arXiv:2602.01934v1 [quant-ph] 2 Feb 2026

单个 Kerr 猫态量子比特中的例外相变

Pei-Rong Han[1], Tian-LeYang[2,3], Wen Ning[2,3], Hao-LongZhang[2,3], Huifang Kang[1], Huiye Qiu[1], * 和 Zhen-Biao Yang[2], 3†[1] *School of Physics and Mechanical and Electrical Engineering, Longyan University, Longyan 364012, China*[2] *Fujian Key Laboratory of Quantum Information and Quantum Optics, College of Physics and Information Engineering,Fuzhou University, Fuzhou, Fujian 350108, China*
[3] *Department of Physics, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China*

非厄米量子系统中的例外点会产生新颖而真正的量子现象。近年来，对例外点诱导的量子相变的探索已从离散变量扩展到连续变量编码量子系统。然而，连续变量平台中由李维尔例外点（LEP）驱动的量子相变仍鲜有研究。在此，我们基于驱动耗散 Kerr 猫态量子比特构建并研究了一种李维尔例外结构。通过数值模拟，我们揭示了发生在 LEP 处的一种量子相变：其特征是动力学行为突然从欠阻尼振荡转变为过阻尼弛豫，这一过程可通过维格纳函数和布洛赫球轨迹进行可视化。值得注意的是，维格纳函数的负性可作为真正量子相干性的直接标志，而这种相干性在传统的单量子比特非厄米系统中无法实现。此外，我们提出将李乌维尔本征矩阵非对角元之间的相位差作为量化该相变的新参数。我们的研究确立了 Kerr 猫态量子比特作为探索耗散量子临界性和内禀非厄米物理的新型连续变量体系。

近年来，非厄米物理受到了广泛关注，相关研究从经典 [1–14]或半经典 [15–30] 领域拓展到了完整的量子领域 [31–45]。最近，这些研究又从离散变量量子系统延伸到了连续变量量子系统 [46, 47]。这些研究探索了与哈密顿量例外点（HEP）和李维尔例外点（LEP）相关的各种物理现象，例如纠缠相变 [46] 和非厄米拓扑 [47]。HEP 是非厄米哈密顿量的特征值和特征向量同时并合的奇异点；其

实验观测通常依赖于后选择 [27–33]。相比之下，LEP 指的是李维尔超算符的特征值和特征向量并合，这一现象无需后选择即可出现，并且天然涵盖所有量子跃迁——这是实质上开放的量子动力学的一大特征 [36–45]。尽管 HEP 和 LEP 在半经典极限下具有相似性质，但它们在量子领域表现出根本不同的行为 [35]。然而，连续变量系统中由 LEP 驱动的量子相变仍鲜有研究。

本文基于单个驱动耗散 Kerr 猫态量子比特 [48–55]，构建连续变量系统的李维尔超算符。在这一框架下，计算基（Z 基）由宇称对称猫态编码：偶宇称态 $|\mathcal{C}_\alpha^+\rangle = \mathcal{N}_\alpha^+(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)$ 和奇宇称态 $|\mathcal{C}_\alpha^-\rangle = \mathcal{N}_\alpha^-(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle)$，其中 $|\pm\alpha\rangle$ 为相干态，$\mathcal{N}_\alpha^\pm = 1/\sqrt{2(1 \pm e^{-2|\alpha|^2})}$ 为归一化常数。因此，X 基态定义为 $|\pm X\rangle = |\pm\alpha\rangle$，Y 基态定义为 $|\pm Y\rangle = |\mathcal{C}_\alpha^{\mp i}\rangle = (|\mathcal{C}_\alpha^+\rangle \pm i|\mathcal{C}_\alpha^-\rangle)/\sqrt{2}$。这种编码利用了双光子驱动下 Kerr 非线性谐振器的简并本征态流形，从而提供了一个天然具有噪声偏置的量子比特子空间 [48, 55, 56]。

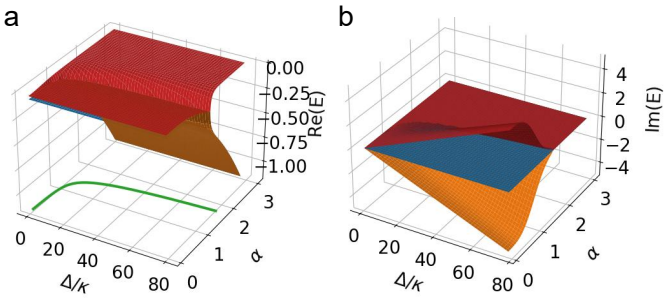

图 1：刘维尔矩阵 $\mathcal{L}_{\text{matrix}}$ 的本征谱。面板 (a) 和 (b) 分别展示实部和虚部，不同颜色表示不同的本征值（不包括稳态本征值 $E_1 = 0$）。(a) 中的绿色实线表示在固定单光子损耗 κ 下，Δ–α 参数空间中的 LEP2s。

系统的非厄米特性源于单光子损耗。该耗散通道介导偶宇称与奇宇称猫态之间的双向量子跃迁，类似于常规量子比特中由 σ_x 算符描述的跃迁。在双光子驱动频率与 Kerr 谐振器频率之间引入失谐 Δ，会解除猫态的简并，从而有效实现量子比特逻辑 Z 轴周围的相干旋转——

*电子邮箱：qiuhuiye@lyun.edu.cn
†电子邮箱：zbyang@fzu.edu.cn

通过考察量子态在不同失谐下的演化，可以观察到李维尔异常点（LEP）附近截然不同的动力学行为。具体而言，系统表现出由李维尔异常点诱导的相变。

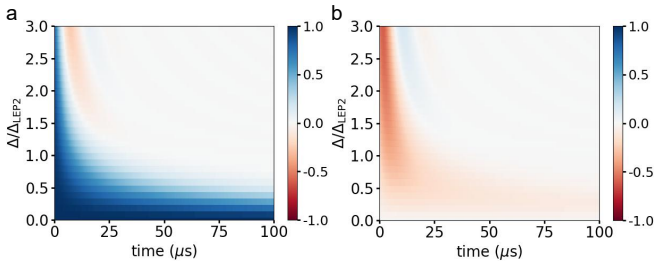

图 2：在不同失谐 Δ 下，（a）$\langle X\rangle$ 和（b）$\langle Y\rangle$ 的时间演化。对于 $|\Delta| > \Delta_{\mathrm{LEP2}}$，可以观察到具有指数包络的阻尼振荡。当 $|\Delta| < \Delta_{\mathrm{LEP2}}$ 时，系统处于无振荡的过阻尼状态。在临界点 $|\Delta| = \Delta_{\mathrm{LEP2}}$，会发生临界阻尼，从而最快地收敛至稳态。参数为 $\kappa/2\pi = 10$ kHz、$K/2\pi = 6.7$ MHz、$P/2\pi = 15.5$ MHz 和 $\kappa_\phi = 0$。

我们的方法基于具有双光子驱动的 Kerr 非线性谐振器。在旋转参考系中，系统的哈密顿量表示为（本文中始终设定 $\hbar \equiv 1$）

$$H = \Delta a^\dagger a + K a^{\dagger 2} a^2 + P\left(a^{\dagger 2} + a^2\right), \tag{1}$$

其中，Δ是驱动-谐振器失谐，K 是克尔系数，P是双光子驱动的振幅。$a^\dagger$（a）是 Kerr 非线性谐振器的产生（湮灭）算符。当 $\Delta = 0$时，对于较大的 α，哈密顿量的本征态既包括相干态 $|\pm\alpha\rangle$，也包括猫态$|\mathcal{C}_\alpha^\pm\rangle$，其中 $\alpha = \sqrt{P/K}$。本文中，我们假设 K 和 P 均为正实数，因此 α 也为实数。这些猫态具有精确正交性 $\langle\mathcal{C}_\alpha^k|\mathcal{C}_\alpha^j\rangle = \delta_{kj}$；而当 α 较大且 $|\langle\alpha|-\alpha\rangle| = e^{-2\alpha^2}$时，相干态仅为准正交。相干态的这种非正交性会改变猫态编码子空间中的例外点，其变化由比值 $p = \mathcal{N}_\alpha^+/\mathcal{N}_\alpha^-$量化。

在实验中，系统不可避免地会通过单光子损耗与其环境发生相互作用，单光子损耗由湮灭算符 a 描述，速率为 κ；此外还会发生纯退相干，由光子数算符 $a^\dagger a$ 描述，速率为 κ_ϕ。该驱动耗散系统的动力学由林德布拉德主方程控制

$$\dot\rho \equiv \mathcal{L}(\rho) = -i[H,\rho] + \sum_\mu \mathcal{D}\left[\mathcal{O}_\mu\right]\rho, \tag{2}$$

其中 $\mathcal{L}$ 是李维尔超算符，$\mathcal{D}\left[\mathcal{O}_\mu\right]$ 是与跳跃算符 $\mathcal{O}_\mu$ 相关的耗散子，

$\mathcal{D}[\mathcal{O}_\mu]\rho = \mathcal{O}_\mu\rho\mathcal{O}_\mu^\dagger - \frac{1}{2}\mathcal{O}_\mu^\dagger\mathcal{O}_\mu\rho - \frac{1}{2}\rho\mathcal{O}_\mu^\dagger\mathcal{O}_\mu$　　ρ 是非线性谐振器的密度矩阵。此处描述的模型属于驱动耗散系统的拓扑分类框架，其稳态结构和涨落动力学可由图不变量 [57, 58]表征。虽然单光子损耗（$\mathcal{O}_1 = \sqrt{\kappa}a$）通常会引入比特翻转错误，削弱编码子空间，但它却反常地驱动系统趋向由宇称相反的猫态统计混合态构成的稳态，$\rho_{ss} = p_1|\mathcal{C}_\alpha^\pm\rangle\langle\mathcal{C}_\alpha^\pm| + p_2|\mathcal{C}_\alpha^\mp\rangle\langle\mathcal{C}_\alpha^\mp|$（$p_1 + p_2 \simeq 1$）。相比之下，若环境噪声带宽窄于系统能隙，退相位噪声（$\mathcal{O}_2 = \sqrt{\kappa_\phi}a^\dagger a$）仍会受到抑制 [52], ，但仍会改变刘维尔谱和动力学行为。

为研究李乌维尔谱和李维尔异常点，我们采用向量化表示来得到李维尔超算符的矩阵形式。在满足关系 $a|\mathcal{C}_\alpha^\pm\rangle = \alpha p^{\pm1}|\mathcal{C}_\alpha^\mp\rangle$ 和 $a^\dagger|\mathcal{C}_\alpha^\pm\rangle = \alpha p^{\mp1}|\mathcal{C}_\alpha^\mp\rangle$的条件下，$\{|\mathcal{C}_\alpha^+\rangle, |\mathcal{C}_\alpha^-\rangle\}$ 张成的空间中 $\mathcal{L}$ 的矩阵形式可表示为一个 4×4 矩阵

$$\mathcal{L}_{\mathrm{matrix}} = \begin{pmatrix} -\alpha^2\kappa p^2 & 0 & 0 & \alpha^2\kappa p^{-2} \\ 0 & \alpha^2(-\frac{\kappa}{2}p_2^+ + i\Delta p_2^-) + L_\phi & \alpha^2\kappa & -0 \\ 0 & \alpha^2\kappa & \alpha^2(-\frac{\kappa}{2}p_2^+ - i\Delta p_2^-) + L_\phi & 0 \\ \alpha^2\kappa p^2 & -0 & 0 & -\alpha^2\kappa p^{-2} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

其中 $p_j^\pm = p^{-j} \pm p^j$ 和 $L_\phi = \kappa_\phi|\alpha|^4\left(1 - p_4^+/2\right)$。请注意，对于常规量子比特，李维尔异常点的设计与基底正交性无关。然而，在我们的连续变量编码中，参数 p 表示重叠 $\langle\alpha|-\alpha\rangle$。当 $p\to1$时，该重叠消失，$\mathcal{L}_{\mathrm{matrix}}$ 恢复为厄米形式，因此不会出现任何异常点。这揭示了态重叠影响非厄米物理的方式存在根本差异。

李维尔算符 $\mathcal{L}_{\mathrm{matrix}}$ 有四个本征值

$$E_1 = 0, \tag{4}$$
$$E_2 = -\kappa|\alpha|^2 p_2^+, \tag{5}$$
$$E_3 = \frac{E_2}{2} + L_\phi - i|\alpha|^2\sqrt{(\Delta p_2^-)^2 - \kappa^2}, \tag{6}$$
$$E_4 = \frac{E_2}{2} + L_\phi + i|\alpha|^2\sqrt{(\Delta p_2^-)^2 - \kappa^2}. \tag{7}$$

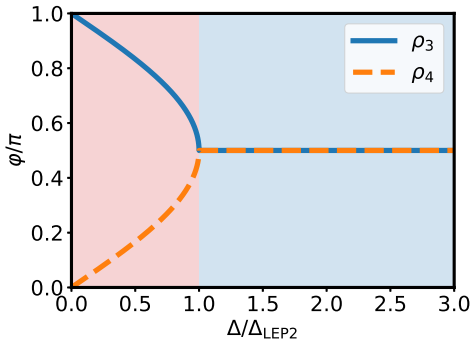

图 3： ρ_3 （实蓝线）与 ρ_4 （橙色虚线）的非对角元之间的相位差（φ）。

特征值 E_1 对应稳态 ρ_{ss}，而 E_2 严格为实数，且始终对应特征向量 $\mathrm{Vec}[\rho_2] = (-1, 0, 0, 1)^\top$。其余两个本征值 E_3 和 E_4构成一对复共轭对，其本征矩阵满足 $\rho_3 = \rho_4^\dagger$。当失谐达到$|\Delta| = \Delta_{\mathrm{LEP2}} \equiv \kappa/p_2^-$时，会出现二阶李 exceptional 点（LEP2）。在这一临界点， E_3 和 E_4合并为单一本征值 $E_2/2$ ，且 $\kappa_\phi = 0$，相应的本征向量也合并为 $\mathrm{Vec}[\rho_{\mathrm{EP}}] = (0,\ i, 1, 0)^\top$。图 1 展示了这一谱结构，参数为 $\kappa/2\pi = 10$kHz 和 $\kappa_\phi = 0$；其中绿色实线显示了 Δ_{LEP2} 随猫态振幅 α呈指数标度变化。

因此，当 $\kappa_\phi \neq 0$ 时，刘维尔特征值E_1 和 E_2 保持不变，而 E_3 和 E_4 的实部则偏移了 L_ϕ。值得注意的是，李维尔异常点的参数保持不变。这一结果表明，退相干仅改变相应非厄米哈密顿量谱的虚部，在改变耗散率的同时保留相干振荡——这与猫态的相位噪声鲁棒机制一致 [55]。

如图1所示，对于固定的 α，二阶李 exceptional 点（LEP2）将刘维尔谱分为两个不同的区域。当 $|\Delta| < \Delta_{\mathrm{LEP2}}$时，所有本征值均为纯实数；而当 $|\Delta| > \Delta_{\mathrm{LEP2}}$时，则出现复谱。本征值的虚部决定动力学演化的振荡周期，而实部则决定衰减率。因此，从状态演化独特的动力学行为中，可以直接观察到 LEP2 处的相变。系统的动力学演化由

$$\rho(t) = c_1 \exp(E_1 t)\rho_{ss} + \sum_{i=2}^{4} c_i \exp(E_i t)\rho_i, \tag{8}$$

其中 c_i 表示展开系数， E_i 是$\mathcal{L}_{\mathrm{matrix}}$的本征值， ρ_i 是相应的本征向量。关键在于，当 $|\Delta| < \Delta_{\mathrm{LEP2}}$时，由于 E_i中不存在虚部分量， $c_i\exp(E_i t)$的时间演化呈现指数行为；而当 $|\Delta| > \Delta_{\mathrm{LEP2}}$时，这些系数则呈现指数阻尼周期振荡，其源于复本征值对。这种动力学二分性定义了由LEP2s分隔的两个不同相。系统在长时间极限下弛豫到其稳态。

为观察这一相变，我们将系统初始化为相干态 $|\alpha\rangle$ ，并在不同失谐下施加持续时间可变的双光子驱动 Δ。模拟参数设为 $K/2\pi = 6.7$ MHz， $P/2\pi = 15.5$ MHz，以及 $\kappa/2\pi = 10$ kHz，如参考文献 [48]所述。根据 K 和 P，猫态振幅为 $\alpha = \sqrt{P/K} \approx 1.52$。如图 2所示，出现了两种截然不同的动力学区域。当失谐超过 Δ_{LEP2}时， $\langle X\rangle(\langle Y\rangle)$中的阻尼振荡表明系统处于欠阻尼动力学状态；而当 $|\Delta| < \Delta_{\mathrm{LEP2}}$时，$\langle X\rangle(\langle Y\rangle)$则呈现单调指数衰减，这是过阻尼行为的典型特征。这一在 $|\Delta| = \Delta_{\mathrm{LEP2}}$ 处发生的突变，直接源于刘维尔特征值与特征向量的合并。

这一李维尔异常点相变还可通过本征矩阵 ρ_3 或 ρ_4 非对角元之间的相位差 φ进一步量化。对于用猫态基 $\{|\mathcal{C}_\alpha^+\rangle, |\mathcal{C}_\alpha^-\rangle\}$ 表示的本征矩阵 ρ_j （其中 $j = 3,4$），其形式为

$$\rho_j = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

相位差 φ定义为

$$\varphi \equiv |\arg(\rho_{01}) - \arg(\rho_{10})|, \tag{10}$$

其中，arg(·)表示复数辐角。如图3所示， φ随 Δ 的变化清晰地表征了跨越李维尔异常点的相变。不同于以往研究对非厄米哈密顿量 [31],本征态之间相位差的表征，我们关注的是与李维尔超算符特征向量相关的相位差——这是此前尚未探讨的一个独特方面。

通过相空间可视化，可以进一步揭示这种动力学二分现象。量子态 ρ完全由其维格纳函数表征

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi}\mathrm{Tr}\left[D(-\beta)\rho D(\beta)e^{i\pi a^\dagger a}\right], \tag{11}$$

其中 $D(\beta)$ 表示位移算符。这种相空间表示提供了关于振子的量子态的完整信息。当 $|\Delta| > \Delta_{\mathrm{LEP2}}$时， $|\alpha\rangle$ 与 $|-\alpha\rangle$之间的量子态振荡会周期性地产生维格纳函数中的相干干涉条纹（图 4c），反映出在收敛至 ρ_{ss}之前存在非经典相干性。相比之下，当$|\Delta| < \Delta_{\mathrm{LEP2}}$时，维格纳函数显示其直接弛豫至 ρ_{ss} ，没有振荡特征（图 4d）。图 4a、b 中的布洛赫球轨迹则揭示了互补信息。在欠阻尼状态下，轨迹会反复穿越 YZ 平面；失谐量 Δ 越大，穿越越频繁，表明 $\langle X\rangle$存在振荡。相比之下，过阻尼状态表现为

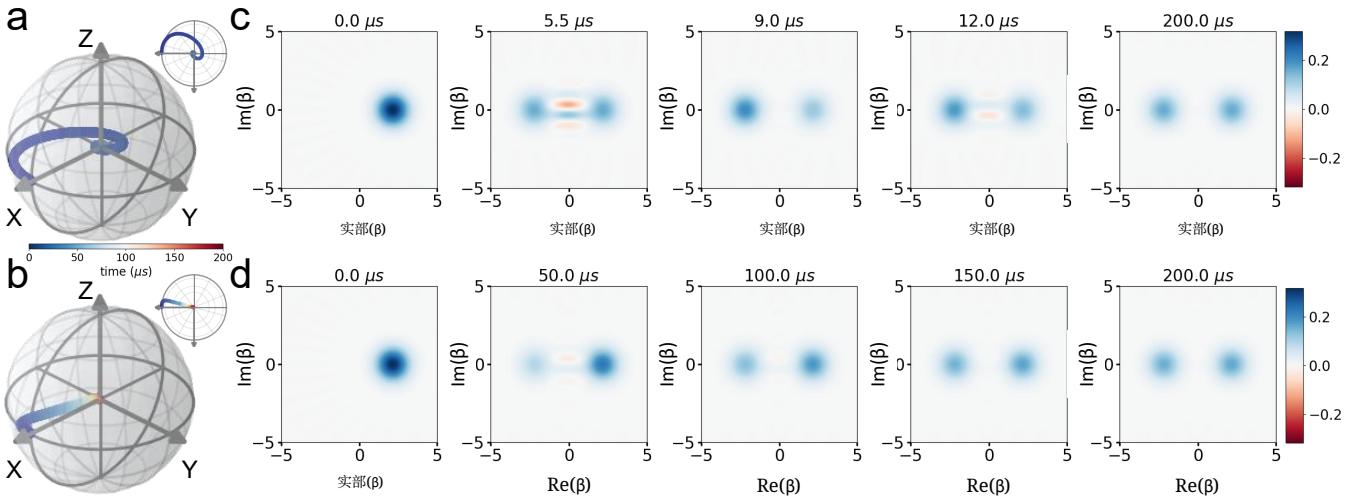

图 4：量子态演化的布洛赫表示及相应的维格纳函数。(a) $|\Delta| = 3\Delta_{\mathrm{LEP2}}$ 和 (b) $|\Delta| = 0.5\Delta_{\mathrm{LEP2}}$ 的演化轨迹。所有轨迹均局限于 XY 平面。右上角的插图显示了轨迹的俯视图，其颜色对应于演化时间。(a) 对于 $|\Delta| > \Delta_{\mathrm{LEP2}}$，轨迹向内螺旋，趋向原点（稳态）。(b) 对于 $|\Delta| < \Delta_{\mathrm{LEP2}}$，轨迹单调收敛至原点，不发生螺旋运动。(c) 和 (d) 显示了不同演化时刻对应的维格纳函数。(c) 当 $|\Delta| > \Delta_{\mathrm{LEP2}}$ 时，干涉条纹周期性地出现和消失，直至达到稳态。(d) 当 $|\Delta| < \Delta_{\mathrm{LEP2}}$ 时，干涉条纹仅短暂出现，随后达到各自的稳态。参数为 $\kappa/2\pi = 10\,\mathrm{kHz}$、$K/2\pi = 6.7\,\mathrm{MHz}$、$P/2\pi = 15.5$ MHz 和 $\kappa_\phi = 0$。

径向收敛至原点，且不与赤道面相交，这证实了不存在 $\langle X\rangle$ 切换。

为了量化系统在演化过程中仍局限于克尔猫量子比特子空间的程度，我们比较态 $\sigma(t)$，它由式（8）的有效李乌维尔动力学得到，并与态 $\rho(t)$ 进行比较，后者由式（2）的完整主方程得到。二者的接近程度由乌尔曼保真度 $F(\rho,\ \sigma) = \left(\mathrm{Tr}\sqrt{\sqrt{\rho}\,\sigma\,\sqrt{\rho}}\right)^2$。图5 展示了保真度随失谐和时间的变化，初始态为 $|\alpha\rangle$。在所选参数范围内，两种演化表现出极好的一致性。此外，随着系统弛豫趋向其稳态，保真度渐近趋近于1。微小偏差源于失谐项 $\Delta a^\dagger a$，该项在有效李乌维尔描述中并未被完全刻画。由于猫态的光子数不同（$\alpha^2 p^2$ 与 α^2/p^2），该项解除了猫态简并，并可能导致泄漏出编码子空间。

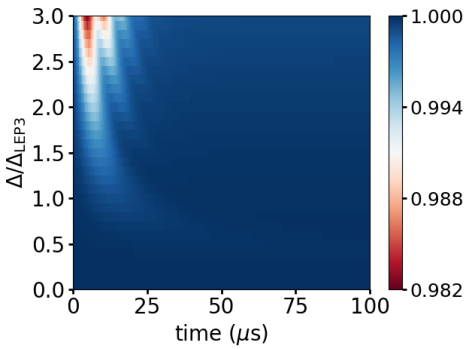

图 5：李维尔动力学的验证。颜色表示保真度 $F(\rho_{\mathrm{H}},\ \rho_{\mathrm{L}})$，即根据林德布拉德主方程（2）和李维尔近似（8）演化得到的状态之间的保真度。这里设定 $K/2\pi = 6.7\,\mathrm{MHz}$，$P/2\pi = 15.5$ MHz，$\kappa/2\pi = 10\,\mathrm{kHz}$，以及 $\kappa_\phi = 0$。

总之，我们揭示并刻画了单个驱动耗散 Kerr 猫态量子比特中由李维尔异常点二阶（LEP2）直接诱导的量子相变。通过分析刘维尔谱和李维尔动力学，我们证明，当失谐穿过例外点时，该相变表现为动力学行为从欠阻尼振荡到过阻尼弛豫的急剧变化。此外，李维尔本征矩阵非对角元之间的相位差，成为这一异常点跃迁独特且此前未被报道的标志。维格纳函数的负性直接体现了真正的量子相干性，这一特征尚未被.....在传统的单量子比特非厄米系统中是可以实现的。我们的研究结果表明，Kerr 猫态量子比特是探索耗散量子临界性和内禀非厄米物理的多功能平台，从而将容错玻色编码与开放量子相变的研究连接起来。

本工作得到国家自然科学基金委员会（批准号：12505021、12475015、12505016）、福建省自然科学基金（批准号：2025J01383、2025J01465）以及龙岩学院科研启动基金（LB2025002）的资助。

[1]C. Dembowski、H.-D. Gr¨af、H. L. Harney、A. Heine、W. D. Heiss、H. Rehfeld和A. Richter，例外点拓扑结构的实验观测，《物理评论快报》86, 787 (2001)。[2] Y. Choi、S. Kang、S. Lim、W. Kim、J.-R. Kim、J.-H. Lee和K. An，原子-腔量子复合体系中的准本征态合并，《物理评论快报》104, 153601 (2010)。[3] T. Gao等，混沌激子-极化激元台球系统中非厄米简并点的观测，《自然》（伦敦）526, 554 (2015)。[4] D. Zhang、X.-Q. Luo、Y.-P. Wang、T.-F. Li和J.Q. You，腔磁振子极化激元中例外点的观测，《自然·通讯》8, 1368 (2017)。[5] F. E. ¨Ozt¨urk、T. Lappe、G. Hellmann、J. Schmitt、J. Klaers和F. Vewinger，光学量子气体中非厄米相变的观测，《科学》372, 88 2021( )。[6] W. Tang、X. Jiang、K. Ding、Y.-X. Xiao、Z.-Q. Zhang、C.T. Chan和G. Ma，具有混合拓扑不变量的例外交汇点，《科学》370, 1077 (2020)。[7] K. Wang、A. Dutt、K.Y. Yang、C.C. Wojcik、J. Vukovi和S. Fan，生成非厄米能带的任意拓扑绕数，《科学》371, 1240 (2021)。[8] K. Wang、A. Dutt、C. C. Wojcik和S. Fan，非厄米能带的拓扑复能量编织，《自然》（伦敦）598, 59 (2021)。[9] Y. S. S. Patil、J. H¨oller、P. A. Henry、C. Guria、Y. Zhang、L. Jiang、N. Kralj、N. Read和J. G. E. Harris，测量非厄米简并点的结与非对易辫，《自然》（伦敦）607, 271 (2022)。[10] J. Doppler、A. A. Mailybaev、J. B¨ohm、U. Kuhl、A. Girschik、F. Libisch、T. J. Milburn、P. Rabl、N. Moiseyev和S. Rotter，动态环绕例外点以实现非对称模式切换，《自然》（伦敦）537, 76 (2016)。[11] H. Xu、D. Mason、L. Jiang和J. G. E. Harris，具有例外点的光机械系统中的拓扑能量转移，《自然》（伦敦）537, 80 (2016)。[12] J. W. Yoon等，覆盖整个光通信波段、围绕例外点的时间非对称回路，《自然》（伦敦）562, 86 (2018)。[13] W. Chen、S¸.K. ¨Ozdemir、G. Zhao、J. Wiersig和L. Yang，例外点增强光学微腔中的传感，《自然》（伦敦）548, 192 (2017)。[14] H. Hodaei、A.U. Hassan、S. Wittek、H. Garcia-Gracia、R. El-Ganainy、D. N. Christodoulides和M. Khajavikhan，高阶例外点处的增强灵敏度，《自然》（伦敦）548, 187 (2017)。[15] S. Yu等，量子PT增强传感器的实验研究，《物理评论快报》125, 240506 (2020)。[16] K. Wang、L. Xiao、J. C. Budich、W. Yi和P. Xue，利用单光子干涉测量模拟例外非厄米金属，《物理评论快报》127, 026404 (2021)。[17] Y.-L. Fang、J.-L. Zhao、Y. Zhang、D.-X. Chen、Q.-C. Wu、Y.-H. Zhou、C.-P. Yang和F. Nori，PT对称与反PT对称系统中相干流的实验演示，《通讯·物理》4, 223 (2021)。[18] P. Peng、W. Cao、C. Shen、W. Qu、J. Wen、L. Jiang和Y. Xiao，飞行原子的反宇称-时间对称，《自然·物理》12, 1139 (2016). [19] J. Li、A. K. Harter、J. Liu、L. d. Melo、Y. N. Joglekar和L. Luo，超冷原子耗散弗洛凯系统中宇称-时间对称性破缺转变的观测，《自然·通讯》10, 855 (2019). [20] Z. Ren、D. Liu、E. Zhao、C. He、K. K. Pak、J. Li和G.-B. Jo，非厄米自旋轨道耦合费米子中量子态的手性控制，《自然·物理》18, 385 (2022). [21] W.-C. Wang *et al.*，单离子系统中 $\mathcal{PT}$对称量子相干性的观测，《物理评论A辑》103, L020201 (2021). [22] L. Ding、K. Shi、Q. Zhang、D. Shen、X. Zhang和W. Zhang，单个囚禁离子中 $\mathcal{PT}$对称例外点的实验测定，《物理评论快报》126, 083604 (2021). [23] Y. Wu、W. Liu、J. Geng、X. Song、X. Ye、C. K. Duan、X. Rong和J. F. Du，单自旋系统中宇称-时间对称性破缺的观测，《科学》364, 878 (2019). [24] W. Liu、Y. Wu、C.-K. Duan、X. Rong和J. Du，在真实量子系统中动态环绕例外点，《物理评论快报》126, 170506 (2021). [25] W. Zhang、X. Ouyang、X. Huang、X. Wang、H. Zhang、Y. Yu、X. Chang、Y. Liu、D.-L. Deng和L.-M. Duan，利用固态自旋的非幺正动力学观测非厄米拓扑，《物理评论快报》127, 090501 (2021). [26] S. Dogra、A. A. Melnikov和G. S. Paraoanu，利用超导量子处理器对宇称-时间对称性破缺进行量子模拟，《通讯·物理》4, 26 2021( ). [27] M. Naghiloo、M. Abbasi、Y. N. Joglekar和K. W. Murch，单个耗散量子比特中跨越例外点的量子态层析，《自然·物理》15, 1232 2019( ). [28] Z. Wang 、 Z. Xiang 、 T. Liu 、 X. Song 、 P. Song 、 X. Guo、L. Su、H. Zhang、Y. Du和D. Zheng，通过参数调制控制耗散的超导量子比特中例外点的观测，《中国物理B辑》30, 100309 (2021). [29] M. Naghiloo、M. Abbasi、Y. N. Joglekar和K. W. Murch，单个耗散量子比特中跨越例外点的量子态层析，《自然·物理》15, 1232 2019( ). [30] M. Abbasi、W. Chen、M. Naghiloo、Y. N. Joglekar、K. W. Murch，通过例外点邻近性实现拓扑量子态控制，《物理评论快报》128, 160401 2022( ). [31] P. R. Han、F. Wu、X. J. Huang、H. Z. Wu、C. L. Zou、W. Yi、M. Zhang、H. Li、K. Xu、D. Zheng、H. Fan、J. Wen、Z. B. Yang和S. B. Zheng，例外纠缠现象：非厄米性与非经典性的交汇，《物理评论快报》131, 260201 (2023). [32] P.-R. Han、W. Ning、X.-J. Huang、R.-H. Zheng、S.-B. Yang、F. Wu、Z.-B. Yang、Q.-P. Su、C.-P. Yang和S.-B. Zheng，量子三模系统中高阶例外点拓扑不变量的测量，《自然·通讯》15, 10293 (2024). [33] H.-L. Zhang、P.-R. Han、X.-J. Yu、S.-B. Yang、J.-H. L¨u、W Ning、C.-P. Yang、Z.-B. Yang、Q.-P. Su和S.-B. Zheng，实现与拓扑表征

量子力学系统中的Weyl例外环，《科学通报》70, 2446 (2025). [34] H.-L. Zhang、P.-R. Han、F. Wu、W. Ning、Z.-B. Yang和S.-B. Zheng，非马尔可夫量子例外点的实验观测，《物理评论快报》135, 230203 (2025). [35] F. Minganti、A. Miranowicz、R. W. Chhajlany和F. Nori，非厄米哈密顿量与刘维尔算符的量子例外点：量子跃迁的效应，《物理评论A辑》100, 062131 (2019). [36] I. I. Arkhipov、A. Miranowicz、F. Minganti和F. Nori，Scully-Lamb激光理论框架下具有损耗与增益的耦合腔线性系统的量子与半经典例外点，《物理评论A辑》101, 013812 (2020). [37] F. Minganti、A. Miranowicz、R. W. Chhajlany、I. I. Arkhipov和F. Nori，混合刘维尔形式：通过量子轨迹的后选择连接非厄米哈密顿量与刘维尔算符的例外点，《物理评论A辑》101, 062112 (2020). [38] I. I. Arkhipov、A. Miranowicz、F. Minganti和F. Nori，耗散线性玻色系统中任意阶李维尔例外点：相干函数以及 $\mathcal{PT}$ 对称性与反 $\mathcal{PT}$ 对称性之间的切换，《物理评论A辑》102, 033715 (2020). [39] S. Khandelwal、N. Brunner和G. Haack，量子热机中李维尔例外点的特征，《PRX Quantum》2, 040346 (2021). [40] K. Sun和W. Yi，环绕李维尔例外点：简要综述，《亚太物理学会联合会通报》34, 22 (2024). [41] W. Chen、M. Abbasi、Y. N. Joglekar和K. W. Murch，超导量子比特非厄米动力学中的量子跃迁，《物理评论快报》127, 140504 (2021). [42] W. Chen、M. Abbasi、B. Ha、S. Erdamar、Y. N. Joglekar和K. W. Murch，耗散超导量子比特中退相干诱导的例外点，《物理评论快报》128, 110402 (2022). [43] S. Abo、P. Tulewicz、K. Bartkiewicz、S¸. K. ¨Ozdemir和A. Miranowicz，无哈密顿量奇点的量子系统中李维尔例外点的实验研究，《新物理学杂志》26, 123032 (2024). [44] J.-W. Zhang、J.-Q. Zhang、G.-Y. Ding、J.-C. Li、J.-T. Bu、B. Wang、L.-L. Yan、S.-L. Su、L. Chen、F. Nori、S¸. K. ¨Ozdemir、F. Zhou、H. Jing和M. Feng，利用例外点对量子热机进行动力学控制，《自然·通讯》13, 6225 (2022). [45] J.-T. Bu、J.-Q. Zhang、G.-Y. Ding、J.-C. Li、J.-W. Zhang、B. Wang、W.-Q. Ding、W.-F. Yuan、L. Chen、S¸. K. ¨Ozdemir、F. Zhou、H. Jing和M. Feng，通过环绕李维尔例外点增强量子热机，《物理评论快报》130, 110402 (2023). [46] K.-X. Yan、Z.C. Shi、Y.H. Chen 和 Y. Xia，《连续变量量子比特中的可控非厄米性》，https://arxiv.org/abs/2511.04110v1。[47]P.-R. Han、H. Qiu、H.-L. Zhang、W. Ning、Z.- B. Yang 和 S.-B. Zheng，《单个驱动耗散 Kerr 猫态量子比特中的非厄米拓扑》，https://doi.org/10.48550/arXiv.2511.18482。[48] A. Grimm、N. E. Frattini、S. Puri、S. O. Mundhada、S. Touzard、M. Mirrahimi、S. M. Girvin、S. Shankar、M. H. Devoret，《Kerr 猫态量子比特的稳定化与运行》，《自然》584，205（2020）。[49] Z. Leghtas、S. Touzard、I. M. Pop、A. Kou、B. Vlastakis、A. Petrenko、K. M. Sliwa、A. Narla、S. Shankar、M. J. Hatridge、M. Reagor、L. Frunzio、R. J. Schoelkopf、M. Mirrahimi、M. H. Devoret，《通过工程化双光子损耗将光的状态限制在量子流形中》，《科学》347，853（2015）。[50] S. Puri、S. Boutin、A. Blais，《通过双光子驱动在 Kerr 非线性谐振器中工程化光的量子态》，npj Quantum Inf. 3，18（2017）。[51] B. Vlastakis、G. Kirchmair、Z. Leghtas、S. E. Nigg、L. Frunzio、S. M. Girvin、M. Mirrahimi、M. H. Devoret、R. J. Schoelkopf，《利用 100 光子薛定谔猫态确定性编码量子信息》，《科学》342，607（2013）。[52] S. Puri、A. Grimm、P. Campagne-Ibarcq、A. Eickbusch、K. Noh、G. Roberts、L. Jiang、M. Mirrahimi、M. H. Devoret、S. M. Girvin，《驱动非线性腔中的稳定猫态：容错错误综合征探测器》，Phys. Rev. X 9, 041009（2019）。[53] H. Goto，《利用非线性振子网络实现通用量子计算》，《物理评论A辑》93，050301（2016）。[54] F. Minganti、N. Bartolo、J. Lolli、W. Casteels、C. Ciuti，《驱动耗散系统中薛定谔猫态及其反馈控制的精确结果》，Sci. Rep. 6, 26987（2016）。[55] M. Mirrahimi、Z. Leghtas、V. V. Albert、S. Touzard、R. J. Schoelkopf、L. Jiang、M. H. Devoret，《动态保护的猫态量子比特：通用量子计算的新范式》，《新物理学杂志》16，045014（2014）。[56] R. Lescanne、M. Villiers、T. Peronnin、A. Sarlette、M. Delbecq、B. Huard、T. Kontos、M. Mirrahimi 和 Z. Leghtas，《振子编码量子比特中比特翻转的指数级抑制》，《自然·物理》16，509（2020）。[57] G. Villa1、J. del Pino1、V. Dumont、G. Rastelli、M. Micha-lek、A. Eichler 和 O. Zilberberg，《驱动耗散非线性系统的拓扑分类》，Sci. Adv. 11，eadt9311（2025）。[58] K. Seibold、G. Villa、J. del Pino 和 O. Zilberberg，《流拓扑在量子驱动耗散系统中的表现》，https://arxiv.org/abs/2508.16486v1。