一种前向算法　　用于一类马尔可夫零和停止博弈

Nhat-Thang Le 图卢兹经济学院
图卢兹数学研究所 图卢兹大学

arXiv:2602.01944v1 [math.PR] 2 Feb 2026

摘要

本文提出了一种新的高效算法，用于计算双方利益相悖的零和停止博弈的价值函数。这可以视为（单人）最优停止问题的博弈版本“前向算法”。该算法最初由 Irle [1] 针对离散时间马尔可夫链提出，随后由 Miclo & Villeneuve [2]重新研究，用于一般状态空间上的连续时间马尔可夫过程。本文聚焦于由取值于有限状态空间的齐次连续时间马尔可夫链驱动的博弈，并讨论所需的迭代次数。文中还给出了若干特定示例的计算实现。

关键词： 最优停止博弈、前向算法、齐次连续时间马尔可夫链、纳什均衡、最优停止问题。

资助： 本研究得到 CIMI、MINT 项目资助。

1 引言

本文研究一种由上确界玩家和下确界玩家参与的贴现零和停止博弈。上确界玩家选择停时 τ 以使期望收益最大化，而下确界玩家选择停时 γ 以使期望收益最小：

$$R_x(\tau,\gamma) \coloneqq \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta\tau}\psi(X_\tau)\mathbf{1}_{\tau\le\gamma} + \mathrm{e}^{-\beta\gamma}\phi(X_\gamma)\mathbf{1}_{\tau>\gamma}], \tag{1.1}$$

其中，$\beta > 0$ 是固定的折现率。这里，$(X_t)_{t\ge0}$ 是一个取值于有限状态空间 E的右连续齐次连续时间马尔可夫链，配备概率测度 $(\mathbb{P}_x)_{x\in E}$，满足 $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$对所有 $x \in E$均成立，并具有马尔可夫生成元 $Q \coloneqq (Q(x,y))_{x,y\in E}$。收益函数 $\psi,\ \phi \in \mathbb{R}^E$ （ E上所有函数的集合）满足 $0 \le \psi \le \phi$。由于 E 是有限的，对于任意停时 η 和 $f \in \mathbb{R}^E$，我们也约定在集合 $\{\eta = +\infty\}$ 上 $\mathrm{e}^{-\beta\eta}f(X_\eta) = 0$。分别定义上值函数和下值函数如下：

$$\forall x \in E, \qquad \overline{V}(x) \coloneqq \inf_{\gamma}\sup_{\tau} R_x(\tau,\gamma) \qquad \text{and} \qquad \underline{V}(x) \coloneqq \sup_{\tau}\inf_{\gamma} R_x(\tau,\gamma),$$

其中，上确界和下确界取遍 $\mathcal{M}$ 关于 X的自然滤子所对应的所有停止时的集合。容易看出，

$$\forall x \in E, \quad \psi(x) \le \underline{V}(x) \le \overline{V}(x) \le \phi(x).$$

此外，若有 $\underline{V} \geq \overline{V}$，即 $\underline{V} = \overline{V}$，则称该博弈具有价值。在这种情况下，我们将共同的价值函数记为 V。现在，假设存在两个停止时（τ^*, γ^*）满足

$$\forall \tau, \gamma \in \mathcal{M}, \quad R_x(\tau, \gamma^*) \leq R_x(\tau^*, \gamma^*) \leq R_x(\tau^*, \gamma), \tag{1.2}$$

此时，称这一对（τ^*，γ^*）为纳什均衡（NE）或鞍点。显然，若存在这样的纳什均衡，则该博弈有价值，且对所有 $x \in E$，价值函数为 $V(x) = R_x(\tau^*, \gamma^*)$。

众所周知，当状态空间 E 为有限集时，该博弈总有价值，且由下式定义的一对（τ'，γ'）

$$\tau' \coloneqq \inf\{t \geq 0 : V(X_t) = \psi(X_t)\} \qquad \text{and} \qquad \gamma' \coloneqq \inf\{t \geq 0 : V(X_t) = \phi(X_t)\}, \tag{1.3}$$

构成该博弈的纳什均衡。在更一般的情形下，这一结论仍然成立。例如（比较 Benssousan & Friedman [8],[9], Friedman [10] and Karatzas & Wang [11]），当 E 被替换为 $\mathbb{R}$ 且 $(X_t)_{t\geq 0}$ 为扩散过程，并满足以下条件时，

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{E}_x\left[\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \mathrm{e}^{-\beta t}\phi(X_t)\right] < +\infty \quad \text{and} \qquad \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\beta t}\phi(X_t) = 0,$$

该博弈仍有价值，且在（1.3）中定义的一对（τ'，γ'）仍是纳什均衡。事实上，即使去掉可积性条件 $\mathbb{E}_x\left[\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \mathrm{e}^{-\beta t}\phi(X_t)\right] < +\infty$，该博弈仍有价值，但这一对（$\tau'$，$\gamma'$）可能不再是纳什均衡，参见 Ekstr¨om & Villeneuve [3]。关于连续情形下的类似结果，参见 Ekstr¨om & Peskir [4]and Peskir [5]。有关最优停止问题和最优停止博弈一般理论的论述，参见 Shiryaev [7]and Peskir & Shiryaev [6] 的著作。

在我们的设定中，即使可以保证博弈存在价值，计算价值函数$V(x)$仍然很困难。我们可以尝试计算函数 $y \mapsto R_y(\tau', \gamma')$，但集合 $\{x \in E : V(x) = \psi(x)\}$（简称 $\{V = \psi\}$）和 $\{x \in E : V(x) = \phi(x)\}$（简称 $\{V = \phi\}$）都未知。一种替代方法是尝试将 E 的所有固定子集的命中时代入函数 $R_x(\cdot, \cdot)$，并检查准则（1.2）是否成立。遗憾的是，这种方法代价太高，因为 E 的子集数为 $2^{|E|}$，其中 $|E|$ 是 E的基数，因此会随着 $|E|$指数级增长。此外，即使我们有幸正确猜出 $\{V = \psi\}$ 和$\{V = \phi\}$ 分别是什么，验证（1.2）也并不容易。本文旨在通过提出一种新的高效算法来计算价值函数 V，并找回临界集 $\{V = \psi\}$ 和 $\{V = \phi\}$，从而解决这一问题。从本质上说，我们将单人博弈中“前向算法”的思想推广到零和双人博弈。这一算法最初由 Irle [1] （针对离散时间马尔可夫链）提出，后来由 Miclo & Villeneuve [2] （针对连续时间马尔可夫过程）重新探讨。我们的算法还找回了 V的一些已知性质。例如，如果 ψ 处处严格小于 ϕ，那么有

$$\begin{cases} \forall x \in \{V = \psi\}, & \mathcal{Q}[V](x) - \beta V(x) \leq 0 \\ \forall x \in \{V = \phi\}, & \mathcal{Q}[V](x) - \beta V(x) \geq 0 \\ \forall x \in \{\psi < V < \phi\}, & \mathcal{Q}[V](x) - \beta V(x) = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

其中我们使用了如下记号

$$\forall f \in \mathbb{R}^E,\ \forall x \in E, \qquad \mathcal{Q}[f](x) \coloneqq \sum_{y \in E} Q(x,y) f(y).$$

我们简要回顾一下，马尔可夫生成元 $\mathcal{Q} = (Q(x,\ y))_{x,\ y \in E}$ 就是一个满足以下条件的方阵

$$\forall x \in E, \quad \sum_{y \in E} Q(x,y) = 0 \qquad \text{and} \qquad \forall x \neq y, \quad Q(x,y) \geq 0.$$

(1.4) 中的最后一个方程特别有用，因为一旦已知临界集 $\{V = \psi\}$ 和 $\{V = \phi\}$，问题就归结为求解关于 V的线性方程组，而这可以用标准数值线性代数方法高效处理。详情请见下一节。一般情形 $\psi \leq \phi$ 下的精确表述应为

$$\begin{cases} \forall x \in \{V = \psi\} \setminus \{\phi = \psi\}, & \mathcal{Q}[V](x) - \beta V(x) \leq 0 \\ \forall x \in \{V = \phi\} \setminus \{\phi = \psi\}, & \mathcal{Q}[V](x) - \beta V(x) \geq 0 \\ \forall x \in \{\psi < V < \phi\}, & \mathcal{Q}[V](x) - \beta V(x) = 0 \end{cases}$$

因此， $\mathcal{Q}[V](x) - \beta V(x)$ 在 $\{\phi = \psi\}$ 上的符号未知，但只要知道临界集，我们仍然可以求解 V（见下文引理 2.2、2.4 和注 2.3）。我们的算法在终止前所执行的步骤数严格小于 $|E|^2$，更多详情请见第 3.4 小节。在每一步中，都需要求解一个线性方程组并检查若干条件，以得到一系列递减集，因此我们的算法与 Irle [1] 和 Miclo & Villeneuve [2]提出的“前向算法”颇为相似。为完整起见，由于函数的计算

$$\forall x \in E, \quad V_0(x) \coloneqq \sup_{\tau} \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta\tau} \psi(X_\tau)] \tag{1.5}$$

在我们的算法中需要用到，因此我们将在第 3.1 节简要回顾单人最优停止问题的前向算法。众所周知， V_0 是支配 ψ （即 $V_0 \geq \psi$）的最小 β-超调和函数；这里回顾一下，若对所有 $x \in E$，函数 $f \in \mathbb{R}^E$满足 $\mathcal{Q}[f](x) - \beta f(x) \leq 0$，则称 $f \in \mathbb{R}^E$是 β-超调和的。

我们简要概述算法，说明其关键步骤和核心原理。据我们所知，目前尚无算法能够在当前设定下计算价值函数，因此我们提出的算法完全是新的。首先，我们执行“前向算法”，计算式（1.5）中的 V_0，并得到集合 $\{V_0 > \phi\} := \{x \in E :\ V_0(x) > \phi(x)\}$。然后令 $S_1 = \{V_0 > \phi\} \cup \{\phi = \psi\}$，并计算下一个函数

$$\forall x \in E, \quad V_1(x) \coloneqq \sup_{\tau} R_x(\tau, \gamma_1), \qquad \text{where} \qquad \gamma_1 \coloneqq \inf\{t \geq 0 : X_t \in S_1\},$$

通过采用“修正前向算法”（详见第 3.3 小节）。接下来，假设我们已针对某个 $k \geq 1$ 获得了 V_k，我们定义下一个集合

$$S_{k+1} \coloneqq \Big(S_k \cap \{\mathcal{Q}[V_k] - \beta V_k \geq 0\}\Big) \cup \{\phi = \psi\},$$

并以相同的方式继续计算下一个函数

$$\forall x \in E,\ V_{k+1}(x) \coloneqq \sup_{\tau} R_x(\tau, \gamma_{k+1}), \qquad \text{where} \qquad \gamma_{k+1} \coloneqq \inf\{t \geq 0 : X_t \in S_{k+1}\}.$$

这样，我们便得到一个递减函数序列 $(V_k)_{k\geq 1}$，经过有限次迭代后，它逐点收敛到价值函数 V。初始集合 S_1、对它的发现，以及集合 $(S_k)_{k\geq 1}$ 的迭代收缩，构成了该算法的核心。它们使我们能够控制所诱导的序列 $(V_k)_{k\geq 1}$，从而对于所有 $k \geq 1$，都有 $\psi \leq V_k \leq \phi$，这与我们先前已知的 $\psi \leq V \leq \phi$ 相符。我们还指出，集合 S_1 可以~替换为一个稍大的集合 $\tilde{S}_1 := \{V_0 \geq \phi\}$，而新诱导的序列 $(\tilde{V}_k)_{k\geq 1}$（以与上文相同的方式定义）仍会递减至 V。更多细节请参阅第 3.4 小节中的讨论。

最后，我们想强调，我们只处理有限状态空间，因为在实践中，我们可以利用取值于有限（但可能很大）状态空间的马尔可夫过程，有效地对现实场景（例如金融领域的场景）进行建模和近似。这种方法使分析和计算实现更易于处理。再次强调，本文的主要目标是给出价值函数 V 以及停止区域（或临界集） $\{V = \psi\}$ 和 $\{V = \phi\}$的算法构造。本文结构如下。第2节介绍设定、众所周知的结果、符号以及后续各节中频繁使用的有用观察。这包括有限状态空间上的连续时间马尔可夫链基础知识，例如马尔可夫性质和强马尔可夫性质、Dynkin鞅公式，以及一对命中时构成纳什均衡的充分必要条件。第3节详细介绍我们的算法。第 3.1 节简要回顾 Irle [1], Miclo & Villeneuve [2], 的前向算法。第3.2小节给出算法及收敛性证明，第 3.3 小节讨论辅助结果和计算方面。第4节列举了金融学和经济学中一些著名随机博弈的示例和应用。

2 设置与常用结果

在本文中，E 是一个有限状态空间，$X = (X_t)_{t\geq 0}$ 是在某个概率空间上定义、取值于 E的连续时间马尔可夫链。进一步假设，X 是时间齐次的，具有右连续样本路径，并存在马尔可夫生成元 $\mathcal{Q} = (Q(x,y))_{x,y\in E}$。对于 $t \geq 0$，令 $\mathcal{F}_t := \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$为其自然滤子，并设 $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{t\geq 0}\mathcal{F}_t)$。此外，假设该概率空间足够丰富，能够支持一族满足 $X_t \circ \theta_s = X_{t+s}$ 的移位算子$(\theta_t)_{t\geq 0}$，其中 $t, s \geq 0$任意；并且在该概率空间上，存在一族概率$(\mathbb{P}_x)_{x\in E}$，使得 $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$。对于 $t \geq 0$，我们将转移矩阵$\mathcal{P}_t = (\mathcal{P}_t(x,y))_{x,y\in E}$ 定义为

$$\forall x, y \in E, \qquad \mathcal{P}_t(x,y) := \mathbb{P}_x(X_t = y),$$

众所周知（例如参见 Norris [12]），$t \mapsto \mathcal{P}_t$ 满足微分方程和积分方程（矩阵形式）

$$\mathcal{P}_0 = I, \quad \forall t > 0, \quad \partial_t \mathcal{P}_t = \mathcal{P}_t\mathcal{Q} = \mathcal{Q}\mathcal{P}_t \iff \forall t \geq 0, \quad \mathcal{P}_t = I + \int_0^t \mathcal{P}_s \mathcal{Q} ds.$$

因此，对于任意折现率 $\beta > 0$，我们对 t 中的量 $\mathrm{e}^{-\beta t}\mathcal{P}_t$ 求导，再将其积分回去，得到

$$\forall t \geq 0, \quad \mathrm{e}^{-\beta t}\mathcal{P}_t = I + \int_0^t \mathrm{e}^{-\beta s}(\mathcal{Q} - \beta I)\mathcal{P}_s ds.$$

作为一个 因此，在 $\mathbb{P}_x$ 下取期望，我们得到过程 $(M_t^x)_{t\geq 0}$，其定义为 y
c

$$M_t^x := \mathrm{e}^{-\beta t} f(X_t) - f(x) - \int_0^t \mathrm{e}^{-\beta s}\Big(Q[f](X_s) - \beta f(X_s)\Big) ds, \tag{2.1}$$

是一个有界的 $((\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\ \mathbb{P}_x)$-鞅，对任意 $f \in \mathbb{R}^E$ 和 $x \in E$ 均成立（若 E 不是有限的，这一点便不再成立）。

取值于 $[0,+\infty]$ 的随机时刻 η称为停时，若对所有 $t \geq 0$都有 $\{\eta \leq t\} \in \mathcal{F}_t$。与停时 η 相关联的滤过为 $\mathcal{F}_\eta := \{A \in \mathcal{F}_\infty :\ A \cap \{\eta \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$。于是强马尔可夫性质表明

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{E}_x[Y \circ \theta_\eta \mathbf{1}_{\{\eta<+\infty\}} | \mathcal{F}_\eta] = E_{X_\eta}[Y]\mathbf{1}_{\{\eta<+\infty\}} \tag{2.2}$$

对任意有界的、 $\mathcal{F}_\infty$-可测函数 Y 以及停时 η均成立。根据可选抽样定理，由 (2.1) 可知，对任意停时 η,

$$\forall t \geq 0,\ \forall x \in E, \quad \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta\eta\wedge t} f(X_{\eta\wedge t})] = f(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\eta\wedge t} \mathrm{e}^{-\beta s}\Big(Q[f](X_s) - \beta f(X_s)\Big) ds\right].$$

因此，令 t $\to +\infty$，由有界收敛定理可得所谓的 Dynkin公式（D F)

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta\eta} f(X_\eta)\mathbf{1}_{\{\eta<+\infty\}}] = f(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\eta} \mathrm{e}^{-\beta s}\Big(Q[f](X_s) - \beta f(X_s)\Big) ds\right]. \tag{2.3}$$

如果我们同意采用约定 $\mathrm{e}^{-\eta} f(X_\eta) = 0$ 在 $\{\eta = +\infty\}$ 上，则可以将上述方程改写为

$$\mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta\eta} f(X_\eta)] = f(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\eta} \mathrm{e}^{-\beta s}\Big(Q[f](X_s) - \beta f(X_s)\Big) ds\right].$$

接下来，我们介绍一些常用记号。对于任意 $A \subset E$，记

$$h(A) := \inf\{t \geq 0 :\ X_t \in A\}$$

为固定集合 A 的首次到达时刻。本文将反复使用这一记号，以避免记号过多造成负担。对于任意两个函数 f, $f' \in \mathbb{R}^E$，我们用 $\{f = f'\}$ 表示集合 $\{x \in E :\ f(x) = f'(x)\}$。类似地，集合 $\{f \leq f'\}$、 $\{f \geq f'\}$ 以及其他类似的集合也以同样的方式定义。例如，$\{\mathcal{Q}[f] - \beta f \geq 0\}$ 表示集合 $\{x \in E :\ \mathcal{Q}[f](x) - \beta f(x) \geq 0\}$。我们还用“$f \bullet f'$”表示，其中 $\bullet \in \{>, <, =\}$，意为对于所有 $x \in E$， $f(x) \bullet f'(x)$；若写作“$f \bullet f'$在 G 上”，其中 G 是 E 的子集，则意为对于所有 $x \in G$， $f(x) \bullet f'(x)$。

Th以下有用的引理是 X 的强马尔可夫性质的直接推论 .

引理 2.1。 设 $B \subset C$ 是 E 的两个子集，并令 σ 表示 X 的首次跳跃时刻。假设函数 $g \in \mathbb{R}^E$ 具有以下性质

$$\forall x \in E, \quad g(x) = \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta h(B)} g(X_{h(B)})\mathbf{1}_{\{h(B)<+\infty\}}]. \tag{2.4}$$

然后，

$$\forall x \notin C, \quad g(x) = \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta\sigma} g(X_\sigma)\mathbf{1}_{\{\sigma<+\infty\}}] = \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta h(C)} g(X_{h(C)})\mathbf{1}_{\{h(C)<+\infty\}}].$$

证明。 设 $x \notin C$。注意到

$$h(B) = h(C) + h(B) \circ \theta_{h(C)} \quad \text{and} \quad h(B) = \sigma + h(B) \circ \theta_\sigma \quad \mathbb{P}_x - \text{a.s.},$$

其中，对于任意两个停止时 η，ζ，表达式 $\eta = \zeta + \eta \circ \theta_\zeta$ 表示

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \eta(\omega) = \zeta(\omega) + \eta(\theta_{\zeta(\omega)}(\omega)) = \zeta(\omega) + \eta(\omega_{\zeta(\omega)+\cdot}).$$

我们有

$$\begin{aligned} g(x) &= \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta h(B)} g(X_{h(B)}) \mathbf{1}_{\{h(B)<+\infty\}}] \\ &= \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta\sigma}\mathbf{1}_{\{\sigma<+\infty\}} E_x\left[\mathrm{e}^{-\beta(h(B)\circ\theta_\sigma)} g(X_{h(B)}\circ\theta_\sigma)\mathbf{1}_{\{h(B)\circ\theta_\sigma<+\infty\}}|\mathcal{F}_\sigma\right]\right] \\ &= \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta\sigma}\mathbf{1}_{\{\sigma<+\infty\}} E_{X_\sigma}[\mathrm{e}^{-\beta h(B)} g(X_{h(B)})\mathbf{1}_{\{h(B)<+\infty\}}]] \quad (\text{use (2.2)}) \\ &= \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta\sigma} g(X_\sigma)\mathbf{1}_{\{\sigma<+\infty\}}] \quad (\text{use (2.4)}). \end{aligned}$$

同理，我们得到 $g(x) = \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta h(C)} g(X_{h(C)})\mathbf{1}_{\{h(C)<+\infty\}}]$，由此完成证明。 □

引理 2.2. 设 B、$C \subset E$ 互不相交。定义函数 $g \in \mathbb{R}^E$ 如下

$$\forall x \in E, \quad g(x) \coloneqq R_x(h(B), h(C)).$$

那么，对所有 $x \notin B \cup C$, $\mathcal{Q}[g](x) - \beta g(x) = 0$, $g = \psi$ 在 B 上，且 $g = \phi$ 在 C上。反之，若存在满足前述条件的函数 g^*，则 $g^* = g$。

证明。 $g = \psi$ 在 B 上且 $g = \phi$ 在 C 上这一事实显然成立。由此，我们可以将 g 表示为

$$\forall x \in E, \quad g(x) = \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta\eta'} g(X_{\eta'})] = \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta\eta'} g(X_{\eta'})\mathbf{1}_{\{\eta'<+\infty\}}],$$

其中 $\eta' \coloneqq h(B) \wedge h(C) = h(B \cup C)$。对于任意 $x \notin B \cup C$，应用引理 2.1 可得

$$\begin{aligned} g(x) &= \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta\sigma} g(X_\sigma)\mathbf{1}_{\{\sigma<+\infty\}}] \\ &= g(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^\sigma \mathrm{e}^{-\beta s}\Big(\mathcal{Q}[g](X_s) - \beta g(X_s)\Big) ds\right] \\ &= g(x) + \Big(\mathcal{Q}[g](x) - \beta g(x)\Big)\mathbb{E}_x\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-\beta\sigma}}{\beta}\right], \end{aligned}$$

这意味着所述结论成立，因为 $E_x[\mathrm{e}^{-\beta\sigma}] < 1$ （回想一下， σ 服从速率为 $|Q(x,\ x)|$ 的指数分布，因此 $\sigma > 0\mathbb{P}_x$-几乎处处成立）。

反过来，我们利用 Dynkin 公式 (2.3) 得到

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad g(x) &= \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta h(B)}\psi(X_{h(B)})\mathbf{1}_{\{h(B)\le h(C)\}} + \mathrm{e}^{-\beta h(C)}\phi(X_{h(C)})\mathbf{1}_{\{h(B)>h(C)\}}] \\ &= \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta h(B)} g^*(X_{h(B)})\mathbf{1}_{\{h(B)\le h(C)\}} + \mathrm{e}^{-\beta h(C)} g^*(X_{h(C)})\mathbf{1}_{\{h(B)>h(C)\}}] \\ &= g^*(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^{h(B)\wedge h(C)} \mathrm{e}^{-\beta s}\Big(\mathcal{Q}[g^*](X_s) - \beta g^*(X_s)\Big) ds\right] \\ &= g^*(x) \end{aligned}$$

其中 最后一个等式成立，是因为 $\mathcal{Q}[g^*] - \beta g^* = 0$ 在 $B \cup C$之外。证毕。 f. □

注 2.3. 引理 *2.2* 为我们提供了一种通过求解相应的线性方程组来数值计算函数 $g(x) = R_x(h(B)\ h(C))$ 的方法（例如，使用标准的线性方程组求解器，如 *LU* 分解或迭代方法）。为此，我们定义一个新的生成元 $\mathcal{Q}' = (Q'(x,y))_{x,y\in E}$，定义如下：

$$\forall x \in B\cup C,\ \forall y\in E, \qquad Q'(x,y) \coloneqq 0, \qquad \forall x\notin B\cup C,\ \forall y\in E, \qquad Q'(x,y)\coloneqq Q(x,y).$$

也就是说，我们将 $\mathcal{Q}$ 中与 $B\cup C$ 中的状态相对应的所有行设为 *0*，同时保持其余各行不变。随后可以验证，g 满足线性方程组 $(\mathcal{Q}'-\beta I)g = v$，其中 v 是满足以下条件的向量：对于 $x\in C$，$v(x) = -\beta\phi(x)$；对于 $x\in B$，$v(x) = -\beta\psi(x)$；对于 $x\notin B\cup C$，$v(x) = 0$。由于对于任意 $\beta>0$和任意马尔可夫生成元 $\mathcal{L}$，$\mathcal{L}-\beta I$ 始终可逆，因此可以通过求解该线性方程组，以数值方式计算唯一解 $g = (\mathcal{Q}'-\beta I)^{-1}v$。要了解 $\mathcal{L}-\beta I$ 为何可逆，请考虑随机矩阵

$$P = \frac{1}{L}\mathcal{L} + I, \quad where \quad L = \max_{x\in E}|\mathcal{L}(x,x)| > 0.$$

现在，假设对于某个非零函数 f，有 $\mathcal{L}[f]-\beta f = 0$，那么

$$P[f] = (\frac{\beta}{L}+1)f,$$

这意味着 P 有一个严格大于 *1* 的特征值，这与假设矛盾。

期望收益 $R_x(\cdot,\ \cdot)$ 的以下性质也很有用。

引理 2.4. 设 A、$B\subset E$ 是两个不相交集合，且满足 $A\cap\{\phi=\psi\} = B\cap\{\phi=\psi\} = \emptyset$。则有

$$\forall x\in E, \qquad R_x\Big(h(A\cup\{\phi=\psi\}), h(B\cup\{\phi=\psi\})\Big) = R_x\Big(h(A), h(B\cup\{\phi=\psi\})\Big).$$

证明. 设 $C\coloneqq\{\phi=\psi\}$。我们首先注意到

$$\begin{aligned}
\Big\{h(A\cup C)\le h(B\cup C)\Big\} &= \Big\{h(A)\wedge h(C)\le h(B\cup C)\Big\}\\
&= \Big\{h(A)\le h(B\cup C)\Big\}\cup\Big\{h(C)\le h(B\cup C)\Big\}\\
&= \Big\{h(A)\le h(B\cup C)\Big\}\cup\Big\{h(C) = h(B\cup C)\Big\}\\
&= \underbrace{\Big\{h(A)\le h(B\cup C)\Big\}}_{\coloneqq\Omega_1}\cup\underbrace{\Big(\Big\{h(C)=h(B\cup C)\Big\}\cap\Big\{h(A)>h(B\cup C)\Big\}\Big)}_{\coloneqq\Omega_2}.
\end{aligned}$$

对于所有 $x\in E$,

$$\begin{aligned}
R_x\Big(h(A\cup C), h(B\cup C)\Big) &= \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta h(A\cup C)}\psi(X_{h(A\cup C)})\mathbf{1}_{\Omega_1\cup\Omega_2} + \mathrm{e}^{-\beta h(B\cup C)}\phi(X_{h(B\cup C)})\mathbf{1}_{\Omega_1^c\cap\Omega_2^c}\right]\\
&= \mathbb{E}_x\Big[\mathrm{e}^{-\beta h(A)}\psi(X_{h(A)})\mathbf{1}_{\Omega_1} + \mathrm{e}^{-\beta h(C)}\psi(X_{h(C)})\mathbf{1}_{\Omega_2}\\
&\qquad\qquad + \mathrm{e}^{-\beta h(B\cup C)}\phi(X_{h(B\cup C)})\mathbf{1}_{\Omega_1^c\cap\Omega_2^c}\Big]\\
&= \mathbb{E}_x\ Big[\mathrm{e}^{-\beta h(A)}\psi(X_{h(A)})\mathbf{1}_{\Omega_1} + \mathrm{e}^{-\beta h(C)}\phi(X_{h(C)})\mathbf{1}_{\Omega_2}\\
&\qquad\qquad + \mathrm{e}^{-\beta h(B\cup C)}\phi(X_{h(B\cup C)})\mathbf{1}_{\Omega_1^c\cap\Omega_2^c}\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}_x\Big[\mathrm{e}^{-\beta h(A)}\psi(X_{h(A)})\mathbf{1}_{\Omega_1} + \mathrm{e}^{-\beta h(B\cup C)}\phi(X_{h(B\cup C)})\mathbf{1}_{\Omega_2} \\
&\qquad\qquad + \mathrm{e}^{-\beta h(B\cup C)}\phi(X_{h(B\cup C)})\mathbf{1}_{\Omega_1^c\cap\Omega_2^c}\Big] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta h(A)}\psi(X_{h(A)})\mathbf{1}_{\Omega_1} + \mathrm{e}^{-\beta h(B\cup C)}\phi(X_{h(B\cup C)})\mathbf{1}_{\Omega_1^c}\right] \\
&= R_x\Big(h(A), h(B\cup C)\Big),
\end{aligned}
$$

其中，我们在第三个等式中对 Ω_2 使用了 $\psi(X_{h(C)}) = \phi(X_{h(C)})$，并利用 $\Omega_2 \subset \Omega_1^c$ 在第五个等式中得到 $(\Omega_1^c \cap \Omega_2^c) \cup \Omega_2 = \Omega_1^c$。 □

下面的观察给出了检验一对 (τ, γ) 是否为纳什均衡的充要条件。这是一项标准的验证结果，但为求完整起见，我们仍给出证明。这里给出充分性部分的证明，而必要性部分则可由定理 3.9 和 3.11 推出，见推论 3.12。

定理 2.5. 设有两个不相交集合 A、B，且它们分别与 $\{\phi = \psi\}$ 不相交，并且存在一个满足下列条件的函数 V

$$
\begin{cases}
\forall x \in A, & \mathcal{Q}[\widetilde{V}](x) - \beta\widetilde{V}(x) \le 0 \ \textit{and}\ \widetilde{V}(x) = \psi(x) \\
\forall x \in B, & \mathcal{Q}[\widetilde{V}](x) - \beta\widetilde{V}(x) \ge 0 \ \textit{and}\ \widetilde{V}(x) = \phi(x) \\
\forall x \notin A \cup B \cup \{\phi = \psi\}, & \mathcal{Q}[\widetilde{V}](x) - \beta\widetilde{V}(x) = 0 \\
\forall x \in E, & \psi(x) \le \widetilde{V}(x) \le \phi(x)
\end{cases}
\tag{2.5}
$$

那么 $\Big(h\big(A\cup\{\phi=\psi\}\big), h\big(B\cup\{\phi=\psi\}\big)\Big)$ 构成纳什均衡，且 $\widetilde{V} = V$，其中 V 是价值函数。

证明。 记 $(\tau_A, \tau_B) \coloneqq \Big(h\big(A\cup\{\phi=\psi\}\big), h\big(B\cup\{\phi=\psi\}\big)\Big)$。对不相交集合 A 和 $B\cup\{\phi=\psi\}$ 应用引理 2.2，可得

$$
\widetilde{V}(x) = R_x\Big(h(A), h(B\cup\{\phi=\psi\})\Big) = R_x(\tau_A, \tau_B),
$$

最后一个等式由引理 2.4 得出。对于所有停时 τ 和 $x \in E$，我们有

$$
\begin{aligned}
R_x(\tau, \tau_B) &= \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta\tau}\psi(X_\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\le\tau_B\}} + \mathrm{e}^{-\beta\tau_B}\phi(X_{\tau_B})\mathbf{1}_{\{\tau>\tau_B\}}] \\
&= \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta\tau}\psi(X_\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\le\tau_B\}} + \mathrm{e}^{-\beta\tau_B}\widetilde{V}(X_{\tau_B})\mathbf{1}_{\{\tau>\tau_B\}}] \quad (\text{since } \widetilde{V} = \phi \text{ on } B) \\
&\le \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta\tau}\widetilde{V}(X_\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\le\tau_B\}} + \mathrm{e}^{-\beta\tau_B}\widetilde{V}(X_{\tau_B})\mathbf{1}_{\{\tau>\tau_B\}}] \quad (\text{since } \psi \le \widetilde{V}) \\
&= \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta(\tau\wedge\tau_B)}\widetilde{V}(X_{\tau\wedge\tau_B})] \\
&= \widetilde{V}(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau\wedge\tau_B}\mathrm{e}^{-\beta s}\Big(\mathcal{Q}[\widetilde{V}](X_s) - \beta\widetilde{V}(X_s)\Big)ds\right] \quad (\text{DF}) \\
&\le \widetilde{V}(x) = R_x(\tau_A, \tau_B)
\end{aligned}
$$

因为 $\mathcal{Q}[V] - \beta V \le 0$ 在外部 $B\cup\{\phi=\psi\}$。因此，我们有

$$
\widetilde{V}(x) = R_x(\tau_A, \tau_B) = \sup_\tau R_x(\tau, \tau_B),
$$

类似地，

$$\widetilde{V}(x) = R_x(\tau_A, \tau_B) = \inf_{\gamma} R_x(\tau_A, \gamma).$$

~因此，二元组（τ_A, τ_B）确实是一个纳什均衡（参见（1.2）），因此 $V = V$。 □

3 算法

3.1 单人博弈的前向算法

我们回顾一下，如果函数 $f \in \mathbb{R}^E$ 满足以下条件，则称其为 β-过量函数（相对于 $\mathcal{Q}$）：

$$\forall x \in E, \qquad \mathcal{Q}[f](x) - \beta f(x) \leq 0.$$

众所周知，函数

$$\forall x \in E, \quad V_0(x) \coloneqq \sup_{\tau} \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta\tau}\psi(X_\tau)] \tag{3.1}$$

是支配 ψ 的最小 β-过量函数，显然等于 $\sup_\tau R_x(\tau, +\infty)$。可以使用以下"前向算法"计算该函数，我们根据 Miclo & Villeneuve [2] 对其进行了调整。首先，定义

$$C_1 = \{\mathcal{Q}[\psi] - \beta\psi \leq 0\}, \qquad \eta_1 \coloneqq h(C_1), \qquad V_0^{(1)}(x) \coloneqq \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta\eta_1}\psi(X_{\eta_1})].$$

假设我们已定义 三元组 $(C_n, \eta_n, V_{(n)\,0})$，对于某个 $n \geq 1$，我们定义下一个三元组 $(C_{n+1}, \eta_{n+1}, V_{(n+1)\,0})$ b y

$$C_{n+1} = C_n \cap \{\mathcal{Q}[V_0^{(n)}] - \beta V_0^{(n)} \leq 0\}, \qquad \eta_{n+1} \coloneqq h(C_{n+1}), \tag{3.2}$$

and

$$\forall x \in E, \quad V_0^{(n+1)}(x) \coloneqq \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta\eta_{n+1}}\psi(X_{\eta_{n+1}})]. \tag{3.3}$$

于是我们得到以下结果，其证明见 Miclo & Villeneuve [2]。

定理 3.1. 序列 $(V_0^{(n)})_{n\geq 1}$ 单调递增，并在有限步后逐点收敛到 V_0，且 V_0 是支配 ψ 的最小 β-超额函数。此外，我们有 $\{V_0 = \psi\} = \bigcap_{n\geq 1} C_n$，并且

1. 对所有 $x \in \{V_0 = \psi\}$, $\mathcal{Q}[V_0](x) - \beta V_0(x) \leq 0$。

2. 对所有 $x \notin \{V_0 = \psi\}$, $\mathcal{Q}[V_0](x) - \beta V_0(x) = 0$。

3. 停时 $\eta^* = h(\{V_0 = \psi\})$ 是最优的，即 $\forall x \in E$, $V_0(x) = \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta\eta^*}\psi(X_{\eta^*})]$。

这种方法的一个推论是，[2],中没有提到这一点：

定理 3.2。我们有 $\forall x \in E, \ \mathbb{P}_x(h(\{V_0 = \psi\}) < +\infty) = 1$。

证明。由于 E 是有限的，众所周知，存在常返类 F_1，.....，$F_d (d \geq 1)$，使得

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{P}_x\Big(\exists t_0 \geq 0 \text{ such that } \forall t \geq t_0, \quad X_t \in \bigcup_{i=1}^{d} F_i\Big) = 1,$$

或者等价地，对每个 $x \in E$， $X_t \in \bigcup_{i=1}^{d} F_i$ 最终以概率 1 达到 $\mathbb{P}_x$。定义

$$\forall i = 1, ..., d, \quad W_i \coloneqq \operatorname*{argmax}_{F_i} \psi, \qquad W \coloneqq \bigcup_{i=1}^{d} W_i.$$

我们将用归纳法证明，对所有 $n \geq 1$， $W \subset C_n$。显然， $W \subset \{\mathcal{Q}[\psi] - \beta\psi \leq 0\} = C_1$。假设对某个 $n \geq 1$ 结论成立，我们来证明它对 $n+1$ 也成立。由 (3.2)、(3.3) 可知

$$\forall i = 1, ..., d, \ \forall x \in W_i, \qquad V_0^{(n)}(x) = \psi(x) = \max_{F_i} \psi = \max_{F_i} V_0^{(n)}.$$

对所有 $y \in F_i$, $V_0^{(n)}(y) \leq \max_{F_i} \psi = \psi(x_0) = V^{(n)0}(x_0)$，对某个 $x_0 \in W_i \subset C_n$ 成立（前一个归纳步骤），因为如果从某个 $y \in F_i$ 开始，过程将永远停留在 F_i 中。这意味着

$$\forall i = 1, ..., d, \ \forall x \in W_i, \qquad \mathcal{Q}[V_0^{(n)}](x) - \beta V_0^{(n)}(x) \leq 0,$$

因此 $W \subset C_n \cap \{\mathcal{Q}[V^{(n)0}] - \beta V^{(n)}{}_0 \leq 0\} = C_{n+1}$，归纳法得证。这就得到 $W \subset \bigcap_{n \geq 1} C_n = \{V_0 = \psi\}$。由于 $\forall x \in E, \mathbb{P}_x(h(W) < +\infty) = 1$，我们必有 $\forall x \in E, \mathbb{P}_x(h(\{V_0 = \psi\}) < +\infty) = 1$，如所声称。

□

3.2 第一种情况： $\phi \geq V_0$

下面的结果说明了为什么当 $\phi \geq V_0$ 时，我们可以计算价值函数 V。

定理 3.3。有 $V = V_0$，且命中时 $\Big(h(\{V_0 = \psi\}) \quad h(\{V_0 = \phi\})\Big)$ 构成一个纳什均衡。

证明。这里使用定理 2.5。令 $A \coloneqq \{V_0 = \psi\} \cap \{\phi > \psi\}$，以及 $B \coloneqq \{V_0 = \phi\} \cap \{\phi > \psi\}$。根据定理 3.1，我们有 $\mathcal{Q}[V_0] - \beta V_0 \leq 0$ 在 A 上成立，且 $\mathcal{Q}[V_0] - \beta V_0 = 0$ 在 B 上成立。注意到 A， B 和 $\{\phi = \psi\}$ 两两不相交，并且 $\{V_0 = \psi\} \subset A \cup B \cup \{\phi = \psi\}$。再次根据定理 3.1， $\mathcal{Q}[V_0] - \beta V_0 = 0$ 在 $A \cup B \cup \{\phi = \psi\}$ 之外成立。因此，定理 2.5 的所有条件均得到满足，结论成立。

□

注记3.4。我们必须强调，纳什均衡并不唯一。例如，当 $\phi = V_0 = V$ 时， $\forall \gamma_0 \in \mathcal{M}$，数对 $(h(\{V = \psi\}) \quad \gamma_0)$ 也是一个纳什均衡。事实上，很容易看出

$$\forall x \in E, \ \forall \gamma \in \mathcal{M}, \quad R_x(h(\{V = \psi\}), \gamma) = V_0(x) = V(x).$$

此外， $\forall (x、\tau、\gamma) \in E \times \mathcal{M}^2$、$R_x(\tau、\gamma) \leq V_0(x)$，因为 $\psi \leq \phi = V_0$ 和 V_0 是 β过度的。因此，我们得到

$$\forall \tau, \gamma \in \mathcal{M}, \qquad R_x(\tau, \gamma_0) \leq R_x(h(\{V = \psi\}), \gamma_0) \leq R_x(h(\{V = \psi\}), \gamma),$$

因此 $(h(\{V = \psi\}) \ \gamma_0)$ 构成一个纳什均衡（参见(1.2)）。

定理 3.3 表明，若 $\phi \geq V_0$，则 $V = V_0$，这使我们能够使用前一小节第 3.1 节中介绍的前向算法来计算 $V_0 = V$。由于我们处理的是有限状态空间，以下充分条件有助于我们快速验证 $\phi \geq V_0$（最后两条不要求 E 是有限的）：

- 取最小值、$\phi \geq$取最大值 ψ，因为根据定义 (3.1)，对于任意 $x \in E$，$V_0(x) \leq$取最大值 ψ，
- ψ 是 β-过度函数，因为这意味着 $V_0 = \psi$（回顾定理 3.1，V_0 是支配 ψ的最小 β-过度函数），因此 $V_0 \leq \phi$,
- ϕ 是 β-过度函数，因为这意味着 $\phi \geq V_0$，因为 V_0 是支配 ψ的最小 β-过度函数。

现在我们转而处理一般情形，这是本文的主要目标。

3.3 第二种情形：$\{V_0 > \phi\} \neq \emptyset$

为求出此情形下的价值函数 V，我们按如下步骤进行。令

$$S_1 := \{V_0 > \phi\} \cup \{\phi = \psi\}, \quad \gamma_1 := h(S_1) \qquad \text{and} \quad V_1(x) := \sup_{\tau} R_x(\tau, \gamma_1). \tag{3.4}$$

为了能够计算 V_1，我们将递归地定义一个函数序列，使其经过有限次迭代后递增至 V_1。首先，我们定义

$$D_1^{(1)} := \{\mathcal{Q}[\psi] - \beta\psi \leq 0\} \cap S_1^c, \quad \tau_1^{(1)} := h(D_1^{(1)}) \qquad \text{and} \quad V_1^{(1)}(x) := R_x(\tau_1^{(1)}, \gamma_1). \tag{3.5}$$

接下来，假设对于某个 $n \geq 1$，我们已经定义了 $(D_1^{(n)},\ \tau_1^{(n)},\ V_{(n)\,1})$，则将下一个三元组 $(D_1^{(n+1)},\ \tau_{(n+1)\,1},\ V_{(n+1)\,1})$ 定义为

$$D_1^{(n+1)} := \{\mathcal{Q}[V_1^{(n)}] - \beta V_1^{(n)} \leq 0\} \cap D_1^{(n)}, \quad \tau_1^{(n+1)} := h(D_1^{(n+1)}) \quad \text{and} \quad V_1^{(n+1)}(x) := R_x(\tau_1^{(n+1)}, \gamma_1). \tag{3.6}$$

我们有如下观察

引理 3.5。对于任意满足 $D \cap S_1 = \emptyset$ 的子集 $D \subset E$，都有

$$\forall x \in E, \qquad u_D(x) := R_x(h(D), \gamma_1) \leq V_0(x) \wedge \phi(x).$$

特别地，我们有 $\forall n \geq 1, V_1^{(n)} \leq V_0 \wedge \phi$。

证明。根据 u_D 的定义，我们有 $u_D(x) = \phi(x)$ 在集合 S_1 上，因此 $u_D(x) = \phi(x) < V_0(x)$ 或者 $u_D(x) = \phi(x) = \psi(x) \leq V_0$。对于 $x \notin S_1$，由 Dynkin 公式 (2.3)

$$\begin{aligned}
u_D(x) = R_x(h(D), \gamma_1) &= \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta h(D)}\psi(X_{h(D)})\mathbf{1}_{\{h(D)\leq\gamma_1\}} + \mathrm{e}^{-\beta\gamma_1}\phi(X_{\gamma_1})\mathbf{1}_{\{h(D)>\gamma_1\}}] \\
&\leq \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta h(D)}V_0(X_{h(D)})\mathbf{1}_{\{h(D)\leq\gamma_1\}} + \mathrm{e}^{-\beta\gamma_1}V_0(X_{\gamma_1})\mathbf{1}_{\{h(D)>\gamma_1\}}] \\
&\leq \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta(h(D)\wedge\gamma_1)}V_0(X_{h(D)\wedge\gamma_1})] \\
&\leq V_0(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^{h(D)\wedge\gamma_1} \mathrm{e}^{-\beta s}\Big(\mathcal{Q}[V_0](X_s) - \beta V_0(X_s)\Big)ds\right]
\end{aligned}$$

$$\leq V_0(x)$$

因为 V_0 是 β-过量的。 □

引理 3.6. 我们有 $V_1^{(1)} \geq \psi$，且严格不等式 $V_{(1)\,1} > \psi$ 在该集合之外成立

$$D_1^{(1)} \cup S_1 = \{\mathcal{Q}[\psi] - \beta\psi \leq 0\} \cup \{V_0 > \phi\} \cup \{\phi = \psi\}.$$

证明。 对所有 $x \notin D_1^{(1)} \cup S_1$，我们有

$$\begin{aligned} V_1^{(1)}(x) &\geq \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta(\tau_1^{(1)}\wedge\gamma_1)}\psi(X_{\tau_1^{(1)}\wedge\gamma_1})\right] \\ &= \psi(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_1^{(1)}\wedge\gamma_1} \mathrm{e}^{-\beta s}\Big(\mathcal{Q}[\psi](X_s) - \beta\psi(X_s)\Big)ds\right] \\ &> \psi(x), \end{aligned}$$

因为 $\tau_1^{(1)} \wedge \gamma_1 = h(D_1^{(1)} \cup S_1) > 0$ $\mathbb{P}_x$-几乎必然，且 $\mathcal{Q}[\psi](X_s) - \beta\psi(X_s) > 0$ 在时刻 $\tau_{(1)\,1} \wedge \gamma_1$ 之前。最后，对于 $x \in D_1^{(1)} \cup S_1$，值 $V_1^{(1)}(x)$ 要么是 $\psi(x)$，要么是 $\phi(x)$，二者均不小于 $\psi(x)$，从而得到第二个结论。 □

下一个结果表明函数序列 $(V_1^{(n)})_{n\geq 1}$ 为何重要。

命题 3.7. 以下陈述对所有 $n \geq 1$ 均成立。

1. $\forall x \notin D_1^{(n)} \cup S_1$, $\mathcal{Q}[V_1^{(n)}](x) - \beta V_1^{(n)}(x) = 0$
2. $\psi \leq V_1^{(n)} \leq V_1^{(n+1)} \leq \phi$
3. $V_1^{(n)} = \psi$ *on* $D_1^{(n)}$, $V_1^{(n)} = \phi$ *on* S_1 *and the strict inequality* $V_1^{(n)} > \psi$ *holds outside* $D_1^{(n)} \cup S_1$.

证明。 (i) 只是引理 2.2 的直接应用。(ii) 中的最后一个不等式已在引理 3.5 中证明；又由引理 3.6 可知，只要证明中间那个不等式，即序列 $(V_{(n)\,1})_{n\geq 1}$ 递增，便可自动得到第一个不等式。为此，由于 $D_1^{(n)} \cap S_1 = \emptyset$，所以（回顾定义（3.5）、（3.6）），根据引理 2.2，我们有 $V_1^{(n)} = \phi$ 在 S_1 上成立，且 $V_1^{(n)} = \psi$ 在 $D_1^{(n)}$ 上成立，从而得到（iii）的前半部分。接下来，我们有

$$\begin{aligned} V_1^{(n+1)}(x) &= \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta\tau_1^{(n+1)}}\psi(X_{\tau_1^{(n+1)}})\mathbf{1}_{\{\tau_1^{(n+1)}\leq\gamma_1\}} + \mathrm{e}^{-\beta\gamma_1}\phi(X_{\gamma_1})\mathbf{1}_{\{\tau_1^{(n+1)}>\gamma_1\}}\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta\tau_1^{(n+1)}}V_1^{(n)}(X_{\tau_1^{(n+1)}})\mathbf{1}_{\{\tau_1^{(n+1)}\leq\gamma_1\}} + \mathrm{e}^{-\beta\gamma_1}V_1^{(n)}(X_{\gamma_1})\mathbf{1}_{\{\tau_1^{(n+1)}>\gamma_1\}}\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta(\tau_1^{(n+1)}\wedge\gamma_1)}V_1^{(n)}(X_{\tau_1^{(n+1)}\wedge\gamma_1})\right] \\ &= V_1^{(n)}(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_1^{(n+1)}\wedge\gamma_1} \mathrm{e}^{-\beta s}\left(\mathcal{Q}[V_1^{(n)}](X_s) - \beta V_1^{(n)}(X_s)\right)ds\right] \\ &\geq V_1^{(n)}(x), \end{aligned}$$

在最后一个不等式中，我们注意到

$$(D_1^{(n+1)} \cup S_1)^c = (D_1^{(n)} \cup S_1)^c \cup \big(\{Q[V_1^{(n)}] - \beta V_1^{(n)} > 0\} \cap S_1^c\big), \tag{3.7}$$

因此 $\mathcal{Q}[V^{(n)}] - \beta V_{(n)} \geq 0$ 在外部 $D^{(n+1)} \cup S_1$ 由 (i) 及 $D^{(n+1)}$的定义可得。由此证明了 $(V^{(n)})_{n\geq 1}$ 是递增的。

对于 (iii) 的后半部分，我们采用归纳法。对于 $n = 1$，引理 3.6 给出 $V_1^{(1)} > \psi$ outside $D_1^{(1)} \cup S_1$。现在假设该结论对某个 $n \geq 1$ 成立，并证明它对 $n+1$ 也成立。任取 $x \in D_1^{(n)} \setminus D_1^{(n+1)}$，并定义

$$\tau' \coloneqq \inf\{t \geq 0 : X_t \notin D_1^{(n)} \setminus D_1^{(n+1)}\}.$$

注意，该结论几乎必然成立。应用引理 2.1 可得

$$\begin{aligned} V_1^{(n+1)}(x) &= \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta(\tau_1^{(n+1)}\wedge\gamma_1)} V_1^{(n+1)}(X_{\tau_1^{(n+1)}\wedge\gamma_1})\right] = \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta\tau'} V_1^{(n+1)}(X_{\tau'})\right] \\ &\geq \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta\tau'} V_1^{(n)}(X_{\tau'})\right] \\ &\geq V_1^{(n)}(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau'} \mathrm{e}^{-\beta s}\left(\mathcal{Q}[V_1^{(n)}](X_s) - \beta V_1^{(n)}(X_s)\right) ds\right] \\ &> V_1^{(n)}(x). \end{aligned}$$

因为 $\mathcal{Q}[V_{(n)\,1}] - \beta V_{(n)\,1} > 0$ 在 $D_1^{(n)} \setminus D_1^{(n+1)}$ 上。这表明，对于所有 $x \in D_1^{(n)} \setminus D_1^{(n+1)}$，$V_{(n+1)\,1}(x) > V_1^{(n)}(x) \geq \psi(x)$。我们还有，对于所有 $x \notin D_1^{(n)} \cup S_1$，$V_{(n+1)\,1}(x) \geq V_{(n)\,1}(x) > \psi(x)$，因此对于所有 $x \notin D_1^{(n+1)} \cup S_1$，$V_{(n+1)\,1}(x) > \phi(x)$，归纳证明至此完成。

□

由于集合序列 $(D_1^{(n)})_{n\geq 1}$ 是递减的，且根据定义与 S_1 不相交，而函数序列 $(V_1^{(n)})_{n\geq 1}$ 是递增的，我们可以定义

$$D_1 \coloneqq \bigcap_{n\geq 1} D_1^{(n)}, \quad \tau_1 \coloneqq h(D_1) \qquad \text{and} \qquad V_1^{\infty} \coloneqq \lim_{n\to+\infty} V_1^{(n)}.$$

定理 3.8. 我们有 $V_1 = V_1^{\infty}$，并且对所有 $x \in E$、$V_1(x) = R_x(\tau_1, \gamma_1)$。此外，以下结论成立

1. $V_1 = \psi$ 在 D_1 上，$V_1 = \phi$ 在 S_1 上，且 $V_1 > \psi$ 在 $D_1 \cup S_1$ 外部 2. $\mathcal{Q}[V_1] - \beta V_1 = 0$ 在 $D_1 \cup S_1$ 外部 3. $\mathcal{Q}[V_1] - \beta V_1 \leq 0$ 在 D_1 上

证明. 暂且假设 $V_1 = V_1^{\infty}$。对于 (i)，若 $x \in D_1$ 且 $y \in S_1$，则分别有 $V_{(n)\,1}(x) = \psi(x)$，以及$V_1^{(n)}(y) = \phi(y)$，对所有 $n \geq 1$ 均成立。因此取极限可得 $V_1^{\infty} = \psi$ 在 D_1 上，且 $V_1^{\infty} = \phi$ 在 S_1 上。若 $x \notin D_1 \cup S_1$，则存在一个 $n \geq 1$ 使得 $x \notin D_1^{(n)} \cup S_1$，并由命题 3.7 得到 $V_1^{\infty}(x) \geq V_1^{(n)}(x) > \psi(x)$。

对于 (ii)，若 $x \notin D_1 \cup S_1$，则存在 k 使得 $x \notin D_1^{(n)}$ 对所有 $n \geq k$成立，从而

$$\mathcal{Q}[V_1^{\infty}](x) - \beta V_1^{\infty}(x) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{Q}[V_1^{(n)}](x) - \beta V_1^{(n)}(x) = 0.$$

我们证明最后一个结论 (iii)。如果 $x \in D_1$，那么对所有 $n \geq 1$，$x \in D_1^{(n)}$，这意味着 $Q[V_{(n)\,1}](x) - \beta V_1^{(n)}(x) \leq 0$ 对所有 $n \geq 1$ 均成立。因此，取极限可得

$$\mathcal{Q}[V_1^{\infty}](x) - \beta V_1^{\infty}(x) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{Q}[V_1^{(n)}](x) - \beta V_1^{(n)}(x) \leq 0.$$

最后，我们需要证明 $V_1 = V_1^\infty$。由引理 2.2 可得 $V_1^\infty(x) = R_x(\tau_1, \gamma_1)$。对于任意停时 τ，有

$$\begin{aligned}
\forall x \in E, \quad R_x(\tau, \gamma_1) &= \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta\tau}\psi(X_\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\le\gamma_1\}} + \mathrm{e}^{-\beta\gamma_1}\phi(X_{\gamma_1})\mathbf{1}_{\{\tau>\gamma_1\}}\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta\tau}\psi(X_\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\le\gamma_1\}} + \mathrm{e}^{-\beta\gamma_1}V_1^\infty(X_{\gamma_1})\mathbf{1}_{\{\tau>\gamma_1\}}\right] \\
&\le \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta\tau}V_1^\infty(X_\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\le\gamma_1\}} + \mathrm{e}^{-\beta\gamma_1}V_1^\infty(X_{\gamma_1})\mathbf{1}_{\{\tau>\gamma_1\}}\right] \\
&= V_1^\infty(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau\wedge\gamma_1}\mathrm{e}^{-\beta s}\Big(\mathcal{Q}[V_1^\infty](X_s) - \beta V_1^\infty(X_s)\Big)ds\right] \\
&\le V_1^\infty(x)
\end{aligned}$$

因为 $\mathcal{Q}[V_1^\infty] - \beta V_1^\infty \le 0$ 位于集合 S_1之外。这给出

$$\forall x \in E, \quad V_1^\infty(x) \ge \sup_\tau R_x(\tau, \gamma_1) = V_1(x) \ge R_x(\tau_1, \gamma_1) = V_1^\infty(x),$$

因此 $V_1 = V_1^\infty$。 □

现在进入算法中的关键步骤。到目前为止，我们已经定义了 V_1，它介于 ψ 和 ϕ之间。暂且假设，对于某个 $k \ge 1$，已经得到三元组 (D_k, S_k, V_k)，我们按如下方式归纳定义三元组 $(D_{k+1}, S_{k+1}, V_{k+1})$。令

$$S_{k+1} = \Big(S_k \cap \{\mathcal{Q}[V_k] - \beta V_k \ge 0\}\Big) \cup \{\phi = \psi\}, \qquad \gamma_{k+1} \coloneqq h(S_{k+1}), \tag{3.8}$$

并定义

$$\forall x \in E, \quad V_{k+1}(x) \coloneqq \sup_\tau R_x(\tau, \gamma_{k+1}).$$

对于满足以下条件的 V_1，集合 D_{k+1} 随后通过上述相同的步骤得到

$$\forall x \in E, \quad V_{k+1}(x) = R_x(\tau_{k+1}, \gamma_{k+1}), \qquad \text{where} \quad \tau_{k+1} = h(D_{k+1}). \tag{3.9}$$

例如，让我们演示计算函数 V_2的第二步 $k = 2$。对于函数 V_1，我们只需采用类似的方法。最初，令 $S_2 \coloneqq (S_1 \cap \{\mathcal{Q}[V_1] - \beta V_1 \ge 0\}) \cup \{\phi = \psi\}$，并定义

$$D_2^{(1)} \coloneqq \{\mathcal{Q}[\psi] - \beta\psi \le 0\} \cap S_2^c, \qquad \tau_2^{(1)} \coloneqq h(D_2^{(1)}), \qquad V_2^{(1)}(x) \coloneqq R_x(\tau_2^{(1)}, \gamma_2).$$

接下来，假设我们已为某个 $n \ge 1$ 定义了 $(D_2^{(n)}, \tau_2^{(n)}, V_{(n)\,2})$，则定义下一个三元组 $(D_2^{(n+1)}, \tau_{(n+1)\,2}, V_{(n+1)\,2})$ 如下:

$$D_2^{(n+1)} \coloneqq \{\mathcal{Q}[V_2^{(n)}] - \beta V_2^{(n)} \le 0\} \cap D_2^{(n)}, \qquad \tau_2^{(n+1)} = h(D_2^{(n+1)}),$$

and

$$\forall x \in E, \quad V_2^{(n+1)}(x) \coloneqq R_x(\tau_2^{(n+1)}, \gamma_2).$$

最后，集合 D_2 作为极限 $D_2 \coloneqq \bigcap_{n\geq 1} D_2^{(n)}$ 得到。仿照定理 3.8 的证明，我们可以证明 $V_2(x) = R_x(\tau_2, \gamma_2) = \lim_{n\to+\infty} V^{(n)\,2}(x)$，并且定理 3.8 中的每个结论对于 V_2 （将所有下标 1 替换为 2 ）也成立。对 $k = 3,4,\ldots$ 重复同样的步骤，即可得到序列 $(D_k, S_k, V_k)_{k\geq 1}$。为完整起见，我们陈述序列 $(V_k)_{k\geq 1}$ 的以下一般性质。

定理 3.9。 以下命题对所有 $k \geq 1$均成立

1. $\forall x \in E$, $V_k(x) = R_x(\tau_k, \gamma_k)$*2.* $V_k = \psi$ 在 D_k上， $V_k = \phi$ 在 S_k 上，且在 $D_k \cup S_k$ 之外（注意 $D_k \cap S_k = \emptyset$）。*3.* $\mathcal{Q}[V_k] - \beta V_k \leq 0$ 在 D_k 上，且在 $D_k \cup S_k$之外 *4.* $\psi \leq V_{k+1} \leq V_k \leq \phi$*5.* $(D_k)_{k\geq 1}$ 递增，且 $(S_k)_{k\geq 1}$ 递减

证明。 前面命题 3.7 和定理 3.8 的证明稍作调整（除了下标外几乎无需改动），便可轻易得到前三个命题以及对任意 $k \geq 1$ 均成立的不等式 $\psi \leq V_k$ 。在 (v) 中，根据定义 (3.8)，我们已有 $(S_k)_{k\geq 1}$ 递减，因此其一半已得到证明。现在证明 (iv) 中的 $V_{k+1} \leq V_k$；一旦证明了这一点，不等式 $V_{k+1} \leq V_k \leq V_1 \leq V_0 \wedge \phi \leq \phi$便可立即由引理 3.6 得出。事实上，根据引理 2.2， $S_{k+1} \subset S_k$ 推出 $V_{k+1} = V_k = \phi$ 在 S_{k+1} 上成立（回想一下 $S_{k+1} = \Big(S_k \cap \{\mathcal{Q}[V_k] - \beta V_k \geq 0\}\Big) \cup \{\phi = \psi\}$）。(iii) 项说明 $\mathcal{Q}[V_k] - \beta V_k \leq 0$ 在 S_{k+1}之外成立。因此，对所有 $x \in E$,

$$\begin{aligned} V_{k+1}(x) = R_x(\tau_{k+1}, \gamma_{k+1}) &\leq E_x[\mathrm{e}^{-\beta(\tau_{k+1}\wedge\gamma_{k+1})} V_k(X_{\tau_{k+1}\wedge\gamma_{k+1}})] \\ &= V_k(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_{k+1}\wedge\gamma_{k+1}} \mathrm{e}^{-\beta s}\Big(\mathcal{Q}[V_k](X_s) - \beta V_k(X_s)\Big) ds\right] \\ &\leq V_k(x) \end{aligned}$$

因为在 $\tau_{k+1} \wedge \gamma_{k+1} = h(D_{k+1} \cup S_{k+1})$ 之前，过程仍处于 S_{k+1} 之外，这意味着 $\mathcal{Q}[V_k](X_s) - \beta V_k(X_s) \leq 0$。现在只剩下 (v) 的前半部分。令 $x \in D_k$ （它与 $S_k \supset \{\phi = \psi\}$ 不相交），我们有 $\phi(x) > V_k(x) = \psi(x)$，这意味着 $\phi(x) > V_{k+1}(x) = \psi(x)$，因为 $V_{k+1}(x) \leq V_k(x)$。由此可得 $x \in D_{k+1}$ ，因为如果 $x \notin D_{k+1}$，那么要么 $V_{k+1}(x) > \psi(x)$（若 $x \notin D_k \cup S_k$），要么 $V_{k+1}(x) = \phi(x)$（若 $x \in S_k$），这就产生了矛盾。 □

定理 3.9 使我们能够如下定义三元组 $(D_\infty, S_\infty, V_\infty)$

$$D_\infty = \bigcup_{k\geq 1} D_k, \qquad S_\infty \coloneqq \bigcap_{k\geq 1} S_k, \qquad V_\infty(x) = \lim_{k\to+\infty} V_k(x) = \inf_{k\geq 1} V_k(x),$$

并令

$$\tau_{\psi,\phi} \coloneqq h(\{\phi = \psi\}), \qquad \tau_\infty \coloneqq h(D_\infty), \qquad \gamma_\infty \coloneqq h(S_\infty).$$

注记 3.10。 从序列的定义$(D_k, S_k, V_k)_{k\geq 0}$ （见(3.8) ）可知，若存在一个整数$N \geq 1$使得 $S_{N+1} = S_N$，那么必然有 $V_{N+1} = V_N$ 和 $D_{N+1} = D_N$。因此，该序列趋于稳定：

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad S_{N+k} = S_N = S_\infty, \quad V_{N+k} = V_N = V_\infty, \quad D_{N+k} = D_N = D_\infty \tag{3.10}$$

这意味着，序列 $(D_k, S_k, V_k)_{k\geq 0}$ 经过有限次迭代后会变为稳定序列。如果 N 是满足 $S_{N+1} = S_N$的最小整数，那么我们有如下界（回顾一下，对所有 $k \geq 1$，都有 $\{\phi = \psi\} \subset S_k$ ）

$$N \leq \min\{|E| - |\{\phi = \psi\}|, |S_1|\} = \min\{|E| - |\{\phi = \psi\}|, |\{V_0 > \phi\} \cup \{\phi = \psi\}|\}, \tag{3.11}$$

其中 $|\cdot|$ 表示基数。特别地，我们有 $N < |E|$，这意味着达到 V_∞ 所需的迭代次数严格少于 E中的状态数。

下一个结果是本文的主要结果

定理 3.11. 数对 $(\tau_\infty \wedge \tau_{\psi,\phi}, \gamma_\infty)$ 构成一个纳什均衡，且 $V_\infty = V$。（注意，$\tau_\infty \wedge \tau_{\psi,\phi}$ 是停时$h(\{\phi = \psi\} \cup D_\infty)$。）此外，在 S_∞ 上有 $V_\infty = \phi$ （这并不意味着 $S_\infty = \{V = \phi\}$），并且在 D_∞上有 $V_\infty = \psi < \phi$。

证明。 由前面的注记可知，存在 $N < |E|$ 使得对所有 $k \geq 1$，都有 $S_{N+k} = S_N = S_\infty$。因此，我们有

$$\Big(S_N \cap \{\phi > \psi\} \cap \{\mathcal{Q}[V_N] - \beta V_N \geq 0\}\Big) \cup \{\phi = \psi\} = S_N,$$

这意味着 $S_N \cap \{\phi > \psi\} \subset \{\mathcal{Q}[V_N] - \beta V_N \geq 0\}$。我们还有，对所有 $k \geq 1$，都有 $D_{N+k} = D_N$；根据定理 3.9 (iii)，可得在 $D_N \cup S_N$之外有 $\mathcal{Q}[V_N] - \beta[V_N] = 0$，并且在 D_N上有 $\mathcal{Q}[V_N] - \beta[V_N] \leq 0$。对

$$A = D_\infty = D_N, \qquad B = S_N \cap \{\phi > \psi\} = S_\infty \cap \{\phi > \psi\},$$

应用引理 2.4 和定理 2.5，可得 $V_\infty(x) = R_x(\tau_\infty, \gamma_\infty) = R_x(\tau_\infty \wedge \tau_{\psi,\phi}, \gamma_\infty)$，并且有序对 $(\tau_\infty \wedge \tau_{\psi,\phi}, \gamma_\infty)$ 也是一个纳什均衡。因此， $V_\infty = V$，这就是所需结果。最后一个结论由 $V_\infty(x) = R_x(\tau_\infty \wedge \tau_{\psi,\phi}, \gamma_\infty)$ 的表达式推出。 □

由定理 3.9 和 3.11 可得如下结果，其中取 $A = D_\infty$ 和 $B = S_\infty \cap \{\phi > \psi\}$。

推论 3.12 （定理 2.5 的必要性部分）。 若 V 是价值函数，则存在不相交集合 A 和B，使得 $A \cap \{\phi = \psi\} = B \cap \{\phi = \psi\} = \emptyset$ 满足（2.5）。

3.4 辅助结果与讨论

3.4.1 关于集合 $S_1 = \{V_0 > \phi\} \cup \{\phi = \psi\}$ 的选取。

在上述算法中，我们可能有 $S_\infty \neq \{V = \phi\}$，但 $D_\infty \cup \{\phi = \psi\} = \{V = \psi\}$ 始终成立。若~要恢复集合 $\{V = \phi\}$，则应将 (3.4) 中的集合 S_1 替换为集合 $S_1 := \{V_0 \geq \phi\}$ ，然后

按照上一节的步骤得到一个新的递减序列 $(V_k)_{k\geq 1}$。此前结果的证明保持不变。注意，$S_1 \subset S_1$，事实上 $S_1 \setminus S_1 = \{V_0 = \phi\} \cap \{\phi > \psi\}$。特别是，如果 $\{V_0 = \phi\} = \emptyset$，那么 $S_1 = S_1$，该过程会得到相同的序列 $(V_k)_{k\geq 1}$。更准确地说，我们有

命题 3.13。 设 $(D_k, \widetilde{\tau}_k, S_k, \widetilde{\gamma}_k, V_k)_{k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ 为将上一小节的所有步骤重新执行一遍，并用 $S_1 = \{V_0 \geq \phi\} \supset S_1$ 替换 S_1 后得到的五元组序列。那么，定理 *3.9* 和 *3.11* 中的所有结论对 $(D_k, \widetilde{\tau}_k, S_k, \widetilde{\gamma}_k, V_k)_{k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ 均成立。此外，我们有

1. $\widetilde{D}_\infty = D_\infty$, *and* $\widetilde{D}_\infty \cup \{\phi = \psi\} = \{V = \psi\}$. *In particular,* $\widetilde{\tau}_\infty = h(\widetilde{D}_\infty) = h(D_\infty) = \tau_\infty$.
2. $\widetilde{V}_\infty = V_\infty = V$
3. $\widetilde{V}_k < \phi$ *outside* $\widetilde{S}_k$ *for all* $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$
4. $\psi < \widetilde{V}_k < \phi$ *outside* $\widetilde{D}_k \cup \widetilde{S}_k$ *for all* $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$
5. $\widetilde{S}_\infty = \{V = \phi\}$

证明。 由构造及上一小节中的证明可直接得到 (i)，(ii)，因此我们只用归纳法证明最后三项。考虑函数 V_1，我们知道 $V_1 \leq V_0 \wedge \phi$。现在，$V_1 = \phi$ 在 S_1 上成立，而在 S_1 外 $V_1 \leq V_0 < \phi$，因此 (iii) 对 $k = 1$ 成立。假设对某个 $k \geq 1$ 该结论成立，我们来证明对 $k+1$ 也成立。事实上，令

$$\Delta \coloneqq \inf\{t \geq 0 : X_t \notin \widetilde{S}_k \setminus \widetilde{S}_{k+1}\},$$

并注意到，对所有 $x \in S_k \setminus S_{k+1}$,

$$\widetilde{\tau}_{k+1} \wedge \widetilde{\gamma}_{k+1} = h(\widetilde{D}_{k+1} \cup \widetilde{S}_{k+1}) \geq h\Big((\widetilde{S}_k)^c \cup \widetilde{S}_{k+1}\Big) = \Delta > 0 \quad \mathbb{P}_x - \text{a.s.} \tag{3.12}$$

因为 $D_{k+1} \subset D_k \subset (S_k)^c$（回忆一下，$D_k$ 和 S_k 互不相交）。利用引理 2.1 以及 $V_{k+1} \leq V_k$，这一事实，我们对所有 $x \in S_k \setminus S_{k+1}$ 都有，

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}_{k+1}(x) = R_x(\widetilde{\tau}_{k+1}, \widetilde{\gamma}_{k+1}) &= \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta(\widetilde{\tau}_{k+1}\wedge\widetilde{\gamma}_{k+1})}\widetilde{V}_{k+1}(X_{\widetilde{\tau}_{k+1}\wedge\widetilde{\gamma}_{k+1}})] \\
&= \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta\Delta}\widetilde{V}_{k+1}(X_\Delta)] \\
&\leq \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta\Delta}\widetilde{V}_k(X_\Delta)] \\
&= V_k(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^\Delta \mathrm{e}^{-\beta s}\Big(\mathcal{Q}[V_k](X_s) - \beta V_k(X_s)\Big)ds\right] \\
&< V_k(x) \\
&\leq \phi(x).
\end{aligned}$$

因为 $\mathcal{Q}[V_k] - \beta V_k < 0$ 在 $S_k \setminus S_{k+1}$ 上。但 $V_{k+1} \leq V_k < \phi$ 在 S_k 之外，因此 $V_{k+1} < \phi$ 在 S_{k+1} 之外。将此取极限，我们得到 $V_\infty < \phi$ 在 S_∞ 之外。现在，(iv) 可由 (iii) 以及定理 3.9 (ii) 的类似结论推出。最后，对于 (v)，由于 $V_\infty > \psi$ 在 $D_\infty \cup S_\infty$ 之外，不难看出 $S_\infty = \{V = \phi\}$。 □

尽管在实际中很少遇到 $\{V_0 \geq \phi\} \neq \{V_0 > \phi\}$ 这种情况，但包含关系 $S_1 \subset S_1$ 保证了对于所有 $k \in \mathbb{N}$，都有 $S_k \subset S_k$（见下文定理 3.14）。因此，与使用 S_1 初始化相比，使用 S_1 初始化算法预计能够更快收敛。例如，考虑 $\phi > \psi$ 且 $|S_1| = 1$，而 $|S_1|$ 大于或等于 100 的情况。在这种情况下，使用 S_1 初始化只需一次迭代（因为 S_2 要么为空，要么等于 S_1），显然更高效。此外，当 $S_1 \neq S_1$ 时，两种方法可能会得到不同的集合 S_∞ 和 S_∞，从而可能产生多个纳什均衡。第 4.3 节给出了说明 $S_\infty = S_\infty$ 和 $S_\infty \neq S_\infty$ 两种情况的示例。如果我们的主要目标是计算价值函数 V，那么使用 S_1 初始化始终能得到更快、更高效的算法。如果我们的目标是找出临界集 $\{V = \psi\}$ 和 $\{V = \phi\}$，则建议使用 S_1 初始化。或者，我们可以使用 S_1 初始化，计算 V，然后检查满足 $V(x) = \phi(x)$ 的 $x \in E$。

定理 3.14. 对所有 $k \in \mathbb{N}$，我们有 $S_k \subset S_k$，$D_k \subset D_k$ 和 $V_k \geq V_k$。

定理 3.14 的证明可由以下引理推出。

引理 3.15. 对所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $\widetilde{D}_1^{(n)} \subset D_1^{(n)}$，且 $V_1^{(n)} \leq \widetilde{V}_1^{(n)}$。因此 $V_1 \leq \widetilde{V}_1$ 和 $\widetilde{D}_1 \subset D_1$。

证明. 对于 $n = 1$，回顾一下，$\widetilde{\tau}^{(1)} = h(\widetilde{D}_1^{(1)})$，$\tau_1^{(1)} = h(D_1^{(1)})$，$\gamma_1 = h(S_1)$ 和 $\widetilde{\gamma}_1 = h(\widetilde{S}_1)$，其中

$$\widetilde{D}_1^{(1)} = \{\mathcal{Q}[\psi] - \beta\psi \leq 0\} \setminus \widetilde{S}_1 \subset \{\mathcal{Q}[\psi] - \beta\psi \leq 0\} \setminus S_1 = D_1^{(1)},$$

并且

$$\forall x \in E, \quad V_1^{(1)}(x) = R_x(\tau_1^{(1)}, \gamma_1), \quad \widetilde{V}_1^{(1)}(x) = R_x(\widetilde{\tau}_1^{(1)}, \widetilde{\gamma}_1).$$

我们将证明 $\widetilde{V}_1^{(1)} \geq V^{(1)}$。事实上，对于 $y \in \widetilde{S}_1$，我们有 $\widetilde{V}_1^{(1)}(y) = \phi(y) \geq V_1^{(1)}(y)$；而对于 $x \in \widetilde{D}_1^{(1)}$，我们有 $V^{(1)}(x) = \psi(x) = \widetilde{V}_1^{(1)}(x)$。剩下需要证明的是，在集合 $\widetilde{D}_1^{(1)} \cup \widetilde{S}_1 = D_1^{(1)} \cup \widetilde{S}_1$（因此 $\widetilde{\tau}_1^{(1)} \wedge \widetilde{\gamma}_1 = \tau_1^{(1)} \wedge \widetilde{\gamma}_1$）之外有 $\widetilde{V}_1^{(1)} \geq V_1^{(1)}$。考虑一个 $x \notin D_1^{(1)} \cup \widetilde{S}_1$。然后，应用引理 2.1 可得

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}_1^{(1)}(x) &= \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta(\widetilde{\tau}_1^{(1)} \wedge \widetilde{\gamma}_1)} \widetilde{V}_1^{(1)}(X_{\widetilde{\tau}_1^{(1)} \wedge \widetilde{\gamma}_1})] \\
&= \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta(\tau_1^{(1)} \wedge \widetilde{\gamma}_1)} \widetilde{V}_1^{(1)}(X_{\tau_1^{(1)} \wedge \widetilde{\gamma}_1})] \\
&\geq \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta(\tau_1^{(1)} \wedge \widetilde{\gamma}_1)} V_1^{(1)}(X_{\tau_1^{(1)} \wedge \widetilde{\gamma}_1})] \quad (\text{since } \widetilde{V}_1^{(1)} \geq V_1^{(1)} \text{ on } D_1^{(1)} \cup \widetilde{S}_1) \\
&= V_1^{(1)}(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_1^{(1)} \wedge \widetilde{\gamma}_1} \mathrm{e}^{-\beta u}\Big(\mathcal{Q}[V_1^{(1)}](X_u) - \beta V_1^{(1)}(X_u)\Big) du\right] \\
&= V_1^{(1)}(x),
\end{aligned}$$

因为 $\mathcal{Q}[V_1^{(1)}] - \beta V_1^{(1)} = 0$ 外部 $D_1^{(1)} \cup S_1 \subset D_1^{(1)} \cup \widetilde{S}_1$。这就证明了 $\widetilde{V}^{(1)} \geq V^{(1)}$。

假设 引理中的断言对 n 成立，我们证明它对 $n+1$ 也成立。首先，回顾

$$\widetilde{D}_1^{(n+1)} = \{\mathcal{Q}[\widetilde{V}_1^{(n)}] - \beta\widetilde{V}_1^{(n)} \leq 0\} \cap \widetilde{D}_1^{(n)}, \quad D_1^{(n+1)} = \{\mathcal{Q}[V_1^{(n)}] - \beta V_1^{(n)} \leq 0\} \cap D_1^{(n)}.$$

令 $x \in \widetilde{D}_1^{(n+1)}$。于是 $x \in \widetilde{D}_1^{(n)} \subset D_1^{(n)}$，从而 $\widetilde{V}_1^{(n)}(x) = \psi(x) = V^{(n)}(x)$。我们还有

$$0 \geq \mathcal{Q}[\widetilde{V}_1^{(n)}](x) - \beta\widetilde{V}_1^{(n)}(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{y\neq x} Q(x,y)\widetilde{V}_1^{(n)}(y) + (Q(x,x)-\beta)\widetilde{V}_1^{(n)}(x)\\
&= \sum_{y\neq x} Q(x,y)\widetilde{V}_1^{(n)}(y) + (Q(x,x)-\beta)\psi(x)\\
&\geq \sum_{y\neq x} Q(x,y)V_1^{(n)}(y) + (Q(x,x)-\beta)V_1^{(n)}(x)\\
&= \mathcal{Q}[V_1^{(n)}](x) - \beta V_1^{(n)}(x),
\end{aligned}
$$

这表明 $x \in \{\mathcal{Q}[V_{(n}{}^{1}{}_{]} - \beta V_1^{(n)} \leq 0\})$，从而 $\widetilde{D}_1^{(n+1)} \subset D_1^{(n+1)}$。$\widetilde{V}_{(n+1)\,1} \geq V_{(n+1)\,1}$ 的证明与情形 $n=1$ 类似。首先考虑 $x \in D_1^{(n+1)}$，则 $\widetilde{V}_1^{(n+1)}(x) \geq \psi(x) = V_{(n+1)\,1}(x)$（$\widetilde{V}_1^{(n)} \geq \psi$ 的证明在引理 3.6和命题 3.7中类似）。若 $x \in \widetilde{S}_1$，则 $\widetilde{V}_1^{(n+1)}(x) = \phi(x) \geq V_1^{(n+1)}(x)$。尚需证明 $\widetilde{V}_1^{(n+1)} \geq V_{(n+1)\,1}$ 在 $D_1^{(n+1)} \cup \widetilde{S}_1$之外成立。考虑某一个 $x \notin D_1^{(n+1)} \cup \widetilde{S}_1$，我们有

$$
\widetilde{\tau}_1^{(n+1)} \wedge \widetilde{\gamma}_1 \geq \tau_1^{(n+1)} \wedge \widetilde{\gamma}_1 \quad \mathbb{P}_x - \text{a.s.}
$$

应用引理 2.1 可得

$$
\begin{aligned}
\widetilde{V}_1^{(n+1)}(x) &= \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta(\widetilde{\tau}_1^{(n+1)}\wedge\widetilde{\gamma}_1)}\widetilde{V}_1^{(n+1)}(X_{\widetilde{\tau}_1^{(n+1)}\wedge\widetilde{\gamma}_1})]\\
&= \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta(\tau_1^{(n+1)}\wedge\widetilde{\gamma}_1)}\widetilde{V}_1^{(n+1)}(X_{\tau_1^{(n+1)}\wedge\widetilde{\gamma}_1})]\\
&\geq \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-\beta(\tau_1^{(n+1)}\wedge\widetilde{\gamma}_1)}V_1^{(n+1)}(X_{\tau_1^{(n+1)}\wedge\widetilde{\gamma}_1})] \quad (\text{since } \widetilde{V}_1^{(n+1)} \geq V_1^{(n+1)} \text{ on } D_1^{(n+1)} \cup \widetilde{S}_1)\\
&= V_1^{(n+1)}(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_1^{(n+1)}\wedge\widetilde{\gamma}_1} \mathrm{e}^{-\beta u}\Big(\mathcal{Q}[V_1^{(n+1)}](X_u) - \beta V_1^{(n+1)}(X_u)\Big)du\right]\\
&= V_1^{(n+1)}(x),
\end{aligned}
$$

因为 $\mathcal{Q}[V_{(n+1}{}^{1}{}_{]} - \beta V_1^{(n+1)} = 0)$ 位于 $D_1^{(n+1)} \cup S_1 \subset D_1^{(n+1)} \cup \widetilde{S}_1$ 之外。这证明了 $\widetilde{V}_{(n+1)\,1} \geq V_{(n+1)\,1}$，从而完成归纳步骤。

因此，我们已证明 $\widetilde{V}_1^{(n)} \geq V_1^{(n)}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立。令 $n \to +\infty$，我们得出 $\widetilde{V}_1 \geq V_1$ 与$\sim D_1 \subset D_1$。

□

~**引理 3.16.** 我们有 $S_2 \subset S_2$。

证明。 我们首先回顾

$$
S_2 = \{\mathcal{Q}[V_1] - \beta V_1 \geq 0\} \cap S_1, \quad \widetilde{S}_2 = \{\mathcal{Q}[\widetilde{V}_1] - \beta\widetilde{V}_1 \geq 0\} \cap \widetilde{S}_1 \tag{3.13}
$$

~ ~令 $x \in S_2$。则 $x \in S_1 \subset S_1$，从而 $V_1(x) = \phi(x) = V_1(x)$。此外，我们有

$$
\begin{aligned}
0 \leq \mathcal{Q}[V_1](x) - \beta V_1(x) &= \sum_{y\neq x} Q(x,y)V_1(y) + (Q(x,x)-\beta)V_1(x)\\
&= \sum_{y\neq x} Q(x,y)V_1(y) + (Q(x,x)-\beta)\phi(x)\\
&\leq \sum_{y\neq x} Q(x,y)\widetilde{V}_1(y) + (Q(x,x)-\beta)\widetilde{V}_1(x) \quad (\text{since } V_1 \leq \widetilde{V}_1 \text{ in Lemma 3.15})
\end{aligned}
$$

$$= \mathcal{Q}[\widetilde{V}_1](x) - \beta\widetilde{V}_1(x).$$

因此，$x \in \{\mathcal{Q}[V_1] - \beta V_1 \geq 0\}$，结论得证。 □

定理 *3.14* 的证明。 证明现通过归纳法完成，采用与前述引理中相同的思路和技巧：首先证明 $D_2 \subset D_2$ 和 $V_2 \geq V_2$，然后以类似方式继续证明 $k = 3$，4，.....。 □

3.4.2 在 $\{V_0 > \phi\} \neq \emptyset$ 的情形下构造含有多个纳什均衡的示例的方法。

在命题 3.13 中，我们证明了 $V_\infty = V_\infty = V$，因此

$$\forall x \in E, \quad R_x(\tau_\infty \wedge \tau_{\phi,\psi}, \gamma_\infty) = V_\infty(x) = \widetilde{V}_\infty(x) = R_x(\tau_\infty \wedge \tau_{\phi,\psi}, \widetilde{\gamma}_\infty), \tag{3.14}$$

并且，两个数对 $(\tau_\infty \wedge \tau_{\psi,\ \phi},\ \gamma_\infty)$ 和 $(\tau_\infty \wedge \tau_{\psi,\ \phi},\ \widetilde{\gamma}_\infty)$ 均为纳什均衡。注意，$\widetilde{\gamma}_\infty \leq \gamma_\infty$，因为 $S_\infty \subset S_\infty$，且当包含关系为严格包含时，两个停时不同。尽管我们有包含关系 $S_\infty \subset S_\infty$ 为严格包含的示例，从而得到多个纳什均衡，但人们仍可能想知道，是否存在一种系统的方法来构造其他停时 γ，同时保留 $(\tau_\infty \wedge \tau_{\psi,\ \phi},\ \gamma)$ 是纳什均衡这一性质。本小节旨在探讨这一问题。首先，我们不借助命题 3.13，直观地说明多个纳什均衡存在的可能性。接下来，我们提出一种构造性方法，以展示存在多个纳什均衡的示例。

我们先从第一个目标开始。为方便记号，令 $D \coloneqq D_\infty$，且 $S \coloneqq S_\infty \cap \{\phi > \psi\}$，并注意到 $D \cap S = \emptyset$。于是得到

$$\forall x \in E, \quad V_\infty(x) = R_x(\tau_\infty \wedge \tau_{\phi,\psi}, \gamma_\infty) = R_x\Big(h(D \cup \{\phi = \psi\}), h(S \cup \{\phi = \psi\})\Big).$$

根据定理 3.11，我们知道 $V_\infty \leq \phi$，其中 $V_\infty = \phi$ 在 $S_\infty = S \cup \{\phi = \psi\}$ 上，且 $V = \psi < \phi$ 在 D上。然而，在集合 $D \cup S \cup \{\phi = \psi\}$之外，我们没有更多信息来判断不等式 $V_\infty \leq \phi$ 是否为严格不等式。因此，或许存在一个非空集合 O，与 $D \cup S \cup \{\phi = \psi\}$不相交，使得 $V_\infty = \phi$ 在 O上。如果是这种情况，我们声称以下函数

$$\forall x \in E, \quad V_O(x) \coloneqq R_x\Big(h(D \cup \{\phi = \psi\}), h(O \cup S \cup \{\phi = \psi\})\Big),$$

与 V_∞ 重合。事实上，令 $\Delta_1 \coloneqq h(D \cup \{\phi = \psi\})$ 且 $\Delta_2 \coloneqq h(O \cup S \cup \{\phi = \psi\})$，则 $\forall x \in E$,

$$\begin{aligned}
V_O(x) &= \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta\Delta_1}\psi(X_{\Delta_1})\mathbf{1}_{\{\Delta_1 \leq \Delta_2\}} + \mathrm{e}^{-\beta\Delta_2}\phi(X_{\Delta_2})\mathbf{1}_{\{\Delta_1 > \Delta_2\}}\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta\Delta_1}V_\infty(X_{\Delta_1})\mathbf{1}_{\{\Delta_1 \leq \Delta_2\}} + \mathrm{e}^{-\beta\Delta_2}V_\infty(X_{\Delta_2})\mathbf{1}_{\{\Delta_1 > \Delta_2\}}\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\beta(\Delta_1 \wedge \Delta_2)}V_\infty(X_{\Delta_1 \wedge \Delta_2})\right] \\
&= V_\infty(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\Delta_1 \wedge \Delta_2} \mathrm{e}^{-\beta s}\Big(\mathcal{Q}[V_\infty](X_s) - \beta V_\infty(X_s)\Big)ds\right] \\
&= V_\infty(x)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

因为 $\mathcal{Q}[V_\infty]-\beta V_\infty=0$ 在 $D\cup S\cup O\cup\{\phi=\psi\}$ 之外。接下来，我们声称，任何与 $D\cup S\cup\{\phi=\psi\}$ 不相交且满足对所有 $x\in O$ 都有 $V_\infty(x)=\phi$ 的集合 O，都会产生一个纳什均衡对

$$\Big(h(D\cup\{\phi=\psi\}),h(O\cup S\cup\{\phi=\psi\})\Big).$$

此处我们强调，一对停止时 $(\tau,\ \gamma)$ 可能给出正确的价值函数，即 $V(x)=R_x(\tau,\ \gamma)$，但不一定构成纳什均衡。为验证这对 $\Big(h(D\cup\{\phi=\psi\})\ h(O\cup S\cup\{\phi=\psi\})\Big)$确实构成纳什均衡，我们注意到

$$\forall\gamma,\qquad R_x(h(D\cup\{\phi=\psi\}),\gamma)\geq V_\infty(x)=V_O(x)=R_x\Big(h(D\cup\{\phi=\psi\}),h(O\cup S\cup\{\phi=\psi\})\Big),$$

并且由 $\psi\leq V_\infty, V_\infty=\phi$ 在 $O\cup S\cup\{\phi=\psi\}$ 上，应用 Dynkin公式可得

$$\begin{aligned}\forall\tau,\qquad R_x(\tau,O\cup S\cup\{\phi=\psi\})&\leq V_\infty(x)+\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau\wedge h(O\cup S\cup\{\phi=\psi\})}\mathrm{e}^{-\beta s}\Big(\mathcal{Q}[V_\infty](X_s)-\beta V_\infty(X_s)\Big)ds\right]\\&\leq V_\infty(x)=V_O(x),\end{aligned}$$

这就证明了该结论。

~现在假设 $|\{V=\phi\}\setminus S_\infty|\geq 1$。（注意，$\{V=\phi\}=S_\infty$，但在这里我们有意忽略~ S_∞ 的构造以及命题 3.13）。若取任意非空子集 $O\subset\{V=\phi\}\setminus S_\infty$，那么根据前面的分析，可得 $V_O=V_\infty$，并且这对

$$\Big(h(D\cup\{\phi=\psi\}),h(O\cup S\cup\{\phi=\psi\})\Big)$$

构成一个纳什均衡。特别是，这表明在这种情况下存在多个纳什均衡，从而推翻了“纳什均衡可能是唯一的”这一看似合理的期望。

简要回到命题 3.13，假设

$$|\{V=\phi\}\setminus S_\infty|=|\widetilde{S}_\infty\setminus S_\infty|\geq 2.$$

~那么，事实上，我们可以选择 O，使得 $h(O\cup S\cup\{\phi=\psi\})$ 与 γ_∞和 $\widetilde{\gamma}_\infty$都不同。确实，若 $|S_\infty\setminus S_\infty|\leq 1$, ~~，那么任意子集 $O\subset S_\infty\setminus S_\infty$要么为空，要么等于 $S_\infty\setminus S_\infty$；在这两种情况下，所得停时分别与 γ_∞ 或 $\widetilde{\gamma}_\infty$重合。

前面的讨论仅凭直觉说明了多个纳什均衡存在的可能性，而未借助命题 3.13，因为直到现在，满足必要条件的集合 O 是否存在仍是个谜。一般来说，可能出现 $S_\infty=S_\infty$，尽管 $S_1\neq S_1$。因此，不可能存在这样的 O。所以，我们需要一种更具体的方法，在不必知道上文讨论的~集合 $S_\infty\setminus S_\infty$ 的情况下，构造具有多个纳什均衡的示例。以下命题给出了这样一种构造。

命题3.17。 设 V 是对偶 (ψ,ϕ) 的价值函数，且 I 是 $\{\psi<V<\phi\}$的子集，其中假设 $\{\psi<V<\phi\}\neq\emptyset$。我们定义函数 ϕ_c 如下：

$$\forall x\in I,\quad \phi_c(x):=V(x)\qquad and\qquad \forall x\notin I,\quad \phi_c(x):=\phi(x),$$

并设 V_c 是在新的期望收益 $R_x^c(,\cdot)$ 下对应对偶 (ψ, ϕ_c) 的价值函数（在(1.1)中用 ϕ_c 替换 ϕ）。则有 $V_c = V$。

证明。 根据推论 3.12 中定理 2.5 的必要性部分， V 满足条件 (2.5)，但根据构造， $V \le \phi_c$ ，因此可以用 $\psi \le V \le \phi_c$替换 (2.5) 中的最后一个条件。但根据定理 2.5，这又意味着 $V = V_c$ 。

□

考虑 $\phi > \psi$ 的情形。应用定理 2.5，我们可以轻易验证，对于具有函数 (ψ, ϕ_c) 的博弈，两个对 ($h(\{V = \psi\})$ $h(\{V = \phi\})$) 和 $h(\{V = \psi\})$ $h(\{V = \phi\} \cup I)$) 都是纳什均衡。另请注意， $\{V = \phi\} \cup I$ ={$V = \phi_c$}。

3.4.3 计算方面。

我们讨论算法的计算方面。通过仔细考察计算函数 V_k 时涉及的每次迭代，我们总是从集合 $D_k^{(1)} = \{\mathcal{Q}[\psi] - \beta\psi \le 0\} \setminus S_k$ 开始，并不断迭代缩小该集合，直到无法再进一步缩小（最终可能得到空集）。因此，计算 V_k 所需的步数至多为集合 $\{\mathcal{Q}[\psi] - \beta\psi \le 0\}$的基数。具体来说，我们所说的“迭代”是指序列 $(V_k)_{k\ge0}$中的索引k，而“步数”是指对于每个 $n = 1, 2, \dots$，序列 $V_{(n)\,k}$ 中的每次更新。

此外，序列 $(S_k)_{k\ge1}$ 从 $S_1 = \{V_0 > \phi\} \cup \{\phi = \psi\}$开始递减。值得注意的是，根据定义，集合 $\{\phi = \psi\}$ 始终包含在该序列的每个成员中。因此，我们“仅”在缩小与 $\{\phi = \psi\}$不相交的集合$\sim\{V_0 > \phi\}$。如果改用 $S_1 = \{V_0 \ge \phi\}$ ，我们缩小的集合将是$\sim S_1 \setminus \{\phi = \psi\} = \{V \ge \phi > \psi\}$。总之，如果 $\{V_0 > \phi\} \ne \emptyset$，那么计算 V 所需的所有迭代中，步骤总数的上界为

$$|\{\mathcal{Q}[\psi] - \beta\psi \le 0\}| \times \big(|\{V_0 > \phi\}| + 1\big) \le |E|^2,$$

其中， $|\cdot|$表示基数， $|\{V_0 > \phi\}| + 1$是迭代次数的上界。上述不等式中额外的加 1，是因为至少需要 $|\{\mathcal{Q}[\psi] - \beta\psi \le 0\}|$次迭代来计算 V_0，然后检查 $\{V_0 > \phi\} \ne \emptyset$是否成立。例如，考虑 ϕ 严格大于 ψ的情形，即对于某个 $x_0 \in E$，有 $\{\phi = \psi\} = \emptyset$ 和$\{V_0 > \phi\} = \{x_0\}$ 。那么函数 V_1 满足 $\psi \le V_1 \le \phi$ ，并且

$$\forall x \in D_1, \quad \mathcal{Q}[V_1](x) - \beta V_1(x) \le 0, \qquad \forall x \notin D_1 \cup \{x_0\}, \quad \mathcal{Q}[V_1](x) - \beta V_1(x) = 0.$$

我们声称 V_1 是价值函数，即 $V_1 = V$。为此，注意到 $\mathcal{Q}[V_1](x_0) - \beta V_1(x_0) > 0$ 必须成立。若不然，则 V_1 将是 β-过度函数，并且支配 ψ，进而意味着 $V_0 \le V_1 \le V_0$（回想一下， V_0 是支配 ψ 的最小 β-过度函数），从而得出结论 $V_0 = V_1$。这是不可能的，因为 $V_0(x_0) > \phi(x_0) = V_1(x_0)$。应用定理 2.5，我们得出 $V = V_1$。因此，在这种情况下，计算 $V_1 = V$ 所需的步数少于 $2 \times |\{\mathcal{Q}[\psi] - \beta\psi \le 0\}| \le 2|E|$ 。

最后，以下结果表明，如果玩家选择纳什均衡 ($h(\{V = \psi\})$ $h(\{V = \phi\})$) 作为策略，那么博弈总会在有限时间内由上确界玩家终止；若非如此，则由下确界玩家终止。

定理 3.18。对于所有 $x \in E$, $\mathbb{P}_x(h(\{V = \psi\}) < +\infty) = 1$。

证明。由于 $\psi \le V \le V_0$ 根据定理 3.9 和 3.11，我们有 $\{V_0 = \psi\} \subset \{V = \psi\}$。根据定理 3.2，对于所有 $x \in E$, $\mathbb{P}_x(h(\{V = \psi\}) < +\infty)$，必须有 $= 1$。 □

4 示例

本节中展示的所有示例及相应的 Python 代码，均可通过以下链接获取:
https://github.com/nhatthangle/Markov-game。

4.1 示例 1 : $\{0, ..., N-1\}$ 上具有反射端点的生灭过程 s

在此示例中，我们考虑状态空间为 $\{0, 1, ..., N-1\}$ 且具有反射端点的生灭过程。其生成元为

$$\forall i \in \{1, ..., N-2\}, \quad Q(i, i+1) = Q(0, 1) = \lambda, \quad Q(i, i-1) = Q(N-1, N-2) = r$$

4.1.1 子例 1.1。

我们首先考虑第一个子例，其中两个函数 ψ 和 ϕ 由下式给出

$$\forall x \in \{0, ..., N-1\}, \quad \psi(x) = 10 + x/4 + 3\cos(x) + 2\sin(x/2), \qquad \text{and} \quad \phi = \psi + 3$$

对于以下选择

$$N = 50, \quad \beta = 0.1, \quad \lambda = 40, \quad r = 28,$$

我们在图 1 中得到如下所示的函数演化过程，其中算法在计算出 $V_3 = V$后停止。注意，除了 V_0之外，所有函数 $(V_k)_{k\ge 0}$ 均位于 ψ 和 ϕ之间。

$(D_k)_{k=1,2,3}$ 和 $(S_k)_{k=1,2,3}$ 的演化由下式给出

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{31, 38, 44, 49\},\\
D_2 &= \{6, 7, 13, 18, 19, 25, 26, 31, 32, 38, 44, 49\},\\
D_3 &= \{0, 6, 7, 13, 18, 19, 25, 26, 31, 32, 38, 44, 49\},\\
S_1 &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 20, 21,\\
&\qquad\qquad 22, 23, 24, 27, 28, 29, 33, 34, 35, 36, 40, 41, 46, 47, 48\},\\
S_2 &= \{2, 3, 4, 9, 10, 11, 15, 16, 21, 22, 23, 28, 34, 35, 41, 47\},\\
S_3 &= \{3, 9, 10, 16, 22, 23, 28, 34, 35, 41, 47\}.
\end{aligned}$$

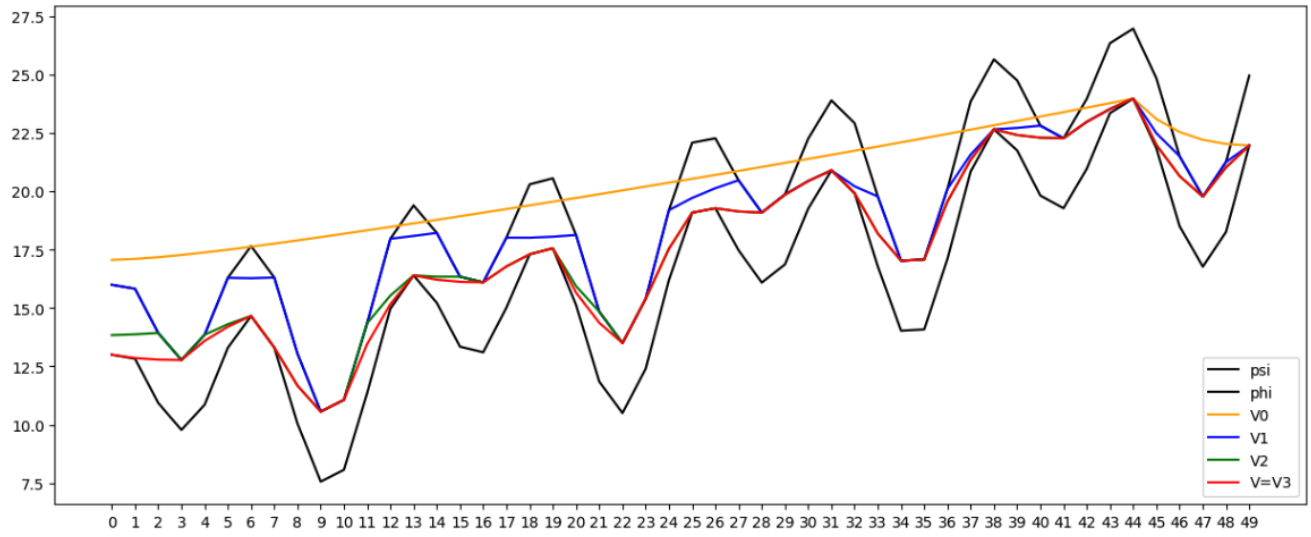


图 1：$(V_k)_{k\geq 0}$ （此处 $V_3 = V$）的演化

4.1.2 子例1.2。

在这个子示例中，我们保留上述所有 N, β, λ 和 r，并稍微修改函数 ϕ，使得 $\{\phi = \psi\} \neq \emptyset$:

$$\forall x \in \{0, ..., 49\}, \quad \phi(x) = \psi(x) + 4(\sin(x/5) + 0.7)_+$$

函数 $(V_k)_{k\geq 0}$ 的演化如图2所示。注意，序列 $(V_k)_{k\geq 0}$ 仍位于“夹层” $\psi \leq \phi$ 中，但 V_0 除外。在这种情况下，$(D_k)_{k=1,\ 2,\ 3,\ 4}$ 和 $(S_k)_{k=1,\ 2,\ 3,\ 4}$ 的演化由下式给出

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{20, 21, 22, 23, 24, 27, 31, 38, 44, 49\},\\
D_2 &= \{13, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 27, 31, 32, 38, 44, 49\},\\
D_3 &= D_4 = \{6, 13, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 27, 31, 32, 38, 44, 49\},\\
S_1 &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23,\\
&\qquad 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 33, 34, 35, 46, 47, 48\}\\
S_2 &= \{0, 2, 3, 4, 9, 10, 15, 16, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 34, 35, 47, 48\},\\
S_3 &= \{3, 9, 10, 16, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 34, 35, 47, 48\},\\
S_4 &= \{9, 10, 16, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 34, 35, 47, 48\}.
\end{aligned}$$

4.1.3 子例1.3。

在这个子示例中，我们选取 $N = 50$, $\beta = 0.05$, $\lambda = 14$, $r = 12$。函数 ψ 和 ϕ 定义为

$$\psi(x) = (-25 + x)_+, \qquad \phi(x) = \psi(x) + 5, \quad \forall x \in \{0, 1, ..., N-1\}$$

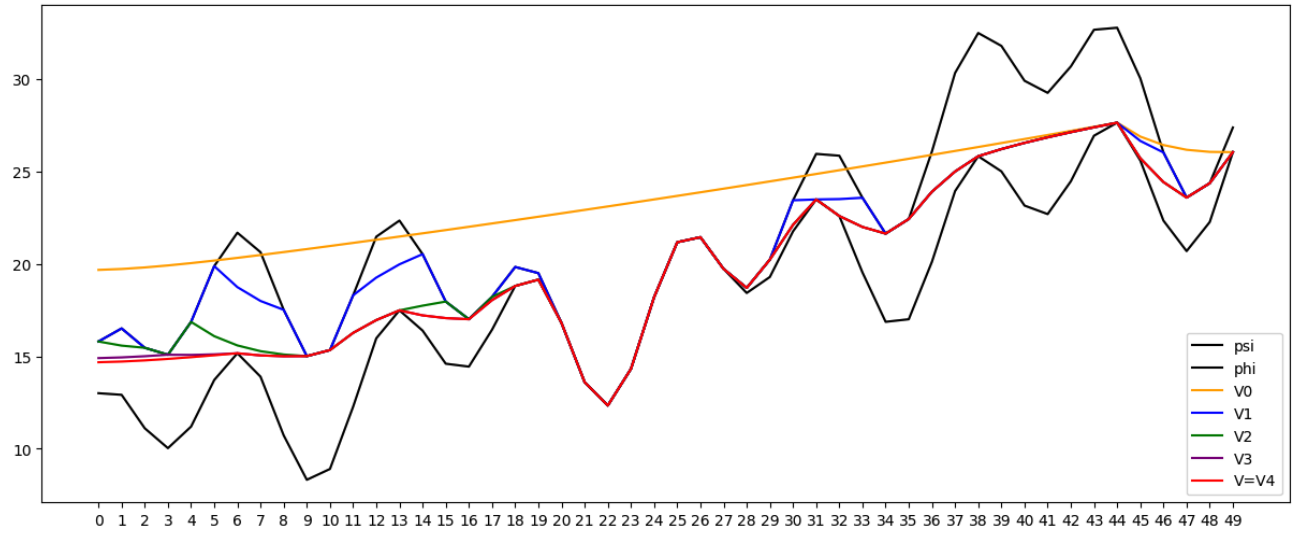


图2：$(V_k)_{k\geq 0}$ 的演化（此处为 $V_4 = V$）

在这种情况下，$(D_k)_{k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6}$ 和 $(S_k)_{k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6}$ 的演化由下式给出

$$D_k = \{49\},\ k = 1,2,3,4,5,6,\ S_1 = \{0,1,2,...,39\},\ S_k = \{25,26,...,40-k\},\ k = 2,3,4,5,6.$$

4.2 示例 2：格点上的随机游走

在这个例子中，我们考虑在具有 $N \times N$ 个节点的格点 $\mathcal{L}$ 上进行随机游走。这是一个由点组成的网格 (x, y)，其中 $x, y \in \{0, 1, ..., N-1\}$。给定 $r > 0$，我们定义生成元 $\mathcal{Q}$ 如下：对于任意 $1 \leq i, j \leq N-1$,

$$Q((i,j),(i+1,j)) = Q((i,j),(i-1,j)) = Q((i,j),(i,j+1)) = Q((i,j),(i,j-1)) = r,$$

对于所有 $1 \leq j \leq N-1$,

$$Q((j,0),(j+1,0)) = Q((j,0),(j-1,0)) = Q((j,1),(j,0)) = r,$$
$$Q((j,N-1),(j+1,N-1)) = Q((j,N-1),(j-1,N-1)) = Q((j,N-1),(j,N-2)) = r,$$

其余转移的概率均为 0。显然，直线 $x = 0$ 和 $x = N-1$ 是吸收的，也就是说，当过程到达直线 $x = 0$ 或 $x = N-1$时，就会永远停留在那里。为了使其能够在 Python 这样的编程语言中运行，我们引入格点与集合 $\{0, 1, ..., N^2-1\}$ 之间如下的双射

$$\forall (i,j) \in \mathcal{L},\quad p((i,j)) := i + jN.$$

这样，我们将 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ 视为集合 $\{0, ..., N^2-1\}$ 上的一个过程。

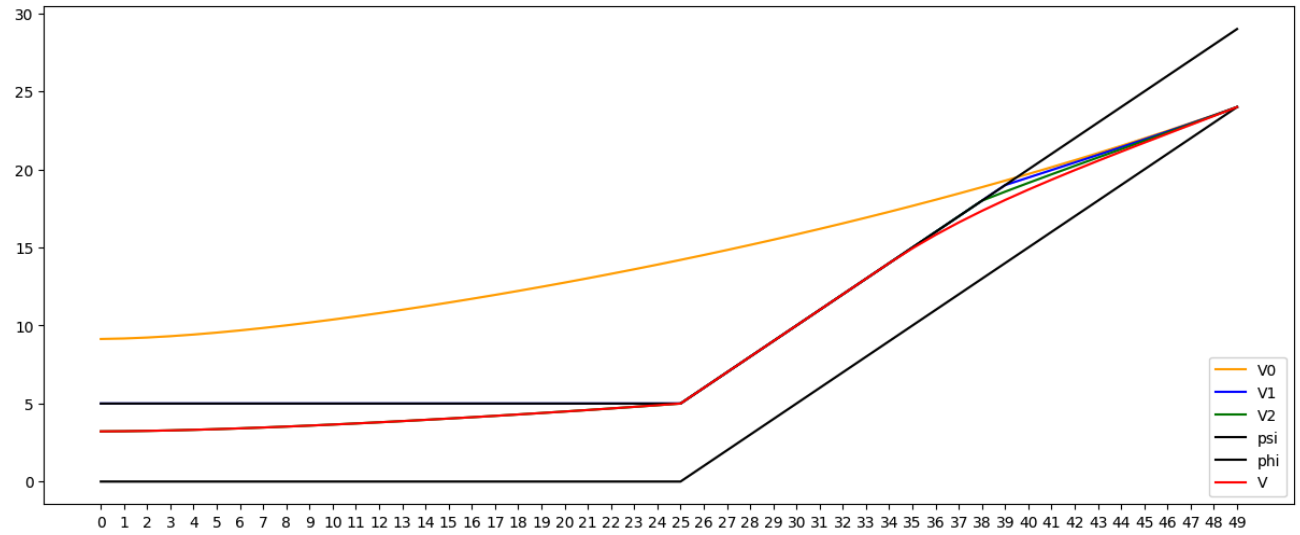


图3：$(V_k)_{k\geq 0}$ 的演化（此处为 $V_6 = V$）

.

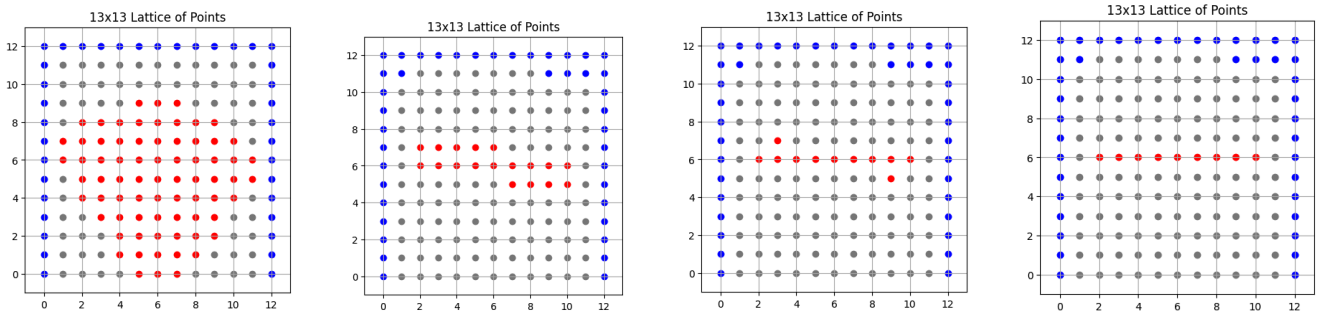


图4：停止区域$(D_k, S_k)_{k=1,2,3,4}$ 从左到右的演化。

4.2.1 子例2.1。

定义函数 ψ 和 ϕ 如下

$$\psi(x) = (x - N^2/2)_+, \quad \phi(x) = \psi(x) + \delta, \quad \forall x = 0, 1, ..., N^2 - 1,$$

其中 $\delta > 0$ 是一个固定常数。注意，过程越接近直线 $y = N - 1$ （对应于接近 $N^2 - 1$的值）， ψ和 ϕ就越大。

在下文中，我们选取 $N = 13$、 $\beta = 0.05$、 $r = 5$ 和 $\delta = 8$。该算法给出集合$(D_k)_{k\geq 1}$ （蓝色点）和$(S_k)_{k\geq 1}$（红色）的如下演化，并在计算出 V_4后停止。鉴于$\{0, 1, ..., N^2 - 1\}$上的函数，我们可以在下方图 5中绘制 ψ, ϕ（以相连直线表示）、 V_0 以及一维中的价值函数 V。

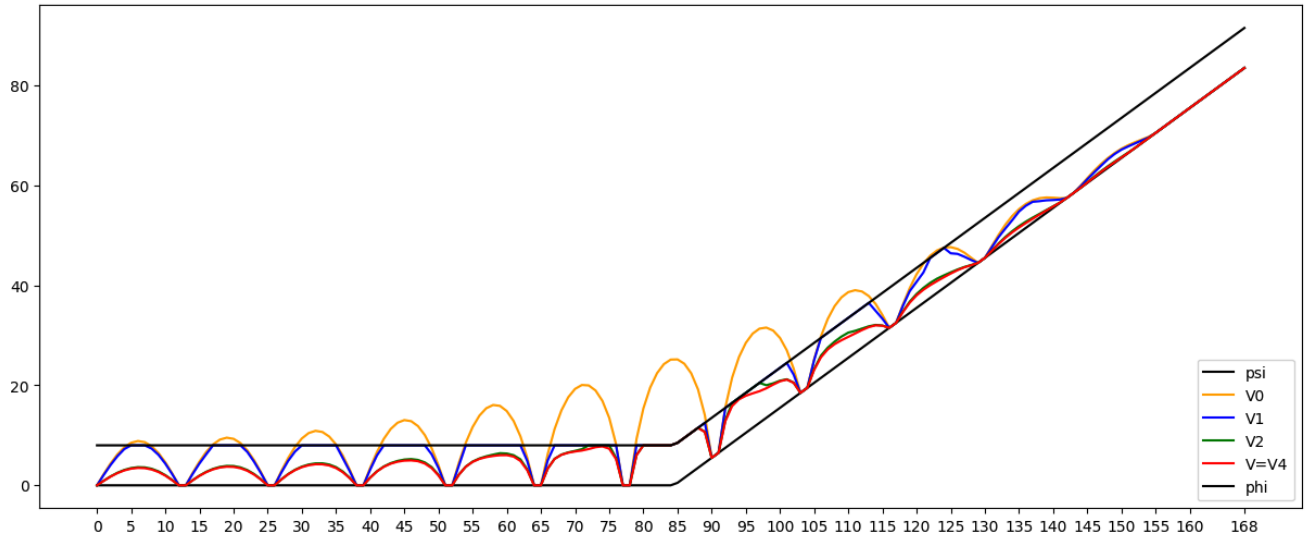


图 5： ψ、 ϕ、 V_0、 V上的函数 $\{0, 1, ..., 168\}$ $(N = 13)$。

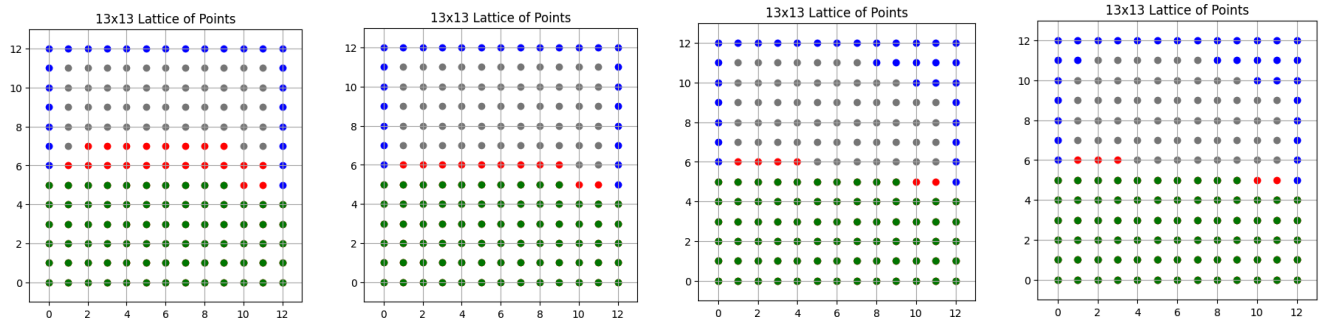


图 6：$(D_k$、 $S_k)_{k\geq 1}$的演化

4.2.2 子示例 2.2。

现在我们考虑第二个子示例，其中函数 ϕ 被略微修改，使得集合 $\{\phi = \psi\} \neq \emptyset$。具体而言，我们设定 $\phi = 1.5\,\psi$ ，并将速率参数增大到 $r = 500$ 和 $\beta = 1$。集合$(D_k, S_k)_{k\geq 1}$ 的演化如图 6所示。集合 $\{\phi = \psi\}$ 用绿色点表示。 $S_k \setminus \{\phi = \psi\}$的元素用红色点表示，因此 S_k 是三角形与正方形的并集。最后，集合 D_k 用蓝色点描绘。

算法在计算出 V_4 后终止，该值对应最终的价值函数。在一维情况下，我们可以观察 $(V_k)_{k\geq 0}$ 的演化，如图 7 所示。图中省略了函数 V_3 ，因为它的曲线与其他曲线大幅重叠，难以在视觉上区分。

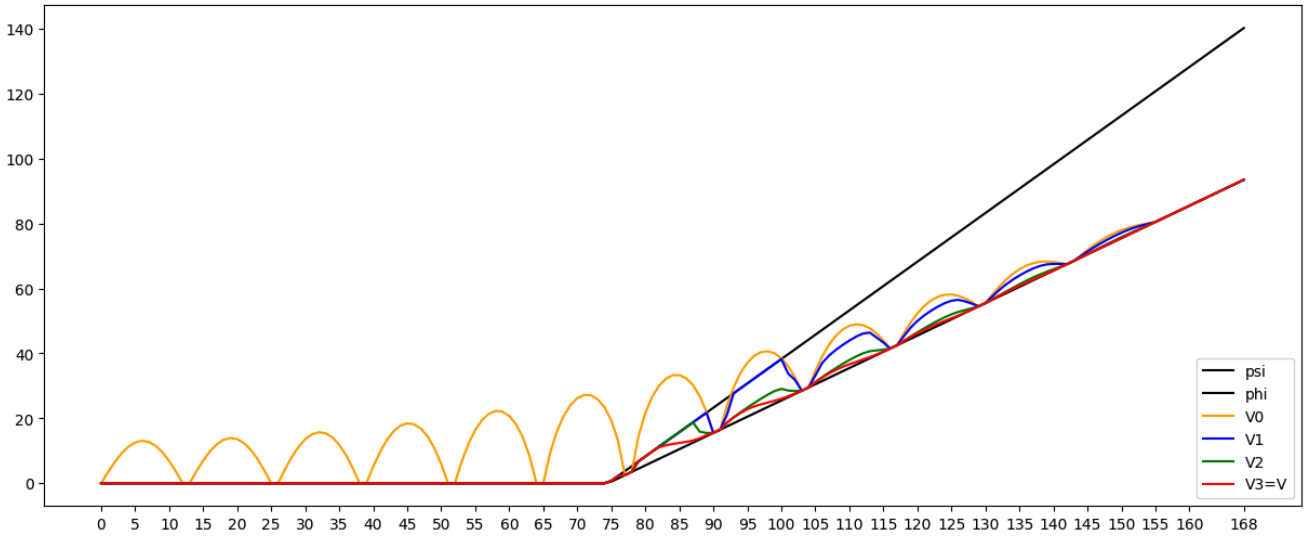


图 7：函数 ψ，ϕ，V_0，V_1，V_2，$V_4 = V$在 $\{0, 1, ..., 168\}$ $(N = 13)$

~4.3 $S_\infty \neq S_\infty$ 和 $S_\infty = S_\infty$时的示例

本节中我们考虑 $E = \{0, 1, 2, 3\}$，$\beta = 0.2$，生成元 $\mathcal{Q}$ 给定为

$$\forall i = 0, 1, 2, \quad Q(i, i+1) = 1, \quad \text{and} \quad \forall i = 1, 2, 3, \quad Q(i, i-1) = 1.$$

~4.3.1 $S_\infty = S_\infty$时的情形。

在本小节中，ψ 的选取满足

$$\psi(0) = 10,\ \psi(1) = 4,\ \psi(2) = 2,\ \psi(3) = 1.$$

然后我们计算 V_0，并按如下方式选择 ϕ

$$V_0(0) = 10, \quad V_0(1) = 6.8106, \quad V_0(2) = 4.9834, \quad V_0(3) = 4.1528,$$
$$\phi(0) = 12, \quad \phi(1) = 8, \quad \phi(2) = V_0(2), \quad \phi(3) = 1.$$

~在这种情况下，$S_1 = \{3\}$ 和 $S_1 = \{2, 3\}$，且极限集合相等 $S_\infty = S_\infty = \{3\}$。图 8a 展示了这一情况。

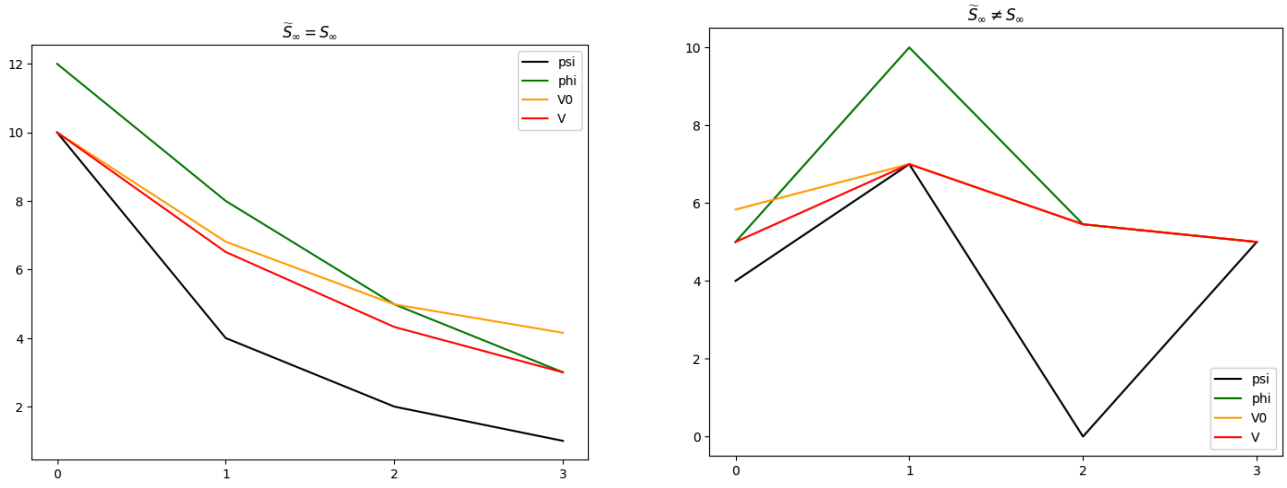
~4.3.2 当 $S_\infty \neq S_\infty$ 时的情况。

在本小节中，ψ 的选择满足

$$\psi(0) = 4,\ \psi(1) = 7,\ \psi(2) = 0,\ \psi(3) = 5.$$

然后我们计算 V_0 并选择 ϕ 如下

$$V_0(0) = 35/6, \quad V_0(1) = 7, \quad V_0(2) = 60/11, \quad V_0(3) = 5,$$



（a）当 $\widetilde{S}_\infty = S_\infty$ （b）当 $\widetilde{S}_\infty \neq S_\infty$

图 8：不同的初始化可能会导致不同的纳什均衡。

$$\phi(0) = 5, \quad \phi(1) = 10, \quad \phi(2) = V_0(2) = 60/11, \quad \phi(3) = V_0(3) = 5.$$

~ ~在这种情况下，$S_1 = \{0, 3\}$ 和 $S_1 = \{0, 2, 3\}$，极限集合为 $S_\infty = \{0, 3\}$，而 $S_\infty = \{0, 2, 3\}$。该示例如图 8b 所示。

参考文献

[1] Irle, A.（2006）。求解最优停止问题的前向算法。 *J. Appl. Probab.* **43**（1），102–113。[2] Miclo, L. 和 Villeneuve, S.（2021）。关于连续时间马尔可夫链停止问题的前向算法。 *J.Appl. Probab.* **58**（4），1043–1063。[3] Ekström, E.和 Villeneuve, S.（2006）。最优停止博弈的价值。 *Ann. Appl. Probab.* **16**（3），1576–1596。[4] Ekström, E.和 Peskir, G.（2008）。马尔可夫过程的最优停止博弈。 *SIAM J. Control Optim.* **47**（2），684–702。[5] Peskir, G.（2009）。最优停止博弈与纳什均衡。 *Theory Probab. Appl.* **53**（3），558–571。[6] Peskir, G. 和 Shiryaev, A.（2006）。 *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems*。比克豪泽出版社，巴塞尔。[7] Shiryaev, A. N.（2008）。 *Optimal Stopping Rules*。施普林格，柏林。（1978年第3版重印。）
[8] Bensoussan, A.和 Friedman, A.（1974）。带停时的非线性变分不等式与微分博弈。 *J. Funct.Anal.* **16**，305–352。[9] Bensoussan, A. 和 Friedman, A.（1977）。带停时和自由边界问题的非零和随机微分博弈。 *Trans. Amer. Math. Soc.* **231**。[10] Friedman, A.（1975）。带停时和变分不等式的随机微分博弈。载于 *Proc. Internat. Congr.Math. (Vancouver, 1974)*，第2卷，339–342。

[11] Karatzas, I. 和 Wang, H. (2001)。有界变差控制与Dynkin博弈之间的联系。载于 *Optimal Control and Partial Differential Equations (in honour of Prof. A. Bensoussan)*。

[12] Norris, J. R.(1997)。 *Markov Chains*。剑桥大学出版社，剑桥。