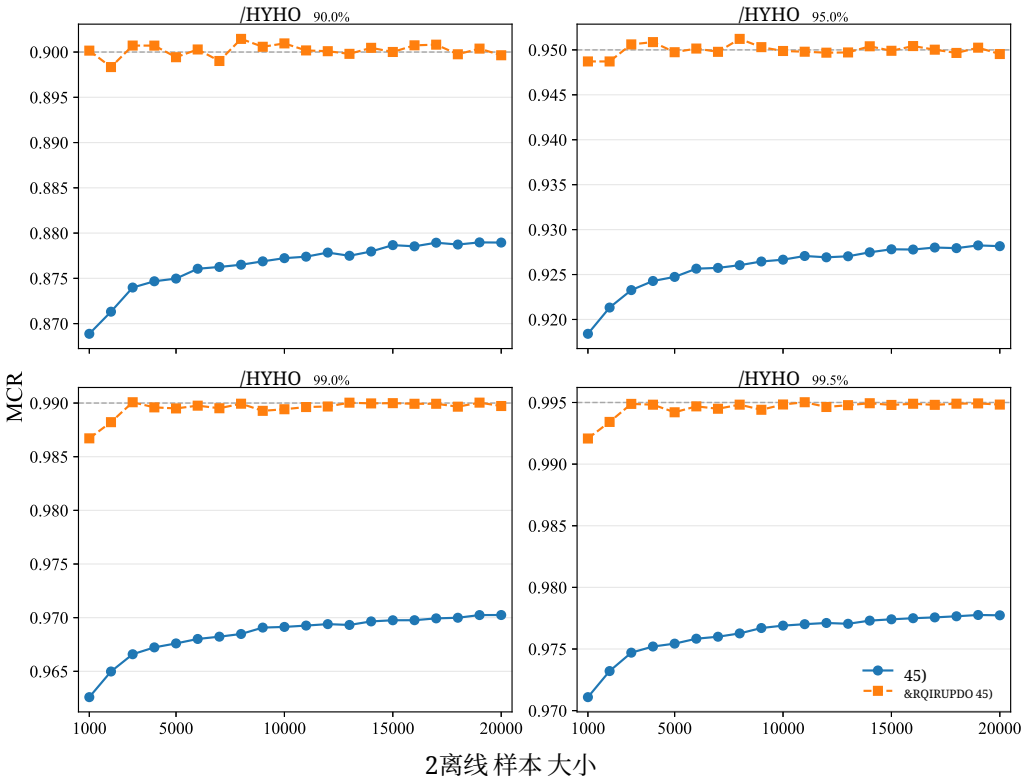


图3：不同离线样本量和分位数水平下，分位数回归森林与保形QRF的MCR。

接下来，我们考察定理3中的覆盖率结果。具体而言，对于评估的协变量$\mathbf{x}$，我们使用与构造离线样本时相同的数据生成过程，生成 $M = 25,000$ 个投资组合损失$\{Y^{(m)}\}_{m=1}^{M}$ 的独立实现。然后，覆盖率（CR）按如下方式

计算:

$$\mathrm{CR} = \frac{1}{n'} \sum_{i=1}^{n'} \left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \mathbf{1}\{Y_i^{(m)} \leq \hat{v}_\alpha(\mathbf{x}_i)\} \right).$$

为清晰起见，我们报告平均覆盖率（MCR），即对m' 个协变量的覆盖率取平均值，因为尽管各个协变量点的结果与总体趋势一致，但波动较大。

图中绘出了不同离线样本量下，几种风险价值置信水平对应的 QRF 和保形 QRF 的 MCR 3。可以看出，保形 QRF 估计器达到了目标水平，这验证了定理 3 中的覆盖率保证。此外，随着离线样本量增加，QRF 估计器逐渐接近目标水平，但仍存在显著的覆盖不足。这正是我们引入共形校准步骤以恢复覆盖率并缓解不理想低估的动机，也可作为支持性实证证据。

7. 结论

本文研究了 OSOA 框架下金融投资组合的实时VaR估计问题，提出了QRF估计量和保形 QRF 估计器，并分析了它们的理论性质。数值结果表明，我们的方法高效且可靠。

CRediT 作者贡献声明

Du-Yi Wang：撰写——初稿、方法学、软件、可视化、数据整理。**Guo Liang**：撰写——审阅与编辑、方法学、验证。**Kun Zhang**：撰写——审阅与编辑、概念构思、方法学、经费获取、监督、项目管理、验证。**Qianwen Zhu**：撰写——初稿、方法学、概念构思、调查研究、软件、正式分析。

利益冲突声明

未声明。

稿件准备过程中生成式人工智能及人工智能辅助技术的使用声明

在准备这项工作期间，作者使用 ChatGPT 润色语言。使用该工具后，作者根据需要审阅并编辑了内容，并对已发表文章的内容承担全部责任。

数据可用性声明

数据可应要求提供。

参考文献

Angelopoulos, A.N., Bates, S., 2023. 保形预测：浅显入门。《机器学习基础与趋势》16, 494–591。

Athey, S., Imbens, G., 2016. 用于异质性因果效应的递归分区。《美国国家科学院院刊》113, 7353–7360。

Athey, S., Tibshirani, J., Wager, S., 2019. 广义随机森林。《统计年刊》47, 1148–1178。

巴塞尔银行监管委员会，1996。《关于将“回溯测试”与市场风险资本要求的内部模型法配合使用的监管框架》。技术报告。国际清算银行。巴塞尔。

Bondell, H.D., Reich, B.J., Wang, H., 2010. 非交叉分位数回归曲线估计。《生物统计学》97, 825–838。

Broadie, M., Du, Y., Moallemi, C.C., 2015. 通过回归进行风险估计。《运筹学》63, 1077–1097。

Cai, X., Yang, Y., Jiang, G., 2020. 通过自然梯度提升进行在线风险度量估计，载于：2020年冬季仿真会议（WSC），IEEE。第2341–2352页。

Campbell, S.D., 2006. 回溯测试及回溯测试程序综述。《风险杂志》9, 1–7。

Cevid, D., Michel, L., Näf, J., Bühlmann, P., Meinshausen, N., 2022. 分布随机森林：异质性调整与多元分布回归。《机器学习研究杂志》23, 1–79。

Cherian, J., Gibbs, I., Candes, E., 2024. 具有保形

事实性保证的语言模型，载于：《神经信息处理系统进展》，第 114812–114842 页。

Duan, T., Anand, A., Ding, D.Y., Thai, K.K., Basu, S., Ng, A., Schuler, A., 2020. Ngboost：用于概率预测的自然梯度提升，载于：国际机器学习会议，PMLR，第 2690–2700 页。

Durrett, R., 2019.《概率：理论与例子》。第 5 版，剑桥大学出版社。

Friedman, J.H., 2001. 贪婪函数逼近：一种梯度提升机。《统计年刊》29，1189–1232。

Gnecco, N., Terefe, E.M., Engelke, S., 2024. 极值随机森林。《美国统计学会杂志》119，3059–3072。

Gordy, M.B., Juneja, S., 2010. 投资组合风险度量中的嵌套模拟。《管理科学》56，1833–1848。

Grinsztajn, L., Oyallon, E., Varoquaux, G., 2022. 为什么基于树的模型在典型表格数据上仍优于深度学习？载于：神经信息处理系统进展，第 507–520 页。

Hong, L.J., Jiang, G., 2019. 离线模拟、在线应用：基于模拟的决策新框架。《亚太运筹学杂志》36，1940015。

Hong, L.J., Juneja, S., Liu, G., 2017. 用于嵌套估计的核平滑及其在投资组合风险度量中的应用。《运筹学》65, 657–673。

Huang, J., Li, Y., Yao, H., 2022. 非参数均值下偏部分矩模型与增强型指数投资。《计算机与运筹学》144, 105814。Jiang, G., Hong, L.J., Nelson, B.L., 2020. 利用离线仿真进行在线风险监测。《INFORMS计算学报》32, 356–375。

Jiang, G., Hong, L.J., Shen, H., 2024. 基于一致元模型的实时衍生品定价与对冲。《INFORMS计算学报》36, 1168–1189.

Jorion, P., 2006. 《风险价值：管理金融风险的新基准》。第3版，麦格劳-希尔，纽约，NY。

Keslin, G., Nelson, B.L., Pagnoncelli, B., Plumlee, M., Rahimian, H., 2025. 排序与情境选择。《运筹学》73, 2695–2707.

Koenker, R., 2017. 分位数回归：40年回顾。《经济学年度评论》9, 155–176. Koenker, R., Bassett Jr, G., 1978. 回归分位数。《计量经济学》46, 33–50. Koenker, R., Ng, P., Portnoy, S., 1994. 分位数平滑样条。《生物统计学》81, 673–680.

Lai, Q.、Liu, G.、Zhang, B.、Zhang, K.，2024。通过最小二乘元模型模拟条件风险价值的置信区间。《INFORMS计算学报》37，1087–1105。

Lin, N.、Luo, H.、Hong, L.J.，2025。上下文强凸仿真优化：使用不精确解先优化后预测。arXiv预印本 arXiv:2512.06270。

Lopez, J.A., 1998. 评估风险价值估计的方法。《经济政策评论》4，119–124。

Luo, H., Liang, Z., Hong, L.J., 2024. 利用协变量进行可靠的在线决策，载于：2024年冬季仿真会议（WSC），IEEE。第3265–3276页。

Meinshausen, N., 2006. 分位数回归森林。《机器学习研究期刊》7, 983–999。

Mohri, C., Hashimoto, T., 2024. 具有保形事实性保证的语言模型，载于：国际机器学习会议，PMLR。第36029–36047页。

Romano, Y., Patterson, E., Candes, E., 2019. 保形化分位数回归，载于：神经信息处理系统进展，第3543–3553页。

Sesia, M., Candès, E.J., 2020. 一些保形分位数回归方法的比较。《Stat》9，e261。

Taylor, J.W., 2000. 一种用于估计多期收益条件密度的分位数回归神经网络方法。《预测学杂志》19, 299–311。

Valle, C.A., 2025. 投资组合优化：弥合理论与实践之间的差距。《计算机与运筹学》175, 106918。

Velthoen, J.、Dombry, C.、Cai, J.J.、Engelke, S.，2023。《极值》中的极端分位数回归梯度提升。26，639–667。

Wager, S.、Athey, S.，2018。使用随机森林估计和推断异质性处理效应。《美国统计学会会刊》113，1228–1242。

Wager, S.、Walther, G.，2015。回归树的自适应集中及其在随机森林中的应用。arXiv 预印本 arXiv:1503.06388。

Wainwright, M.J.，2019。《高维统计学：一种非渐近视角》。第48卷。剑桥大学出版社。

Wang, W.、Wang, Y.、Zhang, X.，2024。平滑嵌套模拟：在高维中衔接立方收敛速率与平方根收敛速率。《管理科学》70，9031–9057。

Yu, K., Jones, M., 1998。局部线性分位数回归。《美国统计学会会刊》93，228–237。

Zhang, K., Liu, G., Wang, S., 2022。基于自助法的预算分配用于嵌套模拟。《运筹学》70，1128–1142。

Zhang, Q., Hong, L.J., Yan, H., 2025。用于增强供应链金融信用风险管理的条件生成建模。《海军研究后勤学》，在线发表。